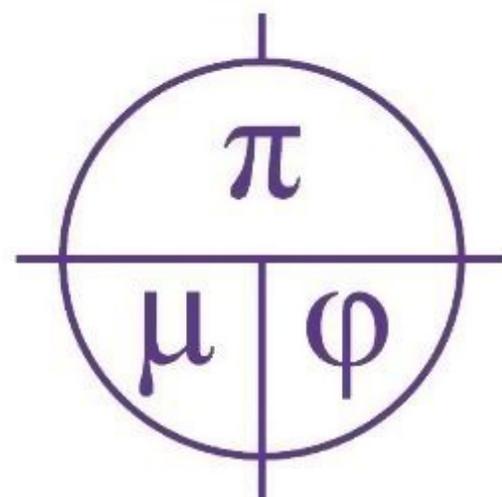


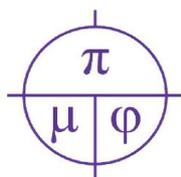
# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

# APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



**2023. Том 55, № 4**





## Прикладная математика & Физика

2023. Том 55, № 4

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук (1.1.1 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.2 – дифференциальные уравнения и математическая физика, 1.3.8 – физика конденсированного состояния). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

**Заместители главного редактора:**

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;  
Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;  
Ашпыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;  
Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;  
Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;  
Вирченко Ю. П., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;  
Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;  
Дабагов С. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;  
Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;  
Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;  
Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;  
Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;  
Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;  
Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;  
Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;  
Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;  
Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;  
Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;  
Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;  
Савотченко С. Е., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;  
Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;  
Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;  
Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;  
Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;  
Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко  
Корректурa Т.В. Мезера  
Компьютерная верстка: О. В. Чернова  
Оригинал-макет: В. Б. Васильев  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 9,2  
Дата выхода 30.12.2023.  
Оригинал-макет подготовлен отделом объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»  
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

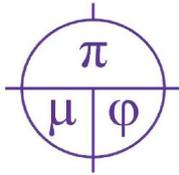
## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

|   |            |
|---|------------|
| <b>Федоров В. Е., Скорынин А. С.</b>  |            |
| Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера   | <b>289</b> |
| <b>Муравник А. Б.</b>   |            |
| О гиперболических уравнениях с произвольно направленными сдвигами потенциалов   | <b>299</b> |
| <b>Николаев В. Г.</b>   |            |
| Об одном методе построения решений однородной задачи Шварца   | <b>305</b> |
| <b>Курина Г. А., Хоай Н. Т.</b>   |            |
| Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния | <b>313</b> |
| <b>Половинкина М. В., Половинкин И. П.</b>  |            |
| Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений  | <b>330</b> |
| <b>Машков Е. Ю.</b>   |            |
| Об одном подходе к изучению стохастических дифференциальных уравнений леонтьевского типа  | <b>339</b> |
| <b>Гетманова Е. Н.</b>  |            |
| О методе случайных негладких интегральных направляющих функций в периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных включений                            | <b>346</b> |

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

|  |            |
|--|------------|
| <b>Борисенко А. В.</b>   |            |
| Прыжковая проводимость в монокристаллах эвтектического композита $(InSb)_{98.2} - (NiSb)_{1.8}$                              | <b>354</b> |
| <b>Кучунова Е. В., Вяткин А. В.</b>  |            |
| Консервативный полулагранжевый алгоритм численного решения уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках | <b>361</b> |



# Applied Mathematics & Physics

2023. Volume 55, No 4

*Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published (1.1.1 – material, complex and functional analysis, 1.1.2 – differential equations and mathematical physics, 1.3.8 – condensed matter physics). Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».*

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
«Belgorod National Research University».

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

**Deputy Editor-in-Chief:**

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

A. V. Noskov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

**Executive Secretary:** O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;  
Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;  
Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;  
Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
Virchenko Yu. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
Dabagov S. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;  
Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;  
Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia;  
Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;  
Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;  
Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;  
Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;  
Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;  
Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
Savotchenko S. E., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;  
Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;  
Fedorov V. E., Dr. Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;  
Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;  
Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;  
Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu.V. Ivakhnenko  
Proofreading T. V. Mezerya  
Computer imposition O. V. Chernova  
Dummy layout by V. B. Vasilyev  
E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 9,2  
Date of publishing 30.12.2023.  
The layout is presented by Department of the united  
Editorial Board of Scientific Journals Belgorod  
National Research University  
Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

## CONTENTS

### MATHEMATICS

|   |     |
|---|-----|
| <b>Fedorov V. E., Skorynin A. S.</b><br>A Class of Quasilinear Equations with Hilfer Derivatives  | 289 |
| <b>Muravnik A. B.</b><br>On Hyperbolic Equations with Arbitrarily Directed Translations of Potentials   | 299 |
| <b>Nikolaev V. G.</b><br>On One Method for Constructing Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem  | 305 |
| <b>Kurina G. A., Hoai N. T.</b><br>A New Algorithm of Constructing Asymptotic Solution of Singularly Perturbed Optimal Control Problems with Intersecting Trajectories of Degenerate State Equation | 313 |
| <b>Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.</b><br>Remarks on the Recovery of Solutions of Initial Boundary Value Problems for Singular Wave Equations   | 330 |
| <b>Mashkov E. Yu.</b><br>On a Certain Approach to Investigation of Stochastic Differential Leontieff Type Equations   | 339 |
| <b>Getmanova E. N.</b><br>On the Method of Random Nonsmooth Integral Guiding Functions in the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions  | 346 |

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

|  |     |
|--|-----|
| <b>Borisenko A. V.</b><br>Hopping Conductivity in Single Crystals of Eutectic Composite $(InSb)_{98.2} - (NiSb)_{1.8}$                 | 354 |
| <b>Kuchunova E. V., Vyatkin A. V.</b><br>Conservative Semi-Lagrangian Algorithm for Advection Problem on Unstructured Triangular Grids | 361 |

## МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.9

MSC 34G20, 35R11, 34A08

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-289-298

### Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера

Федоров В. Е.<sup>ID</sup>, Скорынин А. С.<sup>ID</sup>

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Челябинский государственный университет,  
Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129  
[kar@csu.ru](mailto:kar@csu.ru), [skorynin@csu.ru](mailto:skorynin@csu.ru)

**Аннотация.** Исследованы вопросы разрешимости задачи типа Коши для линейных и квазилинейных уравнений с дробными производными Хилфера, разрешенные относительно производной старшего порядка. Линейный оператор при неизвестной функции в уравнении предполагается ограниченным. Доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения. С помощью полученной при этом формулы решения задача типа Коши для квазилинейного дифференциального уравнения редуцирована к интегро-дифференциальному уравнению вида  $y = G(y)$ . При условии локальной липшицевости нелинейного оператора в уравнении доказана сжимаемость оператора  $G$  в выбранном подходящим образом метрическом пространстве функций на достаточно малом отрезке. Тем самым доказана теорема о существовании единственного локального решения задачи типа Коши для квазилинейного уравнения. Результат об однозначной глобальной разрешимости этой задачи получен путем доказательства сжимаемости достаточно большой степени оператора  $G$  в специальном пространстве функций на изначально заданном отрезке при выполнении условия Липшица на нелинейный оператор в уравнении. Общие результаты использованы для исследования задач типа Коши для квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** производная Хилфера, задача типа Коши, функция Миттаг – Леффлера, квазилинейное уравнение, теорема о сжимающем отображении, локальная разрешимость, глобальная разрешимость

**Благодарности:** Работа выполнена при финансировании за счет средств гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2708.2022.1.1.

**Для цитирования:** Федоров В. Е., Скорынин А. С. 2023. Один класс квазилинейных уравнений с производными Хилфера. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 289–298. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-289-298

Original Research

### A Class of Quasilinear Equations with Hilfer Derivatives

Vladimir E. Fedorov<sup>ID</sup>, Anton S. Skorynin<sup>ID</sup>

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Chelyabinsk State University,  
129 Brat'yev Kashirinykh st., Chelyabinsk, 454001, Russia  
[kar@csu.ru](mailto:kar@csu.ru), [skorynin@csu.ru](mailto:skorynin@csu.ru)

**Abstract.** We investigate the solvability issues of the Cauchy type problem for linear and quasilinear equations with Hilfer fractional derivatives resolved with respect to the higher-order derivative. The linear operator at the unknown function in the equation is assumed to be bounded. The unique solvability of the Cauchy type problem for a linear inhomogeneous equation is proved. Using the resulting solution formula, we reduce the Cauchy type problem for the quasilinear differential equation to an integro-differential equation of the form  $y = G(y)$ . Under the local Lipschitz condition of the nonlinear operator in the equation, the contraction of the operator  $G$  in a suitably chosen metric space of functions on a sufficiently small segment is proved. Thus, we prove the theorem on the existence of a unique local solution to a Cauchy type problem for the quasilinear equation. The result on the unique global solvability of this problem is obtained by proving the contraction of a sufficiently large degree of the operator  $G$  in a special space of functions on an initially given segment when the Lipschitz condition on a nonlinear operator in the equation is fulfilled. We use the general results to study Cauchy type problems for a quasilinear system of ordinary differential equations and for a quasilinear system of integro-differential equations.

**Keywords:** Hilfer Derivative, Cauchy Type Problem, Mittag – Leffler Function, Quasilinear Equation, Contraction Mapping Theorem, Local Solvability, Global Solvability

**Acknowledgements:** The work was funded by the grant of the President of the Russian Federation for state support of leading scientific schools, project number NSH-2708.2022.1.1.

**For citation:** Fedorov V. E., Skorynin A. S. 2023. A Class of Quasilinear Equations with Hilfer Derivatives. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 289–298. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-289-298

**1. Введение.** В последнее десятилетие интерес к исследованию математических моделей различных процессов, базирующихся на дробном интегро-дифференциальном исчислении, неизменно растет [1, 2, 3, 4, 5]. Помимо наиболее часто используемых дробных производных Римана – Лиувилля и Герасимова – Капуто [6, 7, 8, 9] все большую значимость в последние годы приобретает двупараметрическая производная Хилфера [10], являющаяся обобщением упомянутых производных и представляющая интерес с точки зрения математического моделирования [3, 10]. Уравнения с дробной производной Хилфера исследовались в работах многих авторов, см., например, [11, 12, 13].

В данной работе исследуются квазилинейные уравнения в банаховом пространстве с дробными производными Хилфера, разрешенные относительно производной старшего порядка. Линейный оператор при неизвестной функции в уравнении предполагается ограниченным. В §2 доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для линейного неоднородного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in (t_0, T],$$

при этом решение выражается через оператор-функции Миттаг – Леффлера. Здесь  $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $\mathcal{Z}$  – банахово пространство. В §3 с помощью формулы решения задача типа Коши для квазилинейного дифференциального уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)) \quad (2)$$

редуцирована к интегро-дифференциальному уравнению вида  $y = G(y)$ . Здесь же показана полнота специально построенного пространства функций  $C_{\alpha,\beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$ . При условии локальной липшицевости нелинейного оператора  $B$  доказана сжимаемость оператора  $G$  в выбранном подходящим образом метрическом пространстве функций из  $C_{\alpha,\beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$  при достаточно малом  $t_1 - t_0 > 0$ . Тем самым доказана теорема о существовании единственного локального решения задачи типа Коши. Аналогичный результат о глобальной разрешимости задачи (1), (2) получен в §4. Для этого доказана сжимаемость достаточно большой степени оператора  $G$  в банаховом пространстве  $C_{\alpha,\beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$  при выполнении условия Липшица на оператор  $B$ . Абстрактные результаты приложены к исследованию задачи типа Коши для квазилинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений.

**2. Производная Хилфера и линейное уравнение.** Пусть  $\mathcal{Z}$  – банахово пространство,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $t_0, T \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 < T$ . Для  $\delta > 0$ ,  $t > t_0$  определим функции  $g_\delta(t) := (t - t_0)^{\delta-1}/\Gamma(\delta)$ , где  $\Gamma(\delta)$  – гамма-функция. Дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка  $\alpha > 0$  определим следующим образом:

$$J^\alpha f(t) := \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s) ds, \quad J^0 f(t) := f(t) \quad t > t_0.$$

Множество операторов дробного дифференцирования обладает полугрупповым свойством

$$J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t).$$

Дробная производная Римана – Лиувилля порядка  $\alpha \in (m-1, m]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , задается равенством

$${}^R D^\alpha f(t) := D^m J^{m-\alpha} f(t),$$

где  $D^m = \frac{d^m}{dt^m}$  – обычная производная целого порядка. Будем также использовать обозначение  ${}^R D^{-\alpha} f(t) := J^\alpha f(t)$  при  $\alpha \geq 0$ .

Как известно, имеет место равенство при  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$

$$J^{m-\alpha} D^m f(t) = D^m J^{m-\alpha} \left( f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D^k f(t_0) \right) \quad (3)$$

при условии, что выражения в обеих частях этого равенства имеет смысл. Это позволяет определить производную Герасимова – Капуто  ${}^C D^\alpha f(t)$  правой частью равенства (3), которая имеет смысл для более широкого класса функций, чем его левая часть.

Производная Хилфера обычно определяется как  $D^{\alpha,\beta} f(t) := J^{\beta(m-\alpha)} D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t)$ , где  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Для  $\alpha \leq 0$  имеем  $m \in -\mathbb{N} \cup \{0\}$ , тогда

$$D^{\alpha,\beta} f(t) := J^{\beta(m-\alpha)} J^{-m} J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) = J^{-\alpha}.$$

В случае же  $\alpha > 0$ , рассуждая по аналогии с предыдущим абзацем, определим

$$D^{\alpha,\beta} f(t) := D^{m-\beta(m-\alpha)} \left( J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(t_0) \right) \quad (4)$$

и далее будем понимать производную Хилфера в смысле равенства (4).

**Замечание 2.1.** Производная  $J^{\beta(m-\alpha)} D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t)$  является производной Джрбашяна–Нерсеяна [14], ассоциированной с набором показателей  $\alpha_0 = 1 - (1-\beta)(m-\alpha)$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ , ...,  $\alpha_{m-1} = 1$ ,  $\alpha_m = 1 - \beta(m-\alpha)$ .

Преобразование Лапласа от функции  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$  обозначим  $\mathfrak{L}[f]$ .

**Лемма 2.1.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{Z}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{Z}$  имеет производную Хилфера и преобразование Лапласа. Тогда

$$\mathfrak{L}[D^{\alpha,\beta} f](\lambda) = \lambda^\alpha \mathfrak{L}[f](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{m-1-k-\beta(m-\alpha)} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(0).$$

**Доказательство.** По условию леммы  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{Z})$ , поэтому по формуле Пеано

$$g(t) := J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(0) = o(t^{m-1}), \quad t \rightarrow 0+.$$

Следовательно,  $D^{l-\beta(m-\alpha)} g(0) = 0$  при  $l = 0, 1, \dots, m-1$ . Поэтому по формуле (1.22) из [15]

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L} \left[ D^{m-\beta(m-\alpha)} \left( J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(0) \right) \right] = \\ & = \lambda^{m-\beta(m-\alpha)} \mathfrak{L} \left[ J^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(0) \right] - \sum_{l=0}^{m-1} D^{l-\beta(m-\alpha)} g(0) \lambda^{m-1-l} = \\ & = \lambda^{m-\beta(m-\alpha)} \left( \lambda^{-(1-\beta)(m-\alpha)} \mathfrak{L}[f] - \sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{-k-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} f(0) \right). \end{aligned}$$

Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (5)$$

для уравнения

$$D^{\alpha,\beta} x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t > t_0. \quad (6)$$

Решением задачи (5), (6) будем называть функцию  $x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$ , для которой  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ , существует  $D^{\alpha,\beta} x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$ , выполняются условия (5) и равенство (6).

Далее будем использовать функцию Миттаг – Леффлера

$$E_{\gamma,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + \delta)}, \quad \gamma, \delta > 0.$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $f \in C([t_0, T]; \mathcal{Z})$ ,  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Тогда при любых  $x_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , существует единственное решение задачи (5), (6), при этом оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A) x_k + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A) f(s) ds.$$

**Доказательство.** Имеем при  $l, k = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $l \leq k$

$$D^{l-(1-\beta)(m-\alpha)} (t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A) = (t-t_0)^{k-l} E_{\alpha,k-l+1}((t-t_0)^\alpha A),$$

при  $l > k$

$$D^{l-(1-\beta)(m-\alpha)}(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha, k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A) = (t-t_0)^{k-l+\alpha} A E_{\alpha, k-l+\alpha+1}((t-t_0)^\alpha A).$$

Поэтому функция  $y(t) := \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha, k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A) x_k$  удовлетворяет условиям (5), при этом

$$\begin{aligned} D^{\alpha, \beta} y(t) &= D^{m-\beta(m-\alpha)} \left( \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^k E_{\alpha, k+1}((t-t_0)^\alpha A) x_k - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x_k \right) = \\ &= D^{m-\beta(m-\alpha)} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{\alpha n+k} A^n}{\Gamma(\alpha n+k+1)} x_k = A \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^{\alpha n+k-(1-\beta)(m-\alpha)} A^n}{\Gamma(\alpha n+k-(1-\beta)(m-\alpha)+1)} x_k = Ay(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим  $z(t) := \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A) f(s) ds$ . При  $l = 0, 1, \dots, m-1$

$$D^{l-(1-\beta)(m-\alpha)} z(t) = \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1+l+(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha, \alpha-l+(1-\beta)(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A) f(s) ds|_{t=t_0} = 0,$$

$$\begin{aligned} D^{\alpha, \beta} z(t) &= D^{m-\beta(m-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1+(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha, \alpha+(1-\beta)(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A) f(s) ds = \\ &= D^m \int_{t_0}^t (t-s)^{m-1} E_{\alpha, m}((t-s)^\alpha A) f(s) ds = D^1 \int_{t_0}^t E_{\alpha, 1}((t-s)^\alpha A) f(s) ds = f(t) + Az(t). \end{aligned}$$

Поэтому  $x(t) = y(t) + z(t)$  является решением задачи (5), (6).

**Замечание 2.2.** Получение вида решения с помощью преобразования Лапласа осуществлено в статье [11].

**Замечание 2.3.** Можно заметить, что производная  $J^{\beta(m-\alpha)} D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)} z(t)$  в случае недифференцируемой функции  $f$  не определена, но производная Хилфера для функции  $z$  из доказательства теоремы 2.1 существует в смысле равенства (4).

**3. Локальная разрешимость квазилинейного уравнения.** Пусть  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $r \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $U$  — открытое множество в  $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+r}$ ,  $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $\beta \in [0, 1]$ ,  $x_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Решением начальной задачи

$$D^{\alpha, \beta} x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r, \beta} x(t), D^{\alpha-m-r+1, \beta} x(t), \dots, D^{\alpha-1, \beta} x(t)), \quad (7)$$

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (8)$$

на отрезке  $[t_0, t_1]$  будем называть такую функцию  $x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ , для которой  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$ , существует  $D^{\alpha, \beta} x \in C((t_0, T]; \mathcal{Z})$ , выполняются условия (8), справедливо включение  $(t, D^{\alpha-m-r, \beta} x(t), D^{\alpha-m-r+1, \beta} x(t), \dots, D^{\alpha-1, \beta} x(t)) \in U$  при  $t \in [t_0, t_1]$  и равенство (7) при  $t \in (t_0, t_1]$ .

Заметим, что  $D^{\alpha-m-l, \beta} x(t) := J^{m-\alpha+l} x(t)$  при  $l = 0, 1, \dots, r$ .

**Лемма 3.1.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ . Тогда линейное пространство

$$C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой  $\|x\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})} := \|x\|_{L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})} + \|J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}$  является банаховым.

**Доказательство.** Все аксиомы нормы проверяются непосредственно. В частности, если выполняется равенство  $\|x\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})} = 0$ , то  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x(t) \equiv 0$ ,  $x(t) \equiv D^{(1-\beta)(m-\alpha)} J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x(t) \equiv 0$ , поскольку  $C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) \subset L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ .

Пусть последовательность  $\{x_k\}$  фундаментальна в  $C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ , тогда существуют пределы  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ ,  $y := \lim_{k \rightarrow \infty} J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x_k \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ . Так как  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} \in \mathcal{L}(L_1(t_0, t_1; \mathcal{Z}))$ , имеем  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x = y$ , поэтому  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  в  $C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ . Таким образом,  $C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$  является банаховым пространством.

**Замечание 3.1.** Для  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in [0, 1]$ ,  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$  имеем  $D^{\alpha-l, \beta} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$  при любом  $l \in \mathbb{N}$ . Действительно, в таком случае  $J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ , поэтому при  $l = 1, 2, \dots, m-1$   $D^{\alpha-l, \beta} x =$

$J^{\beta(m-\alpha)} D^{m-l} J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ , так как  $J^{\beta(m-\alpha)} \in \mathcal{L}(C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}))$ . Если же  $l = m, m+1, \dots$ , то  $D^{\alpha-l, \beta} x = J^{\beta(m-\alpha)} J^{l-m} J^{(1-\beta)(m-\alpha)} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ , так как  $J^{\beta(m-\alpha)} J^{l-m} = J^{l-m+\beta(m-\alpha)} \in \mathcal{L}(C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}))$ .

**Замечание 3.2.** По определению решение задачи (7), (8) лежит в  $C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ .

Используя начальные данные  $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$  из (8), определим

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} x_k}{\Gamma(k-(1-\beta)(m-\alpha)+1)}, \quad \tilde{x}_l = D^{\alpha-l, \beta} \tilde{x}(t_0), \quad l = 1, 2, \dots, m+r.$$

Заметим, что при  $\alpha < m, \beta > 0$  справедливо равенство  $\tilde{x}_k = 0$  для всех  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ; при  $\alpha = m$  или  $\beta = 0$  имеем  $\tilde{x}_k = x_k, k = 0, 1, \dots, m-1$ .

**Лемма 3.2.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}, 0 \leq \beta \leq 1, U$  — открытое множество в  $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^m, B \in C(U; \mathcal{Z}), (t_0, \tilde{x}_{m+r}, \tilde{x}_{m+r-1}, \dots, \tilde{x}_1) \in U$ . Тогда функция  $x$  является решением задачи (7), (8) на отрезке  $[t_0, t_1]$  в том и только в том случае, когда  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ , при всех  $t \in [t_0, t_1]$  выполняется включение

$$(t, D^{\alpha-m-r, \beta} x(t), D^{\alpha-m-r+1, \beta} x(t), \dots, D^{\alpha-1, \beta} x(t)) \in U \quad (9)$$

и равенство

$$x(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha, k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A) x_k + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A) B(s, D^{\alpha-m-r, \beta} x(s), D^{\alpha-m-r+1, \beta} x(s), \dots, D^{\alpha-1, \beta} x(s)) ds. \quad (10)$$

**Доказательство.** Если  $x$  является решением задачи (7), (8) на отрезке  $[t_0, t_1]$ , то  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$  согласно замечанию 3.2, а в силу замечания 3.1  $D^{\alpha-l, \beta} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), l = 1, 2, \dots, m+r$ , и выполняется включение (9) при всех  $t \in [t_0, t_1]$ . В этом случае отображение

$$t \rightarrow B(t, D^{\alpha-m-r, \beta} x(t), D^{\alpha-m-r+1, \beta} x(t), \dots, D^{\alpha-1, \beta} x(t)) \quad (11)$$

непрерывно действует из  $[t_0, t_1]$  в пространство  $\mathcal{Z}$ . По теореме 2.1 выполняется равенство (10).

Пусть  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ , при всех  $t \in [t_0, t_1]$  выполняется включение (9) и равенство (10). Тогда  $D^{\alpha-l, \beta} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), l = 1, 2, \dots, m+r$ , поэтому отображение (11) принадлежит классу  $C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$ . Как при доказательстве теоремы 2.1 можно показать, что правая часть равенства (10) является решением задачи (7), (8).

Обозначим  $\bar{z} := (z_1, z_2, \dots, z_{m+r}) \in \mathcal{Z}^{m+r}, S_\delta(\bar{z}) = \{\bar{y} \in \mathcal{Z}^{m+r} : \|y_l - z_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta, l = 1, 2, \dots, m+r\}$ . Отображение  $B : U \rightarrow \mathcal{Z}$  называется локально липшицевым по  $\bar{z}$ , если при любом  $(t, \bar{z}) \in U$  существуют такие  $\delta > 0, q > 0$ , что  $[t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{z}) \subset U$  и при всех  $(s, \bar{y}), (s, \bar{v}) \in [t - \delta, t + \delta] \times S_\delta(\bar{z})$  выполняется неравенство

$$\|B(s, \bar{y}) - B(s, \bar{v})\|_{\mathcal{Z}} \leq q \sum_{l=1}^{m+r} \|y_l - v_l\|_{\mathcal{Z}}. \quad (12)$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $m-1 < \alpha < m \in \mathbb{N}, 0 \leq \beta < 1, x_k \in \mathcal{Z}, k = 0, 1, \dots, m-1, U$  — открытое множество в  $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+r}$ , отображение  $B \in C(U; \mathcal{Z})$  локально липшицево по  $\bar{z}$ , выполняется включение  $(t_0, \tilde{x}_{m+r}, \tilde{x}_{m+r-1}, \dots, \tilde{x}_1) \in U$ . Тогда при некотором  $t_1 > t_0$  задача (7), (8) имеет единственное решение на отрезке  $[t_0, t_1]$ .

**Доказательство.** В силу леммы 3.2 достаточно доказать, что интегро-дифференциальное уравнение (10) при некотором  $t_1 > t_0$  имеет единственное решение  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ .

Выберем такие  $\tau > 0$  и  $\delta > 0$ , что  $[t_0, t_0 + \tau] \times S_\delta(\bar{x}) \subset U$ , где  $\bar{x} = (\tilde{x}_{m+r}, \tilde{x}_{m+r-1}, \dots, \tilde{x}_1)$ , и для некоторого  $q > 0$  и для всех  $(s, \bar{y}), (s, \bar{v}) \in [t_0, t_0 + \tau] \times S_\delta(\bar{x})$  выполняется неравенство (12). Обозначим через  $\mathcal{S}$  множество таких функций  $x \in C_{\alpha, \beta}(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})$ , что  $\|D^{\alpha-l, \beta} x(t) - \tilde{x}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$  при  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, l = 1, 2, \dots, m+r$ . Определим метрику на  $\mathcal{S}$   $d(y, z) := \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})}$ , тогда в силу леммы 3.1  $\mathcal{S}$  — полное метрическое пространство. Заметим, что  $\tilde{x} \in \mathcal{S}$  при достаточно малом  $\tau > 0$ . Для  $l = m, m+1, \dots, m+r$  имеем

$$\|D^{\alpha-l, \beta}(y - z)\|_{C([t_0, t_0 + \tau]; \mathcal{Z})} \leq \|J^{l-m+\beta(m-\alpha)}\|_{\mathcal{L}(C([t_0, t_0 + \tau]; \mathcal{Z}))} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})} = Cd(y, z). \quad (13)$$

При  $y \in \mathcal{S}$  определим оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha, k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A) x_k + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((t-s)^\alpha A) B^y(s) ds,$$

где  $B^y(s) := B(s, D^{\alpha-m-r,\beta}y(s), D^{\alpha-m-r+1,\beta}y(s), \dots, D^{\alpha-1,\beta}y(s))$ . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.1, получим, что  $G(y) \in C([t_0, t_0 + \tau]; \mathcal{Z}) \cap L_1(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})$ , при этом

$$J^{(1-\beta)(m-\alpha)}G(y)(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (t-t_0)^k E_{\alpha,k+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1+(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha,\alpha+(1-\beta)(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)B^y(s)ds \in C^{m-1}([t_0, t_0 + \tau]; \mathcal{Z}),$$

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}[G(y)](t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad D^{\alpha-l,\beta}[G(y)](t_0) = \tilde{x}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m+r.$$

Следовательно, при  $t \in [t_0, t_0 + \tau]$  имеем  $\|D^{\alpha-l,\beta}[G(y)](t) - \tilde{x}_l\|_{\mathcal{Z}} \leq \delta$  в случае малого  $\tau > 0$ , поэтому  $G: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

При  $y, z \in \mathcal{S}$ ,  $l = 0, 1, \dots, m-1$ , учитывая вид метрики в  $\mathcal{S}$  и неравенство (13), получим

$$\begin{aligned} & \|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)}[G(y) - G(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} = \\ & = \left\| \int_{t_0}^t (t-s)^{m-l-\beta(m-\alpha)-1} E_{\alpha,m-l-\beta(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A)[B^y(s) - B^z(s)]ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C_1 (t-t_0)^{m-l-\beta(m-\alpha)} q \sum_{l=1}^{m+r} \sup_{t \in [t_0, t_0 + \tau]} \|D^{\alpha-l,\beta}(y(t) - z(t))\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C_2 \tau^{m-l-\beta(m-\alpha)} \|y - z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})} \leq \frac{d(y, z)}{2(m+1)} \end{aligned}$$

при достаточно малом  $\tau$ , не зависящем от  $y, z$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \|G(y) - G(z)\|_{L_1(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})} & \leq \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \int_s^{t_0 + \tau} (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} dt ds \leq \\ & \leq \tau^{\alpha+1} E_{\alpha,\alpha+2}(\tau^\alpha \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}) \|y - z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0, t_0 + \tau; \mathcal{Z})} \leq C_3 \tau^{\alpha+1} d(y, z) \leq \frac{d(y, z)}{2(m+1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при малом  $\tau$ , не зависящем от  $y, z$ , выполняется неравенство  $d(G(y), G(z)) \leq \frac{1}{2}d(y, z)$  и оператор  $G$  имеет единственную неподвижную точку  $z$  в метрическом пространстве  $\mathcal{S}$ . Она является решением уравнения (10), а значит, и задачи Коши (7), (8) на отрезке  $[t_0, t_0 + \tau]$ .

**4. Нелокальная разрешимость квазилинейного уравнения.** При  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in [0, 1]$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $t_0 < T$ ,  $B: [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r} \rightarrow \mathcal{Z}$ ,  $x_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}x(t_0) = x_k \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (14)$$

для квазилинейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}x(t) = Ax(t) + B(t, D^{\alpha-m-r,\beta}x(t), D^{\alpha-m-r+1,\beta}x(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta}x(t)) \quad (15)$$

на заданном отрезке  $[t_0, T]$ .

Образование  $B: [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r} \rightarrow \mathcal{Z}$  называется липшицевым по  $\bar{z}$ , если существует такое  $q > 0$ , что при всех  $(s, \bar{y}), (s, \bar{z}) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r}$  выполняется неравенство

$$\|B(s, \bar{y}) - B(s, \bar{z})\|_{\mathcal{Z}} \leq q \sum_{l=1}^{m+r} \|y_l - z_l\|_{\mathcal{Z}}.$$

**Теорема 4.1.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $x_k \in \mathcal{Z}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , отображение  $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+r}; \mathcal{Z})$  липшицево по  $\bar{z}$ . Тогда задача (14), (15) имеет единственное решение на отрезке  $[t_0, T]$ .

**Доказательство.** Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, нетрудно показать, что оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=0}^{m-1} t^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} E_{\alpha,k-(1-\beta)(m-\alpha)+1}((t-t_0)^\alpha A)x_k + \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}((t-s)^\alpha A)B^y(s)ds,$$

где  $B^y(s) := B(s, D^{\alpha-m-r, \beta} y(s), \dots, D^{\alpha-1, \beta} y(s))$  действует из пространства  $C_{\alpha, \beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$  в него же. При этом для  $y, z \in C_{\alpha, \beta}(t_0, T; \mathcal{Z})$ ,  $l = 0, 1, \dots, m-1$  (в случае  $T - t_0 \leq 1$  заменим в дальнейших оценках  $T - t_0$  на 1)

$$\begin{aligned} & \|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)} [G(y) - G(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} = \\ & = \left\| \int_{t_0}^t (t-s)^{m-l-\beta(m-\alpha)-1} E_{\alpha, m-l-\beta(m-\alpha)}((t-s)^\alpha A) [B^y(s) - B^z(s)] ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C_1 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq C_1 q (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \sum_{l=1}^{m+r} \sup_{\tau \in [t_0, s]} \|D^{\alpha-l, \beta}(y(\tau) - z(\tau))\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq C_2 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \frac{C_2 (T-t_0)^{m-1}}{1-\beta(m-\alpha)} (t-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\ & \|G(y) - G(z)\|_{L_1(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq C_1 \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \|B^y(s) - B^z(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq C_2 \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \frac{C_2 (t-t_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \\ & \leq \frac{C_2 (T-t_0)^{\alpha+\beta(m-\alpha)}}{\alpha+1} (t-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|G(y) - G(z)\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)C_2 (T-t_0)^{m-1+\alpha+\beta(m-\alpha)}}{1-\beta(m-\alpha)} (t-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})}.$$

Далее

$$\begin{aligned} & \|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)} [G^2(y) - G^2(z)](t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_1 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|B^{G(y)}(s) - B^{G(z)}(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ & \leq C_2 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|G(y) - G(z)\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \\ & \leq \frac{(m+1)C_2^2 (T-t_0)^{2(m-1)+\alpha+\beta(m-\alpha)}}{1-\beta(m-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} (s-t_0)^{1-\beta(m-\alpha)} ds \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})} = \\ & = \frac{(m+1)C_2^2 (T-t_0)^{2(m-1)+\alpha+\beta(m-\alpha)} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\ & \|G^2(y) - G^2(z)\|_{L_1(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq C_2 \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \|G(y) - G(z)\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \\ & \leq \frac{(m+1)C_2^2 (T-t_0)^{m-1+\alpha+\beta(m-\alpha)} \Gamma(1-\beta(m-\alpha)) \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(3-\beta(m-\alpha)+\alpha)} (t-t_0)^{2-\beta(m-\alpha)+\alpha} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \\ & \leq \frac{(m+1)C_2^2 (T-t_0)^{m-1+2(\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))} \|y - z\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\ & \|G^2(y) - G^2(z)\|_{C_{\alpha, \beta}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(m+1)^2 C_2^2 (T-t_0)^{2(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)}, \\
\|D^l J^{(1-\beta)(m-\alpha)} [G^3(y) - G^3(z)](t)\|_Z &\leq C_2 (T-t_0)^{m-1} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} \|G^2(y) - G^2(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;Z)} ds \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{3(m-1)+2(\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2}{\Gamma(3-2\beta(m-\alpha))} \times \\
&\quad \times \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta(m-\alpha)} (s-t_0)^{2(1-\beta(m-\alpha))} ds \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)} = \\
&= \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{3(m-1)+2(\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^3}{\Gamma(4-3\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{3(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)}, \\
\|G^3(y) - G^3(z)\|_{L_1(t_0,t;Z)} &\leq C_2 \int_{t_0}^t (t-s)^\alpha \|G^2(y) - G^2(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,s;Z)} ds \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{2(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^2 \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(4-2\beta(m-\alpha)+\alpha)} (t-t_0)^{3-2\beta(m-\alpha)+\alpha} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)} \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^2 C_2^3 (T-t_0)^{2(m-1)+3(\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^3}{\Gamma(4-3\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{3(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)}, \\
&\quad \|G^3(y) - G^3(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)} \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^3 C_2^3 (T-t_0)^{3(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^3}{\Gamma(4-3\beta(m-\alpha))} (t-t_0)^{3(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)}, \dots, \\
&\quad \|G^p(y) - G^p(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)} \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^p C_2^p (T-t_0)^{p(m-1+\alpha+\beta(m-\alpha))} \Gamma(1-\beta(m-\alpha))^p}{\Gamma(1+p(1-\beta(m-\alpha)))} (t-t_0)^{p(1-\beta(m-\alpha))} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,t;Z)}
\end{aligned}$$

при всех  $p \in \mathbb{N}$ . Таким образом, при достаточно большом  $p$

$$\|G^p(y) - G^p(z)\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,T;Z)} \leq \frac{1}{2} \|y-z\|_{C_{\alpha,\beta}(t_0,T;Z)}$$

и оператор  $G^p$ , а значит и оператор  $G$  имеет единственную неподвижную точку  $z$  в пространстве  $C_{\alpha,\beta}(t_0, T; Z)$ . По лемме 3.2 она является единственным решением задачи (14), (15) на отрезке  $[t_0, T]$ .

**5. Приложение к исследованию системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} v_l(0) = v_{lk}, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (16)$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned}
D^{\alpha,\beta} v_1(t) &= \sum_{p=1}^n a_{1p} v_p(t) + f_1(t, D^{\alpha-m-r,\beta} v_1(t), D^{\alpha-m-r,\beta} v_2(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta} v_n(t)), \\
D^{\alpha,\beta} v_2(t) &= \sum_{p=1}^n a_{2p} v_p(t) + f_2(t, D^{\alpha-m-r,\beta} v_1(t), D^{\alpha-m-r,\beta} v_2(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta} v_n(t)), \\
&\dots, \\
D^{\alpha,\beta} v_n(t) &= \sum_{p=1}^n a_{np} v_p(t) + f_n(t, D^{\alpha-m-r,\beta} v_1(t), D^{\alpha-m-r,\beta} v_2(t), \dots, D^{\alpha-1,\beta} v_n(t)),
\end{aligned} \quad (17)$$

где  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $D^\gamma$  — дробные производные Римана — Лиувилля,  $D^{\gamma,\beta}$  — дробные производные Хилфера,  $a_{lp} \in \mathbb{C}$ ,  $l, p = 1, 2, \dots, n$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_n : [0, T] \times \mathbb{R}^{(m+r)n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Возьмём  $Z = \mathbb{R}^n$ , действие оператора  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  задается матрицей  $A = \|a_{lp}\|_{l,p=1}^n$ .

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 5.1.** Пусть  $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $v_{lk} \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, \dots, m-1$ ,  $a_{lp} \in \mathbb{C}$ ,  $l, p = 1, 2, \dots, n$ , функции  $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^{(m+r)n}; \mathbb{R})$  имеют ограниченные частные производные первого порядка. Тогда задача (16), (17) имеет единственное решение на  $[0, T]$ .

**Доказательство.** Представим задачу (16), (17) в виде (14), (15) при  $\mathcal{Z} = \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ ,  $x_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk})$ ,  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ . Нелинейный оператор имеет вид

$$B(t, z_1, z_2, \dots, z_{(m+r)n}) = (f_1(t, z_1, z_2, \dots, z_{(m+r)n}), \dots, f_n(t, z_1, z_2, \dots, z_{(m+r)n})).$$

В силу ограниченности производных функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  оператор  $B$  липшицев. По теореме 4.1 получаем требуемое.

**6. Приложение к исследованию интегро-дифференциальной системы уравнений.** Пусть  $\Omega$  — измеримое множество из  $\mathbb{R}^d$ . Рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^{k-(1-\beta)(m-\alpha)} v_l(\xi, 0) = v_{lk}(\xi), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (18)$$

для системы уравнений

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha, \beta} v_1(\xi, t) &= \sum_{p=1}^n \int_{\Omega} k_{1p}(\xi, \eta) v_p(\eta, t) d\eta + f_1(t, \xi, D_t^{\alpha-m-r, \beta} v_1(\xi, t), \dots, D_t^{\alpha-1, \beta} v_n(\xi, t)), \\ D_t^{\alpha, \beta} v_2(\xi, t) &= \sum_{p=1}^n \int_{\Omega} k_{2p}(\xi, \eta) v_p(\eta, t) d\eta + f_2(t, \xi, D_t^{\alpha-m-r, \beta} v_1(\xi, t), \dots, D_t^{\alpha-1, \beta} v_n(\xi, t)), \\ &\dots, \\ D_t^{\alpha, \beta} v_n(\xi, t) &= \sum_{p=1}^n \int_{\Omega} k_{np}(\xi, \eta) v_p(\eta, t) d\eta + f_n(t, \xi, D_t^{\alpha-m-r, \beta} v_1(\xi, t), \dots, D_t^{\alpha-1, \beta} v_n(\xi, t)), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$ ,  $D_t^\gamma$  — производные Римана — Лиувилля по переменной  $t$ ,  $D_t^{\gamma, \beta}$  — производные Хилфера по  $t$ ,  $k_{lp} \in L_2(\Omega \times \Omega)$ ,  $l, p = 1, 2, \dots, n$ ,  $f_1, f_2, \dots, f_n : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^{(m+r)n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Возьмём  $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)^n$ , действие оператора  $A \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)^n)$  задается операторной матрицей  $A = \|K_{lp}\|_{l,p=1}^n$ , где

$$K_{lp}u(\xi) := \int_{\Omega} k_{lp}(\xi, \eta) u(\eta) d\eta.$$

**Теорема 5.1.** Пусть  $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$ ,  $v_{l,k} \in L_2(\Omega)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ ,  $k_{l,r} \in L_2(\Omega \times \Omega)$ ,  $l, r = 1, 2, \dots, n$ , функции  $f_1, f_2, \dots, f_n \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^{mn}; \mathbb{R})$  ограничены и имеют ограниченные частные производные первого порядка. Тогда задача (18), (19) имеет единственное решение на  $[0, T] \times \Omega$ .

**Доказательство.** Задача (18), (19) имеет вид (14), (15) при  $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)^n$ ,  $x_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk})$ ,  $k = 0, 1, \dots, m - 1$ . Нелинейный оператор

$$B(t, \cdot, z_1, z_2, \dots, z_{(m+r)n}) = (f_1(t, \cdot, z_1, z_2, \dots, z_{(m+r)n}), \dots, f_n(t, \cdot, z_1, z_2, \dots, z_{(m+r)n}))$$

действует из  $L_2(\Omega)^n$  в  $L_2(\Omega)$  в силу ограниченности функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  и удовлетворяют условиям Липшица, так как ограничены все их первые частные производные. По теореме 4.1 существует единственное решение на  $[0, T] \times \Omega$ .

#### Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит; 2003. 272 с.
2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок; 2008. 512 с.
3. Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials. *Chemical Physics*. 2002;284:399–408.
4. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: World Scientific; 2010. 368 p.
5. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin, Heidelberg: Springer; 2011. 505 p.
6. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука; 2005. 199 с.
7. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010. 247 p.
8. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
9. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley & Sons; 1993. 384 p.
10. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific; 2000. 463 p.
11. Волкова А.Р., Федоров В.Е., Гордиевских Д.М. О разрешимости некоторых классов уравнений с производной Хилфера в банаховых пространствах. *Челяб. физ.-мат. журн.* 2022;7(1):11–19. DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17101

12. Furati K.M., Kassim M.D., Tatar N.-E. Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. *Computers and Mathematics with Applications*. 2012;64(6):1616–1626. DOI:10.1016/j.camwa.2012.01.009
13. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2009;12:299–318.
14. Джрбашян М.М., Нерсисян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. *Изв. АН Армянской ССР. Математика*. 1968;3:3–28.
15. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.

#### References

1. Nakhushiev AM. Fractional Calculus and its Applications. Moscow: Fizmatlit; 2003. 272 p. (in Russian)
2. Uchaykin VV. Method of Fractional Derivatives. Ul'yanovsk: Artishok; 2008. 512 p. (in Russian)
3. Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials. *Chemical Physics*. 2002;284:399–408.
4. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models. London: World Scientific, 2010. 368 p.
5. Tarasov VE. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin, Heidelberg: Springer; 2011. 505 p.
6. Pskhu AV. Partial Differential Equations of Fractional Order. Moscow: Nauka; 2005. 199 p. (in Russian)
7. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010. 247 p.
8. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
9. Miller KS, Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York: John Wiley & Sons; 1993. 384 p.
10. Hilfer R. Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: World Scientific; 2000. 463 p.
11. Volkova AR, Fedorov VE, Gordievskikh DM. On solvability of some classes of equations with Hilfer derivative in Banach spaces. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 2022;7(1):11–19. (in Russian) DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17101
12. Furati KM, Kassim MD, Tatar N-E. Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative. *Computers and Mathematics with Applications*. 2012;64(6):1616–1626. DOI:10.1016/j.camwa.2012.01.009
13. Hilfer R, Luchko Y, Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2009;12:299–318.
14. Dzhrbashyan MM, Nersesyan AB. Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order. *Izvestiya Akademii Nauk Armyanskoy SSR. Matematika*. 1968;3:3–28. (in Russian)
15. Bajlekova EG. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.08.2023

Поступила после рецензирования 25.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

Received August 10, 2023

Revised September 25, 2023

Accepted September 30, 2023

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Федоров Владимир Евгеньевич** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

**Скорынин Антон Сергеевич** – заведующий учебно-вычислительной лабораторией математического факультета, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Vladimir E. Fedorov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

**Anton S. Skorynin** – Head of Educational and Computational Laboratory of Mathematics Faculty, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

## О гиперболических уравнениях с произвольно направленными сдвигами потенциалов

Муравник А. Б. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Российский университет дружбы народов,  
Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
[amuravnik@mail.ru](mailto:amuravnik@mail.ru)

**Аннотация.** Исследуется гиперболическое уравнение с произвольным количеством потенциалов, на которые действуют операторы сдвига в произвольных направлениях. Дифференциально-разностные уравнения возникают в различных приложениях, не покрываемых классической теорией дифференциальных уравнений. Кроме того, они представляют значительный интерес и с теоретической точки зрения, поскольку нелокальная природа таких уравнений порождает различные эффекты, не возникающие в классическом случае. Мы находим условие на вектор коэффициентов при нелокальных членах уравнения и на векторы сдвигов потенциалов, обеспечивающее глобальную разрешимость рассматриваемого уравнения. Накладывая указанное условие на уравнение и применяя классическую схему Гельфанда – Шилова, мы строим в явном виде трехпараметрическое семейство гладких глобальных решений изучаемого уравнения.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностные операторы, гиперболические уравнения, нелокальные потенциалы, гладкие решения

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер проекта FSSF-2023-0016).

**Для цитирования:** Муравник А. Б. 2023. О гиперболических уравнениях с произвольно направленными сдвигами потенциалов. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 299–304. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-299-304

Original Research

## On Hyperbolic Equations with Arbitrarily Directed Translations of Potentials

Andrey B. Muravnik 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

RUDN University,  
6 Miklouho-Maclay st., Moscow, 117198, Russia  
[amuravnik@mail.ru](mailto:amuravnik@mail.ru)

**Abstract.** We investigate a hyperbolic equation with an arbitrary amount of potentials undergoing translations in arbitrary directions. Such differential-difference equations arise in various applications not covered by the classical theory of differential equations. On the other hand, they are quite interesting from the theoretical viewpoint because of specific effects caused by the nonlocal nature of the investigated equations. We find a condition for the vector of coefficients at nonlocal terms of the investigated equation and the translation vectors, guaranteeing the global solvability of the investigated equation. Under this condition, we explicitly construct a three-parametric family of smooth global solutions of the investigated equation; two of the specified parameters are real values, while the remaining one is a real-coordinate vector such that its dimension is equal to the amount of nonlocal terms (i. e., translated potentials) of the investigated equation. No commensurability requirements are imposed on the coefficients at nonlocal terms of the equation.

**Keywords:** Differential-difference Operators, Hyperbolic Equations, Nonlocal Potentials, Smooth Solutions

**Acknowledgements:** The work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project number FSSF-2023-0016).

**For citation:** Muravnik A. B. 2023. On Hyperbolic Equations with Arbitrarily Directed Translations of Potentials. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 299–304. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-299-304

---

**1. Введение.** В настоящее время считается общепризнанным, что адекватные модели математической физики не исчерпываются только *дифференциальными* уравнениями – нужно также изучать уравнения, содержащие, кроме дифференциальных, и другие операторы (такие уравнения называются *функционально-дифференциальными*). Эти операторы, в отличие от дифференциальных, могут быть ограниченными,

однако принципиальная новизна таких функционально-дифференциальных уравнений заключается в том, что они связывают значения неизвестной функции в разных точках. Эта *нелокальная* природа функционально-дифференциальных уравнений порождает качественно новые свойства их решений, предоставляет возможность использовать их в приложениях, не покрываемых классической теорией дифференциальных уравнений, и демонстрирует тесную взаимосвязь этой теории с теорией нелокальных задач, которая тоже очень важна для различных приложений (см., напр., [2, 2]).

Обыкновенные функционально-дифференциальные уравнения изучаются как минимум с середины прошлого века (см. [5] и имеющуюся там библиографию). Теория функционально-дифференциальных уравнений в частных производных – относительно моложе: автору неизвестны работы на эту тему, предшествующие [4]. Следует отметить, что даже сам термин «эллиптический» в функционально-дифференциальном случае нуждается в тщательном прояснении, поскольку традиционная классификация дифференциальных уравнений в частных производных по типам не работает в *функционально-дифференциальном* случае. Таким образом, понятие эллиптических функционально-дифференциальных уравнений отнюдь не является тривиальным. С современным состоянием общей теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений можно ознакомиться в [5, 6] (см. также имеющуюся там библиографию).

В рамках настоящей статьи важность общей эллиптической теории заключается в следующем: как только мы можем корректно определить эллиптические функционально-дифференциальные операторы, мы можем считать, что любое уравнение вида  $u_{tt} - Lu = f$  – гиперболическое, если  $L$  – эллиптический функционально-дифференциальный оператор. Настоящая работа посвящена важному классу функционально-дифференциальных уравнений – *дифференциально-разностным* уравнениям. Это уравнения, содержащие операторы сдвига (кроме дифференциальных). Важно отметить, что операторы сдвига являются мультипликаторами Фурье, поэтому естественно определять эллиптичность таких операторов, основываясь на знаках вещественных частей их символов.

Гиперболические дифференциально-разностные уравнения изучались и ранее (см., напр., [7] и имеющуюся там библиографию). В настоящей работе рассматриваются такие уравнения со сдвигами по пространственным переменным. Подобно случаю дифференциально-разностных уравнений других типов, естественно разбить указанный класс уравнений на два подкласса: уравнения с *суммами* дифференциальных операторов и операторов сдвига и уравнения с их *суперпозициями*. Настоящая работа посвящена первому из указанных подклассов. К настоящему времени наиболее общий результат в этом направлении получен в [7], где рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - au(x - h, t),$$

со скалярным параметром  $a$  и  $n$ -мерным параметром  $h$ .

Указанное уравнение содержит только одно нелокальное слагаемое. Мы распространим наше исследование на уравнения с произвольным количеством нелокальных членов, не накладывая никаких ограничений на углы между векторами сдвигов.

**2. Гладкие решения.** Пусть  $m$  и  $n$  – натуральные числа,  $a_1, \dots, a_m$  – вещественные постоянные,  $h_1, \dots, h_m$  – векторы из  $\mathbb{R}^n$ . В полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \sum_{k=1}^m a_k u(x - h_k, t). \quad (1)$$

В пространстве  $\mathbb{R}^n$  определим функции  $a(x) := \sum_{k=1}^m a_k \cos h_k \cdot x$  и  $b(x) := \sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \cdot x$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Если неравенство

$$|x|^2 + a(x) > 0 \quad (2)$$

выполняется в  $\mathbb{R}^n$ , то функции

$$F(x, t; \xi) = e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] \quad (3)$$

и

$$H(x, t; \xi) = e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right], \quad (4)$$

где

$$G_{\{1,2\}}(\xi) = \rho(\xi) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \varphi(\xi), \quad (5)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)}, \quad (6)$$

$$\rho(\xi) = \left( [|\xi|^2 + a(\xi)]^2 + b^2(\xi) \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (7)$$

удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле при любом значении  $n$ -мерного параметра  $\xi$ .

**Доказательство.** В силу условия (2), функция (6) определена корректно. Следовательно, корректно определены и функции (3)-(4).

Подставим функцию (3) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= G_1(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right], \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= G_1^2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + G_1(\xi) G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + \\ &\quad + G_1(\xi) G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] - G_2^2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] = \\ &= \left[ G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) \right] e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + 2G_1(\xi) G_2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right], \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} &= -\xi_j^2(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right], \quad j = \overline{1, n}, \quad \text{т. е. } \Delta F = -|\xi|^2 e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right]. \end{aligned}$$

Далее,

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin^2 \varphi(\xi) - \rho^2(\xi) \cos^2 \varphi(\xi) = -\rho^2(\xi) \cos 2\varphi(\xi), \quad 2G_1(\xi) G_2(\xi) = \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi).$$

Теперь отметим, что  $-\frac{\pi}{4} < \varphi(\xi) < \frac{\pi}{4}$  на  $\mathbb{R}^n$  по определению. Тогда  $2\varphi(\xi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  на  $\mathbb{R}^n$ , а значит, функция  $\cos 2\varphi(\xi)$  всюду положительна. Поэтому

$$\cos 2\theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\theta(\xi)}} = \left( 1 + \frac{b^2(\xi)}{[|\xi|^2 + a(\xi)]^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{[|\xi|^2 + a(\xi)]^2}{[|\xi|^2 + a(\xi)]^2 + b^2(\xi)}}.$$

Поскольку знаменатель последней дроби равен  $\rho^4(\xi)$  и положительность функции  $|\xi|^2 + a(\xi)$  обеспечена условием (2), справедливо равенство  $\cos 2\theta(\xi) = \frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\rho^2(\xi)}$ .

Далее,

$$\sin 2\theta(\xi) = \tan 2\theta(\xi) \cos 2\theta(\xi) = \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)} \frac{|\xi|^2 + a(\xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{b(\xi)}{\rho^2(\xi)}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Delta F &= -\rho^2(\xi) \cos 2\varphi(\xi) e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + \\ &\quad + \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + |\xi|^2 e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] = \\ &= -\left[ |\xi|^2 + a(\xi) \right] e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + b(\xi) e^{tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] + \\ &\quad + |\xi|^2 e^{tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] = \\ &= e^{tG_1(\xi)} \left( b(\xi) \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] - a(\xi) \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] \right) = \\ &= e^{tG_1(\xi)} \left( \sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \cdot \xi \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] - \sum_{k=1}^m a_k \cos h_k \cdot \xi \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] \right) = \\ &= -e^{tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^m a_k \left( \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] \cos h_k \cdot \xi - \cos \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right] \sin h_k \cdot \xi \right) = \\ &= -e^{tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^m a_k \sin \left[ tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + (x - h_k) \cdot \xi \right] = -\sum_{k=1}^m a_k F(x - h_k, t), \end{aligned}$$

т. е. функция (3) в полупространстве  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) для каждого  $\xi$  из  $\mathbb{R}^n$ .

Теперь подставим функцию (4) в уравнение (1):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -G_1(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] + G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= G_1^2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - \\ &- G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - G_2^2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] = \\ &= \left[ G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) \right] e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - \\ &- 2G_1(\xi) G_2(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] = \\ &= -\rho^2(\xi) \cos 2\varphi(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - \\ &- \rho^2(\xi) \sin 2\varphi(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] = \\ &= - \left[ |\xi|^2 + a(\xi) \right] e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - b(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] \end{aligned}$$

и

$$\Delta H = - \sum_{j=1}^n \xi_j^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] = -|\xi|^2 e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \Delta H &= -a(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] - b(\xi) e^{-tG_1(\xi)} \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] = \\ &= -e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^m a_k \left( \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] \cos h_k \cdot \xi + \cos \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right] \sin h_k \cdot \xi \right) = \\ &= -e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k=1}^m a_k \sin \left[ tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - (x - h_k) \cdot \xi \right] = - \sum_{k=1}^m a_k H(x - h_k, t), \end{aligned}$$

т. е. функция (4) удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1) для любого  $\xi$  из  $\mathbb{R}^n$ .

**3. Условия разрешимости.** Очевидно, что дифференциально-разностный оператор из правой части уравнения (1) является мультипликатором Фурье, а условие (2) означает строгую отрицательность вещественной части его символа. В настоящем разделе мы найдем условие, обеспечивающее указанную отрицательность.

Введем постоянные величины  $a_0 := \sum_{k=1}^m a_k$  и  $h_0 := \max_{k \in \overline{1, m}} |h_k|$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** Если  $a_k$  неотрицательно для любого  $k \in \overline{1, m}$  и

$$a_0 h_0^2 < \frac{\pi^2}{4}, \quad (8)$$

то условие (2) выполнено для любого  $x$  из  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что если рассматриваемое уравнение дифференциально-разностное, то  $a_0$  и  $h_0$  строго положительны. Действительно, если  $a_0 = 0$ , то  $a_k = 0$  для любого  $k \in \overline{1, m}$  и, следовательно, уравнение (1) есть уравнение д'Аламбера. Если  $h_0 = 0$ , то любой  $h_k$ ,  $k \in \overline{1, m}$ , есть нулевой вектор и, следовательно, уравнение (1) есть дифференциальное уравнение  $u_{tt} = \Delta u - a_0 u$ .

Теперь исследуем зависимость знака функции  $|x|^2 + a(x)$  от соотношений между векторами сдвигов  $h_1, \dots, h_m$  из  $\mathbb{R}^n$  и вектором  $(a_1, \dots, a_m)$  коэффициентов. Возьмем произвольное натуральное число  $k$  от 1 до  $m$ .

Если  $|h_k \cdot x| < \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos h_k \cdot x > 0$  и, следовательно,  $x_k^2 + a_k \cos h_k \cdot x > 0$ .

Если  $|h_k \cdot x| \geq \frac{\pi}{2}$ , то  $|h_k||x| |\cos(\widehat{h_k, x})| \geq \frac{\pi}{2}$ , что значит, что  $|h_k||x| \geq \frac{\pi}{2}$ , т. е.  $|x| \geq \frac{\pi}{2|h_k|}$  и, следовательно,

$$|x|^2 + a(x) \geq \frac{\pi^2}{4|h_k|^2} + \sum_{l=1}^m a_l \cos h_l \cdot x.$$

Правая часть последнего неравенства положительна в силу условия (8). Значит, функция  $|x|^2 + a(x)$  везде положительна. Поскольку значение  $k$  выбрано произвольно, лемма доказана.

Объединяя леммы 1-2, следующее основное утверждение работы.

**Теорема 1.** Если все коэффициенты  $a_1, \dots, a_m$  уравнения (1) неотрицательны, а условие (8) выполняется, то каждая функция

$$\alpha F(x, t; \gamma) + \beta H(x, t; \gamma), \quad (9)$$

где функции  $F$  и  $H$  определены соотношениями (3) и (4), соответственно,  $\alpha$  и  $\beta$  принадлежат  $(-\infty, \infty)$ , а  $u \in \mathbb{R}^n$  является бесконечно гладким решением уравнения (1).

**4. Эвристические соображения.** Как показано выше, доказательство теоремы 1 – прямое: мы непосредственно подставляем функцию (9) в уравнение (1). Это доказательство – строгое и понятное, но оно не объясняет каким образом было найдено решение. В настоящем разделе мы покажем, как хорошо известная операционная схема Гельфанда – Шилова (см., напр., [8, п. 10]) применяется в рассматриваемом случае.

Формально применяя преобразование Фурье по ( $n$ -мерной) переменной  $x$  к дифференциально-разностному уравнению в частных производных (1), мы получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от  $n$ -мерного параметра  $\xi$ :

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} + \left( |\xi|^2 + \sum_{k=1}^m a_k \cos h_k \cdot \xi + i \sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \cdot \xi \right) \widehat{u} = 0. \quad (10)$$

Его общее решение равно (с точностью до произвольных постоянных, зависящих от параметра  $\xi$ )

$$\frac{1}{\rho(\xi)} \left( e^{-t G_1(\xi)} e^{i[t G_2(\xi) - \varphi(\xi)]} - e^{t G_1(\xi)} e^{-i[t G_2(\xi) + \varphi(\xi)]} \right),$$

где функции  $G_1(\xi)$ ,  $G_2(\xi)$ ,  $\varphi(\xi)$ ,  $\rho(\xi)$  определены соотношениями (5)–(7).

Остается формально применить обратное преобразование Фурье, отбросить слагаемые с нечетными подынтегральными функциями и выбрать произвольные постоянные, зависящие от параметра  $\xi$ , таким образом, чтобы все мнимые слагаемые оказались равными нулю. Все эти шаги схемы Гельфанда – Шилова не могут быть выполнены, поскольку сходимость возникающего несобственного интеграла по  $\xi$  не гарантирована. Однако если оборвать процедуру Гельфанда – Шилова перед интегрированием по двойственной переменной  $\xi$  и рассматривать указанную переменную как параметр, то полученная функция, выраженная формулой (9), удовлетворяет уравнению (1). Чтобы убедиться в этом, мы подставляем ее в уравнение (1) в п. 2 (см. выше).

**5. Заключение.** В настоящей работе мы продолжаем исследование гиперболических дифференциально-разностных гиперболических уравнений с нелокальными потенциалами, распространяя наше рассмотрение на наиболее общий случай уравнения: количество нелокальных членов уравнения произвольно, на коэффициенты при нелокальных членах не накладывается никак условий соизмеримости, а направления сдвигов потенциалов (и, соответственно, углы между этими направлениями) произвольны. Мы находим достаточное условие (в терминах символа дифференциально-разностного оператора рассматриваемого уравнения), обеспечивающее глобальную разрешимость исследуемого уравнения. При выполнении этого условия мы строим в явном виде трехпараметрическое семейство точных глобальных бесконечно гладких решений указанного уравнения; два из этих независимых параметров вещественны, а третий – вектор с вещественными координатами, размерность которого равна количеству нелокальных членов уравнения.

**Благодарность.** Автор выражает глубокую благодарность А. Л. Скубачевскому за ценные советы и постоянное внимание к работе.

#### Список литературы

1. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2007;26:3–132.
2. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. II. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2009;33:3–179.
3. Мышкис А.Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2005;4:5–120.
4. Hartman P., Stampacchia G. On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.* 1966;115:271–310.
5. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin; 1997. 293 p.
6. Скубачевский А.Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения. *Успехи математических наук*. 2016;71(5):3–112.
7. Зайцева Н.В., Муравник А.Б. Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене. *Дифференциальные уравнения*. 2023;59(3):368–373.
8. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. *Успехи математических наук*. 1953;8(6):3–54.

### References

1. Skubachevskii AL. Nonclassical boundary-value problems. I. *J. Math. Sci. (N. Y.)*. 2008;155:199–334.
2. Skubachevskii AL. Nonclassical boundary-value problems. II. *J. Math. Sci. (N. Y.)*. 2010;166:377–561.
3. Myshkis AD. Mixed functional differential equations. *J. Math. Sci. (N. Y.)*. 2005;129:4111–4226.
4. Hartman P., Stampacchia G. On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.* 1966;115:271–310.
5. Skubachevskii AL. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin; 1997. 293 p.
6. Skubachevskii AL. Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys*. 2016;71(5):801–906.
7. Zaitseva NV., Muravnik AB. Smooth solutions of hyperbolic equations with translation by an arbitrary vector in the free term. *Differ. Equ.*. 2023;59(3):371–376.
8. Gel'fand IM., Shilov GE. Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy problem. *Uspekhi Matem. Nauk.* 1953;8(6):3–54 (in Russian).

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.08.2023

Поступила после рецензирования 26.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

Received August 12, 2023

Revised September 26, 2023

Accepted September 30, 2023

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Муравник Андрей Борисович** – доктор физико-математических наук, директор Математического института, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Andrey B. Muravnik** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of Mathematical Institute, RUDN University, Moscow, Russia

## Об одном методе построения решений однородной задачи Шварца

Николаев В. Г. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,  
Россия, 454001, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41  
[vg14@inbox.ru](mailto:vg14@inbox.ru)

**Аннотация.** В статье рассмотрена однородная задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису, или  $J$ -аналитических функций. При этом  $2 \times 2$ -матрица  $J$  имеет собственные числа  $\lambda, \mu$ , лежащие выше вещественной оси. Собственные числа могут быть как различными, так и кратными. Во втором разделе статьи приведена постановка задачи. В начале третьего раздела доказана лемма 3.1, устанавливающая одно соотношение между вещественными и голоморфными функциями. Далее построен специальный базис оператора  $J$ . Затем с помощью данного базиса и леммы 3.1 построена  $J$ -аналитическая функция  $\phi(z)$  в виде квадратичного вектор-полинома некоторого специального вида. Если собственные числа  $\lambda, \mu$  матрицы  $J$  фиксированы, то функция  $\phi(z)$  зависит от элементов первого столбца матрицы  $J$  как от параметров. Эти параметры подбираются так, чтобы реальная часть функции  $\phi(z)$  имела вид  $(P, 0)$ , где  $P = P(x, y)$  – положительно определенная квадратичная форма. В результате функция  $\phi(z) - (1, 0)$  будет искомым решением однородной задачи Шварца в эллипсе  $\Gamma : P(x, y) = 1$ . Далее матрица  $J$  восстанавливается по элементам первого столбца и собственным числам  $\lambda, \mu$ . Полученный результат оформлен в виде теоремы 3.1. В конце статьи приведены шесть примеров, построенных по изложенному выше алгоритму.

**Ключевые слова:** функции, аналитические по Дуглису, лямбда-голоморфные функции, собственное число матрицы, базис оператора, эллипс

**Для цитирования:** Николаев В. Г. 2023. Об одном методе построения решений однородной задачи Шварца. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 305–312. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-305-312

Original Research

## On One Method for Constructing Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem

Vladimir G. Nikolaev 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,  
41 Bolshaya St.-Peterburgskaya st., Velikiy Novgorod, 173003, Russia  
[vg14@inbox.ru](mailto:vg14@inbox.ru)

**Abstract.** The paper considers the homogeneous Schwarz problem for Douglas analytic or  $J$ -analytic functions. The  $2 \times 2$ -matrix  $J$  has eigenvalues  $\lambda, \mu$ , lying above the real axis. The eigenvalues can be either distinct or multiples. In the second section of the paper there are given the problem statement and definitions of  $J$ -analytic and  $\lambda$ -holomorphic functions. At the beginning of the third section Lemma 3.1 is proved, establishing some relation between real and holomorphic functions. Then is constructed a special operator basis  $J$ . For matrices with multiple eigenvalue this basis coincides with the Jordan basis of the matrix  $J$ . Then with the help of this basis and Lemma 3.1 is constructed  $J$ -analytic function  $\phi(z)$  in the form of a quadratic vector polynomial of some special form. If the eigenvalues  $\lambda, \mu$  of the matrix  $J$  are fixed, then the function  $\phi(z)$  depends on the elements of the first column of the matrix  $J$  as parameters. These parameters are chosen so that the real part of the function  $\phi(z)$  has the form  $(P, 0)$ , where  $P = P(x, y)$  is a positively defined quadratic form. All  $J$ -analytic functions are defined with the accuracy of the additive vector constant. Therefore, the function  $\phi(z) - (1, 0)$  will be the required solution to the homogeneous Schwarz problem in the ellipse  $\Gamma : P(x, y) = 1$ . Then the matrix  $J$  is reconstructed by the known elements of the first column and the eigenvalues  $\lambda, \mu$ . The obtained result is formalized in the form of Theorem 3.1. At the end of the paper there are given six examples constructed according to the algorithm described above.

**Keywords:** Douglas Analytic Functions, Lambda-Holomorphic Functions, Matrix Eigenvalue, Operator Basis, Ellipse

**For citation:** Nikolaev V. G. 2023. On One Method for Constructing Solutions to the Homogeneous Schwarz Problem. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 305–312. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-305-312

---

**1. Введение.** Настоящая работа посвящена исследованию однородной задачи Шварца для  $J$ -аналитических функций. Впервые эти функции были рассмотрены А. Дуглисом [1], который назвал их гипераналитическими. В дальнейшем теория  $J$ -аналитических функций развивалась Д. Паскали [2],

Д. Хорватцем [3], Р. Гильбертом [4], Б. Боярским [5], Д. Хайлом [6], А. П. Солдатовым [7, 8, 9] и многими другими авторами. В частности, для них был построен аналог теории аналитических функций, поэтому теперь эти функции мы называем аналитическими по Дуглису.

Хорошо известно [8, 9], что решения уравнения Лапласа в односвязной области описываются как вещественные части аналитических функций. Через аналитические функции выражаются и решения более общих эллиптических уравнений с вещественно аналитическими коэффициентами. Единый подход к изучению этих представлений был предложен И. Н. Векуа [10]. В дальнейшем А. В. Бицадзе [11] было получено представление через аналитические вектор-функции и их производные общего решения эллиптических систем.

Сравнительно недавно (А. П. Солдатов [7, 8], Р. Йех [12]) было обнаружено, что с помощью функций, аналитических по Дуглису, представление Бицадзе существенно упрощается. Можно сказать, что по отношению к эллиптическим уравнениям и системам с постоянными (и только старшими) коэффициентами эти функции играют ту же роль, что и аналитические функции по отношению к уравнению Лапласа. Аналогичные свойства выявлены (Н. А. Жура [13]) и для систем второго порядка, эллиптических по Дуглису – Ниренбергу. Таким образом, актуальным является исследование различных граничных задач для функций, аналитических по Дуглису. Рассмотренная в статье задача Шварца – одна из них. Определенные результаты по этой теме получены в работах В. Г. Николаева [14, 15], А. П. Солдатова [9] и В. Б. Васильева [16]. В настоящей статье приведен метод построения решений однородной задачи Шварца в виде квадратичных вектор-полиномов.

**2. Основные определения и постановка задачи.** Пусть все собственные числа матрицы  $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$  лежат выше вещественной оси. Пусть  $n$ -вектор-функция  $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$ , где область  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Рассмотрим следующую однородную эллиптическую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D. \quad (1)$$

**Определение 2.1.** (см. [1, 7, 14, 15, 16]) Функция  $\phi = \phi(z)$  как решение системы (1) называется аналитической по Дуглису или функцией  $J$ -аналитической с матрицей  $J$ .

В [7] показано, что система (1) является эллиптической.

**Замечание 2.1.** Согласно (1) функции  $\phi(z)$  и  $\alpha\phi(z) + \gamma$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}^n$  будут аналитическими по Дуглису с одной и той же матрицей  $J$ .

Приведем скалярный аналог определения 2.1, который будет существенно использован ниже.

**Определение 2.2.** (см. [7, 14, 15, 16]) Пусть  $J = \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Im } \lambda \neq 0$ . Скалярная функция  $f_\lambda = f_\lambda(z) \in C^1(D)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial f_\lambda}{\partial x} = 0, \quad z \in D, \quad (2)$$

называется  $\lambda$ -голоморфной функцией.

Следуя [2], обозначим  $[z]_\lambda = (x + \lambda y)$ ;  $[z]_\mu = (x + \mu y)$ . С учетом (2) функции

$$f_\lambda(z) = \alpha_1 [z]_\lambda + \alpha_2 [z]_\lambda^2, \quad f_\mu(z) = \beta_1 [z]_\mu + \beta_2 [z]_\mu^2, \quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C},$$

будут, соответственно,  $\lambda$ - и  $\mu$ -голоморфными.

Рассмотрим для системы (1) следующую однородную задачу Шварца [9, 14, 15].

Пусть конечная область  $D \subset \mathbb{R}^2$  ограничена гладким контуром  $\Gamma$ . Требуется найти  $J$ -аналитическую с матрицей  $J$  в области  $D$  функцию  $\phi(z) \in C(\bar{D})$ , которая удовлетворяет краевому условию

$$\text{Re } \phi(z)|_\Gamma = 0. \quad (3)$$

Очевидными решениями задачи (3) служат постоянные функции  $\phi(z) \equiv ic$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ , которые называются тривиальными решениями.

Если  $n \geq 2$ , то возможны непостоянные решения однородной задачи (3). Примеры таких решений для  $n = 2$  приведены в конце следующего пункта.

**3. Метод построения решений однородной задачи Шварца.** Приведенный ниже алгоритм основан на использовании специального базиса  $Q_1$  оператора  $J$ , а также на применении приведенного ниже соотношения (4) между вещественными и голоморфными функциями. Основная суть метода состоит в следующем. Сначала задаются собственные числа  $\lambda, \mu$  матрицы  $J$ . Затем коэффициенты матрицы  $J$  подбираются как параметры с тем условием, чтобы равенство (3) выполнялось на некотором эллипсе  $\Gamma$ .

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 3.1.** Для произвольных чисел  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , где  $\text{Im } \lambda > 0$ ,  $\text{Im } \mu > 0$ , существуют вещественная квадратичная форма  $u(x, y)$  и  $\mu$ -голоморфная функция  $f_\mu(z) = \alpha [z]_\mu$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$  такие, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f_\mu(z) = \alpha [z]_\mu = \alpha(x + \mu y). \quad (4)$$

Функции  $u(x, y)$  и  $f_\mu(z)$  единственны с точностью до вещественного множителя.

**Доказательство.** Обозначим:

$$u(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Коэффициенты  $a, b, c$  квадратичной формы (5) будем искать из равенства

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (6)$$

Подставим (5) в левую часть (6):

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot [2cx + 2by - \lambda(2ax + 2cy)] = 2b - 2\lambda c - \mu(2c - 2\lambda a) = 0,$$

откуда  $b + \lambda\mu a = (\lambda + \mu)c$ . Это равенство перепишем с учетом обозначений  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ ,  $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$ :

$$b + (\lambda_1 + \lambda_2 i)(\mu_1 + \mu_2 i)a = (\lambda_1 + \lambda_2 i + \mu_1 + \mu_2 i)c. \quad (7)$$

В свою очередь, равенство (7) равносильно следующей алгебраической системе относительно переменных  $a, b$ , где  $c$  можно рассматривать как параметр:

$$\begin{cases} (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)a + b = (\lambda_1 + \mu_1)c, \\ (\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2)a = (\lambda_2 + \mu_2)c. \end{cases} \quad (8)$$

Из (8) находим:

$$a = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)c}{\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2}, \quad b = (\lambda_1 + \mu_1)c - \frac{(\lambda_2 + \mu_2)c}{\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2} \cdot (\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2), \quad c = c. \quad (9)$$

Если в (9) знаменатель  $\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 \neq 0$ , то решение (8) единственно с точностью до множителя  $c$ . Пусть  $\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 = 0$ . По условию  $\text{Im } \lambda > 0$ ,  $\text{Im } \mu > 0$ , то есть  $\lambda_2 + \mu_2 \neq 0$ . Поэтому из второго уравнения в (8) имеем:  $a = a$ ,  $c = 0$ . Таким образом, из первого уравнения в (8)  $b = -a(\lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2)$ . Полученное решение единственно с точностью до множителя  $a$ . Таким образом, единственная с точностью до множителя квадратичная форма (5), удовлетворяющая (6), построена.

Заметим, что функция

$$f_\mu(z) = \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

будет линейной, и при этом согласно (6) и (2) она будет  $\mu$ -голоморфной. Следовательно, при некотором значении  $\alpha$  имеет место равенство (4). Найдем комплексный параметр  $\alpha$ . Для этого продифференцируем по переменной  $x$  обе части равенства (4). Имеем с учетом обозначения (5):

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2c - 2\lambda a = 2(c - \lambda a), \quad (10)$$

где вещественные числа  $a, c$  есть ненулевое решение системы (8). При этом параметр  $\alpha$  определен с точностью до множителя  $c$ , если  $c \neq 0$ , и с точностью до множителя  $a$ , если  $c = 0$ ,  $a \neq 0$ . Таким образом, при  $\text{Im } \lambda > 0$ ,  $\text{Im } \mu > 0$  система (8) всегда имеет ненулевое решение. Несложно показать также, что  $\alpha \neq 0$ , если числа  $a, b, c$  — не все нулевые. Лемма 3.1 доказана.

**Замечание 3.1.** Пусть числа  $\xi, \zeta \in \mathbb{C}$ . Формулы (8) и (9), то есть и квадратичная форма  $u(x, y)$  (5) не зависят от того, какое из этих двух чисел обозначено через  $\lambda$ , а какое — через  $\mu$ . Обозначим, например,  $\xi = \lambda$ . Тогда согласно (10) параметр  $\alpha$  будет иметь вид  $\alpha = 2(c - \xi a)$ . Соответственно, в этом случае  $\zeta = \mu$ , то есть в (4) имеем  $f_\mu(z) = \alpha(x + \zeta y)$ .

Перейдем непосредственно к описанию алгоритма построения решений задачи (3) в виде квадратичных вектор-форм, где  $\Gamma$  — некоторый эллипс. При этом будем использовать лемму 3.1. Пусть  $\lambda, \mu$  — собственные числа *нетреугольной*  $2 \times 2$ -матрицы  $J$ , которые лежат выше вещественной оси. Обозначим:

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad J - \mu E = \begin{pmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Пусть вектор  $\mathbf{x} = (1, 0)^T$ , тогда в обозначениях (11) вектор  $\mathbf{y} = (J - \mu E)\mathbf{x} = (a_{11} - \mu, a_{21}) \neq 0$ , так как матрица  $J$  нетреугольная и  $a_{21} \neq 0$ . Пусть  $E$  — единичная матрица. Имеем:

$$\begin{aligned} J\mathbf{y} &= J(J - \mu E)\mathbf{x} = (J + \lambda E - \lambda E)(J - \mu E)\mathbf{x} = (\lambda E + J - \lambda E)(J - \mu E)\mathbf{x} = \\ &= \lambda E(J - \mu E)\mathbf{x} + (J - \lambda E)(J - \mu E)\mathbf{x} = \lambda(J - \mu E)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}, \end{aligned} \quad (12)$$

так как согласно теореме Гамильтона-Кэли  $(J - \lambda E)(J - \mu E) = 0$ . Следовательно, вектор  $y = (J - \mu E)x = (a_{11} - \mu, a_{21})$  будет собственным для матрицы  $J$ , соответствующем ее собственному числу  $\lambda$ . При этом из равенства  $y = (J - \mu E)x$  получаем  $Jx = \mu x + y$ . Поэтому матрица  $J_1$  оператора  $J$  в специальном базисе  $Q_1 = (x, y)$  имеет вид

$$J_1 = Q_1^{-1}JQ_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad Q_1 = (x, y) = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} - \mu \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

**Замечание 3.2.** Из (13) следует, что при  $\lambda = \mu$  специальный базис  $Q_1$  матрицы  $J$  будет жордановым базисом.

Согласно (13)  $J = Q_1 J_1 Q_1^{-1}$ . Подставим правую часть этого равенства в (1):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - Q_1 J_1 Q_1^{-1} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

и умножим обе части (14) слева на матрицу  $Q_1^{-1}$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} [Q_1^{-1} \phi] - J_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} [Q_1^{-1} \phi] = 0. \quad (15)$$

Будем искать решение  $Q_1^{-1} \phi(z)$  уравнения (15) в виде

$$Q_1^{-1} \phi(z) = (g, iu)^T, \quad (16)$$

где  $u = u(x, y)$  – вещественная квадратичная форма. Тогда с учетом (15) и (13) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} g(z) \\ iu(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} g(z) \\ iu(x, y) \end{pmatrix} = 0. \quad (17)$$

Из (17) согласно (2) следует, что  $g(z) = g_\mu(z)$  – это произвольная  $\mu$ -голоморфная функция. Положим  $g_\mu(z) = \beta [z]_\mu^2 = \beta(x + \mu y)^2$ ,  $\beta \in \mathbb{C}$ , тогда согласно (17)

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -i \frac{\partial g_\mu}{\partial x} = -i \frac{\partial}{\partial x} [\beta(x + \mu y)^2] = -2i\beta(x + \mu y) = -2i\beta [z]_\mu. \quad (18)$$

К уравнению (18) применим лемму 3.1. Тогда в обозначениях (4) имеем  $\alpha = -2i\beta$ , то есть

$$g_\mu(z) = \beta [z]_\mu^2 = \frac{\alpha i}{2} [z]_\mu^2 = \frac{\alpha i}{2} (x + \mu y)^2, \quad \alpha = 2(c - \lambda a), \quad (19)$$

где число  $\alpha$  находим согласно (10). Квадратичную форму  $u = u(x, y)$  строим по формулам (5), (8) и (9). Таким образом, по построению и с учетом (16) функция  $\phi(z) = Q_1 \cdot (g, iu)^T$  будет аналитической по Дуглису с матрицей  $J$  (11). При этом согласно замечанию 2.1 функция

$$\phi(z) = \bar{a}_{21} \cdot Q_1 \cdot (g, iu)^T - (\xi_1, \xi_2)^T \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$$

будет аналитической по Дуглису с той же матрицей  $J$ . Выпишем подробно данную функцию с учетом (13) и (19):

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \bar{a}_{21} \cdot Q_1 \cdot (g_\mu, iu)^T - (\xi_1, \xi_2)^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{21} & \bar{a}_{21}(a_{11} - \mu) \\ 0 & |a_{21}|^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\alpha i}{2} [z]_\mu^2 \\ iu(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}_{21} \cdot \frac{\alpha i}{2} \cdot [z]_\mu^2 + i \cdot \bar{a}_{21}(a_{11} - \mu) \cdot u(x, y) \\ i \cdot |a_{21}|^2 \cdot u(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть при фиксированных собственных числах  $\lambda, \mu$  матрицы  $J$  коэффициенты  $a_{11}, a_{21}$  ее первого столбца таковы, что в (20)

$$\operatorname{Re} \left[ \bar{a}_{21} \cdot \frac{\alpha i}{2} \cdot [z]_\mu^2 + i \cdot \bar{a}_{21}(a_{11} - \mu) \cdot u(x, y) \right] = a_1 x^2 + 2c_1 xy + b_1 y^2, \quad a_1 b_1 - c_1^2 > 0. \quad (21)$$

Пусть квадратичная форма (31) – положительно определенная. Тогда при  $(\xi_1, \xi_2) = (1, 0)$  функция  $\phi(z)$  (20) будет обладать искомым свойством  $\operatorname{Re} \phi(z)|_\Gamma = 0$  на эллипсе

$$\Gamma : a_1 x^2 + 2c_1 xy + b_1 y^2 = 1.$$

Довольно очевидно, что коэффициенты  $a_{11}, a_{21}$  можно подобрать (и неединственным образом) так, чтобы выполнялось условие (31). Затем матрицу  $J$  восстанавливаем по известным ее собственным числам и элементам первого столбца – см. приведенное ниже замечание 3.3. Если квадратичная форма (31) – отрицательно определенная, то нужно в (20) взять  $(\xi_1, \xi_2) = (-1, 0)$ . Таким образом, искомое решение однородной задачи Шварца задачи (3) построено.

**Замечание 3.3.** Пусть заданы элементы  $a_{11}, a_{21}$  первого столбца матрицы  $J$  (11), а также заданы ее собственные числа  $\lambda, \mu$ . Тогда, как известно, второй столбец матрицы  $J$  однозначно восстанавливается на основании следующих двух равенств:  $a_{11} + a_{22} = \lambda + \mu$ ,  $\det J = \lambda \cdot \mu$ . Аналогично: пусть известны элементы  $a_{12}, a_{22}$  второго столбца матрицы  $J$  и ее собственные числа  $\lambda, \mu$ . Тогда первый столбец матрицы  $J$  однозначно восстанавливается, исходя из той же пары равенств.

Приведем два примера, построенные по описанному выше методу.

**Пример 3.1.** Пусть  $\lambda = \mu = 1 + i$ . Тогда согласно (9)  $a = 1, c = 1, b = 2$ , то есть  $u(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$ . Согласно (10)  $\alpha = -2i$ . Положим в (20)  $a_{11} = -2i, a_{21} = 1$ . Тогда функция  $\phi(z)$  (20) будет обладать свойством (31). Матрицу  $J$  восстанавливаем по известным элементам  $a_{11}, a_{21}$  ее первого столбца и кратному собственному числу  $\lambda$  (см. замечание 3.3). В итоге имеем:

$$\phi_1(z) = \bar{a}_{21} \cdot Q_1 \cdot (g, iu)^T - (1, 0)^T = \begin{pmatrix} 4x^2 + 8xy + 6y^2 - 1 - x^2i \\ (x^2 + 2xy + 2y^2)i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -2i & 8 - 6i \\ 1 & 2 + 4i \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Непосредственная подстановка в (1) показывает, что функция  $\phi_1(z)$  в (22) будет аналитической по Дуглису с данной матрицей  $J$ . При этом  $J$  имеет кратное собственное число  $\lambda = 1 + i$ . Имеем:  $\operatorname{Re} \phi_1(z)|_{\Gamma} = 0$  на эллипсе  $\Gamma: 4x^2 + 8xy + 6y^2 = 1$ .

**Пример 3.2.** Пусть  $\lambda = 2i, \mu = 1 + i$ . Тогда согласно (9)  $a = 3, c = 2, b = 8$ , то есть  $u(x, y) = 3x^2 + 4xy + 8y^2$ . Согласно (10)  $\alpha = 4 - 12i$ . Положим в (20)  $a_{11} = -2, a_{21} = -i$ . Тогда функция  $\phi(z)$  (20) будет обладать свойством (31). Далее восстанавливаем матрицу  $J$ . В итоге имеем:

$$\phi_2(z) = \bar{a}_{21} \cdot Q_1 \cdot (g, iu)^T - (1, 0)^T = \begin{pmatrix} 7x^2 - 4xy + 12y^2 - 1 + (9x^2 + 12xy + 4y^2)i \\ (3x^2 + 4xy + 8y^2)i \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 8 - 4i \\ -i & 3 + 3i \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Функция  $\phi_2(z)$  в (23) будет аналитической по Дуглису с матрицей  $J$  (24). При этом  $J$  имеет разные собственные числа  $\lambda = 2i, \mu = 1 + i$ . Имеем:  $\operatorname{Re} \phi_2(z)|_{\Gamma} = 0$  на эллипсе  $\Gamma: 7x^2 - 4xy + 12y^2 = 1$ .

Далее заметим, что те же самые рассуждения можно повести, если изначально в (12) взять вектор  $\mathbf{x} = (0, 1)^T$ . Дальнейшие преобразования аналогичны приведенным выше. Опишем коротко лишь их основные моменты. Вектор  $\mathbf{y} = (J - \mu E)\mathbf{x} = (a_{12}, a_{22} - \mu)$  будет собственным вектором, соответствующем другому собственному числу  $\lambda$  матрицы  $J$ . Это доказывается так же, как и (12). После преобразований получаем выражения, аналогичные (13):

$$J_2 = Q_2^{-1} J Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad Q_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} - \mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Число  $\alpha$  находим по той же формуле (10), квадратичную форму  $u(x, y)$  – по формулам (5), (8) и (9). В ходе дальнейших преобразований получаем следующий "зеркальный" аналог равенства (20):

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \bar{a}_{12} \cdot Q_2 \cdot (iu, g_{\mu})^T - (\xi_1, \xi_2)^T = \begin{pmatrix} |a_{12}|^2 & 0 \\ \bar{a}_{12}(a_{22} - \mu) & \bar{a}_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} iu(x, y) \\ \frac{\alpha i}{2} [z]_{\mu}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} i \cdot |a_{12}|^2 \cdot u(x, y) \\ \bar{a}_{12} \cdot \frac{\alpha i}{2} \cdot [z]_{\mu}^2 + i \cdot \bar{a}_{12}(a_{22} - \mu) \cdot u(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть в (25)

$$\operatorname{Re} \left[ \bar{a}_{12} \cdot \frac{\alpha i}{2} \cdot [z]_{\mu}^2 + i \cdot \bar{a}_{12}(a_{22} - \mu) \cdot u(x, y) \right] = a_1 x^2 + 2c_1 xy + b_1 y^2, \quad a_1 b_1 - c_1^2 > 0. \quad (26)$$

Пусть числа  $a_{12}, a_{22}$  таковы, что квадратичная форма (26) – положительно определенная. Тогда при  $(\xi_1, \xi_2) = (0, 1)^T$  функция (25) будет решением однородной задачи Шварца на эллипсе  $\Gamma: a_1 x^2 + 2c_1 xy + b_1 y^2 = 1$ . Затем согласно замечанию 3.3 матрицу  $J$  восстанавливаем по известным ее собственным числам и элементам второго первого столбца.

Заметим, что формулы (20) и (25) позволяют строить решения  $\phi(z)$  однородной задачи Шварца со свойством  $\operatorname{Re} \phi(z) = (P, 0)$ , либо  $\operatorname{Re} \phi(z) = (0, P)$ . Для того, чтобы получить решения задачи (3) со

свойством  $\operatorname{Re} \phi(z) = (P_1, P_2)$ , применим следующее преобразование. Пусть матрица  $C$  — вещественная и неособая. Тогда с учетом (1) имеем равенство

$$C \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - CJC^{-1} \cdot C \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad z \in D,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial y} [C\phi] - CJC^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [C\phi] = 0. \quad (27)$$

Согласно (27) и (1) функция  $\phi'(z) = C\phi(z)$  будет аналитической по Дуглису с матрицей  $J' = CJC^{-1}$ , которая подобна матрице  $J$ . Поэтому матрица  $J'$  имеет те собственные числа, что и матрица  $J$ . Очевидно, что если построено решение задачи (3) по формулам (20) или (25), то при соответствующем подборе матрицы  $C$  получим решение с требуемым свойством  $\operatorname{Re} \phi(z) = (P_1, P_2)$ .

Полученные в этом разделе результаты оформим в виде следующего утверждения.

**Теорема 3.1.** Пусть комплексные числа  $\lambda, \mu$  лежат выше вещественной оси. Тогда существуют нетреугольная  $2 \times 2$ -матрица  $J$ , имеющая собственные числа  $\lambda, \mu$ , и эллипс  $\Gamma$  такие, что для некоторого  $J$ -аналитического квадратичного вектор-полинома  $\phi(z)$  выполняется равенство (3).

Приведем четыре примера для иллюстрации сделанных выше построений.

**Пример 3.3.** Используем равенство (25). Пусть  $\lambda = i, \mu = 2i$ . Здесь  $\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 = 0$ , то есть из системы (8) имеем:  $a = a, c = 0, b = \lambda_2\mu_2a$ . Положим  $a = 1$ , тогда согласно (10)  $\alpha = -2i$ , и согласно (5)  $u(x, y) = x^2 + 2y^2$ . Имеем:

$$\phi_3(z) = \bar{a}_{12} \cdot Q_2 \cdot (iu, g_\mu)^T - (0, 1)^T = \begin{pmatrix} -3(x^2 + 2y^2)i \\ x^2 + 8y^2 - 1 - 4xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 2 & 4i \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Матрица  $J$  в (28) имеет разные собственные числа  $\lambda = i, \mu = 2i$ . При этом  $\operatorname{Re} \phi_3(z)|_\Gamma = 0$  на эллипсе  $\Gamma: x^2 + 8y^2 = 1$ .

**Пример 3.4.** Пусть  $\lambda = i, \mu = 2i$ , и пусть матрица  $J$  и функция  $\phi_3(z)$  заданы формулой (28). Имеем с учетом (27):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi'_3(z) = C \cdot \phi_3(z) = \begin{pmatrix} x^2 + 8y^2 - 1 - (3x^2 + 4xy + 6y^2)i \\ x^2 + 8y^2 - 1 - 4xyi \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$J' = CJC^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - i & 1 + 5i \\ 2 & -2 + 4i \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Матрица  $J'$  в (30) имеет те же собственные числа  $\lambda = i, \mu = 2i$ , что и подобная ей матрица  $J$  в (28). При этом в (13)  $\operatorname{Re} \phi'_3(z)|_\Gamma = 0$  на том же эллипсе  $\Gamma: x^2 + 8y^2 = 1$ .

**Пример 3.5.** Здесь так же используем равенство (25). Пусть  $\lambda = \mu = 3i$ . Тогда  $u(x, y) = x^2 + 9y^2$ . Имеем:

$$\phi_4(z) = \bar{a}_{12} \cdot Q_2 \cdot (iu, g_\mu)^T - (0, 1)^T = \begin{pmatrix} (x^2 + 9y^2)i \\ 7x^2 + 9y^2 - 1 + 18xyi \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ 16 & -i \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Матрица  $J$  в (31) имеет кратное собственное число  $\lambda = 3i$ . При этом  $\operatorname{Re} \phi_4(z)|_\Gamma = 0$  на эллипсе  $\Gamma: 7x^2 + 9y^2 = 1$ .

**Пример 3.6.** Пусть матрица  $J$  и функция  $\phi_4(z)$  заданы формулой (31). Имеем с учетом (27):

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi'_4(z) = C \cdot \phi_4(z) = \begin{pmatrix} 7x^2 + 9y^2 - 1 + (x^2 + 18xy + 9y^2)i \\ 7x^2 + 9y^2 - 1 + 18xyi \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$J' = CJC^{-1} = \begin{pmatrix} 16 + 7i & -15 - 8i \\ 16 & -16 - i \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Матрица  $J'$  в (33) имеет то же кратное собственное число  $\lambda = 3i$ , что и подобная ей матрица  $J$  в (31). При этом в (32)  $\operatorname{Re} \phi'_4(z)|_\Gamma = 0$  на том же эллипсе  $\Gamma: 7x^2 + 9y^2 = 1$ .

**4. Заключение.** Приведенный выше метод имеет то преимущество, что он позволяет быстро построить примеры решений однородной задачи Шварца. Метод универсален, то есть он подходит для матриц  $J$  как с кратными, так и с разными собственными числами. Следует отметить, что построение конкретных примеров все-же требует достаточно больших вычислений. Поэтому здесь обязательна проверка, то есть подстановка функции  $\phi(z)$  и матрицы  $J$  в равенство (1). Данная процедура была проделана автором для всех шести построенных выше примеров.

#### Список литературы

1. Douglis A. Function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1953;6:259–289.

2. Paskali D. Vecturs analytiques generalises. *Pure and Applied mathematics*. 1965;10:779–808.
3. Horvath J. A generalization of the Cauchy-Riemann equations. *Contrib. Differential Equations*. 1961;1:39–57.
4. Gilbert RP. Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity. *Proceedings of the Royal Society*. 1975;73:317–371.
5. Bojarski B. Theory of generalized analytic vector. *Annales Polonici Mathematici*. 1966;17(3):281–320.
6. Hile GN. Elliptic systems in the plane with order term and constant coefficients. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1978;3(10):949–977.
7. Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису. Белгород; 2016. 88 с.
8. Солдатов А.П. Эллиптические уравнения высокого порядка. *Дифференциальные уравнения*. 1989;25(1):136–142.
9. Soldatov AP. The Schwarz problem for Douglis analytic functions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011;2(173):221–224.
10. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Москва; 1948. 367 с.
11. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. Москва; 1966. 325 с.
12. Ieh RZ. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. *Pacific Journal of Mathematics*. 1990;142(2):379–399.
13. Жура Н.И. Об общих решениях систем Лерая-Дуглиса-Ниренберга с постоянными коэффициентами на плоскости. *Доклады РАН*. 1993;331(5):546–549.
14. Nikolaev VG. Schwarz Problem in Ellipse for Nondiagonalizable Matrices. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;6(251):876–901.
15. Николаев В.Г., Солдатов А.П. О решении задачи Шварца для  $J$ -аналитических функций в областях, ограниченных контуром Ляпунова. *Дифференциальные уравнения*. 2015;51(7):965–969.
16. Васильев В.Б., Николаев В.Г. О задаче Шварца для эллиптических систем первого порядка на плоскости. *Дифференциальные уравнения*. 2017;53(10):1351–1361.

#### References

1. Douglis A. Function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1953;6:259–289.
2. Paskali D. Vecturs analytiques generalises. *Pure and Applied mathematics*. 1965;10:779–808.
3. Horvath J. A generalization of the Cauchy-Riemann equations. *Contrib. Differential Equations*. 1961;1:39–57.
4. Gilbert RP. Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity. *Proceedings of the Royal Society*. 1975;73:317–371.
5. Bojarski B. Theory of generalized analytic vector. *Annales Polonici Mathematici*. 1966;17(3):281–320.
6. Hile GN. Elliptic systems in the plane with order term and constant coefficients. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1978;3(10):949–977.
7. Soldatov AP. 2016. Douglis analytic functions. Belgorod; 2016. 88 p.
8. Soldatov AP. 1989. Elliptic equations of high order. *Differential equations*. 1989;25(1):136–142. (in Russian)
9. Soldatov AP. The Schwarz problem for Douglis analytic functions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011;2(173):221–224.
10. Vekua IN. New methods of solving elliptic equations. Moscow; 1948. 367 p. (in Russian)
11. Bitsadze AV. Boundary value problems for second order elliptic equations. Moscow; 1966. 325 p. (in Russian)
12. Ieh RZ. Hyperholomorphic functions and higher order partial differentials equations in the plane. *Pacific Journal of Mathematics*. 1990;142(2):379–399.
13. Zhura NI. On the general solution of Leray-Douglis-Nirenberg systems with constant coefficients in the plane. *Reports of the RAN*. 1993;331(5):546–549. (in Russian).
14. Nikolaev VG. Schwarz Problem in Ellipse for Nondiagonalizable Matrices. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;6(251):876–901.
15. Nikolaev VG., Soldatov AP. On the solution of the Schwarz problem for  $J$ -analytic functions in a domain bounded by a Lyapunov contour. *Differential Equations*. 2015;51(7):962–966.
16. Vasil'ev VB., Nikolaev VG. Schwarz problem for first-order elliptic systems on the plane. *Differential Equations*. 2017;53(10):1318–1328.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.08.2023

Поступила после рецензирования 27.09.2023

Принята к публикации 30.09.2023

Received August 15, 2023

Revised September 27, 2023

Accepted September 30, 2023

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Николаев Владимир Геннадьевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**

**Vladimir G. Nikolaev** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Novgorod State University named after Yaroslav-the-Wise, Velikiy Novgorod, Russia

## Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния

<sup>1,2</sup> Курина Г. А. , <sup>3</sup> Хоай Н. Т. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком)

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет,  
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1

<sup>2</sup> Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,  
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2  
[kurina@math.vsu.ru](mailto:kurina@math.vsu.ru)

<sup>3</sup> Научный Университет, Вьетнамский Национальный Университет,  
Вьетнам, г. Ханой, Нгуен Трай, 334  
[nguyenthihoai@hus.edu.vn](mailto:nguyenthihoai@hus.edu.vn)

Посвящается светлой памяти А. Б. Васильевой (1926 - 2018) и В. Ф. Бутузова (1939 - 2021)

**Аннотация.** В работе рассматривается новый метод построения асимптотических приближений любого порядка для решения задачи, полученной из условий оптимальности для сингулярно возмущенных задач оптимального управления со слабым управлением и пересекающимися в одной внутренней точке траекториями вырожденного уравнения состояния для медленной переменной при наличии двух различных решений вырожденного уравнения состояния для быстрой переменной относительно этой переменной. Асимптотика содержит регулярные функции и пограничные функции четырех типов, две из которых существенны в окрестности точки пересечения. Предлагаемый метод построения асимптотики основан на решении задач с фиксированным условием в начале или в конце рассматриваемого промежутка для аргумента.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, сингулярные возмущения, критический случай

**Благодарности:** Работа Г. А. Куриной поддержана РФФ, грант 21-11-00202. Статья написана во время работы авторов во Вьетнамском институте перспективных исследований в области математики (VIASM). Авторы благодарят VIASM за создание плодотворной исследовательской среды во время визита.

**Для цитирования:** Курина Г. А., Хоай Н. Т. 2023. Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 313–329. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-313-329

Original Research

## A New Algorithm of Constructing Asymptotic Solution of Singularly Perturbed Optimal Control Problems with Intersecting Trajectories of Degenerate State Equation

Galina A. Kurina , Nguyen T. Hoai 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak)

<sup>1</sup> Voronezh State University,  
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia

<sup>2</sup> Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences,  
44/2 Vavilova st., Moscow, 119333, Russia  
[kurina@math.vsu.ru](mailto:kurina@math.vsu.ru)

<sup>3</sup> University of Science, Vietnam National University,  
334, Nguyen Trai, Hanoi, Vietnam  
[nguyenthihoai@hus.edu.vn](mailto:nguyenthihoai@hus.edu.vn)

**Abstract.** The paper deals with a new method of constructing asymptotic approximations of any order to a solution of a two-point boundary value problem following from control optimality conditions for singularly perturbed optimal control problems with a weak control in a critical case. Namely, differential state equations contain a small parameter before a derivative for fast variables. If this parameter is equal to zero, then the degenerate state equation for the fast variable has two

different solutions with respect to this fast variable and some corresponding trajectories for slow variables intersect each other at one internal point. The asymptotics contains regular functions, depending on the original argument, and boundary functions of four types, two of them are essential in a vicinity of the intersection point. The suggested new method of asymptotics construction is based on solving equations with a fixed value in the initial point or in the end point of the considered interval for the independent variable. Solutions of boundary value problems are not used.

**Keywords:** Optimal Control, Singular Perturbations, Critical Case

**Acknowledgements:** The work of Galina Kurina was supported by the Russian Science Foundation, Project No. 21-11-00202.

**For citation:** Kurina G. A., Hoai N. T. 2023. A New Algorithm of Constructing Asymptotic Solution of Singularly Perturbed Optimal Control Problems with Intersecting Trajectories of Degenerate State Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 313–329. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-313-329

**1. Введение.** В зависимости от типа задачи и целей исследования для изучения сингулярно возмущенных задач используются разные методы (см., например, [1, 2, 3, 4, 5]). Иногда разные методы комбинируют друг с другом. В частности, найденные асимптотические приближения решения могут быть использованы в итерационных методах в качестве начальных приближений.

При асимптотическом анализе сингулярно возмущенных задач с малым параметром при производной часто предполагается, что вырожденное уравнение (при нулевом значении параметра) однозначно разрешимо относительно быстрой переменной (стандартный или некритический случай). Такая же ситуация имеет место в теории сингулярно возмущенных задач оптимального управления (см. обзоры [6, 7, 8]).

Если же вырожденное уравнение не разрешимо однозначно относительно быстрой переменной, задача усложняется (нестандартный или критический случай). Такое классическое определение критического случая дано, например, в [9]. Критический случай изучался и для задач оптимального управления, например, в [10, 11].

Траектории вырожденной задачи могут быть пересекающимися, как в химической кинетике при моделировании быстрых бимолекулярных реакций [12, 13]. Асимптотическое поведение решений различных типов начальных и краевых задач для сингулярно возмущенных уравнений с пересекающимися траекториями вырожденной задачи изучалось, например, в [1, 12, 13, 14, 15].

Насколько нам известно, сингулярно возмущенные задачи оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния впервые изучались в [16]. В этой работе медленные и быстрые переменные состояния, а также управление были скалярными, и только асимптотическое приближение нулевого порядка к оптимальному управлению и первого порядка к оптимальной траектории были построены при помощи так называемого метода прямой схемы, состоящего из непосредственной подстановки постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и получении серии задач для нахождения членов асимптотики. Задача из [16] рассматривалась также в [17]. В отличие от [16], в [17] для построения асимптотического решения исследуемой задачи оптимального управления используется асимптотическое решение двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления. Предлагаемый в [17] алгоритм построения асимптотики основан на решении краевых задач. Следует отметить, что статья [17] опубликована в трудах конференции, поэтому изложение достаточно краткое, например, подробно обсуждается только построение асимптотического приближения первого порядка.

Задача вариационного исчисления с контрастной структурой типа ступеньки, в асимптотике решения которой присутствуют пограничные функции, существенные в окрестности внутренней точки, изучалась в [18].

В настоящей статье мы рассматриваем обобщение на случай многомерной медленной переменной задачи из [16] и [17], где вырожденное уравнение состояния для быстрой переменной имеет два решения и некоторые соответствующие им траектории состояния для медленной переменной пересекаются в одной внутренней точке. В отличие от [16] и [17], будет представлено детальное изложение алгоритма построения асимптотического решения любого порядка краевой задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Асимптотика содержит регулярные функции, зависящие от исходного аргумента, и пограничные функции четырех типов, два из которых существенны в окрестности точки пересечения. Алгоритм асимптотического решения, предложенный в этой статье, проще, чем алгоритм в [17], основанный на решении краевых задач, поскольку в новом алгоритме используются решения уравнений с заданным условием в начале или в конце рассматриваемого промежутка независимой переменной. В статье также приводится пример, подробно иллюстрирующий построение асимптотического решения первого порядка с помощью предложенного алгоритма.

Асимптотическое решение краевой задачи было построено в [1] при условиях, аналогичных предположениям в этой статье, но быстрая переменная там является скалярной в отличие от рассматриваемой здесь двухточечной краевой задачи с двумя быстрыми переменными. Алгоритм построения асимптоти-

ки в настоящей статье отличается от [1], где сначала рассматривается асимптотика вспомогательной задачи, содержащей пограничные функции двух типов, существенные в окрестности внутренней точки пересечения.

На протяжении всей статьи  $\varepsilon > 0$  – малый параметр, штрих означает транспонирование, а коэффициент при  $\varepsilon^i$  в разложении любой функции, например,  $f$  по целым неотрицательным степеням  $\varepsilon$  обозначается  $f_i$ .

**2. Постановка задачи.** Рассматриваем следующую задачу

$$P_\varepsilon: J_\varepsilon(u) = \int_0^T \left( F(t, \varepsilon)x + S(t, \varepsilon)y + \frac{1}{2}\varepsilon R(t, \varepsilon)u^2 \right) dt \rightarrow \min_u, \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + B(t, \varepsilon)y + \varepsilon C(t, \varepsilon)u + f(t, \varepsilon), \quad (2)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = G(x, y, t, \varepsilon) + \varepsilon D(t, \varepsilon)u,$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad x(T, \varepsilon) = x^T. \quad (3)$$

Здесь  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$  – фиксировано,  $x = x(t, \varepsilon) \in R^m$ ,  $y = y(t, \varepsilon) \in R$ ,  $u = u(t, \varepsilon) \in R$ ,  $R(t, 0) > 0$ , все функции в (2), (3) имеют подходящий размер и достаточно гладкие относительно своих аргументов.

Если  $\varepsilon = 0$ , мы получаем из (3) вырожденное уравнение состояния

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0(t)x + B_0(t)y + f_0(t), \\ 0 &= G_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что выполняются шесть условий (I – VI).

I. Уравнение (4) имеет два решения относительно быстрой переменной:  $y = y^1(x, t)$  и  $y = y^2(x, t)$ .

II. Задачи

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B_0(t)y^1(x, t) + f_0(t), \quad x(0) = x^0,$$

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + B_0(t)y^2(x, t) + f_0(t), \quad x(T) = x^T$$

имеют единственные решения  $x^1(t)$  и  $x^2(t)$  соответственно.

III. Кривые  $x^1(t)$  и  $x^2(t)$  пересекаются друг с другом в одной фиксированной точке  $t = t_1 \in (0, T)$ .

IV.  $G_{y_0}(x^1(t), y^1(x^1(t), t), t) > 0$  для  $t \in [0, t_1]$  и  $G_{y_0}(x^2(t), y^2(x^2(t), t), t) < 0$  для  $t \in [t_1, T]$ .

V. Для любого  $y_0$  решение задачи

$$\frac{d\Pi\tilde{y}}{d\tau_1} = G(x^2(t_1), \Pi\tilde{y}, t_1, 0), \quad \tau_1 \geq 0, \quad \Pi\tilde{y}(0) = y_0$$

удовлетворяет условию  $\Pi\tilde{y}(\tau_1) \rightarrow y^2(x^2(t_1), t_1)$  при  $\tau_1 \rightarrow +\infty$ , и решение задачи

$$\frac{dQ\tilde{y}}{d\tau_1} = G(x^1(t_1), Q\tilde{y}, t_1, 0), \quad \tau_1 \leq 0, \quad Q\tilde{y}(0) = y_0$$

удовлетворяет условию  $Q\tilde{y}(\tau_1) \rightarrow y^1(x^1(t_1), t_1)$  при  $\tau_1 \rightarrow -\infty$ .

VI. При достаточно малых  $\varepsilon$  задача  $P_\varepsilon$  имеет единственное решение, удовлетворяющее условию оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, состоящего из (3), (3) и соотношений, содержащих сопряженные переменные  $\varphi$  и  $\psi$ ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = -A(t, \varepsilon)' \varphi - G_x(x, y, t, \varepsilon)' \psi + F(t, \varepsilon)', \quad (5)$$

$$\varepsilon \frac{d\psi}{dt} = -B(t, \varepsilon)' \varphi - G_y(x, y, t, \varepsilon) \psi + S(t, \varepsilon),$$

$$R(t, \varepsilon)u = C(t, \varepsilon)' \varphi + D(t, \varepsilon) \psi,$$

$$\psi(0, \varepsilon) = 0, \quad \psi(T, \varepsilon) = 0 \quad (6)$$

(см., например, [19]).

При достаточно малых  $\varepsilon$  оптимальное управление определяется выражением

$$u = R(t, \varepsilon)^{-1} (C(t, \varepsilon)' \varphi + D(t, \varepsilon) \psi). \quad (7)$$

Некоторые достаточные условия принципа максимума Понтрягина приведены в [20].

Для построения асимптотики еще потребуется дополнительное условие VII, которое будет сформулировано позже.

**3. Формализм построения асимптотики.** Подставляя  $u(t, \varepsilon)$  из (7) в (3), получаем двухточечную краевую задачу (3), (3), (5), (6) для определения функции  $v(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon)', \varphi(t, \varepsilon)', y(t, \varepsilon), \psi(t, \varepsilon))'$ . Асимптотическое решение полученной задачи будет построено в виде  $v(t, \varepsilon) = \overset{(1)}{v}(t, \varepsilon)$  при  $t \in [0, t_1]$  и  $v(t, \varepsilon) = \overset{(2)}{v}(t, \varepsilon)$  для  $t \in [t_1, T]$ , где

$$\overset{(j)}{v}(t, \varepsilon) = \overset{(j)}{v}(t, \varepsilon) + \Pi v(\tau_{j-1}, \varepsilon) + Q v(\tau_j, \varepsilon), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь  $\overset{(j)}{v}(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(j)}{v}_i(t)$ ,  $\Pi v(\tau_{j-1}, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i v(\tau_{j-1})$ ,  $Q v(\tau_j, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i v(\tau_j)$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_2 = T$ ,  $\tau_j = (t - t_j)/\varepsilon$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Черта означает регулярные функции, зависящие от  $t$ . Символы  $\Pi$  и  $Q$  обозначают пограничные функции экспоненциального типа существенные вблизи левого и правого концов отрезка  $[t_{j-1}, t_j]$ , зависящие от  $\tau_{j-1}$  и  $\tau_j$  соответственно,  $j = 1, 2$ . Такие функции будем называть  $\Pi$ -функциями и  $Q$ -функциями. Для построения асимптотического решения на  $[0, t_1]$  будем использовать функцию  $y^1(x, t)$ , а на  $[t_1, T]$  –  $y^2(x, t)$ .

Система (3), (3), (5)–(7) может быть записана в виде двух систем  $P_1$  и  $P_2$  ( $P_1$  соответствует  $j = 1$ ,  $P_2$  соответствует  $j = 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{d \overset{(j)}{x}}{dt} &= A(t, \varepsilon) \overset{(j)}{x} + B(t, \varepsilon) \overset{(j)}{y} + \varepsilon W_1(t, \varepsilon) \overset{(j)}{\varphi} + \varepsilon W_2(t, \varepsilon) \overset{(j)}{\psi} + f(t, \varepsilon), \\ \frac{d \overset{(j)}{\varphi}}{dt} &= -A(t, \varepsilon)' \overset{(j)}{\varphi} - G_x(\overset{(j)}{x}, \overset{(j)}{y}, t, \varepsilon)' \overset{(j)}{\psi} + F(t, \varepsilon)', \\ \varepsilon \frac{d \overset{(j)}{y}}{dt} &= G(\overset{(j)}{x}, \overset{(j)}{y}, t, \varepsilon) + \varepsilon W_2(t, \varepsilon)' \overset{(j)}{\varphi} + \varepsilon W_3(t, \varepsilon) \overset{(j)}{\psi}, \\ \varepsilon \frac{d \overset{(j)}{\psi}}{dt} &= -B(t, \varepsilon)' \overset{(j)}{\varphi} - G_y(\overset{(j)}{x}, \overset{(j)}{y}, t, \varepsilon) \overset{(j)}{\psi} + S(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (9)$$

$$t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, 2,$$

( $W_1(t, \varepsilon) = C(t, \varepsilon)C(t, \varepsilon)'/R(t, \varepsilon)$ ,  $W_2(t, \varepsilon) = C(t, \varepsilon)D(t, \varepsilon)/R(t, \varepsilon)$ ,  $W_3(t, \varepsilon) = D(t, \varepsilon)^2/R(t, \varepsilon)$ ) со следующими условиями при  $t = 0$  для системы  $P_1$

$$\overset{(1)}{x}(0, \varepsilon) = x^0, \quad \overset{(1)}{\varphi}(0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(1)}{\varphi}_i, \quad \overset{(1)}{y}(0, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(1)}{y}_i, \quad \overset{(1)}{\psi}(0, \varepsilon) = 0, \quad (10)$$

и условиями при  $t = T$  для системы  $P_2$

$$\overset{(2)}{x}(T, \varepsilon) = x^T, \quad \overset{(2)}{\varphi}(T, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(2)}{\varphi}_i, \quad \overset{(2)}{y}(T, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \overset{(2)}{y}_i, \quad \overset{(2)}{\psi}(T, \varepsilon) = 0, \quad (11)$$

где значения  $\overset{(j)}{\varphi}_i$ ,  $\overset{(j)}{y}_i$ ,  $j = 1, 2$  и  $i = 0, 1, 2, \dots$ , пока неизвестны.

В дальнейшем также будем использовать условие непрерывности решения в точке  $t_1$ , т.е.

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{x}(t_1, \varepsilon) &= \overset{(2)}{x}(t_1, \varepsilon), & \overset{(1)}{\varphi}(t_1, \varepsilon) &= \overset{(2)}{\varphi}(t_1, \varepsilon), \\ \overset{(1)}{y}(t_1, \varepsilon) &= \overset{(2)}{y}(t_1, \varepsilon), & \overset{(1)}{\psi}(t_1, \varepsilon) &= \overset{(2)}{\psi}(t_1, \varepsilon). \end{aligned} \quad (12)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} H(\overset{(1)}{x}(t_1, \varepsilon), \overset{(2)}{x}(t_1, \varepsilon)) &= \overset{(1)}{x}(t_1, \varepsilon) - \overset{(2)}{x}(t_1, \varepsilon) = 0, \\ K(\overset{(1)}{\varphi}(t_1, \varepsilon), \overset{(2)}{\varphi}(t_1, \varepsilon)) &= \overset{(1)}{\varphi}(t_1, \varepsilon) - \overset{(2)}{\varphi}(t_1, \varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

$$M(\overset{(1)}{\psi}(t_1, \varepsilon), \overset{(2)}{\psi}(t_1, \varepsilon)) = \overset{(1)}{\psi}(t_1, \varepsilon) - \overset{(2)}{\psi}(t_1, \varepsilon) = 0.$$

Подставив разложение (7) в выражения для  $H, K, M$ , получаем коэффициенты при  $\varepsilon^i$  ( $i \geq 0$ ) в разложениях этих выражений

$$\begin{aligned} H_i &= \overset{(1)}{\bar{x}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i x(0) - \overset{(2)}{\bar{x}}_i(t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_i x(0) = 0, \\ K_i &= \overset{(1)}{\bar{\varphi}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i \varphi(0) - \overset{(2)}{\bar{\varphi}}_i(t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_i \varphi(0) = 0, \\ M_i &= \overset{(1)}{\bar{\psi}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i \psi(0) - \overset{(2)}{\bar{\psi}}_i(t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_i \psi(0) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично [1], функция  $\overset{(j)}{g}(\bar{v}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$  представляется в виде

$$\overset{(j)}{g}(t, \varepsilon) + \overset{(j)}{\Pi} g(\tau_{j-1}, \varepsilon) + \overset{(j)}{Q} g(\tau_j, \varepsilon),$$

где

$$\overset{(j)}{g}(t, \varepsilon) = \overset{(j)}{g}(\bar{v}(t), t, \varepsilon),$$

$$\overset{(j)}{\Pi} g(\tau_{j-1}, \varepsilon) = \overset{(j)}{g}(\bar{v}(t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}, \varepsilon) + \overset{(j)}{\Pi} v(\tau_{j-1}, \varepsilon), t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}, \varepsilon) - \overset{(j)}{g}(\bar{v}(t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}, \varepsilon), t_{j-1} + \varepsilon\tau_{j-1}, \varepsilon),$$

$$\overset{(j)}{Q} g(\tau_j, \varepsilon) = \overset{(j)}{g}(\bar{v}(t_j + \varepsilon\tau_j, \varepsilon) + \overset{(j)}{Q} v(\tau_j, \varepsilon), t_j + \varepsilon\tau_j, \varepsilon) - \overset{(j)}{g}(\bar{v}(t_j + \varepsilon\tau_j, \varepsilon), t_j + \varepsilon\tau_j, \varepsilon).$$

Далее будем обозначать через  $\overset{(j)}{G}(t), \overset{(j)}{\Pi} G(\tau_{j-1}), \overset{(j)}{Q} G(\tau_{j-1})$  значения функции  $G(z, t, \varepsilon)$  ( $z = (x', y)'$ ), при  $\varepsilon = 0$  и  $z = \overset{(j)}{z}_0(t), t \in [t_{j-1}, t_j], z = \overset{(j)}{z}_0(t_{j-1}) + \overset{(j)}{\Pi}_0 z(\tau_{j-1}), t = t_{j-1}, z = \overset{(j)}{z}_0(t_j) + \overset{(j)}{Q}_0 z(\tau_j), t = t_j$  соответственно. Члены разложения с отрицательными индексами будем считать равными нулю.

Подставим разложение (7) в систему (9), равенства (10), (11) и третье равенство в (12), затем, учитывая экспоненциальный характер пограничных функций, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , отдельно зависящие от регулярных и разных пограничных функций. Вводя обозначение  $y_i = \overset{(1)}{\bar{y}}_i(t_1) + \overset{(1)}{Q}_i y(0) = \overset{(2)}{\bar{y}}_i(t_1) + \overset{(2)}{\Pi}_i y(0)$ , где  $y_i$  пока неизвестно, в результате получаем соотношения для определения членов асимптотики.

Итак, функции  $\overset{(j)}{v}_i(t), t \in [t_{j-1}, t_j], j = 1, 2$  являются решением задач

$$\frac{d \overset{(j)}{\bar{x}}_i}{dt} = A_0(t) \overset{(j)}{\bar{x}}_i + B_0(t) \overset{(j)}{\bar{y}}_i + \begin{cases} f_0(t), & i = 0 \\ W_{10}(t) \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_{i-1} + W_{20}(t) \overset{(j)}{\bar{\psi}}_{i-1} + \overset{(j)}{\xi}_i(t), & i \geq 1, \end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{d \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_i}{dt} = -A_0(t)' \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_i - \overset{(j)}{G}_x(t)' \overset{(j)}{\bar{\psi}}_i + \begin{cases} F_0(t)', & i = 0, \\ -A_1(t)' \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_{i-1} - (\overset{(j)}{G}_{xx}(t)' \overset{(j)}{\bar{x}}_1 + \overset{(j)}{G}_{xy}(t)' \overset{(j)}{\bar{y}}_1 + \\ + \overset{(j)}{G}_{xe}(t)' \overset{(j)}{\bar{\psi}}_{i-1} + F_i(t)' = \overset{(j)}{\Phi}_i(t), & i = 1, \\ \overset{(j)}{\Phi}_i(t) - (\overset{(j)}{G}_{xx}(t)' \overset{(j)}{\bar{x}}_i + \overset{(j)}{G}_{xy}(t)' \overset{(j)}{\bar{y}}_i) \overset{(j)}{\bar{\psi}}_0 + \overset{(j)}{\zeta}_i(t), & i > 1, \end{cases} \tag{15}$$

$$0 = \begin{cases} \overset{(j)}{G}(t), \\ \overset{(j)}{G}_x(t) \overset{(j)}{\bar{x}}_i + \overset{(j)}{G}_y(t) \overset{(j)}{\bar{y}}_i + W_{20}(t)' \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_{i-1} + W_{30}(t) \overset{(j)}{\bar{\psi}}_{i-1} + \overset{(j)}{\eta}_i(t), & i > 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$0 = -B_0(t)' \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_i - \overset{(j)}{G}_y(t) \overset{(j)}{\bar{\psi}}_i + \begin{cases} S_0(t), & i = 0, \\ -B_1(t)' \overset{(j)}{\bar{\varphi}}_{i-1} - (\overset{(j)}{G}_{yx}(t) \overset{(j)}{\bar{x}}_1 + \overset{(j)}{G}_{yy}(t) \overset{(j)}{\bar{y}}_1 + \\ + \overset{(j)}{G}_{ye}(t) \overset{(j)}{\bar{\psi}}_{i-1} + S_i(t) - \frac{d \overset{(j)}{\bar{\psi}}_{i-1}}{dt} = \overset{(j)}{\Psi}_i(t), & i = 1, \\ \overset{(j)}{\Psi}_i(t) - (\overset{(j)}{G}_{yx}(t) \overset{(j)}{\bar{x}}_i + \overset{(j)}{G}_{yy}(t) \overset{(j)}{\bar{y}}_i) \overset{(j)}{\bar{\psi}}_0 + \overset{(j)}{\theta}_i(t), & i > 1, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{(1)}(0) + \Pi_i x(0) &= \begin{cases} x^0, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} & \bar{\varphi}_i^{(1)}(0) + \Pi_i \varphi(0) &= \varphi_i^{(1)}, \\ \bar{x}_i^{(2)}(T) + Q_i x(0) &= \begin{cases} x^T, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} & \bar{\varphi}_i^{(2)}(T) + Q_i \varphi(0) &= \varphi_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\bar{\xi}_i^{(j)}(t)$ ,  $\bar{\zeta}_i^{(j)}(t)$ ,  $\bar{\eta}_i^{(j)}(t)$ ,  $\bar{\theta}_i^{(j)}(t)$  – известные функции, зависящие от регулярных членов асимптотики (7) для  $x$ ,  $y$  порядка меньше  $i$  и  $\varphi$ ,  $\psi$  порядка меньше  $i - 1$ .

Пограничные функции существенные вблизи левого конца интервала  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $j = 1, 2$ , (П-функции, зависящие от  $\tau_{j-1} \geq 0$ ) удовлетворяют системе

$$\frac{d \Pi_i x^{(j)}}{d\tau_{j-1}} = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ A_0(t_{j-1}) \Pi_{i-1} x^{(j)} + B_0(t_{j-1}) \Pi_{i-1} y^{(j)} = \Pi X_i(\tau_{j-1}), & i = 1, \\ \Pi X_i(\tau_{j-1}) + \Pi \bar{\xi}_i^{(j)}(\tau_{j-1}), & i > 1, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\Pi \bar{\xi}_i^{(j)}(\tau_{j-1})$  – известные П-функции, зависящие от П-функций асимптотики (7), порядок которых меньше  $i - 1$ ,

$$\frac{d \Pi_i \varphi^{(j)}}{d\tau_{j-1}} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ -A_0(t_{j-1})' \Pi_{i-1} \varphi^{(j)} - \Pi G_x(\tau_{j-1})' \Pi_{i-1} \psi^{(j)} - \\ - (\Pi G_x(\tau_{j-1})' - \bar{G}_x(t_{j-1})') \bar{\psi}_{i-1}^{(j)}(t_{j-1}) = \Pi \Phi_i(\tau_{j-1}), & i = 1, \\ \Pi \Phi_i(\tau_{j-1}) - (\Pi G_{xx}(\tau_{j-1})' \Pi_{i-1} x^{(j)} + \Pi G_{xy}(\tau_{j-1})' \Pi_{i-1} y^{(j)}) \times \\ \times (\bar{\psi}_0^{(j)}(t_{j-1}) + \Pi_0 \psi^{(j)}) + \Pi \bar{\zeta}_i^{(j)}(\tau_{j-1}), & i > 1, \end{cases} \quad (20)$$

где  $\Pi \bar{\zeta}_i^{(j)}(\tau_{j-1})$  – известные П-функции, зависящие от регулярных членов асимптотики (7) для  $x$ ,  $y$  порядка меньше  $i$  и  $\psi$  порядка меньше  $i - 1$ , а также от П-функций, порядок которых меньше  $i - 1$ ,

$$\frac{d \Pi_i y^{(j)}}{d\tau_{j-1}} = \begin{cases} \Pi G(\tau_{j-1}), & i = 0, \\ \Pi G_x(\tau_{j-1}) \Pi_i x^{(j)} + \Pi G_y(\tau_{j-1}) \Pi_i y^{(j)} + (\Pi G_x(\tau_{j-1}) - \bar{G}_x(t_{j-1})) \bar{x}_i^{(j)}(t_{j-1}) + \\ + (\Pi G_y(\tau_{j-1}) - \bar{G}_y(t_{j-1})) \bar{y}_i^{(j)}(t_{j-1}) + \Pi \bar{\eta}_i^{(j)}(\tau_{j-1}), & i > 0, \end{cases} \quad (21)$$

где  $\Pi \bar{\eta}_i^{(j)}(\tau_{j-1})$  – известные П-функции, зависящие от регулярных членов асимптотики для  $x$ ,  $y$ , а также от П-функций асимптотики (7) порядка меньше  $i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d \Pi_i \psi^{(j)}}{d\tau_{j-1}} &= -B_0(t_{j-1})' \Pi_i \varphi^{(j)} - \Pi G_y(\tau_{j-1}) \Pi_i \psi^{(j)} - (\Pi G_y(\tau_{j-1}) - \bar{G}_y(t_{j-1})) \bar{\psi}_i^{(j)}(t_{j-1}) + \\ &+ \begin{cases} 0, & i = 0, \\ - (\Pi G_{yx}(\tau_{j-1}) \Pi_i x^{(j)} + \Pi G_{yy}(\tau_{j-1}) \Pi_i y^{(j)}) (\bar{\psi}_0^{(j)}(t_{j-1}) + \Pi_0 \psi^{(j)}) - \\ - ((\Pi G_{yx}(\tau_{j-1}) - \bar{G}_{yx}(t_{j-1})) \bar{x}_i^{(j)}(t_{j-1}) + \\ + (\Pi G_{yy}(\tau_{j-1}) - \bar{G}_{yy}(t_{j-1})) \bar{y}_i^{(j)}(t_{j-1})) \bar{\psi}_0^{(j)}(t_{j-1}) - \\ - (\Pi G_{yx}(\tau_{j-1}) \bar{x}_i^{(j)}(t_{j-1}) + \Pi \bar{G}_{yy}(t_{j-1}) \bar{y}_i^{(j)}(t_{j-1})) \Pi_0 \psi^{(j)} + \Pi \bar{\theta}_i^{(j)}(\tau_{j-1}), & i > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\Pi \bar{\theta}_i^{(j)}(\tau_{j-1})$  – известные П-функции, зависящие от членов регулярной асимптотики для  $x$ ,  $y$ ,  $\psi$ , а также от П-функций асимптотики (7) порядка меньше  $i$ .

П-функции удовлетворяют следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} \Pi_i x(+\infty) = \Pi_i \varphi(+\infty) = 0, & \quad \Pi_i y(+\infty) = 0, & \quad \bar{y}_i^{(2)}(t_1) + \Pi_i y(0) = y_i \\ \bar{\psi}_i^{(1)}(0) + \Pi_i \psi(0) = 0, & \quad \Pi_i \psi(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения для пограничных функций существенных вблизи правого конца отрезка  $[t_{j-1}, t_j]$  ( $Q$ -функций)  $Q_i v(\tau_j)$  получаются из уравнений для  $\Pi_i v(\tau_{j-1})$  заменой символа  $\Pi$  на  $Q$ ,  $\tau_{j-1}$  на  $\tau_j$  и  $t_{j-1}$  на  $t_j$ ,  $j = 1, 2$ .  $Q$ -функции удовлетворяют следующим краевым условиям

$$\begin{aligned} Q_i x(-\infty) = Q_i \varphi(-\infty) = 0, \quad \bar{y}_i^{(1)}(t_1) + Q_i y(0) = y_i, \quad Q_i y(-\infty) = 0, \\ Q_i \psi(-\infty) = 0, \quad \bar{\psi}_i^{(2)}(T) + Q_i \psi(0) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

**4. Приближение нулевого порядка.** Из уравнений для пограничных функций нулевого порядка для медленных переменных и условий (23), (24) следует, что

$$\Pi_0 x(\tau_{j-1}) = \Pi_0 \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0, \quad Q_0 x(\tau_j) = Q_0 \varphi(\tau_j) \equiv 0, \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

В силу условий I – III и соотношений (25) находим из первого уравнения в (16), уравнения (14) и равенств (18) при  $i = 0$  решение

$$\bar{x}_0^{(j)}(t) = x^j(t), \quad \bar{y}_0^{(j)}(t) = y^j(x^j(t), t) = y^j(\bar{x}_0^{(j)}(t), t), \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

С учетом (25) имеем  $H_0 = 0$  (см. (13)).

Ввиду условия IV уравнение (17) при  $i = 0$  разрешимо относительно  $\bar{\psi}_0^{(j)}$ . Подставляя найденные таким образом функции  $\bar{\psi}_0^{(j)}$  в (15) при  $i = 0$ , получаем линейную систему относительно  $\bar{\varphi}_0^{(j)}(t)$  с условиями (18) при  $i = 0$ , зависящими от неизвестного вектора  $\bar{\varphi}_0^{(j)}$ , решением которой является

$$\bar{\varphi}_0^{(j)}(t) = \bar{\varphi}_0^{(j)}(\bar{\varphi}_0, t), \quad (27)$$

также имеем

$$\bar{\psi}_0^{(j)}(t) = \bar{\psi}_0^{(j)}(\bar{\varphi}_0, t), \quad j = 1, 2. \quad (28)$$

В силу условия IV и теоремы о неустойчивости по первому приближению [21] из (21) при  $i = 0$ ,  $j = 1$ , (23), уравнения для  $Q_0 y(\tau_2)$  и (24) следует что

$$\Pi_0 y(\tau_0) \equiv 0, \quad Q_0 y(\tau_2) \equiv 0. \quad (29)$$

Поскольку  $\bar{y}_0^{(j)}(t)$ ,  $j = 1, 2$  известны, отсюда и из (10), (11) получаем  $\bar{y}_0^{(1)} = \bar{y}_0^{(1)}(0)$  и  $\bar{y}_0^{(2)} = \bar{y}_0^{(2)}(T)$ .

Принимая во внимание (21) при  $i = 0$ ,  $j = 2$ , (23), уравнение для  $Q_0 y(\tau_1)$ , (24), а также условия IV, V, с учетом Леммы 3.1 в [1] получаем пограничные функции соответствующего экспоненциального типа, зависящие от еще неизвестного значения  $y_0$ , а именно

$$\Pi_0 y(\tau_1) = \Pi_0 y(y_0, \tau_1), \quad Q_0 y(\tau_1) = Q_0 y(y_0, \tau_1). \quad (30)$$

С учетом (25), (29) имеем

$$\Pi G_z(\tau_0) = \bar{G}_z(0), \quad Q G_z(\tau_2) = \bar{G}_z(T). \quad (31)$$

В силу последних двух равенств, а также (25), условия IV, (28), (22) при  $i = 0$ ,  $j = 1$ , (23), уравнения для  $Q_0 \psi(\tau_2)$  и (24) находим

$$\begin{aligned} \Pi_0 \psi(\tau_0) &= -\bar{\psi}_0^{(1)}(0) \exp(-\bar{G}_y(0)\tau_0) = \Pi_0 \psi(\bar{\varphi}_0, \tau_0), \\ Q_0 \psi(\tau_2) &= -\bar{\psi}_0^{(2)}(T) \exp(-\bar{G}_y(T)\tau_2) = Q_0 \psi(\bar{\varphi}_0, \tau_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что ввиду условия IV в уравнениях для  $\Pi_0 \psi(\tau_1)$  и  $Q_0 \psi(\tau_1)$  условия устойчивости не выполняются. Неоднородности в этих уравнениях являются пограничными функциями соответствующего типа. Нетрудно доказать следующее утверждение.

**Лемма 4.1.** Единственное решение уравнения

$$\frac{dy}{d\tau} = (a + f(\tau))y + g(\tau),$$

где  $a > 0$  ( $a < 0$ ),  $|f(\tau)|, |g(\tau)| \leq c \exp(-\kappa\tau)$ ,  $\tau \in [0, +\infty)$  ( $c \exp(\kappa\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, 0]$ ),  $c$  и  $\kappa$  – положительные, не зависящие от  $\tau$  константы, является  $\Pi$ -( $Q$ -) функцией вида

$$y(\tau) = \int_{+\infty(-\infty)}^{\tau} \exp\left(\int_s^{\tau} (a + f(t))dt\right)g(s)ds.$$

В силу этой леммы из уравнений для  $\overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1)$ ,  $\overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1)$  и (25), (28), (30) получаем

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\varphi_0, y_0, \tau_1) = \overset{(2)}{\psi}_0(\varphi_0, t_1) \int_{\tau_1}^{+\infty} \exp\left(\int_{\tau_1}^s \overset{(2)}{\Pi} G_y(t)dt\right) (\overset{(2)}{\Pi} G_y(s) - \overset{(2)}{G}_y(t_1)) ds, \\ \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\varphi_0, y_0, \tau_1) = \overset{(1)}{\psi}_0(\varphi_0, t_1) \int_{\tau_1}^{-\infty} \exp\left(\int_{\tau_1}^s \overset{(1)}{Q} G_y(t)dt\right) (\overset{(1)}{Q} G_y(s) - \overset{(1)}{G}_y(t_1)) ds. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя (19), (23) уравнения для  $\overset{(j)}{Q}_i x(\tau_j)$ , (24) при  $i = 1$ ,  $j = 1, 2$ , а также (25), (29), (30), получаем

$$\overset{(1)}{\Pi}_1 x(\tau_0) \equiv 0, \quad \overset{(2)}{Q}_1 x(\tau_2) \equiv 0, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\Pi}_1 x(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_1 x(y_0, \tau_1) = B_0(t_1) \int_{+\infty}^{\tau_1} \overset{(2)}{\Pi}_0 y(y_0, s) ds, \\ \overset{(1)}{Q}_1 x(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_1 x(y_0, \tau_1) = B_0(t_1) \int_{-\infty}^{\tau_1} \overset{(1)}{Q}_0 y(y_0, s) ds. \end{aligned} \quad (35)$$

Из (20), (23) уравнений для  $\overset{(j)}{Q}_1 \varphi(\tau_j)$ , (24) при  $i = 1$ ,  $j = 1, 2$  и (25), (28), (30), (32), (33) получаем пограничные функции экспоненциального типа

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\Pi}_1 \varphi(\tau_0) &= \overset{(1)}{\Pi}_1 \varphi(\varphi_0, \tau_0), & \overset{(2)}{Q}_1 \varphi(\tau_2) &= \overset{(2)}{Q}_1 \varphi(\varphi_0, \tau_2), \\ \overset{(2)}{\Pi}_1 \varphi(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_1 \varphi(\varphi_0, y_0, \tau_1), & \overset{(1)}{Q}_1 \varphi(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_1 \varphi(\varphi_0, y_0, \tau_1). \end{aligned} \quad (36)$$

Функции  $\overset{(j)}{\bar{x}}_1(t)$  и  $\overset{(j)}{\bar{y}}_1(t)$  можно определить из системы (14), (16) с условиями, полученными из (18) при  $i = 1$  с учетом (34). В силу (27), (28) имеем

$$\overset{(j)}{\bar{x}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{x}}_1(\varphi_0, t), \quad \overset{(j)}{\bar{y}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{y}}_1(\varphi_0, t). \quad (37)$$

Ввиду (37), (35), (27), (25), (28) и (33) получаем из (13) систему для определения  $\overset{(j)}{\varphi}_0$ ,  $j = 1, 2$ , и  $y_0$

$$\begin{aligned} H_1 &= \overset{(1)}{\bar{x}}_1(\varphi_0, t_1) + \overset{(1)}{Q}_1 x(y_0, 0) - \overset{(2)}{\bar{x}}_1(\varphi_0, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_1 x(y_0, 0) = 0, \\ K_0 &= \overset{(1)}{\varphi}_0(\varphi_0, t_1) - \overset{(2)}{\varphi}_0(\varphi_0, t_1) = 0, \\ M_0 &= \overset{(1)}{\psi}_0(\varphi_0, t_1) + \overset{(1)}{Q}_0 \psi(\varphi_0, y_0, 0) - \overset{(2)}{\psi}_0(\varphi_0, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_0 \psi(\varphi_0, y_0, 0) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Пусть выполнено следующее условие

VII. Система (38) имеет единственное решение  $\overset{(1)}{\varphi}_0$ ,  $\overset{(2)}{\varphi}_0$ ,  $y_0$  и Якобиан этой системы на её решении отличен от нуля.

В силу условия VII значения  $\overset{(1)}{\varphi}_0$ ,  $\overset{(2)}{\varphi}_0$  и  $y_0$  известны. Значит, все члены нулевого порядка в асимптотике (7) найдены.

Для лучшего понимания алгоритма построения асимптотики приведем здесь таблицу, показывающую последовательность нахождения членов приближения нулевого порядка в (7).

Таблица 1  
Table 1

Нахождение членов нулевого порядка ( $j = 1, 2$ )  
Finding the zero order terms ( $j = 1, 2$ )

| Функции; Формулы   |            |
|--|------------|
| $\overset{(j)}{\Pi_0} x(\tau_{j-1}) = \overset{(j)}{\Pi_0} \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0, \quad \overset{(j)}{Q_0} x(\tau_j) = \overset{(j)}{Q_0} \varphi(\tau_j) \equiv 0;$  | (25)       |
| $\overset{(j)}{\bar{x}}_0(t) = \overset{(j)}{\bar{y}}_0(t) = y^j(\overset{(j)}{\bar{x}}_0(t), t),$   | (26)       |
| $\overset{(j)}{\varphi}_0(t) = \overset{(j)}{\varphi}_0(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \quad \overset{(j)}{\psi}_0(t) = \overset{(j)}{\psi}_0(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \quad \overset{(j)}{\varphi}_0$ неизвестно,   | (27), (28) |
| $\overset{(1)}{\Pi_0} y(\tau_0) \equiv 0, \quad \overset{(2)}{Q_0} y(\tau_2) \equiv 0,$  | (29)       |
| $\overset{(2)}{\Pi_0} y(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi_0} y(y_0, \tau_1), \quad \overset{(1)}{Q_0} y(\tau_1) = \overset{(1)}{Q_0} y(y_0, \tau_1), \quad y_0$ неизвестно,  | (30)       |
| $\overset{(1)}{\Pi_0} \psi(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi_0} \psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, \tau_0), \quad \overset{(2)}{Q_0} \psi(\tau_2) = \overset{(2)}{Q_0} \psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, \tau_2),$  | (32)       |
| $\overset{(2)}{\Pi_0} \psi(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi_0} \psi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1), \quad \overset{(1)}{Q_0} \psi(\tau_1) = \overset{(1)}{Q_0} \psi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1),$  | (33)       |
| $\overset{(1)}{\Pi_1} x(\tau_0) \equiv 0, \quad \overset{(2)}{Q_1} x(\tau_2) \equiv 0,$  | (34),      |
| $\overset{(2)}{\Pi_1} x(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi_1} x(y_0, \tau_1), \quad \overset{(1)}{Q_1} x(\tau_1) = \overset{(1)}{Q_1} x(y_0, \tau_1),$  | (35)       |
| $\overset{(1)}{\Pi_1} \varphi(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi_1} \varphi(\overset{(1)}{\varphi}_0, \tau_0), \quad \overset{(2)}{Q_1} \varphi(\tau_2) = \overset{(2)}{Q_1} \varphi(\overset{(2)}{\varphi}_0, \tau_2),$  |            |
| $\overset{(2)}{\Pi_1} \varphi(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi_1} \varphi(\overset{(2)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1), \quad \overset{(1)}{Q_1} \varphi(\tau_1) = \overset{(1)}{Q_1} \varphi(\overset{(1)}{\varphi}_0, y_0, \tau_1)$   | (36)       |
| $\overset{(j)}{\bar{x}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{x}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_0, t), \quad \overset{(j)}{\bar{y}}_1(t) = \overset{(j)}{\bar{y}}_1(\overset{(j)}{\varphi}_0, t),$  |            |
| $\overset{(j)}{\varphi}_1(t) = \overset{(j)}{\varphi}_1(\overset{(j)}{\varphi}_1, \overset{(j)}{\varphi}_0, t), \quad \overset{(j)}{\psi}_1(t) = \overset{(j)}{\psi}_1(\overset{(j)}{\varphi}_1, \overset{(j)}{\varphi}_0, t), \quad \overset{(j)}{\varphi}_1$ неизвестно, | (37)       |
| $\overset{(j)}{\varphi}_0, y_0;$   | (38)       |

**5. Приближения высших порядков**

**Теорема 5.1.** При условиях I – VII можно найти все члены асимптотики (7)  $i$ -го порядка ( $i \geq 0$ ).

**Доказательство.** Для  $i = 0$  теорема уже доказана.

Предположим, что теорема верна для  $i \leq n - 1$ . Тогда функции  $\overset{(j)}{v}_k(t), \overset{(j)}{\Pi}_k v(\tau_{j-1}), \overset{(j)}{Q}_k v(\tau_j)$  и, следовательно, значения  $\overset{(j)}{\varphi}_k, \overset{(j)}{y}_k, k = 0, 1, \dots, n - 1$  в (10), (11) определены.

Из (19), (20) при  $i = n$  и уравнений для  $\overset{(j)}{Q}_n x(\tau_j), \overset{(j)}{Q}_n \varphi(\tau_j)$  пограничные функции для медленных переменных  $\overset{(j)}{\Pi}_n x(\tau_{j-1}), \overset{(j)}{\Pi}_n \varphi(\tau_{j-1}), \overset{(j)}{Q}_n x(\tau_j), \overset{(j)}{Q}_n \varphi(\tau_j), j = 1, 2$  однозначно определяются.

Учитывая условие IV, выразим функцию  $\overset{(j)}{y}_n$  из (16) при  $i = n$  и подставим ее в (14) при  $i = n$ . Используя (18) для  $\overset{(1)}{x}_n(0)$  и  $\overset{(2)}{x}_n(T)$  ( $\overset{(1)}{\Pi}_n x(0), \overset{(2)}{Q}_n x(0)$  уже известны), из (14) получаем функции  $\overset{(j)}{x}_n(t)$ . Затем находим  $\overset{(j)}{y}_n(t), j = 1, 2$ . Благодаря условию IV можем выразить функцию  $\overset{(j)}{\psi}_n(t)$  из (17) при  $i = n$ . Подставим найденное выражение в (15) при  $i = n$ . Решая полученную систему с условиями (18) при  $i = n$  для  $\overset{(1)}{\varphi}_n(0)$  и  $\overset{(2)}{\varphi}_n(T)$  ( $\overset{(1)}{\Pi}_n \varphi(0), \overset{(2)}{Q}_n \varphi(0)$  уже известны), получаем функции  $\overset{(j)}{\varphi}_n(t) = \overset{(j)}{\varphi}_n(\overset{(j)}{\varphi}_n, t)$ , затем находим функции  $\overset{(j)}{\psi}_n(t) = \overset{(j)}{\psi}_n(\overset{(j)}{\varphi}_n, t)$ , линейно зависящие от неизвестных  $\overset{(j)}{\varphi}_n, j = 1, 2$ .

Рассмотрим линейное уравнение (21) при  $i = n, j = 1$  и соответствующее условие для  $\overset{(1)}{\Pi}_n y(+\infty)$  из (23). Неоднородность в этом уравнении является П-функцией. Благодаря условию IV и первому равенству в (31) мы можем однозначно определить П-функцию  $\overset{(1)}{\Pi}_n y(\tau_0)$  (см. Лемму 4.1). Подобным образом в силу второго равенства в (31) однозначно определяется Q-функция  $\overset{(2)}{Q}_n y(\tau_2)$  из её уравнения и условия (24) для  $\overset{(2)}{Q}_n y(-\infty)$ . Следовательно, значения  $\overset{(1)}{y}_n = \overset{(1)}{y}_n(0) + \overset{(1)}{\Pi}_n y(0)$  и  $\overset{(2)}{y}_n = \overset{(2)}{y}_n(T) + \overset{(2)}{Q}_n y(0)$  определены.

В силу условия IV и Леммы 3.1 в [1] получаем из (21) при  $i = n, j = 2$  и (23) П- функцию  $\overset{(2)}{\Pi}_n y(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_n y(y_n, \tau_1)$ , а из уравнения для  $\overset{(1)}{Q}_n y(\tau_1)$  и (24) при  $i = n$  находим Q- функцию  $\overset{(1)}{Q}_n y(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_n y(y_n, \tau_1)$ , линейно зависящую от  $y_n$ .

Используя (31) и условие IV, из (22) при  $i = n, j = 1$  и (23) при  $i = n$  получаем П-функцию  $\overset{(1)}{\Pi}_n \psi(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_n \psi(\varphi_n, \tau_0)$ , линейно зависящую от  $\varphi_n$ . Аналогично из уравнения для  $\overset{(2)}{Q}_n \psi(\tau_2)$  и (24) при  $i = n$  получаем Q-функцию  $\overset{(2)}{Q}_n \psi(\tau_2) = \overset{(2)}{Q}_n \psi(\varphi_n, \tau_2)$ , линейно зависящую от  $\varphi_n$ . С учетом условия IV, соотношений (22) при  $i = n, j = 2$ , (23) при  $i = n$ , уравнения для  $\overset{(1)}{Q}_n \psi(\tau_1)$  и (24) при  $i = n$  в силу Леммы 4.1 имеем

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\Pi}_n \psi(\tau_1) &= \overset{(2)}{\Pi}_n \psi(\varphi_n, y_n, \tau_1) = \overset{(2)}{\psi}_n(\varphi_n, t_1) \int_{\tau_1}^{+\infty} \exp\left(\int_{\tau_1}^s \overset{(2)}{\Pi} G_y(t) dt\right) (\overset{(2)}{\Pi} G_y(s) - \overset{(2)}{G}_y(t_1)) ds + \overset{(2)}{\Pi} f(y_n, \tau_1), \\ \overset{(1)}{Q}_n \psi(\tau_1) &= \overset{(1)}{Q}_n \psi(\varphi_n, y_n, \tau_1) = \overset{(1)}{\psi}_n(\varphi_n, t_1) \int_{\tau_1}^{-\infty} \exp\left(\int_{\tau_1}^s \overset{(1)}{Q} G_y(t) dt\right) (\overset{(1)}{Q} G_y(s) - \overset{(1)}{G}_y(t_1)) ds + \overset{(1)}{Q} f(y_n, \tau_1), \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\overset{(2)}{\Pi} f(y_n, \tau_1)$  и  $\overset{(1)}{Q} f(y_n, \tau_1)$  – известные П-функция и Q-функция соответственно, линейно зависящие от  $y_n$ .

Значения  $\overset{(j)}{\varphi}_n, j = 1, 2$  и  $y_n$  пока неизвестны. Учитывая зависимость найденных членов асимптотики от неизвестных параметров, находим из (19), (23) при  $i = n + 1$  П-функции  $\overset{(1)}{\Pi}_{n+1} x(\tau_0)$  и  $\overset{(2)}{\Pi}_{n+1} x(\tau_1) = \overset{(2)}{\Pi}_{n+1} x(y_n, \tau_1)$ , линейно зависящую от  $y_n$ . Из уравнения для  $\overset{(1)}{Q}_{n+1} x(\tau_1)$  и (24) при  $i = n + 1$  однозначно определяем Q-функции  $\overset{(1)}{Q}_{n+1} x(\tau_1) = \overset{(1)}{Q}_{n+1} x(y_n, \tau_1)$ , линейно зависящую от  $y_n$ , и  $\overset{(2)}{Q}_{n+1} x(\tau_2)$ .

Рассмотрим соотношения (14), (16) и (18) при  $i = n + 1$ . В силу условия IV можем выразить  $\overset{(j)}{y}_{n+1}(t)$  из (16). Подставляя его в (14), получаем дифференциальные уравнения для  $\overset{(j)}{x}_{n+1}(t), j = 1, 2$  с известными из (18) значениями  $\overset{(1)}{x}_{n+1}(0)$  и  $\overset{(2)}{x}_{n+1}(T)$ . Решая эти задачи, определяем функции  $\overset{(j)}{x}_{n+1}(t) = \overset{(j)}{x}_{n+1}(\varphi_n, t)$ , линейно зависящие от  $\varphi_n$ .

Таким образом, из (13) имеем следующую систему для определения  $\overset{(j)}{\varphi}_n, j = 1, 2$  и  $y_n$

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \overset{(1)}{x}_{n+1}(\varphi_n, t_1) + \overset{(1)}{Q}_{n+1} x(y_n, 0) - \overset{(2)}{x}_{n+1}(\varphi_n, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_{n+1} x(y_n, 0) = 0, \\ K_n &= \overset{(1)}{\varphi}_n(\varphi_n, t_1) + \overset{(1)}{Q}_n \varphi(0) - \overset{(2)}{\varphi}_n(\varphi_n, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_n \varphi(0) = 0, \\ M_n &= \overset{(1)}{\psi}_n(\varphi_n, t_1) + \overset{(1)}{Q}_n \psi(\varphi_n, y_n, 0) - \overset{(2)}{\psi}_n(\varphi_n, t_1) - \overset{(2)}{\Pi}_n \psi(\varphi_n, y_n, 0) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Учитывая найденные выражения для членов асимптотики, нетрудно убедиться в линейности последней системы по неизвестным параметрам.

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 5.1.** Значения якобианов систем (38) и (40) на решениях этих систем совпадают.

Доказательство этой леммы приведено в Приложении.

Следует отметить, что здесь рассматриваются определители порядка  $2m + 1$ . Аналогичное утверждение о равенстве некоторых функциональных определителей второго порядка использовалось в [17] при построении асимптотического приближения первого порядка без пояснений из-за требуемого ограниченного объема статьи в трудах конференции.

В силу последней леммы и условия VII якобиан линейной системы (40) отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение  $\overset{(j)}{\varphi}_n, j = 1, 2, y_n$ . Таким образом, функции  $\overset{(j)}{\varphi}_n(t), \overset{(j)}{\psi}_n(t), \overset{(2)}{\Pi}_n y(\tau_1), \overset{(1)}{Q}_n y(\tau_1), \overset{(j)}{\Pi}_n \psi(\tau_{j-1})$  и  $\overset{(j)}{Q}_n \psi(\tau_j)$  определены.

Теорема доказана.

**6. Иллюстративный пример.** Для удобства сравнения с методом из [17] мы приводим здесь тот же пример, что и в [17], но используем другой алгоритм построения асимптотики, предложенный в настоящей статье. А именно, рассматриваем задачу оптимального управления

$$P_\varepsilon: J_\varepsilon(u) = \int_0^1 \left( (1 + \varepsilon t)x + t^2 y + \frac{1}{2} \varepsilon u^2 \right) dt \rightarrow \min_u,$$

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \varepsilon \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} y^2 + \varepsilon u, \quad (41)$$

$$x(0, \varepsilon) = 1, \quad x(1, \varepsilon) = 1. \quad (42)$$

Обратим внимание, что в [17] имеется только окончательная формула первого приближения асимптотического решения, полученного при помощи алгоритма из [17], основанного на решении краевых задач. Пояснения к нахождению членов асимптотики в [17] отсутствуют. Для лучшего понимания предлагаемого нового алгоритма построения асимптотики решения рассматриваемой задачи соотношения для нахождения членов асимптотики приведены здесь в явном виде.

Оптимальное решение задачи  $P_\varepsilon$  удовлетворяет задаче, состоящей из (41), (42) и следующих соотношений

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 + \varepsilon t, \quad \varepsilon \frac{d\psi}{dt} = -\varphi + y\psi + t^2, \quad u = \psi,$$

$$\psi(0, \varepsilon) = 0, \quad \psi(1, \varepsilon) = 0.$$

Следуя нашему алгоритму, получим явные выражения задач для нахождения асимптотического решения первого порядка для рассматриваемой задачи  $P_\varepsilon$ .

Если  $\varepsilon = 0$ , то уравнение состояния для быстрой переменной имеет два различных корня относительно быстрой переменной, т.е. выполняется условие I. Для обеспечения условия IV нужно взять  $y^1(x, t) = -1$ ,  $y^2(x, t) = 1$ . Соответствующие траектории в условии II имеют вид  $x^1(t) = -t + 1$ ,  $x^2(t) = t$ , которые пересекаются друг с другом в одной внутренней точке  $t_1 = 1/2$ . Следовательно, выполняется условие III. Справедливость условия V следует из вида второго уравнения в (41). Условия VI и VII обсудим позже.

Учитывая (25), имеем  $\prod_0^{(j)} x(\tau_{j-1}) = \prod_0^{(j)} \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0$ ,  $Q_0^{(j)} x(\tau_j) = Q_0^{(j)} \varphi(\tau_j) \equiv 0$ ,  $j = 1, 2$ .

В силу определения решения вырожденной задачи, удовлетворяющего условию статьи,  $\bar{y}_0^{(1)}(t) = -1$ ,  $\bar{y}_0^{(2)}(t) = 1$ ,  $\bar{x}_0^{(1)}(t) = -t + 1$ ,  $\bar{x}_0^{(2)}(t) = t$ .

Из (15), (18) и (17) при  $i = 0$  следует, что

$$\bar{\varphi}_0^{(1)}(t) = t + \varphi_0, \quad \bar{\varphi}_0^{(2)}(t) = t + \varphi_0 - 1,$$

$$\bar{\psi}_0^{(1)}(t) = t^2 - t - \varphi_0, \quad \bar{\psi}_0^{(2)}(t) = -t^2 + t + \varphi_0 - 1.$$

Ввиду (29) имеем  $\prod_0^{(1)} y(\tau_0) \equiv 0$  и  $Q_0^{(2)} y(\tau_2) \equiv 0$ . С учетом (21) при  $i = 0$ ,  $j = 2$ , (23) при  $i = 0$ , уравнения для  $Q_0^{(2)} y$ , (24) при  $i = 0$ , (32) – (35), (20), (23), уравнения для  $Q_i^{(j)} \varphi$  и (24) при  $i = 1$  последовательно находим

$$Q_0^{(1)} y(\tau_1) = \frac{2(y_0 + 1)}{y_0 + 1 + (1 - y_0)e^{-\tau_1}}, \quad \prod_0^{(2)} y(\tau_1) = \frac{2(y_0 - 1)}{1 - y_0 + (1 + y_0)e^{\tau_1}},$$

$$\prod_0^{(1)} \psi(\tau_0) = \varphi_0 e^{-\tau_0}, \quad Q_0^{(2)} \psi(\tau_2) = (1 - \varphi_0)e^{\tau_2},$$

$$Q_0^{(1)} \psi(\tau_1) = \frac{(y_0 + 1)(1 + 4\varphi_0)}{4(y_0 - 1)} e^{\tau_1}, \quad \prod_0^{(2)} \psi(\tau_1) = \frac{(y_0 - 1)(3 - 4\varphi_0)}{4(y_0 + 1)} e^{-\tau_1},$$

$$\prod_1^{(1)} x(\tau_0) \equiv 0, \quad Q_1^{(2)} x(\tau_2) \equiv 0,$$

$$Q_1^{(1)} x(\tau_1) = 2 \ln \left| 1 + \frac{1 + y_0}{1 - y_0} e^{\tau_1} \right|, \quad \prod_1^{(2)} x(\tau_1) = 2 \ln \left| 1 + \frac{1 - y_0}{1 + y_0} e^{-\tau_1} \right|,$$

$$\prod_1^{(j)} \varphi(\tau_{j-1}) \equiv 0, \quad Q_1^{(j)} \varphi(\tau_j) \equiv 0, \quad j = 1, 2.$$

В этом примере функции  $\bar{\xi}_1^{(j)}(t)$ ,  $\bar{\eta}_1^{(j)}(t)$  равны нулю. Из (14) – (18) при  $i = 1$  получаем

$$\bar{y}_1^{(1)}(t) = -t^2 + t + \varphi_0, \quad \bar{y}_1^{(2)}(t) = -t^2 + t + \varphi_0 - 1,$$

$$\bar{x}_1^{(1)}(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \varphi_0 t, \quad \bar{x}_1^{(2)}(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + (\varphi_0 - 1)t + \frac{5}{6} - \varphi_0,$$

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(t) = \frac{1}{2}t^2 + \varphi_1, \quad \bar{\varphi}_1^{(2)}(t) = \frac{1}{2}t^2 + \varphi_1 - \frac{1}{2},$$

$$\bar{\psi}_1^{(1)}(t) = -\frac{1}{2}t^2 - 2t - (t^2 - t - \varphi_0)^2 - \varphi_1 + 1,$$

$$\overset{(2)}{\psi}_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t - (1 + t^2 - t - \overset{(2)}{\varphi}_0)^2 + \overset{(2)}{\varphi}_1 + \frac{1}{2}.$$

Система (38) для этого примера имеет вид

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{\varphi}_0 + \frac{1}{2} \overset{(2)}{\varphi}_0 + 2 \ln |y_0 + 1| - 2 \ln |1 - y_0| = 0, \\ K_0 &= 1 + \overset{(1)}{\varphi}_0 - \overset{(2)}{\varphi}_0 = 0, \\ M_0 &= \frac{1}{2} - \overset{(1)}{\varphi}_0 - \overset{(2)}{\varphi}_0 + \frac{(y_0 + 1)(1 + 4 \overset{(1)}{\varphi}_0)}{4(y_0 - 1)} - \frac{(y_0 - 1)(3 - 4 \overset{(2)}{\varphi}_0)}{4(y_0 + 1)} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Решив систему (43), получим  $\overset{(1)}{\varphi}_0 = -1/4$ ,  $\overset{(2)}{\varphi}_0 = 3/4$ ,  $y_0 = (e^{1/24} - 1)/(e^{1/24} + 1)$ . Отсюда следует, что  $\overset{(1)}{\psi}_0(t) = (t - 1/2)^2$ ,  $\overset{(2)}{\psi}_0(t) = -(t - 1/2)^2$ .

Якобиан системы (43) при найденных значениях для  $\overset{(j)}{\varphi}_0$ ,  $j = 1, 2$ ,  $y_0$  равен  $-(e^{1/24} + 1)^4 e^{-1/12} \neq 0$ . Таким образом, условие VII выполнено, и мы получаем явный вид приближения нулевого порядка для решения задачи (41), (42).

Из (21) при  $i = 1$  ( $\overset{(j)}{\Pi}_1 \psi = \overset{(j)}{\Pi}_0 \psi$ ), аналогичных уравнений для  $\overset{(j)}{Q}_1 y(\tau_j)$  ( $\overset{(j)}{Q}_1 \eta_1 = \overset{(j)}{Q}_0 \psi$ ) и условий (23), (24) получаем

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\Pi}_1 y(\tau_0) &= \frac{1}{8} e^{-\tau_0}, & \overset{(2)}{Q}_1 y(\tau_2) &= \frac{1}{8} e^{\tau_2}, \\ \overset{(1)}{Q}_1 y(\tau_1) &= \frac{y_1 \left(1 + e^{-\frac{1}{24}}\right)^2 e^{-\tau_1}}{\left(1 + e^{-\frac{1}{24} - \tau_1}\right)^2}, & \overset{(2)}{\Pi}_1 y(\tau_1) &= \frac{y_1 \left(1 + e^{\frac{1}{24}}\right)^2 e^{\tau_1}}{\left(1 + e^{\frac{1}{24} + \tau_1}\right)^2}. \end{aligned}$$

Из (22) при  $i = 1$  ( $\overset{(1)}{\Pi} \theta_1(\tau_0) = e^{-\tau_0}/16$ ,  $\overset{(2)}{\Pi} \theta_1(\tau_1) = 0$ ) и аналогичных уравнений для  $\overset{(j)}{Q}_1 \psi(\tau_j)$  ( $\overset{(1)}{Q} \theta_1(\tau_1) = 0$ ,  $\overset{(2)}{Q} \theta_1(\tau_2) = -e^{\tau_2}/16$ ), учитывая условия (23), (24) при  $i = 1$ , находим

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\Pi}_1 \psi(\tau_0) &= \left( \overset{(1)}{\varphi}_1 - \frac{31}{32} + \frac{3}{32} \tau_0 + \frac{1}{32} e^{-\tau_0} \right) e^{-\tau_0}, \\ \overset{(2)}{Q}_1 \psi(\tau_2) &= \left( -\overset{(2)}{\varphi}_1 + \frac{33}{32} - \frac{3}{32} \tau_2 + \frac{1}{32} e^{\tau_2} \right) e^{\tau_2}, \\ \overset{(1)}{Q}_1 \psi(\tau_1) &= \left( -\frac{1}{8} - \overset{(1)}{\varphi}_1 \right) e^{\frac{1}{24} + \tau_1}, & \overset{(2)}{\Pi}_1 \psi(\tau_1) &= \left( -\frac{3}{8} + \overset{(2)}{\varphi}_1 \right) e^{-\frac{1}{24} - \tau_1}. \end{aligned}$$

Из (19) при  $i = 2$  ( $\overset{(j)}{\Pi} \xi_2 = 0$ ) и аналогичных уравнений для  $\overset{(j)}{Q}_2 x(\tau_j)$  ( $\overset{(j)}{Q} \xi_2 = 0$ ) следует, что

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\Pi}_2 x(\tau_0) &= -\frac{1}{8} e^{-\tau_0}, & \overset{(2)}{Q}_2 x(\tau_2) &= \frac{1}{8} e^{\tau_2}, \\ \overset{(1)}{Q}_2 x(\tau_1) &= \frac{y_1 e^{\frac{1}{24}} \left(1 + e^{-\frac{1}{24}}\right)^2}{1 + e^{-\frac{1}{24} - \tau_1}}, & \overset{(2)}{\Pi}_2 x(\tau_1) &= -\frac{y_1 e^{-\frac{1}{24}} \left(1 + e^{\frac{1}{24}}\right)^2}{1 + e^{\frac{1}{24} + \tau_1}}. \end{aligned}$$

В уравнениях (14) и (16) при  $i = 2$  имеем соответственно  $\overset{(j)}{\xi}_2(t) = 0$ ,  $\overset{(j)}{\eta}_2(t) = -(\overset{(j)}{y}_1)^2/2 - d \overset{(j)}{y}_0/dt$ . Из (16), (14), (18) при  $i = 2$  получаем

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\bar{x}}_2(t) &= \frac{3}{10} t^5 - \frac{3}{4} t^4 + \frac{11}{12} t^3 - \frac{3}{8} t^2 + \left( \frac{3}{32} + \overset{(1)}{\varphi}_1 \right) t + \frac{1}{8}, \\ \overset{(2)}{\bar{x}}_2(t) &= -\frac{3}{10} t^5 + \frac{3}{4} t^4 - \frac{7}{12} t^3 + \frac{3}{8} t^2 + \left( \overset{(2)}{\varphi}_1 - \frac{19}{32} \right) t + \frac{109}{480} - \overset{(2)}{\varphi}_1. \end{aligned}$$

Система (40) при  $n = 1$  для этого примера имеет вид

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \overset{(1)}{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \overset{(2)}{\varphi}_1 + y_1 \left( 2 + e^{\frac{1}{24}} + e^{-\frac{1}{24}} \right) = 0, \\ K_1 &= \frac{1}{2} + \overset{(1)}{\varphi}_1 - \overset{(2)}{\varphi}_1 = 0, \\ M_1 &= \frac{1}{4} - \overset{(1)}{\varphi}_1 - \overset{(2)}{\varphi}_1 - \left( \frac{1}{8} + \overset{(1)}{\varphi}_1 \right) e^{\frac{1}{24}} + \left( \frac{3}{8} - \overset{(2)}{\varphi}_1 \right) e^{-\frac{1}{24}} = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Якобиан для последней системы равен  $-(e^{1/24} + 1)^4 e^{-1/12}$ , т. е. равен якобиану системы (43) на решениях этой системы, что соответствует Лемме 5.1.

Решением системы (44) является  $\varphi_1^{(1)} = -1/8$ ,  $\varphi_1^{(2)} = 3/8$ ,  $y_1 = -7/(24(2 + e^{1/24} + e^{-1/24}))$ . Таким образом, первое приближение к решению построено.

Преобразуя приращение критерия качества для рассматриваемой слабоуправляемой задачи, нетрудно видеть, что условие  $R(t, 0) = 1 > 0$  обеспечивает достаточность принципа максимума Понтрягина при достаточно малых  $\varepsilon$ , и условие VI выполняется.

Сравнивая члены построенной асимптотики первого порядка с [17], видим, что соответствующие члены совпадают. Поэтому представленные в [17] графики решения рассматриваемой задачи при  $\varepsilon = 0, 05$  и его приближений в нашем случае совпадают, хотя мы использовали разные алгоритмы построения асимптотики.

**Приложение.** Доказательство Леммы 5.1.

В дальнейших преобразованиях будем существенно использовать условие IV. Для краткости часто опускаем аргументы и параметры в обозначении функций.

Из (17) при  $i = 0$  получаем

$$\bar{\psi}_0^{(j)} = \bar{G}_y(t)^{-1}(-B_0(t)' \bar{\varphi}_0^{(j)} + S_0(t)). \quad (45)$$

Подставим это выражение для  $\bar{\psi}_0^{(j)}$  в (15) при  $i = 0$ , а затем продифференцируем полученное дифференциальное уравнение для  $\bar{\varphi}_0^{(j)}$  по  $\bar{\varphi}_0^{(j)}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}} \right) = (-A_0(t)' + \bar{G}_x(t)' \bar{G}_y(t)^{-1} B_0(t)') \frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}}. \quad (46)$$

В силу (18) при  $i = 0$  и  $i = n$  получаем условия

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_i^{(1)}}{\partial \bar{\varphi}_i^{(1)}}(0) = \frac{\partial \bar{\varphi}_i^{(2)}}{\partial \bar{\varphi}_i^{(2)}}(T) = I, \quad (47)$$

где, как обычно,  $I$  означает единичную матрицу.

Из (17) при  $i = n$  выражаем  $\bar{\psi}_n^{(j)}$

$$\bar{\psi}_n^{(j)} = \bar{G}_y(t)^{-1}(-B_0(t)' \bar{\varphi}_n^{(j)} + \theta_n(t)), \quad (48)$$

где  $\theta_n(t)$  — известная функция. Подставим это выражение для  $\bar{\psi}_n^{(j)}$  в (15) при  $i = n$  и продифференцируем полученное дифференциальное уравнение для  $\bar{\varphi}_n^{(j)}$  по  $\bar{\varphi}_n^{(j)}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}} \right) = (-A_0(t)' + \bar{G}_x(t)' \bar{G}_y(t)^{-1} B_0(t)') \frac{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}. \quad (49)$$

Ввиду единственности решения начальной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений из (46), (47), (49) имеем

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}} = \frac{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \quad (50)$$

Отсюда и из (38), (40) следует

$$\frac{\partial K_0}{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}} = \frac{\partial K_n}{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad \frac{\partial K_0}{\partial y_0} = \frac{\partial K_n}{\partial y_n} = 0. \quad (51)$$

С учетом соотношений (50) из (45) и (48) получаем

$$\frac{\partial \bar{\psi}_0^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}} = \frac{\partial \bar{\psi}_n^{(j)}}{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}. \quad (52)$$

Из (16) при  $i = 1$  мы выражаем  $\bar{y}_1^{(j)}$  и подставляем его в (14) при  $i = 1$ . Дифференцируя полученное дифференциальное уравнение по  $\varphi_0^{(j)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{x}_1^{(j)}}{\partial \varphi_0^{(j)}} \right) &= (A_0(t) - B_0(t) \bar{G}_y(t)^{-1} \bar{G}_x(t)) \frac{\partial \bar{x}_1^{(j)}}{\partial \varphi_0^{(j)}} + (W_{10}(t) - B_0(t) \bar{G}_y(t)^{-1} W_{20}(t)') \frac{\partial \bar{\varphi}_0^{(j)}}{\partial \varphi_0^{(j)}} + \\ &+ (W_{20}(t) - B_0(t) \bar{G}_y(t)^{-1} W_{30}(t)) \frac{\partial \bar{\psi}_0^{(j)}}{\partial \varphi_0^{(j)}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Используя (18) при  $i = 1$  и  $i = n + 1$ , а также учитывая уже найденные члены асимптотики, имеем условия

$$\frac{\partial \bar{x}_i^{(1)}}{\partial \varphi_{i-1}^{(1)}}(0) = \frac{\partial \bar{x}_i^{(2)}}{\partial \varphi_{i-1}^{(2)}}(T) = 0. \quad (54)$$

Из (16) при  $i = n + 1$  выразим  $\bar{y}_{n+1}^{(j)}$  и подставим его в (14) при  $i = n + 1$ . Дифференцируя полученное дифференциальное уравнение по  $\varphi_n^{(j)}$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{x}_{n+1}^{(j)}}{\partial \varphi_n^{(j)}} \right) &= (A_0(t) - B_0(t) \bar{G}_y(t)^{-1} \bar{G}_x(t)) \frac{\partial \bar{x}_{n+1}^{(j)}}{\partial \varphi_n^{(j)}} + (W_{10}(t) - B_0(t) \bar{G}_y(t)^{-1} W_{20}(t)') \frac{\partial \bar{\varphi}_n^{(j)}}{\partial \varphi_n^{(j)}} + \\ &+ (W_{20}(t) - B_0(t) \bar{G}_y(t)^{-1} W_{30}(t)) \frac{\partial \bar{\psi}_n^{(j)}}{\partial \varphi_n^{(j)}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Учитывая (50) и (52), ввиду единственности решений линейных систем (53), (55) с условиями (54) получаем

$$\frac{\partial \bar{x}_1^{(j)}}{\partial \varphi_0^{(j)}} = \frac{\partial \bar{x}_{n+1}^{(j)}}{\partial \varphi_n^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \quad (56)$$

Ввиду первого уравнения в (38), равенств в (35), первого уравнения в (40), уравнения для  $Q_{n+1}^{(1)} x$ , (19) при  $i = n + 1$ ,  $j = 2$  и (24), (23) при  $i = n + 1$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial y_0} &= B_0(t_1) \left( \int_{-\infty}^{\tau_1} \frac{\partial Q_0 y(y_0, s)}{\partial y_0} ds - \int_{+\infty}^{\tau_1} \frac{\partial \Pi_0 y(y_0, s)}{\partial y_0} ds \right), \\ \frac{\partial H_{n+1}}{\partial y_n} &= B_0(t_1) \left( \int_{-\infty}^{\tau_1} \frac{\partial Q_n y(y_n, s)}{\partial y_n} ds - \int_{+\infty}^{\tau_1} \frac{\partial \Pi_n y(y_n, s)}{\partial y_n} ds \right). \end{aligned} \quad (57)$$

Из (21) при  $i = 0$ ,  $j = 2$ , уравнения для  $Q_0^{(1)} y$ , а также из (23), (24) при  $i = 0$  получаем следующие начальные задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_1} \left( \frac{\partial \Pi_0 y}{\partial y_0} \right) &= P G_y(\tau_1) \frac{\partial \Pi_0 y}{\partial y_0}, & \frac{\partial \Pi_0 y}{\partial y_0}(0) &= 1, \\ \frac{d}{d\tau_1} \left( \frac{\partial Q_0 y}{\partial y_0} \right) &= Q G_y(\tau_1) \frac{\partial Q_0 y}{\partial y_0}, & \frac{\partial Q_0 y}{\partial y_0}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (58)$$

Используя (21) при  $i = n$ ,  $j = 2$ , уравнение для  $Q_n^{(1)} y$ , а также (23), (24) при  $i = n$ , имеем следующие начальные задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_1} \left( \frac{\partial \Pi_n y}{\partial y_n} \right) &= P G_y(\tau_1) \frac{\partial \Pi_n y}{\partial y_n}, & \frac{\partial \Pi_n y}{\partial y_n}(0) &= 1, \\ \frac{d}{d\tau_1} \left( \frac{\partial Q_n y}{\partial y_n} \right) &= Q G_y(\tau_1) \frac{\partial Q_n y}{\partial y_n}, & \frac{\partial Q_n y}{\partial y_n}(0) &= 1. \end{aligned} \quad (59)$$

В силу теоремы единственности задачи (58) и (59) имеют одинаковые решения, т.е.

$$\frac{\partial \Pi_0 y}{\partial y_0} = \frac{\partial \Pi_n y}{\partial y_n}, \quad \frac{\partial Q_0 y}{\partial y_0} = \frac{\partial Q_n y}{\partial y_n}. \quad (60)$$

С учетом (56), (57) и (60) из первых равенств в (38), (40) получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_0^{(j)}} = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial \varphi_n^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad \frac{\partial H_1}{\partial y_0} = \frac{\partial H_{n+1}}{\partial y_n}. \quad (61)$$

Дифференцируя уравнения (22) при  $i = 0, j = 2$  и уравнение для  $Q_0 \psi$  по  $y_0$ , с учетом (23), (24) при  $i = 0$  получаем следующие начальные задачи

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_1} \left( \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial y_0} \right) &= -PG_y(\tau_1) \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial y_0} - PG_{yy}(\tau_1) (\psi_0(t_1) + \Pi_0 \psi(\tau_1)) \frac{\partial \Pi_0 y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial \Pi_0 \psi}{\partial y_0} (+\infty) = 0, \\ \frac{d}{d\tau_1} \left( \frac{\partial Q_0 \psi}{\partial y_0} \right) &= -QG_y(\tau_1) \frac{\partial Q_0 \psi}{\partial y_0} - QG_{yy}(\tau_1) (\psi_0(t_1) + Q_0 \psi(\tau_1)) \frac{\partial Q_0 y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial Q_0 \psi}{\partial y_0} (-\infty) = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом дифференцируя (22) при  $i = n, j = 2$  и уравнение для  $Q_n \psi$  по  $y_n$ , ввиду (23), (24) при  $i = n$  и (60) получаем для  $\partial \Pi_n \psi / \partial y_n$  и  $\partial Q_n \psi / \partial y_n$  те же начальные задачи, что и для  $\partial \Pi_0 \psi / \partial y_0$  и  $\partial Q_0 \psi / \partial y_0$  соответственно. В силу теоремы единственности решения соответствующих начальных задач совпадают.

Принимая во внимание (52), (33), (39), с учетом предыдущего обсуждения из (38) и (40), имеем равенства

$$\frac{\partial M_0}{\partial \varphi_0^{(j)}} = \frac{\partial M_n}{\partial \varphi_n^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad \frac{\partial M_0}{\partial y_0} = \frac{\partial M_n}{\partial y_n}.$$

Отсюда и (51), (61) следует, что якобианы системы (38) в точке  $(\varphi_0, \varphi_0, y_0)$  и (40) в точке  $(\varphi_n, \varphi_n, y_n)$  равны. Таким образом, Лемма 5.1 доказана.

**Благодарность.** Авторы выражают благодарность А. В. Дмитруку и М. С. Никольскому за полезные обсуждения.

#### Список литературы

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука; 1973. 272 с.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука; 1989. 336 с.
3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука; 1981. 400 с.
4. Boglaev I.P., Sirotkin V.V. Computational method for a singular perturbation via domain decomposition and its parallel implementation. *Applied Mathematics and Computation*. 1993;56(1):71–95.  
[https://doi.org/10.1016/0096-3003\(93\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0096-3003(93)90080-X)
5. Kadalbajoo M.K., Gupta V. A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2010;217(8):3641–3716.  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.09.059>
6. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления. *Автоматика и телемеханика*. 2006;(1):3–51.
7. Курина Г.А. Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной. Обзор. *Известия Российской академии наук. Техническая кибернетика*. 1992;(4):20–48.
8. Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2014;9(1):1–36.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Издательство Московского университета; 1978. 107 с.
10. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика решения одной задачи быстрого действия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2022;28(1):58–73. <http://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73>

11. Kurina G., Nguyen T.H. Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case. *Optimal Control Applications and Methods*. 2019;40(5):859-879. <https://doi.org/10.1002/oca.2514>
12. Бутузov В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р. Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости. *Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2002;109:5-242.
13. Nefedov N.N., Schneider K.R. Immediate exchange of stabilities in singularly perturbed systems. *Differential and Integral Equations*. 1999;12(4):583-599. <https://doi.org/10.57262/die/1367267008>
14. Васильева А.Б., Нефедов Н.Н., Радченко И.В. О внутреннем переходном слое в сингулярно возмущенной начальной задаче. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1996;36(9):105-111.
15. Ильин А.М., Долбеева С.Ф. Асимптотика решения дифференциального уравнения с малым параметром в случае двух решений предельного уравнения. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2006;12(1):98-108.
16. Kurina G., Hoai N.T. First asymptotic approximations to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of degenerate problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2017;292:356-374. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.07.038>
17. Kurina G., Hoai N.T. Higher order asymptotic approximation to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of the degenerate problem. 2019 23<sup>rd</sup> International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2019;727-732. <https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885991>
18. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г., Ни Минь Кань. О контрастной структуре типа ступеньки для задачи вариационного исчисления. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2004;44(7):1271-1280.
19. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука; 1979. 432 с.
20. Никольский М.С. О достаточности принципа максимума Понтрягина в некоторых оптимизационных задачах. *Вестник Московского университета Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика*. 2005;(1):35-43.
21. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, Физматлит; 1965. 424 с.

#### References

1. Vasil'eva AB, Butuzov VF. Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka; 1973. 272 p. (in Russian)
2. Il'in AM. Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 102. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society; 1992. 281 p.
3. Lomov SA. Introduction to the general theory of singular perturbations. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 112. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society; 1992. 375 p.
4. Boglaev IP, Sirotkin VV. Computational method for a singular perturbation via domain decomposition and its parallel implementation. *Applied Mathematics and Computation*. 1993;56(1):71-95. [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(93\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0096-3003(93)90080-X)
5. Kadalbajoo MK, Gupta V. A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2010;217(8):3641-3716. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.09.059>
6. Dmitriev MG, Kurina GA. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*. 2006;67(1):1-43. <https://doi.org/10.1134/S0005117906010012>
7. Kurina GA. Singular perturbations of control problems with equation of state not solved for the derivative (a survey). *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 1993;31(6):17-45.
8. Zhang Y, Naidu DS, Cai C, Zou Y. Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012. *International Journal of Information and Systems Sciences*. 2014;9(1):1-36.
9. Vasil'eva AB, Butuzov VF. Singularly perturbed equations in the critical case. Wisconsin: University of Wisconsin-Madison; 1980. 165 p.
10. Danilin AR, Kovrizhnykh OO. Asimptotika resheniya odnoi zadachi bystrodeistviya s neogranichennym tselevym mnozhestvom dlya lineinoi sistemy v kriticheskom sluchae [Asymptotics of a solution to a time-optimal control problem with an unbounded target set for a linear system in the critical case]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*. 2022;28(1):58-73. (in Russian) <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-1-58-73>
11. Kurina G, Nguyen TH. Zero-order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case. *Optimal Control Applications and Methods*. 2019;40(5):859-879. <https://doi.org/10.1002/oca.2514>
12. Butuzov VF, Nefedov NN, Schneider KR. Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2004;121(1):1973-2079. <https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000021571.21423.52>
13. Nefedov NN, Schneider KR. Immediate exchange of stabilities in singularly perturbed systems. *Differential and Integral Equations*. 1999;12(4):583-599. <https://doi.org/10.57262/die/1367267008>
14. Vasil'eva AB, Nefedov NN, Radchenko IV. On internal transition layer in singularly perturbed initial value problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1996;36(9):1251-1256.

15. Il'in AM, Dolbeeva SF. Asymptotics of the solution to a differential equation with a small parameter in the case of two limit solutions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2006;253(Suppl 1):S105–S116.  
<https://doi.org/10.1134/S0081543806050099>.
16. Kurina G, Hoai NT. First asymptotic approximations to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of degenerate problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2017;292:356–374.  
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.07.038>
17. Kurina G, Hoai NT. Higher order asymptotic approximation to a solution of singularly perturbed optimal control problem with intersecting solutions of the degenerate problem, 2019 23<sup>rd</sup> International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2019;727–732.  
<https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885991>
18. Vasil'eva AB, Dmitriev MG, Ni Ming Kang. On a steplike contrast structure in a problem of variational calculus. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2004;44(7):1203–1212.
19. Alekseev VM, Tikhomirov VM, Fomin SV. Optimal'noye upravleniye [Optimal control]. Moscow: Nauka; 1979. 432 p. (in Russian)
20. Nikol'skii MS. O dostatochnosti printsipa maksimuma Pontryagina v nekotorykh optimizatsionnykh zadachakh [On sufficiency of Pontryagin's maximum principle in some optimization problems]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika*. 2005;(1):35–43. (in Russian)
21. El'sgol'ts LE. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, Fizmatlit; 1965. 424 p. (in Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.08.2023

Received August 21, 2023

Поступила после рецензирования 02.10.2023

Revised October 2, 2023

Принята к публикации 05.10.2023

Accepted October 5, 2023

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Курина Галина Алексеевна** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

**Нгуен Тхи Хоай** – кандидат физико-математических наук, преподаватель, Научный Университет, Вьетнамский Национальный Университет, г. Ханой, Вьетнам

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Galina A. Kurina** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia,

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Nguyen T. Hoai** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Teacher, University of Science, Vietnam National University, Hanoi, Vietnam

## Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений

<sup>1</sup> Половинкина М. В. , <sup>2,3</sup> Половинкин И. П.   
(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет инженерных технологий,  
Россия, 394036, г. Воронеж, проспект Революции, 19

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет,  
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

<sup>3</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.  
[polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru)

**Аннотация.** Объект исследования статьи — смешанная задача для гиперболического уравнения второго порядка с двумя переменными (одна пространственная переменная и переменное время) с оператором Бесселя. Предполагается, что известны несколько первых коэффициентов разложения начальной функции в ряд Фурье по функциям Бесселя. Отдельно рассмотрен случай классического разложения начальной функции по синусам кратных дуг, когда оператор Бесселя действует лишь по временной переменной. Рассматривается проблема восстановления решения по этим данным. В статье использованы результаты и методы, которые ранее представили в своих работах Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Е. О. Сивкова, Н. Д. Выск.

**Ключевые слова:** оператор Бесселя, функции Бесселя, метод восстановления, начально-краевая задача, волновое уравнение

**Для цитирования:** Половинкина М. В., Половинкин И. П. 2023. Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 330–338. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338

Original Research

## Remarks on the Recovery of Solutions of Initial Boundary Value Problems for Singular Wave Equations

<sup>1</sup> Marina V. Polovinkina , <sup>2,3</sup> Igor P. Polovinkin   
(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

<sup>1</sup> Voronezh State University of Engineering Technologies,  
19 Revolution av., Voronezh, 394036, Russia

<sup>2</sup> Voronezh State University,  
1 Universitetskaya pl., Voronezh, 394018 Russia

<sup>3</sup> Belgorod State National Research University,  
85 Pobedy st., Belgorod, 308015 Russia  
[polovinkin@yandex.ru](mailto:polovinkin@yandex.ru)

**Abstract.** The paper deals with a mixed problem for a second-order hyperbolic equation with two variables (one spatial variable and one time variable) with the Bessel operator. It is assumed that the first few coefficients of the expansion of the initial function into a Fourier series by Bessel functions are known. The case of the classical expansion of the initial function by the sines of multiple arcs, when the Bessel operator acts only with respect to the time variable, is considered separately. The problem of recovery of the solution based on these data is considered. The paper uses the results and methods presented in the works by G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, E. O. Sivkova, N. D. Vysk.

**Keywords:** Bessel Operator, Bessel Functions, Recovery Method, Initial Boundary Value Problem, Wave Equation

**For citation:** Polovinkina M. V., Polovinkin I. P. 2023. Remarks on the Recovery of Solutions of Initial Boundary Value Problems for Singular Wave Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 330–338. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338

**1. Введение.** Опишем для замкнутости повествования общую задачу, рассмотренную в [1, 2], на которую мы далее будем опираться. Пусть

$$\mathcal{X} = \left\{ x = \{x_k\}_{k=1}^\infty : \|x\|_{\mathcal{X}} = \left( \sum_{k=1}^\infty \omega_k |x_k|^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad 0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N < \omega_{N+1} < \omega_{N+2} < \dots$$

Определим оператор  $Q : \mathcal{X} \rightarrow \ell_2$  равенством

$$Qx = (\eta_1 x_1, \eta_2 x_2, \dots), \quad x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{X}.$$

Пусть  $\mu_k = \eta_k^2$ . Потребуем, чтобы  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_k / \omega_k) = 0$ . Тогда  $Qx \in \ell_2$  для всех  $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{X}$ .

Сформулируем задачу об оптимальном восстановлении оператора  $Q$  по приближенным значениям первых  $N$  компонент  $x_1, \dots, x_N$  [2]. Пусть

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 1\}.$$

Предположим, что для каждого  $x \in \mathcal{W}$  известен такой вектор  $y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ , для которого

$$\|I_N x - y\|_{\ell_2^N} = \left( \sum_{k=1}^N |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2} \leq \delta,$$

где  $I_N x = (x_1, \dots, x_N)$ . Всякое отображение  $\mathbf{m} : \ell_2^N \rightarrow \ell_2$  считается методом восстановления. Погрешность метода восстановления  $\mathbf{m}$  определим равенством

$$e(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta, \mathbf{m}) = \sup_{x \in \mathcal{W}, y \in \ell_2^N : \|I_N x - y\|_{\ell_2^N} \leq \delta} \|Qx - \mathbf{m}(y)\|_{\ell_2}.$$

Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \inf_{\mathbf{m} : \ell_2^N \rightarrow \ell_2} e(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta, \mathbf{m}). \tag{1}$$

Метод, на котором достигается точная нижняя грань, определенная в равенстве (1), назовем оптимальным методом восстановления оператора  $Q$  в классе  $\mathcal{W}$  по информации  $I_N$ , полученной с погрешностью  $\delta$  в норме пространства  $\ell_2^N$ .

Пусть  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  — стандартный базис в пространстве  $\ell_2$ , т.е.  $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , где «1» стоит на  $k$ -м месте, все остальные компоненты равны нулю. Введем обозначения:

$$A = \max_{1 \leq k \leq N} \frac{\mu_k}{\omega_k}, \quad B = \max_{k > N} \frac{\mu_k}{\omega_k}.$$

Пусть для некоторых чисел  $1 \leq p \leq N$ ,  $q > N$  и  $p \leq r \leq N$  выполнены равенства

$$A = \frac{\mu_p}{\omega_p}, \quad B = \frac{\mu_q}{\omega_q}, \quad \mu_r - B\omega_r = \max_{p \leq k \leq N} (\mu_k - B\omega_k). \tag{2}$$

Эти числа определяются неоднозначно, так что для определенности будем считать, что  $p$  — наибольшее, а  $q$  и  $r$  — наименьшие из чисел, для которых выполнены соответствующие равенства (2). Пусть  $s_{\varrho+1}$  — наибольшее из чисел, для которых  $s_{\varrho} < s_{\varrho+1} \leq r$  и

$$\frac{\mu_{s_{\varrho+1}} - \mu_{s_{\varrho}}}{\omega_{s_{\varrho+1}} - \omega_{s_{\varrho}}} = \max_{s_{\varrho} < k \leq r} \frac{\mu_k - \mu_{s_{\varrho}}}{\omega_k - \omega_{s_{\varrho}}}, \quad \varrho = 1, \dots, h-1, \quad s_0 = p, \quad s_h = r.$$

Пусть

$$G_{\varrho} = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_{\kappa}}{\omega_{\kappa}} > \frac{\mu_{s_{\varrho+1}} - \mu_{s_{\varrho}}}{\omega_{s_{\varrho+1}} - \omega_{s_{\varrho}}} \right\},$$

$$G_h = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{\mu_{\kappa}}{\omega_{\kappa}} > B \right\}.$$

**Теорема VO [2].**

1. При  $B \geq A$  для любого  $\delta > 0$   $E(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_q}{\omega_q}}$ , метод  $\hat{\mathbf{m}}(y) = 0$  оптимальный.

2. При  $B < A$ ,  $1/\sqrt{\omega_{s_{\rho+1}}} \leq \delta < 1/\sqrt{\omega_{s_\rho}}$ ,  $\rho = 1, \dots, h-1$ ,

$$E(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_{s_\rho} \frac{\omega_{s_{\rho+1}} \delta^2 - 1}{\omega_{s_{\rho+1}} - \omega_{s_\rho}} + \mu_{s_{\rho+1}} \frac{1 - \delta^2 \omega_{s_\rho}}{\omega_{s_{\rho+1}} - \omega_{s_\rho}}},$$

метод

$$\hat{\mathbf{m}}(y) = \sum_{\kappa \in G_\rho} \eta_\kappa \left( 1 + \frac{\mu_{s_{\rho+1}} - \mu_{s_\rho}}{\mu_{s_\rho} \omega_{s_{\rho+1}} - \mu_{s_{\rho+1}} \omega_{s_\rho}} \omega_\kappa \right)^{-1} y_\kappa e_\kappa$$

оптимальный.

3. При  $B < A$ ,  $\delta < 1/\sqrt{\omega_r}$

$$E(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\mu_r \delta^2 + \mu_q \frac{1 - \delta^2 \omega_r}{\omega_q}},$$

метод

$$\hat{\mathbf{m}}(y) = \sum_{\kappa \in G_h} \eta_\kappa \left( 1 + \frac{\mu_q}{\mu_r \omega_q - \mu_q \omega_r} \omega_\kappa \right)^{-1} y_\kappa e_\kappa$$

оптимальный.

4. При  $B < A$ ,  $\delta \geq 1/\sqrt{\omega_p}$

$$E(Q, \mathcal{W}, I_N, \delta) = \sqrt{\frac{\mu_p}{\omega_p}},$$

метод  $\hat{\mathbf{m}}(y) = 0$  оптимальный.

В работе [2] с помощью теоремы VO решена задача об оптимальном восстановлении в фиксированный момент времени решения первой начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения по известному конечному набору коэффициентов Фурье начальной функции. Ниже мы обсудим возможности применения этой теоремы к аналогичной проблеме для сингулярных одномерных волновых уравнений.

**2. Одномерное волновое уравнение с двумя сингулярностями.** В этом разделе нам понадобятся минимальные сведения о весовых пространствах Киприянова и  $j$ -функциях Бесселя.

Символом  $C_{ev}^\infty([0, 1])$  обозначим пространство всех функций из пространства  $C^\infty([0, 1])$ , удовлетворяющих условию четности (гладкости четного продолжения)

$$\frac{d^\kappa g}{dx^\kappa}(0) = 0, \quad \kappa = 1, 3, 5, \dots$$

Пусть  $L_{2,\gamma}(0, 1) = L_2^\gamma(0, 1)$  означает замыкание пространства  $C_{ev}^\infty([0, 1])$  по норме

$$\|g(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 x^\gamma |g(x)|^2 dx}.$$

Весовые пространства  $H_\gamma^n(0, 1)$  (пространства И. А. Киприянова – см. [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]) введем как замыкание класса  $C_{ev}^\infty([0, 1])$  по норме

$$\|f\|_{n,\gamma} = \left( \sum_{\substack{0 \leq i_1 + 2i_2 \leq n \\ i_1=0,1}} \int_0^1 x^\gamma |D_x^{i_1} B_{x,\gamma}^{i_2} f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где  $B_{x,\gamma}$  – оператор Бесселя, определенный формулой  $B_{x,\gamma} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = x^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ ,  $D_x = \frac{d}{dx}$ .

$j$ -функция Бесселя порядка  $\nu$  определяется формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{z^\nu} J_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция Эйлера,  $J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m+\nu+1)}$  – функция Бесселя первого рода порядка  $\nu$ .

Потребность в  $j$ -функциях Бесселя возникает при решении задачи Штурма-Лиувилля следующего вида (см. [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13])

$$B_{x,2\nu+1} \Phi = -\lambda \Phi, \quad x \in [0, 1], \quad (3)$$

$$d\Phi/dx(0) = 0, \quad \Phi(1) = 0, \quad (4)$$

которая имеет собственные функции  $j_\nu(\epsilon_\kappa x)$ , соответствующие собственным значениям  $\epsilon_\kappa^2$ , где  $\{\epsilon_\kappa\}$ ,  $\kappa = 1, 2, \dots$ , – последовательность всех положительных нулей функции Бесселя  $j_\nu(\cdot)$ , а значит и функции  $J_\nu(\cdot)$ , пронумерованных в порядке возрастания.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для сингулярного волнового уравнения:

$$B_{t,\vartheta} u = B_{x,\gamma} u, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(+0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = 0, \quad u(x, +0) = \varphi(x), \quad (7)$$

$\gamma > 0, \vartheta > 0$ .

С помощью стандартной процедуры метода Фурье разделения переменных мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля (3)–(4), после чего легко получить представление решения задачи (5)–(7) в виде

$$u(x, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa j_\zeta(\epsilon_\kappa t) j_\nu(\epsilon_\kappa x), \quad (8)$$

$\nu = (\gamma - 1)/2, \zeta = (\vartheta - 1)/2$ ,

$$A_\kappa = \frac{\epsilon_\kappa^{2\nu}}{2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu+1) J_{\nu+1}^2(\epsilon_\kappa)} \int_0^1 x^\gamma \varphi(x) j_\nu(\epsilon_\kappa x) dx, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

суть коэффициенты разложения

$$\varphi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa j_\nu(\epsilon_\kappa x) \quad (10)$$

в ряд Фурье-Бесселя (см. [11, 12, 13]) функции  $\varphi(x)$ . От представлений (8), (9), (10) для дальнейшего удобства перейдем к представлениям

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa j_\zeta(\epsilon_\kappa t) \Lambda_{\nu,\kappa}(x), \\ a_\kappa &= \int_0^1 x^\gamma \varphi(x) \Lambda_{\nu,\kappa}(x) dx, \\ \varphi(x) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa \Lambda_{\nu,\kappa}(x), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Lambda_{\nu,\kappa}(x) = \frac{j_\nu(\epsilon_\kappa x)}{\|j_\nu(\epsilon_\kappa x)\|_{L_2^\gamma}} = \frac{\epsilon_\kappa^\nu}{2^{(2\nu-1)/2} \Gamma(\nu+1) J_{\nu+1}(\epsilon_\kappa)} j_\nu(\epsilon_\kappa x).$$

Положим

$$W_{2,\gamma}^n = \{g \in H_\gamma^n(0, 1) : \|D_x^{i_1} B_{x,\gamma}^{i_2} g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq 1, \quad i_1 + 2i_2 = n, \quad i_1 = 0, 1\},$$

считая при этом, что производная  $D_x^{i_1} B_{x,\gamma}^{i_2} g(\cdot)$  кусочно непрерывна при  $i_1 + 2i_2 = n, i_1 = 0, 1$ . Далее будем считать  $n$  четным. Это приводит нас к возможности применять равенство

$$B_{x,2\nu+1}^{n/2} j_\nu(\epsilon x) = -\epsilon^n j_\nu(\epsilon x), \quad n = 2, 4, \dots, \quad \epsilon > 0.$$

Следуя [2], введем в рассмотрение «информационный» оператор  $F_\delta^N$ , который каждой функции  $\varphi \in W_{2,\gamma}^n$  ставит в соответствие некоторый вектор  $y = (y_1, \dots, y_N)$  приближенных значений первых  $N$  коэффициентов в разложении (11) функции  $\varphi$ , удовлетворяющий условию

$$\sum_{\kappa=1}^N |a_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2, \quad \delta > 0$$

и поставим задачу по этим данным восстановить решение задачи (5)–(7) в момент времени  $T > 0$  в классе  $W_{2,\gamma}^n$ . Методом восстановления будем считать любой оператор  $\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \rightarrow L_{2,\gamma}(0, 1)$ , следуя [2]. Пусть

$$U(m, N, \delta) = \{(\varphi, y) : \varphi \in W_{2,\gamma}^n, y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{\kappa=1}^N |A_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2\}.$$

Величина

$$e(T, W_{2,\gamma}^n, F_\delta^N, \mathbf{m}) = \sup_{(\varphi, y) \in U(m, N, \delta)} \|u(\cdot, T) - \mathbf{m}(y)(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(0,1)}$$

называется погрешностью восстановления для метода  $\mathbf{m}$ . Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W_{2,\gamma}^n, F_\delta^N) = \inf_{m: \mathbb{R}^N \rightarrow L_{2,\gamma}(0,1)} e(T, W_{2,\gamma}^n, F_\delta^N, \mathbf{m}). \quad (12)$$

Метод, на котором достигается введенная в (12) точная нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

Если  $\varphi(\cdot) \in W_{2,\gamma}^n$ , то для разложения (11) в силу неравенства Бесселя для разложения Фурье–Бесселя (см. [11]) будет выполнено неравенство

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \epsilon_\kappa^{2n} a_\kappa^2 \leq \int_0^1 x^\gamma |B_{x,\gamma} \varphi(x)|^2 dx \leq 1.$$

Это дает возможность положить

$$\omega_\kappa = \epsilon_\kappa^{2n}, \quad \mu_\kappa = j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T),$$

$$A = \max_{1 \leq \kappa \leq N} \frac{j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(\epsilon_p T)}{\epsilon_p^{2n}}, \quad B = \max_{\kappa > N} \frac{j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(\epsilon_q T)}{\epsilon_q^{2n}}.$$

Исходя из асимптотического представления  $j$ -функции Бесселя (см. [11])

$$j_\zeta(\tau) = \frac{2^\zeta \Gamma(\zeta + 1)}{\tau^\zeta} \sqrt{\frac{2}{\pi \tau}} \left( \cos\left(\tau - (2\zeta + 1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\tau^{3/2}}\right) \right),$$

а также учитывая теоремы Шафхейтлина о расположении вещественных корней функций Бесселя, можно убедиться в том, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} = 0.$$

Число  $r$  определяется из условия

$$j_\zeta^2(\epsilon_r T) - B\epsilon_r^{2n} = \max_{p \leq \kappa \leq N} \left( j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T) - B\epsilon_\kappa^{2n} \right).$$

Числа  $\{s_\varrho\}$  определяются с помощью условия

$$\frac{j_\zeta^2(\epsilon_{s_{\varrho+1}} T) - j_\zeta^2(\epsilon_{s_\varrho} T)}{\epsilon_{s_{\varrho+1}}^{2n} - \epsilon_{s_\varrho}^{2n}} = \max_{s_\varrho \leq \kappa \leq r} \frac{j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T) - j_\zeta^2(\epsilon_{s_\varrho} T)}{\epsilon_\kappa^{2n} - \epsilon_{s_\varrho}^{2n}}, \quad \varrho = 1, \dots, h-1, \quad s_0 = p, \quad s_h = r.$$

Далее

$$G_\varrho = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} > \frac{j_\zeta^2(\epsilon_{s_{\varrho+1}} T) - j_\zeta^2(\epsilon_{s_\varrho} T)}{\epsilon_{s_{\varrho+1}} - \epsilon_{s_\varrho}} \right\},$$

$$G_h = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{j_\zeta^2(\epsilon_\kappa T)}{\epsilon_\kappa^{2n}} > B \right\}.$$

Учитывая изложенное, основываясь на теореме VO, мы приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.**

1. При  $B \geq A$  для любого  $\delta > 0$

$$E(T, W_{2,\gamma}^n, F_\delta^N) = \frac{j_\zeta^2(\epsilon_q T)}{\epsilon_q^{2n}},$$

метод  $u(x, T) = 0$  оптимальный.

2. При  $B < A$ ,  $\epsilon_{s_{\rho+1}}^{-n} \leq \delta < \epsilon_{s_{\rho}}^{-n}$ ,  $\rho = 1, \dots, h-1$ ,

$$E(T, W_2^n, F_{\delta}^N) = \sqrt{j_{\zeta}^2(\epsilon_{s_{\rho}} T) \frac{\epsilon_{s_{\rho+1}}^{2n} \delta^2 - 1}{\epsilon_{s_{\rho+1}}^{2n} - \epsilon_{s_{\rho}}^{2n}} + j_{\zeta}^2(\epsilon_{s_{\rho+1}} T) \frac{1 - \delta^2 \epsilon_{s_{\rho}}^{2n}}{\epsilon_{s_{\rho+1}}^{2n} - \epsilon_{s_{\rho}}^{2n}}}$$

метод

$$u(x, T) = \sum_{\kappa \in G_{\rho}} \left( 1 + \frac{j_{\zeta}^2(\epsilon_{s_{\rho+1}} T) - j_{\zeta}^2(\epsilon_{s_{\rho}} T)}{\epsilon_{s_{\rho+1}}^{2n} j_{\zeta}^2(\epsilon_{s_{\rho}} T) - \epsilon_{s_{\rho}}^{2n} j_{\zeta}^2(\epsilon_{s_{\rho+1}} T)} \epsilon_{\kappa}^{2n} \right)^{-1} y_{\kappa} j_{\zeta}(\epsilon_{\kappa} T) \Lambda_{\kappa}(x)$$

оптимальный.

3. При  $B < A$ ,  $\delta < \epsilon_r^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_{\delta}^N) = \sqrt{\delta^2 j_{\zeta}^2(\epsilon_r T) + j_{\zeta}^2(\epsilon_q T) \frac{1 - \delta^2 \epsilon_r^{2n}}{\epsilon_q^{2n}}}$$

метод

$$u(x, T) = \sum_{\kappa \in G_h} \left( 1 + \frac{j_{\zeta}^2(\epsilon_q T)}{\epsilon_q^{2n} j_{\zeta}^2(\epsilon_r T) - \epsilon_r^{2n} j_{\zeta}^2(\epsilon_q T)} \epsilon_{\kappa}^{2n} \right)^{-1} y_{\kappa} j_{\zeta}(\kappa T) \Lambda_{\kappa}(x)$$

оптимальный.

4. При  $B < A$ ,  $\delta \geq \epsilon_p^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_{\delta}^N) = \sqrt{\frac{j_{\zeta}^2(\epsilon_p T)}{\epsilon_p^{2n}}}$$

метод  $u(x, T) = 0$  оптимальный.

**3. Одномерное волновое уравнение с сингулярностью по времени.** Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для волнового уравнения с сингулярностью по временной переменной:

$$B_{t,\vartheta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, \pi), \quad t > 0, \tag{13}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, +0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \tag{15}$$

где  $\vartheta > 0$ .

С помощью стандартной процедуры метода Фурье разделения переменных легко получить представление решения задачи (13)–(15) в виде

$$u(x, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} j_{\zeta}(\kappa t) \sin(\kappa x),$$

где  $\zeta = (\vartheta - 1)/2$ ,

$$a_{\kappa} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(\kappa x) dx,$$

— коэффициенты разложения в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \sin(\kappa x) \tag{16}$$

функции  $\varphi(x)$ .

Пусть, как и в [2],

$$W_2^n = \{g \in L_2(0, \pi) : D_x^{n-1} g(\cdot) \text{ абсолютно непрерывна на } [0, \pi], \|D_x^n g(\cdot)\|_{L_2(0, \pi)} \leq 1\},$$

$$\|g(\cdot)\|_{L_2(0, \pi)} = \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Следуя, как и ранее, [2], введем в рассмотрение «информационный» оператор  $F_{\delta}^N$ , который каждой функции  $\varphi \in W_2^n$  ставит в соответствие некоторый вектор  $y = (y_1, \dots, y_N)$ , удовлетворяющий условию

$$\sum_{\kappa=1}^N |a_{\kappa} - y_{\kappa}|^2 < \delta^2, \quad \delta > 0.$$

Поставим задачу по этим данным восстановить решение задачи (13)–(15) в момент времени  $T > 0$  в классе  $W_2^n$ . Методом восстановления будем считать любой оператор  $\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(0, 1)$ , следуя [2]. Пусть

$$U(n, N, \delta) = \{(\varphi, y) : \varphi \in W_2^n, y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \sum_{\kappa=1}^N |a_\kappa - y_\kappa|^2 < \delta^2\}.$$

Величина

$$e(T, W_2^n, F_\delta^N, \mathbf{m}) = \sup_{(\varphi, y) \in U(n, N, \delta)} \|u(\cdot, T) - \mathbf{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(0,1)}$$

называется погрешностью восстановления для метода  $\mathbf{m}$ . Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \inf_{\mathbf{m} : \mathbb{R}^N \rightarrow L_2(0,1)} e(T, W_2^n, F_\delta^N, \mathbf{m}). \quad (17)$$

Метод, на котором достигается введенная в (17) точная нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

В рассматриваемой задаче восстановления при  $\varphi(\cdot) \in W_2^n$  можно положить, как и в [2],  $\omega_\kappa = \kappa^{2n}$ , поскольку

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa^{2n} a_\kappa^{2n} \leq 1.$$

При этом придется положить

$$\mu_\kappa = j_\zeta^2(\kappa T),$$

$$A = \max_{1 \leq \kappa \leq N} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(pT)}{p^{2n}}, \quad B = \max_{\kappa > N} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^{2n}}.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{\mu_\kappa}{\omega_\kappa} = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} = 0.$$

Число  $r$  определяется из условия

$$j_\zeta^2(rT) - Br^{2n} = \max_{p \leq \kappa \leq N} (j_\zeta^2(\kappa T) - B\kappa^{2n}).$$

Числа  $\{s_\varrho\}$  определяются с помощью условия

$$\frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}} = \max_{s_\varrho \leq \kappa \leq r} \frac{j_\zeta^2(\kappa T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{\kappa^{2n} - s_\varrho^{2n}}, \quad \varrho = 1, \dots, h-1, \quad s_0 = p, \quad s_h = r.$$

Далее

$$G_\varrho = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} > \frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1} - s_\varrho} \right\},$$

$$G_h = \left\{ \kappa \in \mathbb{N} \cap [1, N] : \frac{j_\zeta^2(\kappa T)}{\kappa^{2n}} > B \right\}.$$

Следующее утверждение вытекает из теоремы VO.

**Теорема 2.**

1. При  $B \geq A$  для любого  $\delta > 0$   $E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^n}$ , метод  $u(x, T) = 0$  оптимальный.
2. При  $B < A$ ,  $s_{\varrho+1}^{-n} \leq \delta < s_\varrho^{-n}$ ,  $\varrho = 1, \dots, h-1$ ,

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{j_\zeta^2(s_\varrho T) \frac{s_{\varrho+1}^{2n} \delta^2 - 1}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}} + j_\zeta^2(s_{\varrho+1} T) \frac{1 - \delta^2 s_\varrho^{2n}}{s_{\varrho+1}^{2n} - s_\varrho^{2n}}},$$

метод

$$u(x, T) = \sum_{\kappa \in G_\varrho} \left( 1 + \frac{j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T) - j_\zeta^2(s_\varrho T)}{s_{\varrho+1}^{2n} j_\zeta^2(s_\varrho T) - s_\varrho^{2n} j_\zeta^2(s_{\varrho+1}T)} \kappa^{2n} \right)^{-1} y_\kappa j_\zeta(\kappa T) \sin(\kappa x)$$

оптимальный.

3. При  $B < A$ ,  $\delta < r^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\delta^2 j_\zeta^2(rT) + j_\zeta^2(qT) \frac{1 - \delta^2 r^{2n}}{q^{2n}}},$$

метод

$$u(x, T) = \sum_{\kappa \in G_h} \left( 1 + \frac{j_\zeta^2(qT)}{q^{2n} j_\zeta^2(rT) - r^{2n} j_\zeta^2(qT)} \kappa^{2n} \right)^{-1} y_\kappa j_\zeta(\kappa T) \sin(\kappa x)$$

оптимальный.

4. При  $B < A$ ,  $\delta \geq p^{-n}$

$$E(T, W_2^n, F_\delta^N) = \sqrt{\frac{j_\zeta^2(pT)}{p^{2n}}},$$

метод  $u(x, T) = 0$  оптимальный.

**4. Заключение.** Мы убедились в возможности перенесения результатов, связанных с восстановлением решения первой начально–краевой задачи для одномерного волнового уравнения на случай, когда по двум переменным или по одной (временной) вместо второй производной действует оператор Бесселя. Свойства собственных функций задачи Штурма – Лиувилля, порожденной оператором Бесселя ( $j$ - функций Бесселя), обеспечивают такую возможность, то есть обеспечивают применение теоремы ВО, представленной в [2].

#### Список литературы

- Магарил-Ильев Г.Г., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. *Математический сборник*. 2002;193(3): 79–100. <https://doi.org/10.4213/sm637>
- Выск Н.Д., Осипенко К.Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. *Математические заметки*. 2007;81(6):803–815. <https://doi.org/10.4213/mzm3743>
- Катрахова А.А. Об аппроксимации решений некоторых сингулярных эллиптических краевых задач. *Доклады Академии Наук СССР*. 1979;249(1):34–37.
- Катрахова А.А. Об одном численном методе для некоторых сингулярных краевых задач. *Дифференциальные уравнения*. 1981;17(5):805–819.
- Катрахов В.В., Катрахова А.А. Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач. *Доклады Академии Наук СССР*. 1984;279(4):799–802.
- Катрахов В.В., Ситник С.М. Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2018;64(2):211–426. <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426>
- Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 208 с.
- Киприянов И.А. Преобразование Фурье–Бесселя и теоремы вложения для весовых классов. *Труды МИАН СССР*. 1967;89:130–213.
- Ляхов Л.Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. Липецк, ЛГПУ, 2007. 232 с.
- Ситник С.М., Шишкина Э.Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Наука, 2019. 224 с.
- Кузнецов А.В., Ляхов Л.Н., Половинкин И.П., Райхельгауз Л.Б., Санина Е.Л., Шишкина Э.Л.  $j$ -функции Бесселя и их применения в задачах математической физики. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2015. 96 с.
- Левитан Б.М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя. *Успехи математических наук*. 1951;6(2):102–143.
- Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. *Математический сборник*. 1955;36(78)(2):299–310.

#### References

- Magaril-Ilyayev GG, Osipenko KYu. Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error. *Matematicheskii sbornik*. 2002;193(3):387–407. DOI: 10.1070/SM2002v193n03ABEH000637
- Vysk ND., Osipenko KY. Optimal reconstruction of the solution of the wave equation from inaccurate initial data. *Math Notes*. 2007;81:723–733. <https://doi.org/10.1134/S0001434607050203>
- Katrakhova AA. Ob approksimatsii resheniy nekotorykh singulyarnykh ellipticheskikh krayevykh zadach [Approximation of the solutions to some singular elliptic boundary value problems]. *Doklady Mathematics USSR*. 1979;249(1):34–37.
- Katrakhova AA. Ob odnom chislennom metode dlya nekotorykh singulyarnykh krayevykh zadach [A numerical method for some singular boundary value problems]. *Differential Equations*. 1981;17(5):805–819.

5. Katrakhov VV; Katrakhova AA. Metod konechnykh elementov dlya nekotorykh vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh kraevykh zadach [The finite element method for some degenerate elliptic boundary value problems]. *Doklady Mathematics USSR*. 1984;279(4):799–802.
6. Katrakhov VV., Sitnik SM. Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya*. 2018;64(2):211–426. DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426>
7. Kipriyanov IA. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular elliptic boundary value problems]. M.: Nauka, 1997. 208 p.
8. Kipriyanov IA. Preobrazovaniya Fur'e–Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov [Fourier–Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*. 1967;89:130–213.
9. Lyahov LN. B-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i integral'nym uravneniyam s V-potentsial'nymi yadrami [B-hypersingular integrals and their applications to the description of Kipriyanov functional classes and integral equations with B-potential kernels]. Lipetsk, LSPU, 2007. 232 p. ISBN 978-5-88526-328-2
10. Sitnik SM., Shishkina EL. Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya [Method of transmutations for differential equations with Bessel operators]. M.: Nauka, 2019. 224 p. ISBN 978-5-9221-1819-4
11. Kuznetsov AV, Lyakhov LN, Polovinkin IP, Raykhelgauz LB, Sanina EL, Shishkina EL. *j*-funktsii Besselya i ikh primeneniye v zadachakh matematicheskoy fiziki [Bessel *j*-functions and their applications in mathematical physics problems]. Voronezh, Izdatel'skiy dom Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta, 2015. 96 p.
12. Levitan BM. Razlozheniya po funktsiyam Besselya v ryady i integraly Furie [Expansion in Fourier Series and Integrals with Bessel Functions]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 1951; 6(2/42):102–143.
13. Zhitomirskiy YaI. Zadacha Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial'nymi operatorami tipa Besselya [A Cauchy problem for for systems of partial differential equations with Bessel-type differential operators]. *Matematicheskii sbornik*. 1955;36(2):299–310.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.08.2023

Received August 22, 2023

Поступила после рецензирования 03.10.2023

Revised October 3, 2023

Принята к публикации 06.10.2023

Accepted October 6, 2023

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Половинкина Марина Васильевна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

**Половинкин Игорь Петрович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; ведущий научный сотрудник Центра прикладной математики Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Marina V. Polovinkina** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

**Igor P. Polovinkin** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor at the Department of mathematical and applied analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Leading Researcher at the Center for Applied Mathematics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

## Об одном подходе к изучению стохастических дифференциальных уравнений леонтьевского типа

Машков Е. Ю. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

Юго-Западный государственный университет,  
Россия, 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94  
[mashkovevgen@yandex.ru](mailto:mashkovevgen@yandex.ru)

**Аннотация.** В конечномерном пространстве рассматривается линейное стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито, у которого в левой части стоит вырожденная постоянная матрица. Принимая во внимание различные экономические приложения данных уравнений, их относят к уравнениям леонтьевского типа, поскольку при некоторых дополнительных предположениях детерминированным аналогом рассматриваемого уравнения описывается знаменитая балансовая модель «затраты-выпуск» В. Леонтьева с учетом запасов. В литературе данные системы чаще называют алгебро-дифференциальными, дескрипторными. В общем случае, для исследования данного типа уравнений необходимо рассмотрение производных высших порядков от правой части. А значит, необходимо рассматривать и производные винеровского процесса, существующие в обобщенном смысле. В предыдущих работах были исследованы данные уравнения с привлечением аппарата производных в среднем по Нельсону от случайных процессов, для описания которых не используются обобщенные функции. Известно, что производные в среднем зависят от того, какая сигма-алгебра используется для их нахождения. В работе исследование данного уравнения проведено с применением производных в среднем относительно новой сигма-алгебры, которая не рассматривалась в предыдущих работах.

**Ключевые слова:** производная в среднем, текущая скорость, винеровский процесс, стохастическое уравнение леонтьевского типа

**Для цитирования:** Машков Е. Ю. 2023. Об одном подходе к изучению стохастических дифференциальных уравнений леонтьевского типа. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 339–345. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-339-345

Original Research

## On a Certain Approach to Investigation of Stochastic Differential Leontieff Type Equations

Evgenii Yu. Mashkov 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Southwest State University,  
94 50 Let Otyabrya st., Kursk, 305040, Russia  
[mashkovevgen@yandex.ru](mailto:mashkovevgen@yandex.ru)

**Abstract.** In a finite-dimensional space, we consider a linear stochastic differential equation in Ito form, which has a degenerate constant matrix on the left side. Taking into account the various economic applications of these equations, they are classified as Leontief-type equations, since under some additional assumptions a deterministic analogue of the equation in question describes the famous input-output balance model of V. Leontief taking into account reserves. In the literature, these systems are more often called algebraic-differential and descriptor systems. In general, to study this type of equations it is necessary to consider higher-order derivatives of the right-hand side. This means that it is necessary to consider derivatives of the Wiener process that exist in a generalized sense. In previous works, these equations were studied using the apparatus of Nelson average derivatives of random processes, for the description of which generalized functions are not used. It is known that derivatives on average depend on which sigma-algebra is used to find them. In this work, the study of this equation was carried out using derivatives on average with respect to a new sigma-algebra, which was not considered in previous works.

**Keywords:** Mean Derivative, Current Velocity, Wiener Process, Stochastic Leontief Type Equation theorem, Local Solvability, Global Solvability

**For citation:** Mashkov E. Yu. 2023. On a Certain Approach to Investigation of Stochastic Differential Leontieff Type Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 339–345. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-339-345

---

**1. Производные в среднем.** Введем в рассмотрение случайный процесс  $\zeta(t)$  в  $R^n$ ,  $t \in [0, l]$ , который определен на некотором вероятностном пространстве  $\mathcal{F}$  и является  $L_1$ -случайной величиной при всех  $t$ .

Известно, что любой такой процесс порождает семейство  $\sigma$ -подалгебр  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$  «настоящее»  $\mathcal{N}_t^\zeta$ , которое будем считать полным.

Обозначим (для удобства) условное математическое ожидание  $E(\cdot | \mathcal{N}_t^\zeta)$  относительно «настоящего»  $\mathcal{N}_t^\zeta$  для  $\zeta(t)$  через  $E_t^\zeta$ .

Поскольку в общем случае почти все выборочные траектории процесса  $\zeta(t)$  не дифференцируемы, то его производные существуют только в смысле обобщенных функций. Чтобы избежать применения обобщенных функций, согласно Нельсону [1] введем следующее

**Определение 1.1.** [2] 1) Производной в среднем справа  $D\zeta(t)$  процесса  $\zeta(t)$  в момент времени  $t$  называется  $L_1$ -случайная величина вида  $D\zeta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\zeta \left\{ \frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \right\}$ , в предположении, что предел существует в  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и  $(\Delta t \rightarrow +0 \Leftrightarrow \Delta t \rightarrow 0 \text{ и } \Delta t > 0)$ .

2) Производной в среднем слева  $D_*\zeta(t)$  процесса  $\zeta(t)$  в момент времени  $t$  называется  $L_1$ -случайная величина  $D_*\zeta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\zeta \left\{ \frac{\zeta(t) - \zeta(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\}$ , в предположении, что предел существует в  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

В общем случае,  $D\zeta(t) \neq D_*\zeta(t)$ , но для процессов, имеющих п.н. гладкие выборочные траектории, эти производные совпадают.

Принимая во внимание свойства условного математического ожидания [3] имеем, что  $D\zeta(t)$  и  $D_*\zeta(t)$  могут быть представлены как композиции  $\zeta(t)$  и борелевских векторных полей (регрессий)

$$Z^0(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\zeta \left\{ \frac{\zeta(t + \Delta t) - \zeta(t)}{\Delta t} \mid \zeta(t) = x \right\}, \quad Z_*^0(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\zeta \left\{ \frac{\zeta(t) - \zeta(t - \Delta t)}{\Delta t} \mid \zeta(t) = x \right\}$$

на  $R^n$ , т.е.,  $D\zeta(t) = Z^0(t, \zeta(t))$  и  $D_*\zeta(t) = Z_*^0(t, \zeta(t))$ .

**Определение 1.2.** [2] Производная  $D_S = \frac{1}{2} [D + D_*]$  называется симметрической производной в среднем. Производная  $D_A = \frac{1}{2} [D - D_*]$  называется антисимметрической производной в среднем.

Введем в рассмотрение векторные поля  $v^\zeta(t, x) = \frac{1}{2} [Z^0(t, x) + Z_*^0(t, x)]$  и  $u^\zeta(t, x) = \frac{1}{2} [Z^0(t, x) - Z_*^0(t, x)]$ .

**Определение 1.3.** [2]  $v^\zeta(t) = v^\zeta(t, \zeta(t)) = D_S\zeta(t)$  называется текущей скоростью процесса  $\zeta(t)$ ;  $u^\zeta(t) = u^\zeta(t, \zeta(t)) = D_A\zeta(t)$  называется осмотической скоростью процесса  $\zeta(t)$ .

Известно [1, 2], что текущая скорость для стохастических процессов является аналогом обычной физической скорости детерминированных процессов, а осмотическая скорость показывает насколько быстро нарастает "стохастичность" процесса.

Далее нам понадобится лемма для нахождения симметрических производных в среднем от винеровского процесса  $w(t)$ .

**Лемма 1.1.** [2, 4, 5] Для  $t \in (0, l]$  выполняются

$$Dw(t) = 0, \quad D_*w(t) = \frac{w(t)}{t}, \quad D_Sw(t) = \frac{w(t)}{2t}$$

Для целых  $m \geq 2$

$$D_S^m w(t) = (-1)^{m-1} \prod_{i=1}^{m-1} (2i-1) \frac{w(t)}{(2t)^m}.$$

Для целых положительных  $i, j$  имеет место

$$E_t^{w^i} (w^j(t)) = E(w^j(t)) = 0, \quad i \neq j.$$

**2. Основной результат.** Исследуется вырожденное стохастическое дифференциальное уравнение в  $R^n$

$$\tilde{B}\dot{\zeta}(t) = \int_0^t \tilde{A}\zeta(s)ds + \int_0^t f(s)ds + \tilde{w}(t), \quad (1)$$

где  $\tilde{B}$  и  $\tilde{A}$  – вещественные постоянные  $n \times n$  – матрицы,  $\det \tilde{B} = 0$ , а  $\det \tilde{A} \neq 0$ , пучок  $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$  – регулярен ( $\det [\tilde{A} + \lambda \tilde{B}] \neq 0$ ),  $\zeta(t)$  – искомый стохастический  $n$ -мерный процесс,  $\tilde{w}(t)$  – винеровский процесс в  $R^n$ ,  $f(t)$  –  $C^\infty$ -гладкая детерминированная вектор-функция. Данные уравнения встречаются в различных приложениях [6, 7].

Сформулируем вспомогательное утверждение:

**Теорема 2.1. (Матричное преобразование Шура)** [8] Пусть пучок  $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$  регулярен. Тогда существуют вещественные ортогональные матрицы  $Q_L$  и  $Q_R$ , такие, что матрица  $Q_L \tilde{B} Q_R = B$  – верхняя квазитреугольная, а матрица  $Q_L \tilde{A} Q_R = A$  – верхняя треугольная.

Пусть вектора базиса в  $R^n$  стоят в таком порядке, что матрицы  $B$  и  $A$  имеют следующий вид

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 & b_4^1 & \dots & b_i^1 & b_{i+1}^1 & b_{i+2}^1 & \dots & b_j^1 & b_{j+1}^1 & \dots & b_p^1 & b_{p+1}^1 & b_{p+2}^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 & \dots & b_i^2 & b_{i+1}^2 & b_{i+2}^2 & \dots & b_j^2 & b_{j+1}^2 & \dots & b_p^2 & b_{p+1}^2 & b_{p+2}^2 & \dots & b_n^2 \\ 0 & 0 & b_3^3 & b_4^3 & \dots & b_i^3 & b_{i+1}^3 & b_{i+2}^3 & \dots & b_j^3 & b_{j+1}^3 & \dots & b_p^3 & b_{p+1}^3 & b_{p+2}^3 & \dots & b_n^3 \\ 0 & 0 & b_3^4 & b_4^4 & \dots & b_i^4 & b_{i+1}^4 & b_{i+2}^4 & \dots & b_j^4 & b_{j+1}^4 & \dots & b_p^4 & b_{p+1}^4 & b_{p+2}^4 & \dots & b_n^4 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_i^i & b_{i+1}^i & b_{i+2}^i & \dots & b_j^i & b_{j+1}^i & \dots & b_p^i & b_{p+1}^i & b_{p+2}^i & \dots & b_n^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{i+1}^{i+1} & b_{i+2}^{i+1} & \dots & b_{j+1}^{i+1} & b_{j+2}^{i+1} & \dots & b_{p+1}^{i+1} & b_{p+2}^{i+1} & \dots & b_n^{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & b_j^j & b_{j+1}^j & \dots & b_p^j & b_{p+1}^j & b_{p+2}^j & \dots & b_n^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j+1}^{j+1} & \dots & b_{p+1}^{j+1} & b_{p+2}^{j+1} & \dots & b_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{p+1}^p & b_{p+2}^p & \dots & b_n^p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{p+2}^{p+1} & \dots & b_n^{p+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & b_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \dots & a_i^1 & a_{i+1}^1 & a_{i+2}^1 & \dots & a_j^1 & a_{j+1}^1 & \dots & a_p^1 & a_{p+1}^1 & a_{p+2}^1 & \dots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \dots & a_i^2 & a_{i+1}^2 & a_{i+2}^2 & \dots & a_j^2 & a_{j+1}^2 & \dots & a_p^2 & a_{p+1}^2 & a_{p+2}^2 & \dots & a_n^2 \\ 0 & 0 & a_3^3 & a_4^3 & \dots & a_i^3 & a_{i+1}^3 & a_{i+2}^3 & \dots & a_j^3 & a_{j+1}^3 & \dots & a_p^3 & a_{p+1}^3 & a_{p+2}^3 & \dots & a_n^3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4^4 & \dots & a_i^4 & a_{i+1}^4 & a_{i+2}^4 & \dots & a_j^4 & a_{j+1}^4 & \dots & a_p^4 & a_{p+1}^4 & a_{p+2}^4 & \dots & a_n^4 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_i^i & a_{i+1}^i & a_{i+2}^i & \dots & a_j^i & a_{j+1}^i & \dots & a_p^i & a_{p+1}^i & a_{p+2}^i & \dots & a_n^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i+1}^{i+1} & a_{i+2}^{i+1} & \dots & a_{j+1}^{i+1} & a_{j+2}^{i+1} & \dots & a_{p+1}^{i+1} & a_{p+2}^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_j^j & a_{j+1}^j & \dots & a_p^j & a_{p+1}^j & a_{p+2}^j & \dots & a_n^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{j+1}^{j+1} & \dots & a_{p+1}^{j+1} & a_{p+2}^{j+1} & \dots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_p^p & a_{p+1}^p & a_{p+2}^p & \dots & a_n^p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{p+1}^{p+1} & a_{p+2}^{p+1} & \dots & a_n^{p+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n-1}^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

т. е., в  $B$  сначала вдоль главной диагонали расположены блоки размера  $2 \times 2$  (соответствующие сопряженным парам комплексных собственных значений), потом невырожденные блоки размера  $1 \times 1$  (соответствующие ненулевым действительным собственным значениям), а затем вырожденные блоки размера  $1 \times 1$  (соответствующие нулевым собственным значениям).

Выполним преобразование Шура над пучком  $\tilde{A} + \lambda \tilde{B}$ . Тогда получим, что уравнение (1) трансформируется следующим образом

$$Q_L \tilde{B} Q_R Q_R^{-1} \zeta(t) = \int_0^t Q_L \tilde{A} Q_R Q_R^{-1} \zeta(s) ds + \int_0^t Q_L f(s) ds + Q_L \tilde{w}(t)$$

и после введения новых обозначений  $\xi(t) = Q_R^{-1} \zeta(t)$ ,  $w(t) = Q_L \tilde{w}(t)$  – винеровский процесс,  $Q_L f(t) = h(t)$  примет такой вид

$$B \xi(t) = \int_0^t A \xi(s) ds + \int_0^t h(s) ds + w(t). \tag{2}$$

Из вида (2) мы понимаем, что (для простоты) начальное условие для решения (2) предполагается вида  $\eta(0) = 0$ .

Поскольку матрица  $B$  верхняя блочно-треугольная, а  $A$  верхняя треугольная, получаем, что уравнение (2) распадается на дифференциальные уравнения следующих типов.

Строкам в  $B$ , содержащим элементы блоков  $2 \times 2$ , соответствуют подсистемы из двух уравнений

$$\sum_{l=i}^n b_l^i \xi^l(t) = \int_0^t \left\{ \sum_{l=i}^n a_l^i \xi^l(s) \right\} ds + \int_0^t h^i(s) ds + w^i(t),$$

$$\sum_{l=i}^n b_l^{i+1} \xi^l(t) = \int_0^t \left\{ \sum_{l=i+1}^n a_l^{i+1} \xi^l(s) \right\} ds + \int_0^t h^{i+1}(s) ds + w^{i+1}(t).$$

После введения новых обозначений эти подсистемы уравнений принимают такой вид

$$\begin{aligned}\bar{\xi}(t) + \eta(t) &= \int_0^t G \bar{\xi}(s) ds + \int_0^t \vartheta(s) ds + \int_0^t \bar{h}(s) ds + C \bar{w}(t), \\ A_i^i &= \begin{pmatrix} a_i^i & a_{i+1}^i \\ 0 & a_{i+1}^i \end{pmatrix}, \quad \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \eta^i \\ \xi^{i+1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} b_i^i & b_{i+1}^i \\ b_i^{i+1} & b_{i+1}^{i+1} \end{pmatrix}^{-1}, \quad \eta = C \begin{pmatrix} b_{i+2}^i & \cdots & b_n^i \\ b_{i+2}^{i+1} & \cdots & b_n^{i+1} \end{pmatrix} (\xi^{i+2} \cdots \xi^n)^T, \\ \bar{h} &= C \begin{pmatrix} h^i \\ h^{i+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} w^i \\ w^{i+1} \end{pmatrix}, \quad G = CA_i^i, \quad \vartheta(t) = C \begin{pmatrix} a_{i+2}^i & \cdots & a_n^i \\ a_{i+2}^{i+1} & \cdots & a_n^{i+1} \end{pmatrix} (\xi^{i+2} \cdots \xi^n)^T.\end{aligned}$$

Решения таких подсистем уравнений находятся по известной [9] формуле

$$\bar{\xi}(t) = \int_0^t e^{G(t-\tau)} C d\bar{w}_\tau + \int_0^t e^{G(t-\tau)} \{ \vartheta(\tau) + \bar{h}(\tau) - G\eta(\tau) \} d\tau - \eta(t). \quad (3)$$

Строкам в  $B$  с невырожденными блоками размера  $1 \times 1$  соответствуют уравнения

$$b_j^j \xi^j(t) + b_{j+1}^j \xi^{j+1}(t) + \dots + b_n^j \xi^n(t) = \int_0^t \{ a_j^j \xi^j(s) + a_{j+1}^j \xi^{j+1}(s) + \dots + a_n^j \xi^n(s) \} ds + \int_0^t h^j(s) ds + w^j(t).$$

Решения таких уравнений находятся по известной [9] формуле

$$\begin{aligned}\xi^j(t) &= \int_0^t e^{\frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s)} \frac{1}{b_j^j} dw_s^j - \left\{ \frac{b_{j+1}^j}{b_j^j} \xi^{j+1}(t) + \dots + \frac{b_n^j}{b_j^j} \xi^n(t) \right\} + \\ &+ \int_0^t e^{\frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s)} \left\{ \frac{1}{b_j^j} h^j(s) + \frac{a_{j+1}^j}{b_j^j} \xi^{j+1}(s) + \dots + \frac{a_n^j}{b_j^j} \xi^n(s) - \frac{a_j^j}{[b_j^j]^2} [b_{j+1}^j \xi^{j+1}(s) + \dots + b_n^j \xi^n(s)] \right\} ds.\end{aligned}$$

В более компактной записи имеет вид

$$\begin{aligned}\xi^j(t) &= \frac{1}{b_j^j} \int_0^t \exp \left[ \frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s) \right] dw_s^j - \frac{1}{b_j^j} \sum_{l=j+1}^n b_l^j \xi^l(t) + \\ &+ \frac{1}{[b_j^j]^2} \int_0^t \exp \left[ \frac{a_j^j}{b_j^j}(t-s) \right] \left\{ b_j^j h^j(s) + b_j^j \sum_{l=j+1}^n a_l^j \xi^l(s) - a_j^j \sum_{l=j+1}^n b_l^j \xi^l(s) \right\} ds.\end{aligned} \quad (4)$$

Оставшимся нижним  $n-m+1$  строкам в  $B$ , содержащим нулевые диагональные блоки, соответствует подсистема вида

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & b_{m+1}^m & b_{m+2}^m & \cdots & b_n^m \\ 0 & 0 & b_{m+2}^{m+1} & \cdots & b_n^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^m(t) \\ \xi^{m+1}(t) \\ \vdots \\ \xi^n(t) \end{pmatrix} &= \int_0^t \begin{pmatrix} a_{m+1}^m & a_{m+1}^{m+1} & \cdots & a_n^m \\ 0 & a_{m+1}^{m+1} & \cdots & a_n^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^m(s) \\ \xi^{m+1}(s) \\ \vdots \\ \xi^n(s) \end{pmatrix} ds + \\ &+ \int_0^t \begin{pmatrix} h^m(s) \\ h^{m+1}(s) \\ \vdots \\ h^n(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} w^m(t) \\ w^{m+1}(t) \\ \vdots \\ w^n(t) \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (5)$$

Для дальнейшего изложения, следуя [2], введем обозначение:  $D_S^{w^i}$  – симметрическая производная в среднем относительно  $\sigma$ -алгебры «настоящее» 1-мерного винеровского процесса  $w^i(t)$ .

Рассматривая последнее уравнение системы (5), имеем

$$\int_0^t a_n^n \xi^n(s) ds = - \int_0^t h^n(s) ds - w^n(t).$$

Найдем симметрическую производную в среднем  $D_S^{w^n}$  (текущую скорость) от обеих частей этого уравнения. Тогда при  $0 < t < T$  с помощью Леммы 1.1 находим  $\xi^n(t)$

$$\xi^n(t) = - \frac{1}{a_n^n} h^n(t) - \frac{1}{a_n^n} D_S^{w^n} w^n(t) = - \frac{1}{a_n^n} h^n(t) - \frac{1}{a_n^n} \frac{w^n(t)}{2t}. \quad (6)$$

Рассматривая предпоследнее уравнения системы (5), имеем

$$b_n^{n-1} \xi^n = \int_0^t \{a_{n-1}^{n-1} \xi^{n-1}(s) + a_n^{n-1} \xi^n(s)\} ds + \int_0^t h^{n-1}(s) ds + w^{n-1}(t).$$

Берем симметрическую производную в среднем  $D_S^{w^{n-1}}$  от обеих частей этого уравнения. Тогда с помощью Леммы 2.1 мы при  $0 < t < T$  получим

$$\xi^{n-1}(t) = \frac{b_n^{n-1}}{a_n^{n-1}} D_S^{w^{n-1}} \xi^n(t) - \frac{a_n^{n-1}}{a_n^{n-1}} \xi^n(t) - \frac{1}{a_n^{n-1}} h^{n-1}(t) - \frac{1}{a_n^{n-1}} D_S^{w^{n-1}} w^{n-1}(t).$$

В последнее равенство подставим выражение для  $\xi^n(t)$  и применим Лемму 1.1. Тогда при  $0 < t < T$  будем иметь

$$\xi^{n-1}(t) = -\frac{b_n^{n-1}}{a_n^n a_{n-1}^{n-1}} \frac{dh^n(t)}{dt} + \frac{a_n^{n-1}}{a_n^n a_{n-1}^{n-1}} h^n(t) - \frac{1}{a_n^{n-1}} h^{n-1}(t) + \frac{a_n^{n-1}}{a_n^n a_{n-1}^{n-1}} \frac{w^n(t)}{2t} - \frac{1}{a_n^{n-1}} \frac{w^{n-1}(t)}{2t}. \tag{7}$$

В системе (5) переходим к следующему уравнению для  $\xi^{n-2}(t)$

$$b_{n-1}^{n-2} \xi^{n-1}(t) + b_n^{n-2} \xi^n(t) = \int_0^t \{a_{n-2}^{n-2} \xi^{n-2}(s) + a_{n-1}^{n-2} \xi^{n-1}(s) + a_n^{n-2} \xi^n(s)\} ds + \int_0^t h^{n-2}(s) ds + w^{n-2}(t).$$

Находим симметрическую производную  $D_S^{w^{n-2}}$  от обеих частей этого уравнения. Тогда, применив Лемму 1.1, будем иметь

$$\begin{aligned} \xi^{n-2}(t) &= \frac{b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}} D_S^{w^{n-2}} \xi^{n-1}(t) + \frac{b_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}} D_S^{w^{n-2}} \xi^n(t) - \frac{a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}} \xi^{n-1}(t) - \\ &\quad - \frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2}} \xi^n(t) - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}} h^{n-2}(t) - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}} D_S^{w^{n-2}} w^{n-2}(t) = \\ &= -\frac{b_{n-1}^{n-2} b_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} \frac{d^2 h^n(t)}{dt^2} + \left\{ \frac{b_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} + \frac{a_{n-1}^{n-2} b_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} - \frac{b_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2} a_n^n} \right\} \frac{dh^n(t)}{dt} + \\ &\quad + \left\{ \frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2} a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} \right\} h^n(t) - \frac{b_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1}} \frac{dh^{n-1}(t)}{dt} + \frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1}} h^{n-1}(t) - \\ &\quad - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}} h^{n-2}(t) + \left\{ \frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2} a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} \right\} \frac{w^n(t)}{2t} + \frac{a_n^{n-2}}{a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1}} \frac{w^{n-1}(t)}{2t} - \frac{1}{a_{n-2}^{n-2}} \frac{w^{n-2}(t)}{2t}. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее в системе (5) переходим к следующему уравнению для  $\xi^{n-3}(t)$

$$\begin{aligned} &b_{n-2}^{n-3} \xi^{n-2}(t) + b_{n-1}^{n-3} \xi^{n-1}(t) + b_n^{n-3} \xi^n(t) = \\ &= \int_0^t \{a_{n-3}^{n-3} \xi^{n-3}(s) + a_{n-2}^{n-3} \xi^{n-2}(s) + a_{n-1}^{n-3} \xi^{n-1}(s) + a_n^{n-3} \xi^n(s)\} ds + \int_0^t h^{n-3}(s) ds + w^{n-3}(t). \end{aligned}$$

Берем симметрическую производную  $D_S^{w^{n-3}}$  от обеих частей этого уравнения. Тогда, применив Лемму 1.1, будем иметь

$$\begin{aligned} \xi^{n-3}(t) &= \frac{b_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} D_S^{w^{n-3}} \xi^{n-2}(t) + \frac{b_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} D_S^{w^{n-3}} \xi^{n-1}(t) + \frac{b_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} D_S^{w^{n-3}} \xi^n(t) - \frac{a_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} \xi^{n-2}(t) - \\ &\quad - \frac{a_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} \xi^{n-1}(t) - \frac{a_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}} \xi^n(t) - \frac{1}{a_{n-3}^{n-3}} h^{n-3}(t) - \frac{1}{a_{n-3}^{n-3}} D_S^{w^{n-3}} w^{n-3}(t) = \\ &= -\frac{b_{n-2}^{n-3} b_{n-1}^{n-2} b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} \frac{d^3 h^n(t)}{dt^3} + \left\{ \frac{b_{n-2}^{n-3} b_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} + \frac{b_{n-1}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} - \frac{b_n^{n-3} b_{n-2}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_n^n} - \right. \\ &\quad - \frac{b_{n-1}^{n-3} b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} + \frac{a_{n-2}^{n-3} b_{n-1}^{n-2} b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} \left. \right\} \frac{d^2 h^n(t)}{dt^2} + \left\{ \frac{b_{n-2}^{n-3} a_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_n^n} - \frac{b_{n-1}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} + \frac{b_n^{n-3} a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} - \right. \\ &\quad - \frac{b_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3} a_n^n} - \frac{a_{n-2}^{n-3} b_{n-1}^{n-2} a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-3} b_{n-2}^{n-2} b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} + \frac{a_{n-2}^{n-3} b_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_n^n} + \frac{a_{n-1}^{n-3} b_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} \left. \right\} \frac{dh^n(t)}{dt} + \\ &\quad + \left\{ \frac{a_{n-2}^{n-3} a_{n-1}^{n-2} a_n^n}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} - \frac{a_{n-1}^{n-3} a_{n-2}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-2}^{n-2} a_n^n} - \frac{a_n^{n-3} a_{n-1}^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3} a_{n-1}^{n-1} a_n^n} + \frac{a_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3} a_n^n} \right\} h^n(t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{b_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}} \frac{d^2 h^{n-1}(t)}{dt^2} + \left\{ \frac{b_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}} - \frac{b_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}} + \frac{a_{n-2}^{n-3}b_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}} \right\} \frac{dh^{n-1}(t)}{dt} + \\
& + \left\{ \frac{a_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}} - \frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}} \right\} h^{n-1}(t) - \frac{b_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}} \frac{dh^{n-2}(t)}{dt} + \frac{a_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}} h^{n-2}(t) - \\
& - \frac{1}{a_{n-3}^{n-3}} h^{n-3}(t) + \left\{ \frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}a_n} - \frac{a_{n-2}^{n-3}a_n^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_n} + \frac{a_n^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_n} - \frac{a_{n-1}^{n-3}a_n^{n-1}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}a_n} \right\} \frac{w^n(t)}{2t} + \\
& + \left\{ \frac{a_{n-1}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-1}^{n-1}} - \frac{a_{n-2}^{n-3}a_{n-1}^{n-2}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}a_{n-1}^{n-1}} \right\} \frac{w^{n-1}(t)}{2t} + \frac{a_{n-2}^{n-3}}{a_{n-3}^{n-3}a_{n-2}^{n-2}} \frac{w^{n-2}(t)}{2t} - \frac{1}{a_{n-3}^{n-3}} \frac{w^{n-3}(t)}{2t}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Аналогично, для  $m \leq l \leq n-1$  и при  $0 < t < T$  мы имеем рекуррентное соотношение для нахождения  $\xi^l(t)$

$$D_S^{w^l} \left\{ b_{l+1}^l \xi^{l+1}(t) + b_{l+2}^l \xi^{l+2}(t) + \dots + b_n^l \xi^n(t) \right\} = a_{l+1}^l \xi^l(t) + a_{l+1}^l \xi^{l+1}(t) + \dots + a_n^l \xi^n(t) + h^l(t) + D_S^{w^l} w^l(t).$$

В более компактной записи

$$D_S^{w^l} \left\{ \sum_{i=l+1}^n b_i^l \xi^i(t) \right\} = \left\{ \sum_{i=l}^n a_i^l \xi^i(t) \right\} + h^l(t) + \frac{w^l(t)}{2t}. \tag{10}$$

Применяя Лемму 1.1 и формулы (6), (7), (8), (9), (10), несложно получить явное выражение для любого  $\xi^l(t)$ .

Теперь перейдем к вопросу о нулевых начальных условиях для решений системы (5). Заметим, что симметрические производные в среднем корректно определены только на открытых промежутках времени, поскольку в их конструкции использованы как приращения по времени вправо, так и влево. Тогда принимая во внимание формулы (6), (7), (8), (9) и (10) видим, что решения  $\xi^l(t)$  описываются как суммы, в которых некоторые из слагаемых содержат множитель вида  $\frac{w^j(t)}{t}$ . А это означает, что решения стремятся к бесконечности при  $t \rightarrow 0$ , т. е. значения решений при  $t = 0$  не существуют. Один из способов разрешения указанной ситуации (как и в [4, 5]) состоит в следующем. Мы зафиксируем сколь угодно малый момент времени  $t_0 \in (0, T)$  и определим функцию  $t_0(t)$  формулой

$$t_0(t) = \begin{cases} t_0 & \text{при } 0 \leq t \leq t_0; \\ t & \text{при } t_0 \leq t. \end{cases} \tag{11}$$

Выражения  $\frac{w^j(t)}{t}$  в процессах, удовлетворяющих соотношениям (6), (7), (8), (9) и (10), заменим на  $\frac{w^j(t)}{t_0(t)}$ . Полученные процессы в момент времени  $t = 0$  будут принимать нулевые значения, но они будут являться решениями только при  $t_0 \leq t < T$ . Отметим, что для двух разных моментов времени  $t_0^{(1)}$  и  $t_0^{(2)}$  при  $t \geq \max(t_0^{(1)}, t_0^{(2)})$  значения соответствующих процессов совпадают с вероятностью 1.

Таким образом, мы имеем следующее утверждение

**Теорема 3.1.** При условиях, указанных выше, уравнение (1) с нулевыми начальными условиями преобразуется к каноническому уравнению (2) с нулевыми начальными условиями, формулы для нахождения решений которого имеют вид (3), (4), (6), (7), (8), (9) и (10).

#### Список литературы

1. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press; 1967. 142 p.
2. Gliklikh YuE. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London: Springer-Verlag, 2011. 460 p.
3. Parthasaraty KR. Introduction to Probability and Measure. New York: Springer-Verlag, 1978. 344 p.
4. Гликлик Ю.Е. Изучение уравнений леонтьевского типа с белым шумом методами производных в среднем случайных процессов. *Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование*. 2012;13:24-34.
5. Gliklikh YuE., Mashkov EYu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2013;6:2:25-39.
6. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика. М.: Экономика, 1977. 324 с.
7. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: АНО Физматлит, 2015.
8. Demmel J. Applied Numerical Linear Algebra. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. 419 p.
9. Skorohod AV., Gihman II. Theory of stochastic processes. New York (NY): Springer-Verlag, 1979. 3: 388 p.

---

**References**

1. Nelson E. Dynamical theory of Brownian motion. Princeton: Princeton University Press, 1967. 142 p.
2. Gliklikh YuE. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London: Springer-Verlag, 2011. 460 p.
3. Parthasaraty KR. Introduction to Probability and Measure. New York: Springer-Verlag, 1978. 344 p.
4. Gliklikh Yu.E. Investigation of Leontieff Type Equations with White Noise by the Methods of Mean Derivatives of Stochastic Processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2012;13:24-34. (in Russian)
5. Gliklikh YuE., Mashkov EYu. Stochastic Leontieff type equations and mean derivatives of stochastic processes. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2013;6:2:25-39.
6. Leontief W.W. Input-Output Economics. New York: Oxford University Press; 1986. 436 p.
7. Kurdjukov A.P., Belov A.A. Deskriptor systems and control problem. Moscow: Fizmatlit, 2015 (in Russian)
8. Demmel J. Applied Numerical Linear Algebra. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997. 419 p.
9. Skorohod AV., Gihman II. Theory of stochastic processes. New York (NY): Springer-Verlag, 1979. 3: 388 p.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.08.2023

Поступила после рецензирования 07.10.2023

Принята к публикации 09.10.2023

Received August 22, 2023

Revised October 7, 2023

Accepted October 9, 2023

---

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ**

**Машков Евгений Юрьевич** – кандидат физико-математических наук, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**

**Evgenii Yu. Mashkov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Higher Mathematics, Southwest State University, Kursk, Russia

## О методе случайных негладких интегральных направляющих функций в периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных включений

Гетманова Е. Н. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Воронежский государственный педагогический университет,  
Россия, 394043, Воронеж, ул.Ленина, 86  
[ekaterina\\_getmanova@bk.ru](mailto:ekaterina_getmanova@bk.ru)

**Аннотация.** В настоящей работе классический метод направляющих функций М.А. Красносельского и А.И. Перова распространяется на случай негладких интегральных направляющих функций для случайных функционально-дифференциальных включений. В работе рассматривается периодическая задача для случайного функционально-дифференциального включения, правая часть которого является  $u$ -мультиотображением, удовлетворяющим условиям типа подлинейного роста. Для решения поставленной задачи используется теория топологической степени совпадения пары отображений, состоящей из линейного фредгольмова оператора нулевого индекса и случайного многозначного отображения. В качестве примера рассматривается разрешимость периодической задачи для случайного градиентного функционально-дифференциального включения.

**Ключевые слова:** случайное мультиотображение, случайное функционально-дифференциальное включение, периодическая задача, случайное решение, случайная негладкая строгая интегральная направляющая функция, обобщенная производная Кларка, обобщенный градиент Кларка, случайный топологический индекс, случайная топологическая степень

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Минпросвещения России в рамках государственного задания (QRPK-2023-0002)

**Для цитирования:** Гетманова Е. Н. 2023. О методе случайных негладких интегральных направляющих функций в периодической задаче для случайных функционально-дифференциальных включений. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 346–353. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-346-353

---

Original Research

## On the Method of Random Nonsmooth Integral Guiding Functions in the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions

Ekaterina N. Getmanova 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Voronezh State Pedagogical University,  
86 Lenin st., Voronezh, 394043, Russia  
[ekaterina\\_getmanova@bk.ru](mailto:ekaterina_getmanova@bk.ru)

**Abstract.** In this work, the classical method of guiding functions due to M.A. Krasnoselskii and A.I. Perov is extended to the case of nonsmooth integral guiding functions for random functional-differential inclusions. The paper deals with a periodic problem for a random functional-differential inclusion, the right-hand side of which is a  $u$ -multimap satisfying conditions of sublinear growth. To solve this problem, we use the theory of the topological coincidence degree for a pair of mappings consisting of a linear Fredholm operator of zero index and a random multivalued mapping. As an example, we consider the solvability of a periodic problem for a random gradient functional differential inclusion.

**Keywords:** Random Multi-Reflection, Random Functional Differential Inclusion, Random  $u$ -Operator, Random Solution, Random Nonsmooth Strict Integral Guide Function, Generalized Clarke Derivative, Generalized Clarke Gradient, Random Topological Index, Random Topological Degree

**Acknowledgements:** The work was carried out with financial support from the Ministry of Education of Russia within the framework of state assignment (QRPK-2023-0002)

**For citation:** Getmanova E. N. 2023. On the Method of Random Nonsmooth Integral Guiding Functions in the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 346–353. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-346-353

**1. Введение.** Метод направляющих функций берет свое начало с доклада М. А. Красносельского и А. И. Перова в 1959 году. Разработанный метод представляет собой геометрический подход к решению задачи о существовании периодических решений дифференциальных уравнений (см., например, [1, 2, 3]).

Данный подход получил широкое развитие. Так, к примеру, этими же авторами была решена задача о существовании ограниченных решений дифференциальных уравнений.

Еще одна модификация метода направляющих функций связана с именем А. Фонда, который к исследованию периодической задачи для функционально-дифференциальных уравнений применил интегральную направляющую функцию (см., например, [4]).

В 60-80 гг XX века началось бурное развитие теории многозначных отображений. В связи с этим метод направляющих функций был применен к нахождению периодических решений для уравнений с многозначной правой частью. Впервые подобные результаты были представлены в книге Ю. Г. Борисовича, Б. Д. Гельмана, А. Д. Мышкиса, В. В. Обуховского (см. [5]) и развиты затем в работах [6, 7, 8, 9, 10, 11].

Новое направление развития метода направляющих функций связано с использованием негладких направляющих потенциалов, обобщенный градиент которых является полунепрерывным сверху многозначным отображением с выпуклыми компактными образами (см., например, [12]).

В настоящей работе развивается метод негладких направляющих функций для исследования случайных функционально-дифференциальных включений.

**2. Предварительные сведения.** Напомним некоторые сведения из теории линейных фредгольмовых операторов (см., например, [13]).

Пусть  $E_1, E_2$  – банаховы пространства.

**Определение 2.1.** *Линейный оператор  $L : Dom L \subseteq E_1 \rightarrow E_2$  называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если  $Ker L$  и  $Coker L = E_2 / Im L$  конечномерны и  $\dim Ker L = \dim Coker L$ .*

**Теорема 2.1.** *Пусть  $L : Dom L \rightarrow E_2$  – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что  $Im L \subset E_2$  – замкнутое множество. Тогда*

i) *существуют линейные непрерывные операторы проектирования  $P : E_1 \rightarrow E_2, Q : E_2 \rightarrow E_2$  такие, что  $Im P = Ker L$  и  $Im L = Ker Q$ ;*

ii) *канонический оператор проектирования  $\Pi : E_2 \rightarrow E_2 / Im L$ , заданный как  $\Pi(y) = y + Im L$ , является непрерывным линейным оператором;*

iii) *существует непрерывный линейный изоморфизм  $\Lambda : Coker L \rightarrow Ker L$ ;*

iv) *уравнение  $L(x) = y, y \in E_2$  является эквивалентным уравнению  $(i - P)x = (\Lambda \circ \Pi + K_{P,Q})(y)$ , где  $i$  – тождественный оператор в  $E_1$ , а оператор  $K_{P,Q} : E_2 \rightarrow E_1$  задан соотношением  $K_{P,Q}(y) = K_P(y - Q(y))$ .*

Приведем необходимые сведения из теории многозначных отображений (см., например, [5]).

Пусть  $(X, d_X)$  и  $(Y, d_Y)$  являются метрическими пространствами. Символами  $P(Y), C(Y), K(Y)$  обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых, компактных подмножеств пространства  $Y$ . Если  $Y$  – нормированное пространство, то символами  $Kv(Y)$  обозначаются совокупности всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства  $Y$ .

**Определение 2.2.** *Мультиотображение  $F : X \rightarrow P(Y)$  называется полунепрерывным сверху (пн.св.) в точке  $x \in X$ , если для любого открытого множества  $V \subset Y$  такого, что  $F(x) \subset V$ , существует окрестность  $U(x)$  точки  $x$  такая, что  $F(U(x)) \subset V$ .*

**Определение 2.3.** *Множество  $A \subset X$  называется стягиваемым, если существует непрерывное отображение (гомотопия)  $h : A \times [0, 1] \rightarrow A$  такое, что  $h(x, 0) = x, h(x, 1) = x_0$  для всех  $x \in A$ .*

**Определение 2.4.** *Множество  $A \subset X$  называется  $R_\delta$ -множеством, если существует убывающая последовательность  $\{A_n\}$  компактных стягиваемых множеств таких, что*

$$A = \bigcap \{A_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

**Определение 2.5.** *Полунепрерывное сверху мультиотображение  $G : X \rightarrow K(Y)$  называется  $\mathcal{J}$ -отображением или  $G \in \mathcal{J}(X, Y)$ , если для любого  $x \in X$  множество  $G(x)$  является  $R_\delta$ -множеством.*

**Определение 2.6.**  *$\mathcal{J}^c$ -мультиотображением называется конечная композиция полунепрерывных сверху мультиотображений с  $R_\delta$ -значениями.*

Пусть  $(\Omega, \Sigma)$  – измеримое пространство,  $X, Y$  – сепарабельные метрические пространства. Пусть  $\mathbb{B}(X)$  –  $\sigma$ -алгебра всех борелевских подмножеств пространства  $X$  и  $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$  – наименьшая  $\sigma$ -алгебра, содержащая множества вида  $A \times B$ , где  $A \in \Sigma, B \in \mathbb{B}(X)$

**Определение 2.7.** *Мультиотображение  $\Phi : \Omega \times X \rightarrow C(Y)$  будем называть случайным, если оно измеримо относительно  $\sigma$ -алгебры  $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ .*

**Определение 2.8.** *Случайное мультиотображение  $\Phi : \Omega \times X \rightarrow C(Y)$  называется и-случайным мультиотображением, если для каждого  $\omega \in \Omega$  мультиотображение  $\Phi(\omega, \cdot) : X \rightarrow C(Y)$  пн. св.*

Пусть  $U$  – открытое ограниченное подмножество  $E_1$ .

**Определение 2.9.** *Мультиотображение  $F \in \mathcal{J}^c(\bar{U}, E_2)$  называется  $L$ -компактным, если композиция*

$$(\Lambda \circ \Pi + K_{P,Q}) \circ F : \bar{U} \rightarrow K(E_1)$$

является компактным мультиотображением.

Пусть  $Y$  – сепарабельное банахово пространство,  $U \subset Y$  – открытое ограниченное подмножество и  $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Kv(Y)$  – случайный компактный  $u$ -мультиоператор такой, что  $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$  для всех  $x \in \partial U$  и для всех  $\omega \in \Omega$ , где  $\partial U$  обозначает границу множества  $U$ . Тогда для каждого  $\omega \in \Omega$  топологическая степень соответствующего многозначного векторного поля  $deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U})$  корректно определена (см., например, [5, 11]). Случайная топологическая степень многозначного векторного поля  $i - \mathcal{F}$  на  $\bar{U}$  определяется следующим образом (см. [10]):

$$D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) := \left\{ deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \mid \omega \in \Omega \right\}.$$

Полагаем, что случайная топологическая степень  $D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$ , если топологическая степень  $deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \neq 0$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

**Определение 2.10.** (см. [10]). Если случайная топологическая степень  $D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$ , то мультиоператор  $\mathcal{F}$  имеет случайную неподвижную точку в  $U$ , т. е. существует измеримая функция  $\xi: \Omega \rightarrow U$  такая, что  $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

Пусть  $X, Y$  – сепарабельные банаховы пространства,  $U \subset Y$  – открытое ограниченное подмножество,  $L: Dom L \subseteq X \rightarrow Y$  – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и случайный мультиоператор  $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Kv(Y)$  удовлетворяет условиям:

- i) для каждого  $\omega \in \Omega$  мультиотображение  $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$  является  $L$ -компактным мультиотображением;
- ii) для каждого  $\omega \in \Omega$  мультиотображение  $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$  является  $J^c$ -мультиотображением;
- iii) для всех  $x \in \partial U \cap Dom L$  и  $\omega \in \Omega$   $Lx \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ .

Тогда для каждого  $\omega \in \Omega$  топологическая степень совпадения пары  $(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$  определяется как (см., например, [14, 15])

$$deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) := deg(\Phi(\omega, \cdot), \bar{U}),$$

где

$$\Phi(\omega, x) = P(x) + (\phi \circ \Pi + K_{P,Q}) \circ \mathcal{F}(\omega, x).$$

Случайная топологическая степень совпадения пары  $(L, \mathcal{F})$  определяется следующим образом (см., например, [16]):

$$Deg(L, \mathcal{F}, \bar{U}) := \{ deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \mid \omega \in \Omega \}.$$

Говорят, что случайная топологическая степень совпадения  $Deg(L, \mathcal{F}, \bar{U})$  пары  $(L, \mathcal{F})$  отлична от нуля, если топологическая степень совпадения  $deg(L, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \neq 0$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

Определенная таким образом случайная топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами степени совпадения. В частности, справедлив следующий общий принцип (см., например, [16]).

**Теорема 2.2.** Если случайная топологическая степень совпадения  $Deg(L, \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$ , то существует случайная точка совпадения пары  $(L, \mathcal{F})$ , т. е. измеримая функция  $\xi: \Omega \rightarrow U$  такая, что  $L\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение (см., например, [12, 16]).

**Теорема 2.3** Пусть случайное мультиотображение  $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow K(E_2)$  является  $l$ -компактным  $J^c$ -мультиотображением при каждом  $\omega \in \Omega$  и выполнены следующие условия:

- i)  $Lx \notin \lambda \mathcal{F}(\omega, x)$  для каждого  $\omega \in \Omega$ , для всех  $0 < \lambda < 1$ ,  $x \in Dom L \cap \partial U$ ;
- ii)  $0 \notin \Pi \mathcal{F}(\omega, x)$  для каждого  $\omega \in \Omega$ , для всех  $x \in Ker L \cap \partial U$ ;
- iii)  $deg_{Ker L}(\Lambda \Pi \mathcal{F}(\omega, \cdot)|_{\bar{U}_{Ker L}}, \bar{U}_{Ker L}) \neq 0$  для каждого  $\omega \in \Omega$ , где символ  $deg_{Ker L}$  обозначает топологическую степень  $J^c$ -мультиотображения  $\Lambda \Pi \mathcal{F}(\omega, \cdot)$ , вычисляемую в конечномерном пространстве  $Ker L$ , а  $\bar{U}_{Ker L} = \bar{U} \cap Ker L$ . Тогда случайная топологическая степень совпадения  $Deg(L, \mathcal{F}, U) \neq 0$  и, следовательно, существует случайная точка совпадения пары  $(L, \mathcal{F})$ .

Приведем некоторые сведения из негладкого анализа (см., например, [17]).

**Определение 2.11.** Пусть  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – локально липшицева функция. Для каждого  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $v \in \mathbb{R}^n$  обобщенная производная Кларка по направлению  $V^0(y_0; v)$  функции  $V$  в точке  $y_0$  по направлению  $v$  определяется как

$$V^0(y_0; v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow y_0, t \rightarrow 0} \frac{V(y + tv) - V(y)}{t}. \quad (1)$$

Тогда обобщенный градиент Кларка  $\partial V(x)$  функции  $V$  в точке  $x_0$  определяется следующим образом:

$$\partial V(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle \leq V^0(x_0; v) \text{ для всех } v \in \mathbb{R}^n \}.$$

**Определение 2.12.** Локально липшицева функция  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется регулярной, если для каждого  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $v \in \mathbb{R}^n$  существует производная по направлению  $V'(x, v)$  и она совпадает с  $V^0(x, v)$ .

Известно, что выпуклые функции являются регулярными.

**Замечание 2.1.** (см., например, [18]) Пусть  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – регулярная функция,  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – абсолютно непрерывная функция. Тогда функция  $V(x(t))$  также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s), x'(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

**Определение 2.13.** Отображение  $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайным негладким потенциалом, если выполняются следующие два условия:

- (i) для любого  $\omega \in \Omega$  функция  $V(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является регулярной;
- (ii)  $V(\cdot, z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измеримо для каждого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Определение 2.14.** Случайный негладкий потенциал  $V : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайным негладким невырожденным потенциалом, если существует  $R_0 > 0$  такое, что  $0 \notin \partial V(\omega, x)$  для всех  $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : |x| \geq R_0$ .

Из определения 2.14 следует, что для фиксированного  $\omega \in \Omega$  топологическая степень  $\text{deg}(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$  корректно определена для всех  $R \geq R_0$  и совпадает с  $\text{deg}(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$ .

Под случайным топологическим индексом  $\text{Ind } V$  случайного негладкого невырожденного потенциала  $V$  понимается случайная топологическая степень  $\text{Deg}(\partial V, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$ .

**3. Основной результат.** Для  $\tau > 0$  обозначим символом  $C$  пространство  $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$  непрерывных функций  $x : [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\| = \sup_{t \in [- \tau, 0]} \|x(t)\|$  и пусть  $I = [0, T]$ ,  $T > 0$ . Для функции  $x(\cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$  и  $t \in [0, T]$  символом  $x_t \in C$  обозначается функция, заданная как  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ,  $\theta \in [- \tau, 0]$ .

Будем рассматривать периодическую задачу для случайного функционально-дифференциального включения следующего вида:

$$x'(\omega, t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \tag{2}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{3}$$

для всех  $\omega \in \Omega$ , где мультиотображение  $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R} \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет условиям:

( $\mathcal{F}_t$ ) мультифункция  $\mathcal{F}$  по второму аргументу  $T$ -периодична:

$$\mathcal{F}(\omega, t, \phi) = \mathcal{F}(\omega, t + T, \phi) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, \text{ п.в. } t \in I, \phi \in C$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать мультиотображение  $\mathcal{F}$  заданным на  $\Omega \times I \times C$ ).

( $\mathcal{F}_1$ )  $\mathcal{F} : \Omega \times I \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$  является случайным  $u$ -мультиоператором;

( $\mathcal{F}_2$ ) существует отображение  $c : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$  такое, что  $c(\omega, \cdot)$  – локально интегрируемо на  $\mathbb{R}$  для каждого  $\omega \in \Omega$ ,  $c(\cdot, t)$  – измеримо п.в.  $t \in I$ , и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \phi)\| := \sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \phi)\} \leq c(\omega, t)(1 + |\phi|).$$

Под случайным решением задачи (2), (3) понимается функция  $\xi : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  такая, что

(i) оператор  $\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega, \cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$  измерим;

(ii) для каждого  $\omega \in \Omega$  абсолютно непрерывная функция  $\xi(\omega, \cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$  удовлетворяет (2), (3).

Из условий ( $\mathcal{F}_1$ ), ( $\mathcal{F}_2$ ) следует, что мультиоператор суперпозиции

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C([- \tau, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow P(L^2(I, \mathbb{R}^n)),$$

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in \mathcal{F}(\omega, s, x_s)\} \quad \text{п.в. } s \in I$$

корректно определен. Кроме того, для каждого  $\omega \in \Omega$  мультиоператор  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$  замкнут (см., например, [5]).

Для изучения задачи (2), (3) мы будем использовать теорию случайной топологической степени совпадения пары отображений, состоящей из линейного фредгольмова оператора и случайного мультиотображения, описанную выше.

Обозначим  $C_T$  пространство непрерывных  $T$ -периодических функций  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  с нормой  $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ . Через  $\|x\|_2$  обозначим норму функции  $x$  в пространстве  $L^2$ ,  $\|x\|_2 = \left( \int_0^T \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$ .

**Определение 3.1.** Случайный негладкий потенциал  $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2), если найдется  $N > 0$  такое, что для всех  $\omega \in \Omega$  и для всех  $x \in C_T$  с  $\|x\|_2 \geq N$  имеем

$$\int_0^T \langle v(t), f(t) \rangle dt > 0$$

для всех  $v \in \mathcal{P}_{\partial V}(\omega, x)$ , где  $\mathcal{P}_{\partial V}(\omega, x) = \{v \in L_T^2: v(t) \in \partial V(\omega, x(t)), f(t) \in \mathcal{F}(\omega, t, x_t) \text{ п.в. } t \in I, \text{ символ } \partial V(\omega, x) \text{ обозначает обобщенный градиент Кларка функции } V \text{ в точке } x.\}$

Справедливо следующее утверждение (см. [10]).

**Лемма 3.1.** Если  $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2), то она является случайным негладким невырожденным потенциалом и, следовательно, существует ее случайный топологический индекс  $\text{Ind } V$ .

Сформулируем основной результат работы.

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $(\mathcal{F}_1)$ ,  $(\mathcal{F}_2)$ . Если  $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2) такой, что  $\text{Ind } V \neq 0$ , то задача (2), (3) имеет случайное решение.

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся теоремой 2.3. Рассмотрим следующие операторы:

$$L: \text{Dom } L := \{x \in C_T: x - \text{абсолютно непрерывна}\} \subset C_T \rightarrow L_T^1,$$

$$L(x) = x'$$

и мультиоператор суперпозиции  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}: \Omega \times C_T \rightarrow P(L_T^1)$ .

Заметим, что  $L$  – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса,  $\text{Ker } L = \mathbb{R}^n$ . Канонический оператор проектирования  $\Pi: L_T^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  может быть задан формулой

$$\Pi f = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Мультиоператоры  $\Pi \circ \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  и  $K_{P,Q} \circ \mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  компактны и пн.св (см., например, Proposition 1.17, [12]). Это означает, что пара  $(L, \mathcal{P}_{\mathcal{F}})$  –  $L$ -компактна и, следовательно, для нее может быть определена случайная топологическая степень совпадения, описанная выше.

Отметим, что для произвольного фиксированного  $\omega \in \Omega$  решение  $x_\omega \in \text{dom } l$  включения  $L(x) \in \lambda \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , удовлетворяет задаче

$$x'_\omega(t) = \lambda f_\omega(t) \quad \text{п.в. } t \in [0, T], \quad (4)$$

$$x_\omega(0) = x_\omega(T), \quad (5)$$

где  $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$ .

Применяя замечание 2.1. и определение обобщенного градиента, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle v(s), f_\omega(s) \rangle ds &= \frac{1}{\lambda} \int_0^T \langle v(s), x'_\omega(s) \rangle ds \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^T V^0(x_\omega(s), x'_\omega(s)) ds = \frac{1}{\lambda} (V(x_\omega(T)) - V(x_\omega(0))) = 0, \end{aligned}$$

для каждого суммируемого сечения  $v(s) \in \partial V(\omega, x(s))$ . Следовательно,

$$\|x_\omega\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия  $(\mathcal{F}_2)$  вытекает, что  $\|x'_\omega\|_2 < M$ , где  $M > 0$ . Но тогда найдется и  $M' > 0$  такое, что

$$\|x_\omega\|_C < M'.$$

В качестве  $U$  возьмем шар  $B_r \subset C_T$  с центром в 0 и радиуса  $r = \max\{N, M', NT^{-1/2}\}$ . Тогда имеем для каждого фиксированного  $\omega \in \Omega$

$$L(x) \notin \lambda \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_t)$$

для всех  $x \in \partial U$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .

Пусть теперь  $u \in \partial U \cap \text{Ker } L$  произвольно. Поскольку  $\|u\| \geq NT^{-1/2}$ , из определения случайной негладкой строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle v(s), f_\omega(s) \rangle ds > 0$$

для каждого измеримого сечения  $v(s) \in \partial V(\omega, u)$  и  $f_\omega(s) \in \mathcal{F}_\omega(s, u)$ , для всех  $\omega \in \Omega$ . Но для каждого  $\omega \in \Omega$ , полагая  $v(s) \equiv v$ , получаем

$$\int_0^T \langle v, f_\omega(s) \rangle ds = \langle v, \int_0^T f_\omega(s) ds \rangle = T \langle v, \pi f_\omega \rangle > 0,$$

для каждого  $v \in \partial V(\omega, u)$  и, таким образом,

$$\langle v, y \rangle > 0$$

для любого  $v \in \partial V(\omega, u)$ ,  $y \in \text{PP}_{\mathcal{F}}(\omega, u)$ ,  $\omega \in \Omega$ .

Это значит, что мультиполю  $\partial V(\omega, u)$  и  $\text{PP}_{\mathcal{F}}(\omega, u)$  гомотопны на  $\partial U \cap \text{Ker } L$  для любых  $\omega \in \Omega$  и, следовательно,

$$\text{deg}_{\text{Ker } L}(\text{PP}_{\mathcal{F}}|_{\overline{U}_{\text{Ker } L}}, \overline{U}_{\text{Ker } L}) = \text{deg}(\partial V, \overline{U}_{\text{Ker } L}) \neq 0,$$

где  $\overline{U}_{\text{Ker } L} = \overline{U} \cap \text{Ker } L$ .

Таким образом, все условия теоремы 2.3. выполнены, и задача (2), (3) имеет решение.

*Пример.*

Рассмотрим периодическую задачу вида

$$x'(\omega, t) \in \partial \mathcal{G}(\omega, x) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \tag{6}$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \tag{7}$$

где мультиотображение  $\mathcal{F}$  удовлетворяет условиям  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $(\mathcal{F}1)$ ,  $(\mathcal{F}2)$ , а  $\partial \mathcal{G}$  – обобщенный градиент Кларка случайного негладкого потенциала  $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия:

1. найдутся константы  $\varepsilon > 0$ ,  $K > 0$  и  $\beta \geq 1$  такие, что

$$\|\partial \mathcal{G}(\omega, x)\| \geq \varepsilon \|x\|^\beta - K,$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \Omega$ ;

2.  $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^\beta} < \varepsilon T^{(1-\beta)/2}$  для всех  $\omega \in \Omega$ , для любой абсолютно непрерывной функции  $x(\omega, \cdot) \in C_T$ ;

3. обобщенный градиент Кларка  $\partial \mathcal{G}$  для достаточно больших  $N > 0$  имеет ненулевой случайный топологический индекс:

$$\text{Deg}(\partial \mathcal{G}, \partial B_N) \neq 0.$$

Тогда задача (6), (7) имеет решение.

**Доказательство.** Покажем, что  $\mathcal{G}$  является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (6). Отметим, что вложение  $L^{2\beta} \subset L^2$  дает для любой абсолютно непрерывной функции  $x(\omega, \cdot) \in C_T$  оценку

$$\|\partial \mathcal{G}(\omega, x)\|_2 \geq \varepsilon \|x\|_{2\beta}^\beta - K\sqrt{T} \geq \varepsilon T^{(1-\beta)/2} \|x\|_2^\beta - K\sqrt{T}.$$

Зафиксируем произвольное  $\omega \in \Omega$ . Тогда для любых  $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)$ ,  $g_\omega \in \partial \mathcal{G}(\omega, x)$  для достаточно больших значений  $\|x\|_2$  имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle g_\omega(s), g_\omega(s) + f_\omega(s) \rangle ds &\geq \|g_\omega\|_2 (\|g_\omega\|_2 - \|f_\omega\|_2) \geq \\ &\geq \|\partial \mathcal{G}(g_\omega, x)\|_2 (\|\partial \mathcal{G}(g_\omega, x)\|_2 - \|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2) \geq \\ &\geq \|\partial \mathcal{G}(g_\omega, x)\|_2 \left( \varepsilon T^{(1-\beta)/2} - \frac{K\sqrt{T}}{\|x\|_2^\beta} - \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2^\beta} \right) \|x\|_2^\beta > 0. \end{aligned}$$

**4. Заключение.** В работе рассмотрена периодическая задача для случайного функционально-дифференциального включения. Введено понятие случайной негладкой строгой интегральной направляющей функции. Доказана теорема существования случайного решения для периодической задачи (2), (3), где мультиотображение  $\mathcal{F}$  удовлетворяет условиям  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $(\mathcal{F}1)$ ,  $(\mathcal{F}2)$  и для включения (3) существует случайная негладкая строгой интегральной направляющая функция. В качестве примера реализации данной теории рассматривается разрешимость периодической задачи для случайного градиентного функционально-дифференциального включения.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Обуховскому В. В. и доктору физико-математических наук, доценту Корневу С. В. за ценные советы и консультации по рассматриваемым в статье вопросам.

#### Список литературы

1. Красносельский М.А., Перов А.И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений. *Доклады Академии наук. – Российская академия наук.* 1958;123(2):235–238.
2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1966. 332 с.
3. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука; 1975. 512 с.
4. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1987;99(1):79–85.
5. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М. Либроком; 2011. 224 с.
6. Корнев С.В., Обуховский В.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для выпуклозначных мультиотображений. *Труды математического факультета. Сер. "Новая серия". Воронежский государственный университет;* 2004;56–74.
7. Корнев С.В., Обуховский В.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2009;5:23–32.
8. Корнев С.В. Многолистные направляющие функции в задаче о существовании периодических решений некоторых классов дифференциальных включений. *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2016;11:14–26. 10.3103/S1066369X16110025
9. Корнев С.В., Обуховский В.В. Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами. *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки.* 2016;21(1):55–65. 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65
10. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337–358.
11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006. 539 p. 10.1007/1-4020-4666-9
12. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Heidelberg: Springer, 2076; 2013. 10.1007/978-3-642-37070-0
13. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т., Ратинер Н.М. Линейные фредгольмовы операторы: учеб. пособие для студентов вузов. Воронеж. Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета; 2007. 81 с.
14. Pruszko T. A coincidence degree for  $L$ -compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math.* 1979;27(11-12):895–902.
15. Tarafdar E., Teo S.K. On the existence of solutions of the equation  $\mathcal{L}x \in Nx$  and a coincidence degree theory. *J. Austral. Math. Soc.* 1979;28(2):139–173.
16. Tarafdar E., Watson P., Yuan X.-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions. *Comment.Math.Univ. Carolin.* 1996;725–748.
17. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука; 1988. 280 с.
18. Корнев С.В., Обуховский В.В., Дзекка П. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений. *Дифференциальные уравнения.* 2016;10(52):1335–1344. 10.1134/S037406411610006X

#### References

1. Krasnoselskii MA, Perov AI. On one principle of the existence of bounded, periodic and almost periodic solutions to a system of ordinary differential equations. *Reports of the Academy of Sciences. – Russian Academy of Sciences.* 1958;123(2):235–238. (in Russian)
2. Krasnoselskii MA. Shift operator along trajectories of differential equations. М.: Science; 1966. 332 p. (in Russian)
3. Krasnoselskii MA, Zabreiko PP. Geometric methods of nonlinear analysis. М.: Science; 1975. 512 p. (in Russian)

4. Fonda A. Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1987;99(1):79–85.
5. Borisovich YuG, Gelman BD, Myshkis AD, Obukhovskii VV. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. M. Liebrock; 2011. 224 p. (in Russian)
6. Kornev SV, Obukhovskii VV. On some variants of the theory of topological degree for convex-valued multimaps. *Proceedings of the Faculty of Mathematics. Ser. "New episode"*. Voronezh State University; 2004;56–74. (in Russian)
7. Kornev SV, Obukhovskii VV. On the localization of the method of directing functions in the problem of periodic solutions of differential inclusions. *News of higher educational institutions. Mathematics.* 2009;5:23–32. (in Russian)
8. Kornev SV. Multivalent guiding functions in the problem of the existence of periodic solutions of certain classes of differential inclusions. *News of higher educational institutions. Mathematics.* 2016;11:14–26. (in Russian) 10.3103/S1066369X16110025
9. Kornev SV, Obukhovskii VV. Integral direction functions and periodic solutions of inclusions with causal operators. *Bulletin of Tambov University. Series: Natural and technical sciences.* 2016;21(1):55–65. (in Russian) 10.20310/1810-0198-2016-21-1-55-65
10. Andres J, Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions. *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337–358.
11. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006. 539 p. 10.1007/1-4020-4666-9
12. Obukhovskii V, Zecca P, Loi NV, Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Heidelberg: Springer, 2076; 2013. 10.1007/978-3-642-37070-0
13. Zvyagin VG., Dmitrienko VT, Ratiner NM. Linear Fredholm operators: textbook. manual for university students. Voronezh. Publishing and Printing Center of Voronezh State University; 2007. 81 p. (in Russian)
14. Pruszko T. A coincidence degree for  $L$ -compact convex-valued mappings and its application to the Picard problem for orientor fields. *Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci math.* 1979;27(11-12):895–902.
15. Tarafdar E, Teo SK. On the existence of solutions of the equation  $\mathcal{L}x \in Nx$  and a coincidence degree theory. *J. Austral. Math. Soc.* 1979;28(2):139–173.
16. Tarafdar E, Watson P, Yuan X-Z. Random coincidence degree theory with applications to random differential inclusions. *Comment.Math.Univ. Carolin.* 1996;725–748.
17. Clark F. Optimization and non-smooth analysis. M.: Science; 1988. 280 p.
18. Kornev SV, Obukhovskii VV, Dzekka P. Method of generalized integral guiding function in the problem of the existence of periodic solutions of functional-differential inclusions. *Differential equations.* 2016;10(52):1335–1344. (in Russian) 10.1134/S037406411610006X

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.10.2023

Received October 10, 2023

Поступила после рецензирования 26.11.2023

Revised November 26, 2023

Принята к публикации 02.12.2023

Accepted December 2, 2023

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Гетманова Екатерина Николаевна** – старший преподаватель кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Ekaterina N. Getmanova** – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 539.23

MSC 74N05, 82D25, 82D37

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-354-360

### Прыжковая проводимость в монокристаллах эвтектического композита (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub>

Борисенко А. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
[1491654@bsu.edu.ru](mailto:1491654@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Получен эвтектический композитный материал (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub>, состоящий из монокристаллической матрицы полупроводника InSb и ориентированных игл NiSb. Методом рентгеновской дифракции установлено, что матрица полупроводника InSb имела структуру цинковой обманки  $F\bar{4}3m$  с параметром кристаллической решетки равным  $a = 6.49(1) \text{ \AA}$ . Иглы NiSb имели гексагональную структуру типа арсенида никеля  $P63/mmc$ , параметры элементарной ячейки игл NiSb составили  $a = 3.94(1) \text{ \AA}$ ,  $c = 5.14(1) \text{ \AA}$ . Проведено исследование электропроводности эвтектического композитного материала (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub>. Определены механизмы электропроводности монокристаллического композитного образца. В отсутствии магнитного поля установлен диапазон реализации механизма прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса. Рассчитана температура начала прыжковой проводимости, которая составила  $T_v = 126.1 \text{ K}$ . Вычислены микроскопические параметры образца (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub> при ориентации игл NiSb параллельно направлению магнитного поля и перпендикулярно направлению тока через образец: ширина мягкой параболической щели  $\Delta = 6.3 \text{ мэВ}$ , диэлектрическая проницаемость  $\kappa = 11$ , плотность локализованных состояний  $g_0 = 1.66 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ мэВ}^{-1}$  и радиус локализации носителей заряда  $a = 245.8 \text{ \AA}$ .

**Ключевые слова:** антимонид индия, антимонид никеля, эвтектический композит, эффект Холла, прыжковая проводимость

**Для цитирования:** Борисенко А. В. 2023. Прыжковая проводимость в монокристаллах эвтектического композита (InSb)<sub>98,2</sub>–(NiSb)<sub>1,8</sub>. Прикладная математика & Физика, 55(4): 354–360. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-354-360

Original Research

### Hopping Conductivity in Single Crystals of Eutectic Composite (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub>

Alexander V. Borisenko 

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

Belgorod National Research University,  
85 Pobedy st., Belgorod, 308015, Russia  
[1491654@bsu.edu.ru](mailto:1491654@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The eutectic composite material (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub> was obtained. The material consists of a single crystal InSb semiconductor matrix and oriented NiSb needles. By X-ray diffraction, it was found that the InSb semiconductor matrix had a zinc blende structure  $F\bar{4}3m$  with a crystal lattice parameter equal to  $a = 6.49(1) \text{ \AA}$ . The NiSb needles had a hexagonal structure of the nickel arsenide type  $P63/mmc$ , the unit cell parameters of the NiSb needles were  $a = 3.94(1) \text{ \AA}$ ,  $c = 5.14(1) \text{ \AA}$ . The electrical conductivity of eutectic composite material (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub> was measured. The mechanisms of electrical conductivity were determined for a single-crystal composite sample. The region of realization of the variable range hopping mechanism of Shklovsky-Efros was established in the absence of a magnetic field. The temperature of the beginning of the hopping conductivity was calculated  $T_v = 126.1 \text{ K}$ . Microscopic parameters were calculated for the sample (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub> when the NiSb needles were oriented parallel to the direction of the magnetic field and perpendicular to the direction of the current through the sample. Was determined the width of the Coulomb gap  $\Delta = 6.3 \text{ meV}$ , the dielectric permittivity  $\kappa = 11$ , the density of the localized states  $g_0 = 1.66 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} \text{ meV}^{-1}$  and the localization radius  $a = 245.8 \text{ \AA}$ .

**Keywords:** Indium Antimonide, Nickel Antimonide, Eutectic Composite, Hall Effect, Hopping Conductivity

**For citation:** Borisenko A. V. 2023. Hopping Conductivity in Single Crystals of Eutectic Composite (InSb)<sub>98,2</sub> – (NiSb)<sub>1,8</sub>. Applied Mathematics & Physics, 55(4): 354–360. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-354-360

**1. Введение.** Антимонид индия (InSb) является одним из наиболее широко применяемых бинарных полупроводников [1, 2, 3]. Его получают путем сплавления высокочистых индия и сурьмы с последующей очисткой методом зонной плавки и получением монокристаллов выращиванием из расплава. При добавлении антимонида никеля (NiSb) к InSb в матрице InSb образуются иглы NiSb согласно квазибинарной эвтектической фазовой диаграмме [4, 5]. Эти игольчатые элементы равномерно распределены и ориентированны в полупроводниковой матрице согласно исследованиям на электронном микроскопе. Однонаправленное положение этих игл придает сплаву InSb-NiSb анизотропные электрические свойства [6]. Сочетание полупроводниковых и металлических характеристик в одном материале создает предпосылки к применению данного состава в микроэлектронике, датчиках Холла и датчиках инфракрасного излучения, в фотодетекторах высокой чувствительности и других гальваномагнитных устройствах [7, 8, 9, 10]. Возникающее взаимодействие между спиновой подсистемой электронов проводимости и магнитными моментами никеля предопределяет появление отрицательного магнитосопротивления. Система игольчатого типа InSb-NiSb относится к классу полупроводник-металл. Высокая подвижность электронов в эвтектическом составе говорит о значительном влиянии матрицы композита – чистого InSb.

**2. Материалы и методика эксперимента.** Монокристалл эвтектического композитного материала  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$  был синтезирован из In, Sb и Ni в графитизированной кварцевой ампуле при температуре  $T = 1000^\circ\text{C}$ . Монокристалл выращен модифицированным методом Бриджмена, медленным охлаждением в градиенте печи. Хорошо известно, что эвтектическая система с низкой объемной долей второй фазы обычно образует волокнистую или стержнеобразную структуру при любой скорости роста [11].

Дифракция рентгеновского излучения от кристалла InSb-NiSb исследовалась на установке GBC ЕММА с излучением  $\text{CuK}\alpha$  ( $\alpha = 1.5401 \text{ \AA}$ ). На полученных картинах четко наблюдались дифракции от плоскостей семейства (110), как для InSb – структура цинковой обманки  $F\bar{4}3m$  (п.г. 216) [12], так и для игл NiSb – гексагональная структура типа арсенида никеля  $P63/mmc$  (п.г. 194). Наблюдаются также слабые отражения от других семейств плоскостей, что свидетельствует о присутствии небольшого числа разориентированных блоков. Параметр кристаллической решетки InSb оказался равным  $a = 6.49(1) \text{ \AA}$ , что хорошо согласовывается со значением для монокристалла из порошковой базы данных PDF-2 ( $a = 6.469(1) \text{ \AA}$ ), а параметры решетки игл NiSb ( $a = 3.94(1) \text{ \AA}$ ,  $c = 5.14(1) \text{ \AA}$ ) оказались близки к табличным значениям  $a = 3.9360(1) \text{ \AA}$ ,  $c = 5.1382(1) \text{ \AA}$ .

После ориентации в электронном микроскопе был вырезан образец с расположением иголок NiSb относительно большей поверхности параллелепипеда, параллельно магнитному полю и перпендикулярно току через образец (смотри рисунок 1). Исследуемый образец был подготовлен в форме параллелепипеда со сторонами  $3.7 \times 1.9 \times 0.4 \text{ мм}$ . Измерения электрических свойств проводились по пятизондовой схеме на установке, в состав которой входят следующие блоки: криостат со сверхпроводящим соленоидом CFSG-510-2K-SCM10T-VTI29 и установленным криокулером, работающим по замкнутому циклу Гиффорда-МакМагона; гелиевый компрессор и блок терморегуляции, обеспечивающий возможность изменения и поддержания заданной температуры шахты криостата. Ориентация однонаправленных игл направлена перпендикулярно протекающему току.

**3. Результаты и обсуждение.** Параллельно расположенные относительно друг друга волокна никеля оказывают существенное влияние на электрические свойства постоянного тока в эвтектическом сплаве InSb-NiSb (рис. 1).

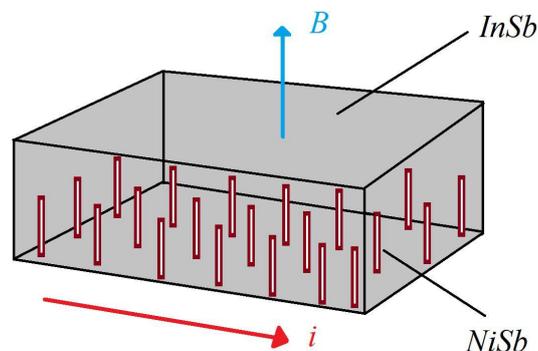


Рис. 1. Схематическая иллюстрация полупроводниковой матрицы InSb с равномерно распределенными иглками NiSb  
Fig. 1. Schematic illustration of InSb semiconductor matrix with uniformly distributed NiSb needles

Для анализа гальваномагнитных свойств были проведены измерения удельного сопротивления в отсутствие магнитного поля в диапазоне температур – от 320 К до температур жидкого гелия 1.5 К.

На графике температурной зависимости логарифма удельного сопротивления  $\ln \rho$  от  $T$  (рис. 2) можно выделить участки температурного диапазона (от 320 – 250 К; от 180 – 25 К), на которых поведение удельного сопротивления принимает полупроводниковый характер зависимости и участки (от 250 – 180 К; от 25 – 1.5 К), где преобладает металлический характер поведения удельного сопротивления. При температурах близких к абсолютному нулю удельное сопротивление резко падает, однако сверхпроводящей фазы с нулевым сопротивлением, которая отмечена в [13], не наблюдается. Для анализа проводимости на других участках рассматриваемого температурного диапазона необходимо построить график зависимости  $\ln \rho$  от  $T^{-1}$ , представленный на рис. 2 (вставка).

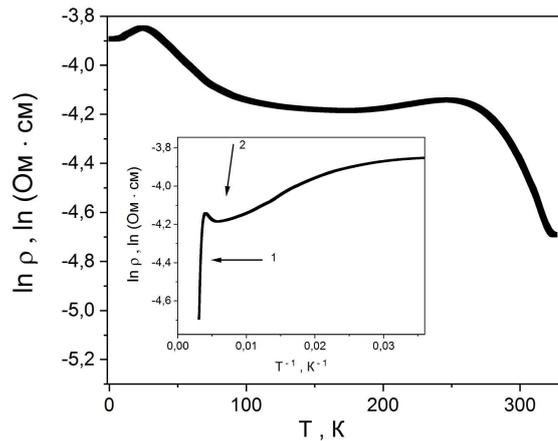


Рис. 2. Температурная зависимость логарифма удельного сопротивления  $\rho$  образца InSb-NiSb (направление тока перпендикулярно по отношению к направлению игл). Вставка: зависимость  $\ln \rho$  от  $T^{-1}$

Fig. 2. The temperature dependence of the resistivity  $\rho$  of InSb-NiSb (the direction of the current is perpendicular to the direction of the needles). Insert: dependency  $\ln \rho$  от  $T^{-1}$

Изучив зависимость логарифма удельного сопротивления от обратной температуры, представленной на вставке к рисунку 2, можно выделить несколько температурных диапазонов с разными типами проводимости. Участок 1 (от 320 до 250 К) соответствует собственной проводимости. Затем начинается участок номер 2, характеризующийся примесной проводимостью: убывание удельного сопротивления с понижением температуры может быть связано с истощением примеси и уменьшением рассеяния на фононах. При дальнейшем понижении температуры удельное сопротивление растет, а изменение наклона линейного участка зависимости  $\ln \rho$  от  $T^{-1}$  может говорить о наличии прыжковой проводимости.

Полученные температурные зависимости удельного сопротивления могут быть сопоставлены с общим выражением для определения механизма прыжковой проводимости следующим экспоненциальным универсальным законом:  $\rho(T) = DT^m e^{(T_0/T)^p}$ , в котором параметр  $D$  – это постоянный коэффициент,  $T_0$  определяется как характеристическая температура,  $p$  и  $m$  – параметры, определяющие тип прыжковой проводимости [14]. В случае прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Мотта  $T_0 = T_M = \beta_M / k_B \cdot g_0 \cdot a^3$  параметр  $p$  принимает значение равное 1/4. В свою очередь, теория Шкловского – Эфроса (ШЭ) говорит о следующей зависимости удельного сопротивления от температуры для всех измерений  $T_0 = T_{SE} = \beta_{SE} \cdot e^2 / k_B \cdot \kappa \cdot a$ , при  $p = 1/2$ . Здесь  $\beta_M = 2.1$  и  $\beta_{SE} = 2.8$  – численные коэффициенты,  $g_0$  – плотность локализованных состояний,  $a$  – радиус локализации. Локальная энергия активации  $E_A$  может быть представлена в виде:  $E_A = d \ln \rho / d (k_B T)^{-1}$ . Для вычисления значения параметров  $m$  и  $p$  необходимо записать уравнение универсального закона удельного сопротивления в виде:

$$\ln\left(\frac{E_A}{k_B \cdot T} + m\right) = \ln \rho + p \cdot \ln T_0 + p \cdot \ln \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Задав значение подгоночному параметру  $m$  в формуле (1), можно наблюдать как левая часть уравнения становится линейно зависима от функции  $\ln(1/T)$ , а значение параметра  $p$  характеризуется углом наклона этой зависимости (рис. 3).

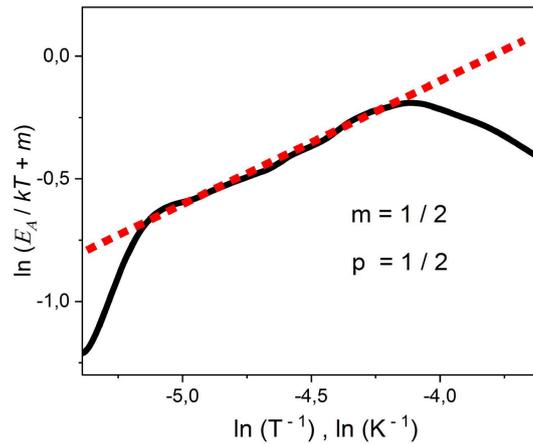


Рис. 3. Зависимость  $\ln(E_A / k_B \cdot T + m)$  от  $\ln(1/T)$  образца  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$   
 Fig. 3. Plots of  $\ln(E_A / k_B \cdot T + m)$  versus  $\ln(1/T)$  of  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

Принимая значение параметра  $m = 1/2$  в рассматриваемом уравнении, угол наклона линейной зависимости, т. е. параметр  $p$ , также равен  $1/2$ , что может свидетельствовать о наличии прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса. По графику, приведенному на рис. 3, рассматриваемый линейный участок начинается при  $T_v = 126.1$  К ( $T_v$  – температура начала прыжковой проводимости со стороны высоких температур) и заканчивается при  $T = 60$  К. Такая высокая температура начала прыжковой проводимости нетипична для полупроводников с мелкими примесными состояниями, таких как германий и др. [15]. Напротив, в твердых растворах индия примесные состояния сильно локализованы, поэтому прыжковая проводимость наблюдается при значительно более высоких температурах [16]. Построив зависимость  $\ln(\rho / T^{1/2})$  от  $T^{-1/2}$ , можно увидеть линейный участок (рис. 4), что подтверждает предположение о механизме проводимости.

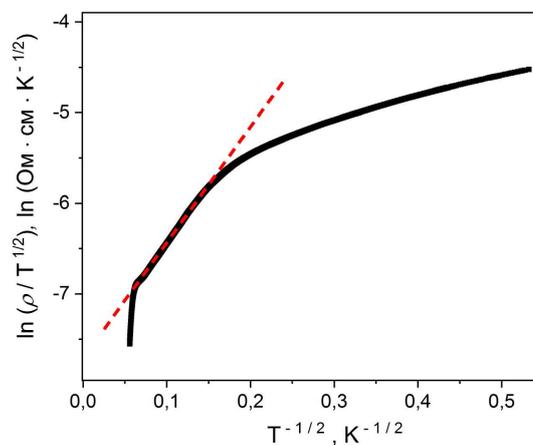


Рис. 4. Зависимость  $\ln(\rho / T^{1/2})$  от  $T^{-1/2}$  твердого состава  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$   
 Fig. 4. Plots of  $\ln(\rho / T^{1/2})$  versus  $T^{-1/2}$  of  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

Параметры  $D$  и  $T_0$  определяются из графика на рис. 4 как коэффициенты в уравнении прямой, где угол наклона равен  $T_0^{1/2}$ , а  $\ln D$  – точка пересечения этой прямой с осью ординат; тогда коэффициент  $D = 4.24 \cdot 10^{-4}$  Ом · см · К<sup>-1/2</sup>, а характеристическая температура составляет  $T_0 = 174$  К.

Для режима прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса ширина мягкой параболической щели определяется из выражения  $\Delta = 0.5 \cdot k_B \cdot (T_v \cdot T_0)^{-1/2} = 6.3$  мэВ. Ширина мягкой параболической щели  $\Delta$  соответствует энергии кулоновского отталкивания между дырками  $U = e^2 / \kappa R_h$ , где  $\kappa$  – диэлектрическая проницаемость, а  $R_h$  – среднее расстояние между дырками. При температуре  $T = 77$  К рассчитана холловская концентрация  $p_{77} = 2.14 \cdot 10^{17}$  см<sup>-3</sup> в полях меньше 0.1 Тл, что позволило найти по формуле  $R_h = 2 \cdot (4\pi \cdot p_{77} / 3)^{-1/3}$  среднее расстояние между дырками 207 Å. Используя полученные значения, можно найти диэлектрическую проницаемость среды  $\kappa = 11$ . Тогда плотность локализованных состояний составляет  $g_0 = 3 \cdot \kappa^3 \cdot \Delta^2 / (\pi e^6) = 1.66 \cdot 10^{16}$  см<sup>-3</sup> мэВ<sup>-1</sup>. Подставляя полученные

параметры в уравнение определения прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса  $T_{SE} = \beta_{SE} \cdot e^2 / k_B \cdot \kappa \cdot a$ , можно найти значение радиуса локализованных состояний  $a = 245.8 \text{ \AA}$ .

В случае включения магнитного поля волновые функции примесных электронов сужаются в поперечном направлении. Это приводит к возрастанию сопротивления по экспоненциальной зависимости, что может свидетельствовать о наличии прыжковой проводимости в магнитном поле. На рис. 5 приведена полевая зависимость удельного сопротивления исследуемого образца InSb-NiSb от напряженности магнитного поля при температуре 98 К (значение подобрано из найденного температурного диапазона в области прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа ШЭ).

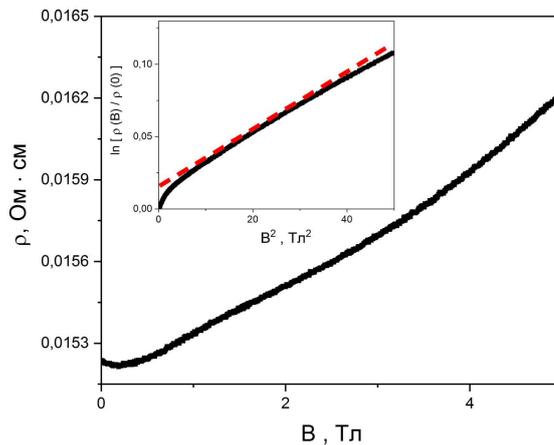


Рис. 5. Зависимость  $\rho$  от  $B$  образца InSb-NiSb при  $T = 98 \text{ K}$ . Вставка: Зависимость  $\ln(\rho(B) / \rho(0))$  от  $B^2$   
 Fig. 5. Plots of  $\rho$  versus  $B$  of  $(\text{InSb})_{98.2} - 98 \text{ K}$ . Insert: plots  $\ln(\rho(B) / \rho(0))$  versus  $B^2$

В магнитном поле основная часть прыжков происходит под малыми углами к магнитному полю на расстояния много большие среднего расстояния между примесями. Удельное сопротивление в малом магнитном поле уменьшается на непродолжительном участке, затем следует экспоненциальный рост при увеличении магнитного поля до 5 Тл. Относительное магнитосопротивление  $\rho(B) / \rho(0)$  связано с магнитным полем выражением:  $\rho(B) / \rho(0) = \exp(AB^2)$ , где  $A$  – постоянная величина. График зависимости относительного сопротивления от квадрата напряженности магнитного поля представлен на вставке рис. 5. Значение параметра  $A$  рассчитывается как коэффициент в уравнении прямой и численно равно  $A = 1.910 \cdot 10^{-3}$  для температуры  $T = 98 \text{ K}$ . Таким образом, магнитное поле оказывает сильное влияние на волновые функции электронов, что в свою очередь приводит к появлению прыжковой проводимости в магнитном поле.

**4. Заключение.** Исследован эвтектический состав игольчатого типа  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ . Композитный монокристалл был получен модифицированным методом Бриджмена. После чего был подготовлен образец в форме параллелепипеда и произведены исследования гальваномагнитных свойств. Проведено измерение характеристик удельного сопротивления в диапазоне температур от 300 К до температур жидкого гелия 1.5 К. В отсутствие магнитного поля определена прыжковая проводимость с переменной длиной прыжка типа Шкловского – Эфроса. Рассчитана температура начала прыжковой проводимости, которая составила  $T_v = 126.1 \text{ K}$ . Рассчитаны микроскопические параметры исследуемого образца монокристалла композита  $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ : ширина мягкой параболической щели  $\Delta = 6.3 \text{ мэВ}$ , диэлектрическая проницаемость  $\kappa = 11$ , плотность локализованных состояний  $g_0 = 1.66 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3} \text{ мэВ}^{-1}$  и радиус локализации носителей заряда  $a = 245.8 \text{ \AA}$ .

#### Список литературы

1. Du Z, He J, Chen X, et al. Point defect engineering in thermoelectric study of InSb. *Intermetallics*. 2019;112:106528.
2. Luo F, Wang J, Zhu C, et al. 18-Electron half-Heusler compound  $\text{Ti}_{0.75}\text{NiSb}$  with intrinsic Ti vacancies as a promising thermoelectric material. *Journal of Materials Chemistry A*. 2022;10(17):9655-9669.
3. Razeghi M. Overview of antimonide based III-V semiconductor epitaxial layers and their applications at the center for quantum devices. *The European Physical Journal-Applied Physics*. 2003;23(3):149-205.
4. Брюквин Д.В., Раухман М.Р., Шалимов В.П. Влияние различных условий конвективного перемешивания расплавов на структуру и магнитосопротивление направленно закристаллизованных эвтектических сплавов InSb-NiSb. *Кристаллография*. 2004;49(2):350-355.

5. Mamedov IKh, Arasly DH, Khalilova AA, et al. Anisotropic electrical properties of a eutectic InSb + MnSb composite. *Inorganic Materials*. 2016;52:423-428.
6. Zhao J, Li N, Cheng Y. All-dielectric InSb metasurface for broadband and high-efficient thermal tunable terahertz reflective linear-polarization conversion. *Optics Communications*. 2023;536:129372.
7. Pendharkar M, Zhang B, Wu H, et al. Parity-preserving and magnetic field-resilient superconductivity in InSb nanowires with Sn shells. *Science*. 2021;372(6541):508-511.
8. Su M, Li J, He K, et al. NiSb/nitrogen-doped carbon derived from Ni-based framework as advanced anode for lithium-ion batteries. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2023;629:83-91.
9. Weiss H. Structure and Application of Galvanomagnetic Devices: International Series of Monographs on Semiconductors. *Elsevier*. 2014.
10. Zheng XM, You JH, Fan JJ, et al. Electrodeposited binder-free Sb/NiSb anode of sodium-ion batteries with excellent cycle stability and rate capability and new insights into its reaction mechanism by operando XRD analysis. *Nano Energy*. 2020;77:105123.
11. Friedrich J, Muller G. Erlangen - An Important Center of Crystal Growth and Epitaxy: Major Scientific Results and Technological Solutions of the Last Four Decades. *Crystal Research and Technology*. 2020;55(2):1900053.
12. Jesenovec J, Zawilski KT, Alison P, et al. Controlling Morphology of NiSb Needles in InSb through Low Temperature Gradient Horizontal Gradient Freeze. *Journal of Crystal Growth*. 2023;127440.
13. Ivanov O, Zakhvalinskii V, Pilyuk E, et al. Resistivity superconducting transition in single-crystalline Cd<sub>0.95</sub>Ni<sub>0.05</sub>Sb system consisting of non-superconducting CdSb and NiSb phases. *Chinese Journal of Physics*. 2021;72:223-228.
14. Laiho R, Lashkul A, Lisunov K, et al. Hopping conductivity of ni-doped p-CdSb. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008;20(29):295204-295214.
15. Tran T, Wong-Leung J, Smillie L, et al. High hole mobility and non-localized states in amorphous germanium. *APL Materials*. 2023;11(4).
16. Немов С.А., Равич Ю.И. Прыжковая проводимость по сильно локализованным примесным состояниям индия в РbТе и твердых растворах на его основе. *Физика и техника полупроводников*. 2002;36(1):3-23.

#### References

1. Du Z, He J, Chen X, et al. Point defect engineering in thermoelectric study of InSb. *Intermetallics*. 2019;112:106528.
2. Luo F, Wang J, Zhu C, et al. 18-Electron half-Heusler compound Ti<sub>0.75</sub>NiSb with intrinsic Ti vacancies as a promising thermoelectric material. *Journal of Materials Chemistry A*. 2022;10(17):9655-9669.
3. Razeghi M. Overview of antimonide based III-V semiconductor epitaxial layers and their applications at the center for quantum devices. *The European Physical Journal-Applied Physics*. 2003;23(3):149-205.
4. Bryukvin DV, Raukhman MR, Shalimov VP. Influence of various conditions of convective mixing of melt on the structure and magnetoresistance of eutectic InSb-NiSb alloys obtained by directional crystallization. *Crystallography Reports*. 2004;49:294-298. (In Russian)
5. Mamedov IKh, Arasly DH, Khalilova AA, et al. Anisotropic electrical properties of a eutectic InSb + MnSb composite. *Inorganic Materials*. 2016;52:423-428.
6. Zhao J, Li N, Cheng Y. All-dielectric InSb metasurface for broadband and high-efficient thermal tunable terahertz reflective linear-polarization conversion. *Optics Communications*. 2023;536:129372.
7. Pendharkar M, Zhang B, Wu H, et al. Parity-preserving and magnetic field-resilient superconductivity in InSb nanowires with Sn shells. *Science*. 2021;372(6541):508-511.
8. Su M, Li J, He K, et al. NiSb/nitrogen-doped carbon derived from Ni-based framework as advanced anode for lithium-ion batteries. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2023;629:83-91.
9. Weiss H. Structure and Application of Galvanomagnetic Devices: International Series of Monographs on Semiconductors. *Elsevier*. 2014.
10. Zheng XM, You JH, Fan JJ, et al. Electrodeposited binder-free Sb/NiSb anode of sodium-ion batteries with excellent cycle stability and rate capability and new insights into its reaction mechanism by operando XRD analysis. *Nano Energy*. 2020;77:105123.
11. Friedrich J, Muller G. Erlangen - An Important Center of Crystal Growth and Epitaxy: Major Scientific Results and Technological Solutions of the Last Four Decades. *Crystal Research and Technology*. 2020;55(2):1900053.
12. Jesenovec J, Zawilski KT, Alison P, et al. Controlling Morphology of NiSb Needles in InSb through Low Temperature Gradient Horizontal Gradient Freeze. *Journal of Crystal Growth*. 2023;127440.
13. Ivanov O, Zakhvalinskii V, Pilyuk E, et al. Resistivity superconducting transition in single-crystalline Cd<sub>0.95</sub>Ni<sub>0.05</sub>Sb system consisting of non-superconducting CdSb and NiSb phases. *Chinese Journal of Physics*. 2021;72:223-228.
14. Laiho R, Lashkul A, Lisunov K, et al. Hopping conductivity of ni-doped p-CdSb. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008;20(29):295204-295214.
15. Tran T, Wong-Leung J, Smillie L, et al. High hole mobility and non-localized states in amorphous germanium. *APL Materials*. 2023;11(4).

16. Nемов SA, Ravich YuI. Hopping conductivity by highly localized impurity states of indium in PbTe and solid solutions based on it. *Physics and Technology of Semiconductors*. 2002;36(1):3-23.(In Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.10.2023

Received October 10, 2023

Поступила после рецензирования 26.11.2023

Revised November 26, 2023

Принята к публикации 02.12.2023

Accepted December 2, 2023

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Борисенко Александр Васильевич** – аспирант Белгородского государственного национального исследовательского университета, г. Белгород, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Alexander V. Borisenko** – graduate students of Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

## Консервативный полулагранжевый алгоритм численного решения уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках

<sup>1</sup>Кучунова Е. В. , <sup>1,2</sup> Вяткин А. В.   
(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

<sup>1</sup> Сибирский федеральный университет,  
Россия, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79  
[HKuchunova@sfu-kras.ru](mailto:HKuchunova@sfu-kras.ru)

<sup>2</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Россия, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44  
E-mail: [vyatkin@icm.krasn.ru](mailto:vyatkin@icm.krasn.ru)

**Аннотация.** В работе представлен полулагранжевый алгоритм численного решения двумерного уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках. Алгоритмы из семейства полулагранжевых методов являются широкоизвестными численными методами решения уравнения неразрывности. Эти алгоритмы используются при численном моделировании широкого ряда физических процессов, включающих в себя адвекцию. Полулагранжевые методы позволяют выполнить условие Куранта – Фридрихса – Леви без использования ограничения на шаг по времени. Представленный метод основан на точном тождестве пространственных интегралов на соседних временных слоях. В описанном алгоритме численное решение основано на кусочно-постоянной интерполяции функций. Предложенный метод устойчив и вычисляет приближенное решение с первым порядком сходимости для гладких решений.

**Ключевые слова:** уравнение неразрывности, полулагранжевый метод, численное моделирование, треугольная сетка

**Благодарности:** Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075–02–2023–912).

**Для цитирования:** Кучунова Е. В., Вяткин А. В. 2023. Консервативный полулагранжевый алгоритм численного решения уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках. *Прикладная математика & Физика*, 55(4): 361–372. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-361-372

Original Research

## Conservative Semi-Lagrangian Algorithm for Advection Problem on Unstructured Triangular Grids

<sup>1</sup>Elena V. Kuchunova , <sup>1,2</sup> Alexander V. Vyatkin   
(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

<sup>1</sup> Siberian Federal University,  
79, Svobodny Pr., Krasnoyarsk, 660041, Russia  
[HKuchunova@sfu-kras.ru](mailto:HKuchunova@sfu-kras.ru)

<sup>2</sup> Institute of Computational Modelling SB RAS,  
50/44, Akademgorodok, Krasnoyarsk, 660036, Russia  
E-mail: [vyatkin@icm.krasn.ru](mailto:vyatkin@icm.krasn.ru)

**Abstract.** We develop the semi-Lagrangian algorithm on triangular grids for two-dimensional advection problem. The semi-Lagrangian method is established numerical technique in atmospheric modeling and other physical processes. It allows to achieve the Courant-Friedrichs-Lewy condition without restriction for time step. The method is based on the exact identity of spatial integrals on adjacent time layers. Numerical solution is constructed as a piecewise constant function on neighborhood of each grid node. The proposed method has first order of convergence for smooth solutions.

**Keywords:** Advection Problem, Semi-Lagrangian Approximation, Numerical Modeling, Triangular Grids

**Acknowledgements:** This work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center and financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the establishment and development of regional Centers for Mathematics Research and Education (Agreement No. 075–02–2023–912).

**For citation:** Kuchunova E. V., Vyatkin A. V. 2023. Conservative Semi-Lagrangian Algorithm for Advection Problem on Unstructured Triangular Grids. *Applied Mathematics & Physics*, 55(4): 361–372. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-4-361-372

**1. Введение.** Идеи, которые легли в основу полулагранжевых методов, появились во второй половине XX века при разработке методов для численного решения задач моделирования крупномасштабных атмосферных потоков [1]. Особенностью этих методов является то, что они основаны на моделировании перемещения субстанции посредством вычисления траекторий движения. В противоположность этому подходу существуют так называемые эйлеровы подходы, которые используют фиксированную пространственную сетку. В настоящее время эйлеровы подходы, такие как TVD или WENO [2]–[4], хорошо развиты и имеют высокие порядки точности. Однако эти подходы имеют два существенных недостатка. Первый недостаток состоит в том, что из условия устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви для этих методов вытекает ограничение на шаг по времени в зависимости от размеров шаблона разностной схемы и значений функций скорости. В двумерных и трехмерных задачах это ограничение приводит к большим вычислительным затратам. Вторым недостатком является то, что при поиске разрывных решений методы высоких порядков точности формируют искусственные осцилляции в численном решении рядом с точкой разрыва. В отличие от эйлеровых подходов в полулагранжевых методах условие устойчивости Куранта – Фридрихса – Леви выполняется автоматически, что позволяет проводить расчеты с большими шагами по времени. В некоторых задачах переход от эйлеровых к полулагранжевым методам позволяет повысить эффективность моделирования в шесть раз [5]. Другим важным преимуществом полулагранжевых методов является возможность использовать разные пространственные сетки на разных слоях по времени [6]. Это преимущество привело к активному использованию адаптивных сеток [6, 7]. Подробное описание преимуществ полулагранжевого моделирования можно найти в обзорной статье [8], а также в [9] вместе с обширным обзором литературы.

Наличие существенных преимуществ привело к развитию целого семейства полулагранжевых методов для численного решения гиперболических уравнений в частных производных, описывающих процесс адвекции. Так, для оператора конвекции в одномерном случае построены два различных подхода (эйлеро-лагранжев и лагранжево-эйлеров) [10]. Причем для лагранжево-эйлерова подхода достигнут второй порядок сходимости для гладких решений и продемонстрировано отсутствие численной вязкости для разрывных решений. Для двумерного уравнения неразрывности в [11, 12] изложен вычислительный алгоритм, основанный на полулагранжевом подходе, на прямоугольных сетках. В работах обоснован дискретный закон сохранения для численного решения. Применение аналогичной технологии для трехмерного уравнения неразрывности на равномерной кубической сетке описано в [13].

Несмотря на то, что изначально полулагранжевый подход разрабатывался для гиперболических уравнений, в дальнейшем была разработана методология объединения его с методом конечных разностей и методом конечных элементов. Поэтому метод начал развиваться для решения более широкого класса задач, в которых адвекция присутствует в качестве одного из моделируемых процессов [14]–[16]. В [17]–[19] представлена полулагранжевая аппроксимация оператора переноса для задачи конвекции-диффузии. Полулагранжевая аппроксимация успешно применяется для различных законов сохранения. В [20, 21] применяется для аппроксимации одномерных уравнения переноса и параболических уравнений. Для параболических уравнений и уравнений переноса продемонстрированы принципы построения дискретных аналогов для трех различных законов сохранения оператора переноса (в нормах  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_{\text{inf}}$ ). В [22] демонстрируются различные способы использования полулагранжевых приближений в зависимости от выполнения законов сохранения. В качестве простых методических примеров взяты одномерное уравнение неразрывности и параболическое уравнений. Полулагранжевый метод также успешно используется в сочетании с методом конечных элементов для решения начально-краевой задачи для уравнений Навье-Стокса [14, 23], например, для численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости [24, 25], сверхзвукового обтекания клина [26] и течения вязкого теплопроводного газа.

Полулагранжевые методы предоставляют возможность для аппроксимации дифференциальных уравнений на любых неструктурированных сетках, состоящих из геометрических фигур, которыми можно покрыть заданную область нестандартного вида. Наиболее простым случаем таких фигур является треугольник. В данной работе предлагается новый численный метод решения начально-краевой задачи для уравнения неразрывности на неструктурированных треугольных сетках на основе консервативного полулагранжевого метода.

**2. Постановка задачи.** В области  $\bar{D}_T = \{(t, \mathbf{x}) \mid 0 \leq t \leq T, \mathbf{x} \in \bar{D}\}$ , где  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  рассмотрим двумерное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = f(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \bar{D}_T. \quad (1)$$

Здесь  $u(t, \mathbf{x})$ ,  $v(t, \mathbf{x})$  известные достаточно гладкие функции вектора скорости  $\mathbf{U} = (u, v)$ ,  $f(t, \mathbf{x})$  функция источника известная в  $\bar{D}_T$ ,  $\rho(t, \mathbf{x})$  — искомая неотрицательная функция. Граница  $\partial D$  множества  $\bar{D}$  состоит из трех частей: участок втекания  $\Gamma_{\text{in}}$ , участок вытекания  $\Gamma_{\text{out}}$  и границы с твердой стеной  $\Gamma_{\text{wall}}$ :

$\partial D = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out} \cup \Gamma_{wall}$ . На границе втекания  $\Gamma_{in}$  справедливо соотношение

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) < 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{in}, \tag{2}$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе  $\partial D$ , а выражение  $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$  обозначает скалярное произведение двух векторов. На границе вытекания  $\Gamma_{out}$  выполняется ограничение

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) > 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{out}. \tag{3}$$

На границе  $\Gamma_{wall}$  выполняется условие прилипания

$$\mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Gamma_{wall}. \tag{4}$$

Искомая функция известна в начальный момент времени на множестве  $\bar{D}$  и на поверхности втекания  $P_{in} = [0, T] \times \Gamma_{in}$

$$\rho(0, \mathbf{x}) = \rho_{init}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{D}, \tag{5}$$

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_{in}(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in P_{in}. \tag{6}$$

**3. Численная схема.** На отрезке  $[0, T]$  построим равномерную сетку с шагом  $\tau = T/K$  с узлами  $t_k = k\tau$ , где  $k = 0, \dots, K$  ( $K \geq 1$ ). В области  $\bar{D}$  введем сетку  $\bar{D}_h = \{\mathbf{x}_s = (x_s, y_s), s = 1, \dots, N\}$ , содержащую внутренние и граничные точки области  $\bar{D}$ . На  $\bar{D}_h$  построим треугольную триангуляцию  $T(\bar{D}_h) = \{T_m = \Delta(\mathbf{x}_{i_m}, \mathbf{x}_{j_m}, \mathbf{x}_{l_m}), \mathbf{x}_{i_m}, \mathbf{x}_{j_m}, \mathbf{x}_{l_m} \in \bar{D}_h, m = 1, \dots, M\}$ . Пусть  $T(\bar{D}_h)$  содержит все узлы  $\bar{D}_h$ . Все треугольники  $T_m$  имеют ненулевую площадь и пересекаются не более, чем по образующим их вершинам или ребрам. Пусть  $h$  – максимальная длина ребер треугольников триангуляции  $T(\bar{D}_h)$ .

Для построения триангуляции существуют разные алгоритмы, которые позволяют покрывать заданную область треугольниками, удовлетворяющими определенным условиям [27]. Чем качественней триангуляция (чем ближе треугольники к равносторонним), тем более точным получается решение. На рис. 1 изображен пример вычислительной сетки, построенной с помощью стандартного пакета `pdeool` в среде MATLAB. Характерными параметрами при построении триангуляции являются величины  $h$  и  $N$ .

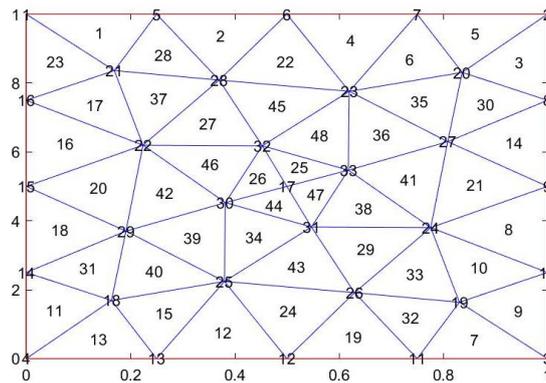


Рис. 1. Вычислительная треугольная сетка

Fig. 1. Computational triangular grid

Для каждого узла  $\mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$  определим множество всех треугольников, вершинами которых он является  $\{T_{(s,i)}, i = 1, \dots, n_s\}$ , где  $n_s$  – количество смежных треугольников. В каждом из этих треугольников определим точку  $P_{(s,i)}$  пересечения медиан (центр масс треугольников). Полученное множество  $\{P_{(s,i)}, i = 1, \dots, n_s\}$  образует вершины многоугольника, который определим окрестностью узла  $\omega_s$ . Несложно понять, что длина каждого ребра любого многоугольника  $\omega_s$  меньше, чем  $2h$ . Границы окрестностей узлов, расположенных на  $\partial D$ , будут содержать в себе перпендикуляры, опущенные на  $\partial D$  из вершин границ соседних узлов. На рис. 2 изображены примеры окрестностей для узлов, расположенных: (а) на границе, (б) внутри области  $\bar{D}$ .

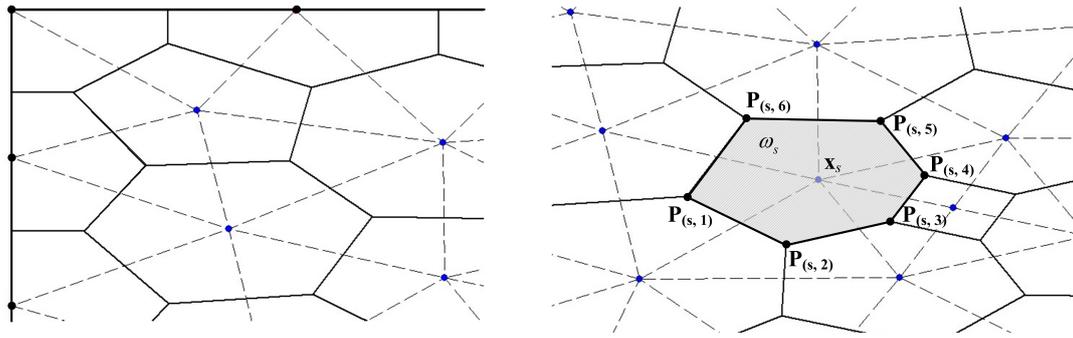


Рис. 2. Окрестности узлов сетки: (а) рядом с границей, (б) внутри области  
 Fig. 2. Neighborhoods of grid nodes: (a) near the boundary, (b) inside the area

Для поиска численного решения  $\rho^h(t, \mathbf{x})$  задачи (1) – (6) будем полагать, что функция  $\rho^h(t, \mathbf{x})$  является константой в пределах каждой окрестности  $\omega_s$  узла  $\mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$

$$\rho^h(t_k, \mathbf{x}) = \rho^h(t_k, \mathbf{x}_s), \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_s. \tag{7}$$

Рассмотрим два соседних слоя по времени  $t_{k-1}$  и  $t_k$  ( $1 \leq k \leq K$ ). Пусть  $\Omega$  – многоугольник на слое  $t_k$ . Из каждой точки  $\mathbf{A} = (t_k, A^x, A^y) \in \partial\Omega$  построим траекторию движения с верхнего слоя  $t_k$  на нижний слой  $t_{k-1}$ . Траектория движения является решением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = u(t, \tilde{x}, \tilde{y}), \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = v(t, \tilde{x}, \tilde{y}) \end{cases} \quad \text{при } t \in [t_{k-1}, t_k] \tag{8}$$

с начальными данными  $\tilde{x}(t_k) = A^x$ ,  $\tilde{y}(t_k) = A^y$ . Множество траекторий, выпущенных из  $\partial\Omega$  при пересечении с плоскостью  $t = \text{const}$  образует множество  $Q(t)$  с криволинейной границей (рис. 2(a)). Когда  $\Omega$  расположен достаточно близко к границе втекания  $\Gamma_{\text{in}}$ , некоторое подмножество траекторий её достигает. В этом случае это подмножество траекторий образуют на поверхности втекания  $P_{\text{in}} = [0, T] \times \Gamma_{\text{in}}$  область  $Q_{\text{in}}$  (рис. 2(б)).

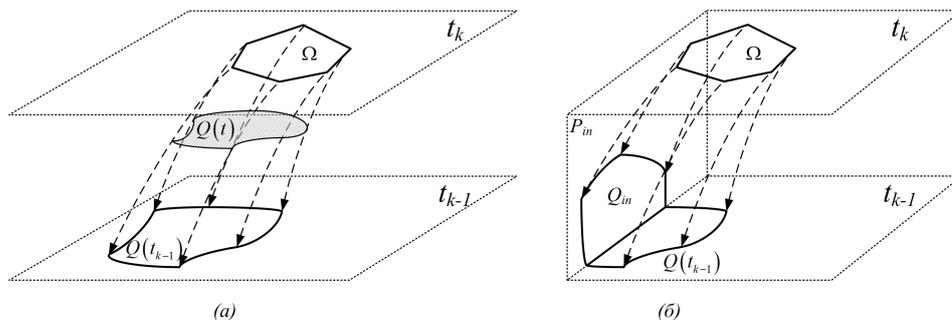


Рис. 3. (а) Множество  $Q(t)$ ; (б) Касание траекториями поверхности втекания  
 Fig. 3. (a) Neighborhood  $Q(t)$  (b) Touching the inlet boundary

**Теорема 1.** Для решения задачи (1)–(6) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \rho(t_k, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{Q(t_{k-1})} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{Q(t)} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \, dt + I(Q_{\text{in}}),$$

где  $\Omega$  – область на слое  $t_k$ ,  $Q(t_{k-1})$  – область на слое  $t_{k-1}$ ,  $I(Q_{\text{in}}) = \int_{Q_{\text{in}}} |(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})| \rho_{\text{in}}(t, \mathbf{x}) \, dQ_{\text{in}}$  (если  $Q_{\text{in}} \neq \emptyset$ );

$Q_{\text{in}}$  – область в  $P_{\text{in}} = [0, T] \times \Gamma_{\text{in}}$ .

Доказательство теоремы основано на формуле Гаусса – Остроградского и подробно описано в [11] для полулагранжевого алгоритма, построенного на квадратных сетках.

Для удобства введем обозначения  $\rho_s^{h,k} = \rho^h(t_k, \mathbf{x}_s)$ ,  $\rho^{h,k} = \rho^h(t_k, \mathbf{x})$ . Будем считать, что при  $t = t_{k-1}$  численное решение  $\rho^{h,k-1}$  нам известно во всех узлах вычислительной сетки  $\bar{D}_h$ . Требуется вычислить

значение искомой функции  $\rho^{h,k}$  на следующем слое по времени. Для этого рассмотрим окрестность  $\omega_s$  произвольного узла  $\mathbf{x}_s$ . В силу теоремы 1

$$\int_{\omega_s} \rho(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{Q_s(t_{k-1})} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{Q_s(t)} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt + I(Q_{in,s}^{k-1}), \tag{9}$$

где  $Q_s(t)$  – множество, получаемое при пересечении траекторий, выпущенных из  $\partial\omega_s$ , с плоскостью  $t = \text{const}$ ,  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $I(Q_{in,s}^{k-1})$  – интеграл по окрестности, получаемой в случае касания траекториями поверхности втекания  $P_{in}$ , вычисляемый следующий образом

$$I(Q_{in,s}^{k-1}) = \begin{cases} \int_{Q_{in,s}^{k-1}} |(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})| \rho_{in} dQ, & \text{если } Q_{in,s}^{k-1} \neq \emptyset; \\ 0 & \text{, иначе.} \end{cases}$$

В связи с (7) для левой части соотношения (9) используем приближение

$$\int_{\omega_s} \rho(t_k, \mathbf{x}, y) d\mathbf{x} \approx \text{meas}(\omega_s) \rho_s^{h,k}, \tag{10}$$

где  $\text{meas}(\omega_s)$  – площадь окрестности  $\omega_s$ .

Для вычисления правой части (9) необходимо аппроксимировать окрестность на нижнем слое  $Q_s(t_{k-1})$ . Обозначим вершины окрестности  $\omega_s$  символами  $A_i = (t_k, A_i^x, A_i^y)$ , где  $i = 1, \dots, n_s$ , где  $n_s$  – количество вершин многоугольника  $\omega_s$ . Для аппроксимации множества  $Q_s(t_{k-1})$  рассмотрим задачи Коши (8) только для траекторий, выпущенных из вершин  $A_i, i = 1, \dots, n_s$ . Значение решения каждой задачи при  $t = t_{k-1}$  найдем методом Эйлера в следующем виде

$$B_i^{h,x} = A_i^x - \tau u(t_k, A_i^x, A_i^y), \quad B_i^{h,y} = A_i^y - \tau v(t_k, A_i^x, A_i^y), \quad i = 1, \dots, n_s. \tag{11}$$

В результате получим точки  $\mathbf{B}_i^h = (B_i^{h,x}, B_i^{h,y})$ . Несложно видеть, что такой способ решения задачи имеет погрешность  $O(\tau^2)$

$$B_i^x = B_i^{h,x} + O(\tau^2), \quad B_i^y = B_i^{h,y} + O(\tau^2), \quad i = 1, \dots, n_s, \tag{12}$$

где  $\mathbf{B}_i = (B_i^x, B_i^y)$  – значение точного решения задачи Коши при  $t = t_{k-1}$ . Последовательно соединим точки  $\mathbf{B}_i^h$  прямыми линиями и получим многоугольник  $Q_s^{h,k-1}$ , который аппроксимирует прямоугольник  $Q_s(t_{k-1})$ . Пример такой аппроксимации изображен на рис. 3. Пунктирными кривыми изображены точные траектории, выходящие из точек  $A_i$ , точное значение множества  $Q_s(t_{k-1})$  заштриховано. Сплошными линиями изображены приближенные траектории, получаемые по формулам (11) и границы многоугольника  $Q_s^{h,k-1}$ .

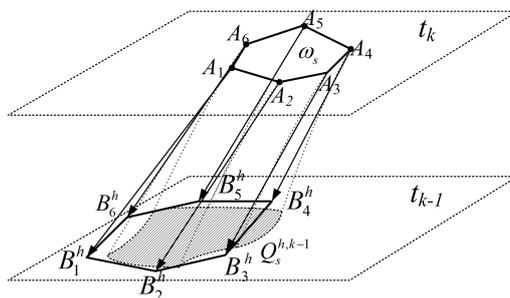


Рис. 4. Аппроксимация окрестности на нижнем слое по времени  
 Fig. 4. Approximation of the neighborhood on the lower layer in time

Поскольку длина каждого ребра окрестности  $\omega_s$  меньше  $2h$ , то несложно понять, что длина ребра многоугольника  $Q_s^{h,k-1}$  меньше  $2h + 2c_1 \tau$ , где  $c_1$  – некоторая константа, ограничивающая функции скорости  $u, v$ . Тогда, используя (12), можно показать, что

$$\text{meas}(Q_s^{h,k-1}) = \text{meas}Q_s(t_{k-1}) + \delta(Q_s), \quad \text{где } |\delta(Q_s)| \leq O((h + \tau) \tau^2). \tag{13}$$

В итоге, для вычисления интеграла на нижнем слое по времени, где решение  $\rho^{h,k-1}$  известно в узлах сетки, применим следующую последовательность интерполяций. Вначале мы заменяем криволинейное

множество  $Q_s(t_{k-1})$  многоугольником  $Q_s^{h,k-1}$ , а затем подынтегральную функцию заменяем на численное решение  $\rho^h$  известное на слое по времени  $t = t_{k-1}$

$$\int_{Q_s(t_{k-1})} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \int_{Q_{h,s}^{k-1}} \rho(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \int_{Q_{h,s}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Чтобы вычислить интеграл по многоугольнику  $Q_{h,s}^{k-1}$ , необходимо осуществить декомпозицию этого многоугольника на множества  $\Xi = \{R_1, \dots, R_p\}$  непустых пересечений с окрестностями других узлов сетки  $\bar{D}_h$ , в каждой из которых значение подынтегральной функции постоянно

$$Q_s^{h,k-1} = \bigcup_{i=1}^p R_i, \quad \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) = \rho_i^{h,k-1} \quad \forall \mathbf{x} \in R_i = Q_s^{h,k-1} \cap \omega_i.$$

Алгоритм декомпозиции окрестности на нижнем слое по времени следующий.

1. Положим  $i = s$ . Таким образом, начинаем обход узлов сетки с узла  $\mathbf{x}_s$ .
2. Вычисляем пересечение окрестности  $Q_s^{h,k-1}$  с окрестностью узла  $\mathbf{x}_i$ :  $\xi_i = Q_s^{h,k-1} \cap \omega_i$ .
3. Если пересечение  $\xi_i \neq \emptyset$ , то добавляем  $\xi_i$  в  $\Xi$ , отмечаем узел  $\mathbf{x}_i$  как задействованный.
4. Если узел  $\mathbf{x}_i$  задействованный, то осуществляем цикл по всем треугольникам  $T_m = \Delta(\mathbf{x}_{i_m}, \mathbf{x}_{j_m}, \mathbf{x}_{l_m})$ , у которых одной из вершин является узел  $\mathbf{x}_i$ .
  - (a) Если узел  $\mathbf{x}_{i_m}$  не отмечен проверенным, то переходим к п.2 для  $i = i_m$ .
  - (b) Если узел  $\mathbf{x}_{j_m}$  не отмечен проверенным, то переходим к п.2 для  $i = j_m$ .
  - (c) Если узел  $\mathbf{x}_{l_m}$  не отмечен проверенным, то переходим к п.2 для  $i = l_m$ .

Пример разбиения многоугольника  $Q_s^{h,k-1}$  на части представлен на рис. 5 (слева). Пример пересечения двух множеств  $P$  и  $Q$  изображен на рис. 5 (справа). Чтобы вычислить пересечение многоугольников  $P$  и  $Q$ , мы определяем вершины многоугольника  $Q$ , лежащие внутри многоугольника  $P$  (на рис. 5 (справа) это  $A, B$ ). Далее, определяем вершины многоугольника  $P$ , лежащие внутри многоугольника  $Q$  (на рис. 5 (справа) это  $E, D$ ). Потом проверяем пересечение всех ребер многоугольника  $P$  со всеми ребрами многоугольника  $Q$  (на рис. 5 (справа) это  $C, F$ ). Полученное множество точек упорядочиваем путем построения выпуклой оболочки, которая дает алгоритм Джарвиса. В итоге, после декомпозиции многоугольника  $Q_s^{h,k-1}$  интеграл раскладывается на следующую сумму

$$\int_{Q_{h,s}^{k-1}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \int_{R_i} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \rho_i^{h,k-1} \text{meas}(R_i). \quad (14)$$

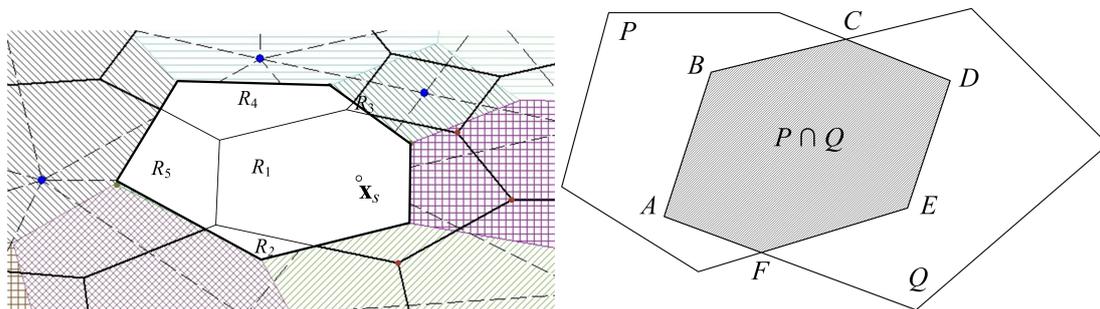


Рис. 5. Разбиение окрестности на нижнем слое по времени (слева); Пересечения двух многоугольников (справа)  
Fig. 5. Polygon decomposition at the bottom time level (left); Two polygons intersection (right)

Для вычисления интеграла от  $f(t, \mathbf{x})$  из (9) воспользуемся следующими аппроксимациями:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{Q_s(t)} f(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \approx \tau \int_{Q_s(t_k)} f(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \tau f(t_k, \mathbf{x}_s) \text{meas}(\omega_s). \quad (15)$$

Рассмотрим вычисление интеграла  $I(Q_{in,s}^{k-1})$  на поверхности втекания. В случае если хотя бы одна траектория, выпущенная из вершины многоугольника  $\omega_s$ , достигает поверхность втекания  $P_{in}$ , то

множество  $Q_{in,s}^{k-1}$  является не пустым. Для дальнейших расчетов мы аппроксимируем его многоугольником с прямыми сторонами  $Q_{in,s}^{h,k-1}$ . Поскольку достигнуть поверхности втекания может несколько траекторий, то возможно различное число вершин в многоугольнике  $Q_{in,s}^{k-1}$ . Два возможных случая изображены на рис. 6.

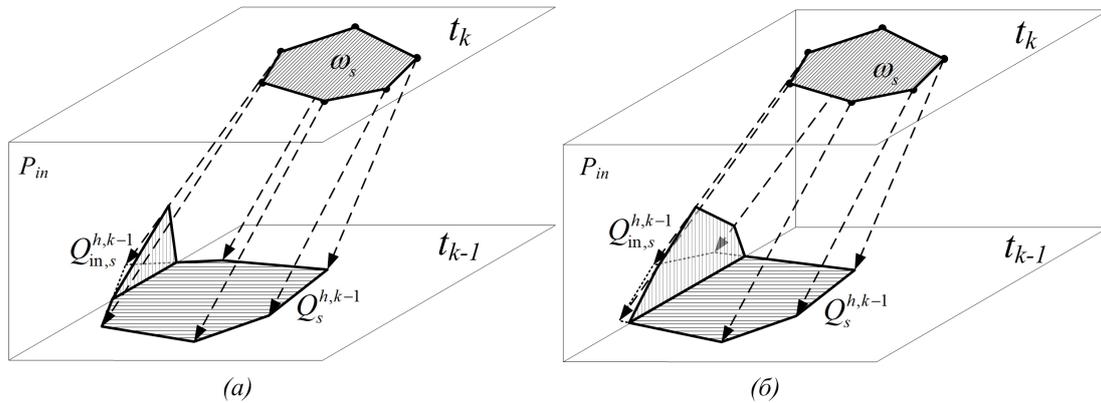


Рис. 6. Случай выхода одной (а) и трех (б) траекторий на границу втекания  
Fig. 6. One (a) or three (b) trajectories achieve the inlet boundary

Пусть, для примера, границей втекания является граница  $x = 0$ , тогда на поверхности втекания  $P_{in}$  вычислительная сетка представляет собой прямоугольную сетку с узлами  $(t_{k-1}, y_{in_i})$ ,  $(t_k, y_{in_i})$ , где  $y_{in_i}$  – координаты по оси  $OY$  узлов вычислительной сетки  $\Omega_h$ , лежащих в  $\Gamma_{in}$ . Обозначим  $h_i^y = y_{in_{i+1}} - y_{in_i}$ . Для каждого узла  $(t_k, y_{in_i})$  зададим прямоугольную окрестность

$$\omega_{in,i}^k = ([t_k - \tau/2, t_k + \tau/2] \cap [0, 1]) \times ([y_{in_i} - h_{i-1}^y/2, y_{in_i} + h_i^y/2] \cap [0, 1]),$$

в пределах которой значения функций  $\rho(t, x)$  и  $u(t, x)$  считаем постоянными. В этом случае вычисление интеграла по многоугольнику  $Q_{in,s}^{h,k-1}$  сводится в разложению  $Q_{in,s}^{h,k-1}$  на подмножества с помощью алгоритма, подобному ранее изложенному способу.

Таким образом, если ни один из прямых отрезков  $(A_i, B_i^h)$  не достигает плоскости втекания  $P_{in}$ , то интеграл  $I(Q_{in,s}^{k-1}) = 0$ . Если хотя бы одна траектория достигает границы втекания, то  $Q_{in,s}^{h,k-1} \neq \emptyset$ . В этом случае, выполняем декомпозицию окрестности  $Q_{in,s}^{h,k-1}$  на множество непустых пересечений с окрестностями узлов, лежащих на плоскости втекания

$$Q_{in,s}^{h,k-1} = \bigcup_{j=k-1}^k \bigcup_{i=1}^r W_{i,j}, \quad W_{i,j} = Q_{in,s}^{h,k-1} \cap \omega_{in,i}^j.$$

Пример такой декомпозиции приведен на рис. 7.

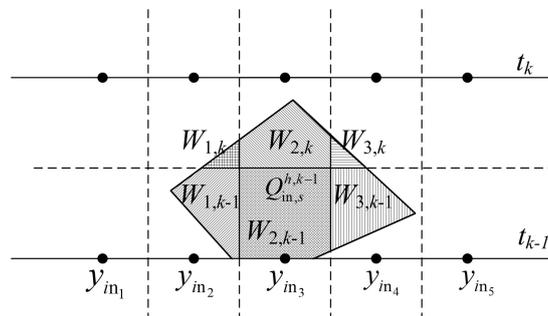


Рис. 7. Разбиение многоугольника на поверхности втекания  
Fig. 7. Polygon decomposition on inlet surface

Интеграл на поверхности втекания раскладывается на следующую сумму

$$I(Q_{in,s}^{k-1}) = \int_{Q_{in,s}^{k-1}} \rho_{in} u dt dy \approx \int_{Q_{in,s}^{h,k-1}} \rho_{in} u dt dy \approx \sum_{j=k}^{k+1} \sum_{i=1}^r \rho_{in}(t_j, \mathbf{x}_{in_i}) u(t_j, \mathbf{x}_{in_i}) \text{meas}(W_{i,j}). \quad (16)$$

Подставляем в исходное уравнение (9) интегралы на верхнем (10) и на нижнем (14) слоях, интеграл от функции правой части (15), а также интеграл на поверхности втекания (16). В итоге получаем явное выражение для вычисления значения в узле сетки  $\mathbf{x}_s$

$$\rho_s^{h,k} = \frac{1}{\text{meas}(\omega_s)} \left( \sum_{i=1}^p \rho_i^{h,k-1} \text{meas}(R_i) + I(Q_{\text{in},s}^{k-1}) \right) + \tau f(t_k, \mathbf{x}_s), \quad s = 0, \dots, N. \quad (17)$$

Разработанный вычислительный алгоритм численного решения задачи (1)-(6) можно представить в виде следующей последовательности шагов.

1. Шаг инициализации. Используя начальные данные (5), вычисляется  $\rho_s^{h,0} = \rho_{\text{init}}(\mathbf{x}_s), \forall \mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$ .
2. Цикл по времени. Для каждого шага по времени  $k = 1, \dots, K$  выполняются следующие действия.
  - (a) Шаг вычисления решения. Для каждого узла сетки  $\mathbf{x}_s \in \bar{D}_h$  выполняются следующие действия.
    - I. Для определения координат вершин  $Q_s^{h,k-1}$  четырехугольника решается система (11).
    - II. Если некоторые траектории достигают плоскость  $P_i n$ , то определяются координаты пересечения соответствующей траектории с этой плоскостью.
    - III. Вычисляется значение интеграла на нижнем слое по времени (14).
    - IV. Вычисляется значение интеграла по правой части (15).
    - V. Вычисляется значение интеграла по границе втекания (16).
    - VI. Вычисляется значение искомой функции  $\rho_s^{h,k}$  по формуле (17).
  - (b) Шаг анализа решения. Вычисляются нормы решения и погрешности.

Алгоритм является явным по времени, т.е. для расчета  $\rho^h$  на каждом временном слое используются данные только с предыдущего временного слоя. Достоинством алгоритма с точки зрения параллельной реализации является отсутствие зависимости по данным в основных циклах по пространству, т.е. пункты выполняются независимо для каждого узла  $\mathbf{x}_s$ . В связи с этим возможно осуществление распараллеливания по данным. Для систем с общей памятью при использовании технологии OpenMP достаточно на каждом шаге по времени распараллелить основной цикл по пространству, используя директиву `#pragma omp parallel for`.

Отметим, что описанный метод является консервативным в норме пространства функций  $L_1(\bar{D})$

$$\left\| \rho^h(t_k, \mathbf{x}) \right\|_{L_1(\bar{D})} = \int_{\bar{D}} |\rho^h(t_k, \mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Консервативность метода выражается в том, что при переходе с одного слоя по времени на следующий слой, численное решение сохраняет норму с учетом коррекции, сформированной от границ втекания и вытекания, а также от функции правой части  $f(t, \mathbf{x})$ . Чтобы в этом убедиться, умножим (17) на  $\text{meas}(\omega_s)$ , просуммируем по всем  $s = 0, \dots, N$  и получим

$$\int_{\bar{D}} \rho^h(t_k, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{s=1}^N \sum_{i=1}^{p(s)} \rho_i^{h,k-1} \text{meas}(R_i) + \sum_{s=1}^N I(Q_{\text{in},s}^{k-1}) + \tau \sum_{s=1}^N f(t_k, \mathbf{x}_s) \text{meas}(\omega_s). \quad (18)$$

Двойная сумма в правой части (18) пробегает по всем множествам  $R_i$ , значения в которых используются для вычисления функции  $\rho^h(t_k, \mathbf{x})$  на слое по времени  $t = t_k$ . Обозначим

$$D_{\text{used}} = \bigcup_{s=1}^N \bigcup_{i=1}^{p(s)} \text{meas}(R_i), \quad D_{\text{out}} = \bar{D} \setminus D_{\text{used}}.$$

Здесь множество  $D_{\text{out}}$  определяет, например, массу с плотностью  $\rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x})$ , которая вытечет через границу вытекания  $\Gamma_{\text{out}}$  за время  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ . Несложно видеть, что

$$\sum_s^N I(Q_{\text{in},s}^{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{\text{in}}} |([U]_h \cdot \mathbf{n})| [\rho_{\text{in}}]_h dQ dt, \quad \tau \sum_{s=0}^N f(t_k, \mathbf{x}_s) \text{meas}(\omega_s) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\bar{D}} [f]_h(t, \mathbf{x}_s) d\mathbf{x} dt,$$

где обозначение  $[f]_h$  означает кусочно-постоянную функцию такую, что  $\forall \mathbf{x} \in \omega_s [f]_h(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}_s)$  и  $\forall t \in [t_{k-1}, t_k] [f]_h(t, \mathbf{x}) = f(t_k, \mathbf{x})$ . Тогда из (18) получим закон сохранения (балансовое соотношение),

учитывающий границы втекания и вытекания, а также функцию правой части

$$\begin{aligned} \|\rho^h(t_k, \mathbf{x})\|_{L_1(\bar{D})} &= \|\rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x})\|_{L_1(\bar{D})} - \int_{D_{\text{out}}} \rho^h(t_{k-1}, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \\ &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\Gamma_{\text{in}}} |([U]_h \cdot \mathbf{n})| [\rho_{\text{in}}]_h \, dQ \, dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{\bar{D}} [f]_h(t, \mathbf{x}_s) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

**4. Результаты вычислительных экспериментов.** Разработанный алгоритм был реализован на языке C++ с использованием компилятора g++. Триангуляции расчётных областей были получены с помощью стандартного пакета `pdeool` в среде MATLAB. Алгоритм был протестирован на серии расчетов для подтверждения первого порядка сходимости и для проверки выполнения закона сохранения.

В первой тестовой задаче использовались известные гладкие функции для исследования сходимости численного решения к точному решению. В качестве точного (искомого) решения была выбрана функция  $\rho(t, x, y) = 10 + \sin(txy)$ ,  $t \in [0, 0.05]$ . Также были использованы функции скоростей  $u(t, x, y) = 0.5tx(1 + \cos(\pi y))$ ,  $v(t, x, y) = tx \sin(\pi y)$ , а функция правой части  $f(t, x, y)$  вычислялась аналитически подставкой указанных функций  $\rho(t, x, y)$ ,  $u(t, x, y)$ ,  $v(t, x, y)$  в (1). Погрешность численного решения оценивалась в виде разности точного и численного решений  $\delta\rho^{h,k} = \rho^{h,k} - \rho(t_k, x, y)$ , взятых в узлах сетки  $\bar{D}_h$ . Для вычисления норм погрешности функции  $\delta\rho^{h,k}$  была доопределена кусочно-постоянной на всем множестве  $\bar{D}$  так, что

$$\|\delta\rho^{h,k}\|_{L_1} = \sum_{s=0}^N \left| \rho_s^{h,k} - \rho(t_k, \mathbf{x}_s) \right| \text{meas}(\omega_s).$$

При проведении вычислительного эксперимента отношение шага по времени  $\tau$  к величине  $h$  было зафиксировано в виде  $\tau = 0.1h$ . Для исследования сходимости метода расчеты были проведены на последовательности сгущающихся сеток с шагом  $h = (\frac{1}{2})^n$ ,  $n = 1, \dots, 8$ . При построении серии сеток с помощью пакета `pdeool` задавались параметры  $h$  и  $N$  на самой грубой сетке, а по мере уменьшения  $h$  параметр  $N$  вычислялся автоматически так, что  $N = O(h^{-1})$ . Количество шагов по времени составляло  $2^{n-1}$ . Для удобства через  $\rho^{h,n}$  обозначили решение, полученное на последнем слое по времени и использовали обозначения  $\varepsilon_n = \|\rho(T, \mathbf{x}) - \rho^{h,n}(T, \mathbf{x})\|_{L_1}$ . В таблице 1 представлены  $\varepsilon_n$  и оценка порядка сходимости  $K(n)$ , вычисляемая по формуле  $K(n) = \log_2(\varepsilon_n/\varepsilon_{n+1})$ .

Таблица 1  
Table 1

Результаты вычислений для тестовой задачи №1  
Data of the numerical experiment 1

| Номер расчета $n$ | Шаг сетки $h$ | Количество шагов по времени $M$ | Норма погрешности $\varepsilon_n$ | $K(n)$      |
|-------------------|---------------|---------------------------------|-----------------------------------|-------------|
| 1                 | $2^{-1}$      | 1                               | $6.97 \cdot 10^{-1}$              | —           |
| 2                 | $2^{-2}$      | 2                               | $2.72 \cdot 10^{-1}$              | <b>1.35</b> |
| 3                 | $2^{-3}$      | 4                               | $1.54 \cdot 10^{-1}$              | <b>0.82</b> |
| 4                 | $2^{-4}$      | 8                               | $7.47 \cdot 10^{-2}$              | <b>1.04</b> |
| 5                 | $2^{-5}$      | 16                              | $3.56 \cdot 10^{-2}$              | <b>1.07</b> |
| 6                 | $2^{-6}$      | 32                              | $1.74 \cdot 10^{-2}$              | <b>1.04</b> |
| 7                 | $2^{-7}$      | 64                              | $8.57 \cdot 10^{-3}$              | <b>1.02</b> |
| 8                 | $2^{-8}$      | 128                             | $4.25 \cdot 10^{-3}$              | <b>1.01</b> |

Таким образом, вычислительные эксперименты показали, что при фиксированном отношении  $\tau$  и  $h$  наблюдается первый порядок сходимости численного решения к точному решению в норме пространства  $L_1$ .

Задача следующего вычислительного эксперимента состояла в том, чтобы проверить выполнение закона сохранения для численного решения как при переходе с одного слоя по времени на следующий слой, так и за все время расчетов. Для этого в качестве начального решения использовалась разрывная функцию

$$\rho_{\text{init}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| \leq R^2; \\ 0, & \text{если } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_c| > R^2, \end{cases}$$

где  $R = 0.1$ ,  $\mathbf{x}_c = (0.2, 0.5)$ ,  $t \in [0, 4]$ . Функции скорости и правой части задавались в виде

$$u = \cos(\pi t) \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), \quad v = -\cos(\pi t) \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y), \quad f = 0.$$

Поскольку функции скорости на границе вычислительной области  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$  равны нулю и  $f(t, x) = 0$ , то норма численного решения не должна меняться со временем. В серии расчетов мы сравнивали норму решения в начальный и в конечный моменты времени  $I_0 = \|\rho^h(0, x)\|_{L_1}$ ,  $I_1 = \|\rho^h(T, x)\|_{L_1}$

В таблице 2 приведены результаты расчетов, которые демонстрируют сохранение нормы решения, что подтверждает консервативность метода.

Таблица 2  
Table 2

Результаты вычислений для тестовой задачи №2  
Calculation results for test 2

| Шаг сетки $h$ | Количество временных шагов $M$ | Начальная норма $I_0$ | $ I_1 - I_0 $   |
|---------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------|
| 0.1           | 40                             | 3.00E-02              | <b>7.98E-17</b> |
| 0.05          | 80                             | 2.75E-02              | <b>2.91E-16</b> |
| 0.025         | 160                            | 2.94E-02              | <b>6.80E-16</b> |
| 0.0125        | 320                            | 3.05E-02              | <b>1.16E-15</b> |

Из таблицы 2 видно, что нормы численных решений на первом и последнем слоях по времени различаются на величину  $1.E - 15$ , что примерно соответствует нулю в машинной арифметике для типа double на языке C++.

**4. Заключение.** Для двумерного уравнения неразрывности представлен алгоритм из семейства полулагранжевых методов, основанный на точном тождестве пространственных интегралов на соседних слоях по времени. Полулагранжевые методы обеспечивают выполнение условия Куранта – Фрадрикса – Леви без ограничения на шаг по времени, поэтому алгоритмы из этого семейства более гибки в адаптации временных шагов к требуемой точности. Описанный подход позволяет найти численное решение задачи на неструктурированной треугольной сетке и имеет первый порядок сходимости численного решения к точному решению для гладких решений. Отметим, что некоторые современные полулагранжевые алгоритмы имеют сходимость более высоких порядков. Однако такие методы, как известно, плохо себя показывают на разрывных решениях, так как рядом с точкой разрыва в численном решении появляются осцилляции. Недостатком метода первого порядка является искусственная вязкость, но ее можно уменьшить посредством сгущения сетки рядом с точкой или линией разрыва. Существенным преимуществом описанного подхода является выполнение закона сохранения (балансового соотношения) для численного решения. Предложенный в статье алгоритм может быть теоретически обобщен на трехмерный случай, где вместо треугольников используются тетраэдры. Однако на практике программная реализация алгоритма поиска пересечения двух трехмерных многогранников является вычислительно затратой. Поэтому результаты от использования такого подхода в трехмерном случае могут быть хуже при прочих равных вычислительных затратах, чем результаты расчетов на структурированных кубических сетках. Вместе с тем, исследования в этой области продолжаются, и мы надеемся, что в ближайшем будущем мы сможем улучшить алгоритмы из семейства полулагранжевых методов, так, чтобы использовать неструктурированные сетки в трехмерных задачах.

#### Список литературы

1. Wiin-Nielson A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting. *Tellus*. 1959; 11: 180–186.
2. Levy D., Puppo G., and G. Russo. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 1999; 33(3): 547–571.
3. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes. *Journal of Computational Physics*. 1988; 77: 439–471.
4. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*. 1998; 67 (221): 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2
5. Simmons A. Development of a high resolution, semi-Lagrangian version of the ecmwf forecast model. *In Seminar on Numerical Methods in Atmospheric Models. ECMWF*. 1991; 281-324.
6. Iske A., Käser M. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2004; 20: 388–411.
7. Terekhov K.M., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V. A semi-Lagrangian method on dynamically adapted octree meshes. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30 (6): 363–380. DOI: 10.1515/rnam-2015-0033
8. Staniforth A., Cote J. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models – A Review. *Monthly Weather Review*. 1991; 119: 2206-2223.
9. Falcone M., Ferretti R. Semi-Lagrangian Approximation Schemes for Linear and Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM*. 2013; 174 p.

10. Шайдуров В.В., Чередниченко О.М. Полулагранжевы аппроксимации оператора конвекции в симметричной форме. *Вычислительные технологии*. 2023; 28 (3): 101-116. doi: 10.25743/ICT.2023.28.3.007
11. Вяткин А.В., Кучунова Е.В., Шайдуров В.В. Полулагранжевый метод решения двумерного уравнения неразрывности с законом сохранения. *Вычислительные технологии*. 2017; 22 (5): 27-38.
12. Scroggs J.S., Semazzi F.H. A conservative semi-Lagrangian method for multi-dimensional fluid dynamics applications. *North Carolina State University. Center for Research in Scientific Computation*. 1993.
13. Shaydurov V., Vyatkin A., Kuchunova E. A Semi-Lagrangian Numerical Method for the Three-Dimensional Advection Problem with an Isoparametric Transformation of Subdomains. *Numerical analysis and its application*. 2017; 10187: 599-607. DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0.
14. Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *NumerischeMathematik*. 1982; 38(3): 309–332.
15. Carlini E., Falcone M., and Ferretti R. A time-adaptive semi-Lagrangian approximation to mean curvature motion. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. 2006; 732–739.
16. Losasso F., Fedkiw R., Osher S. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow. *Computational Fluids*. 2006; 35: 995-1010. DOI: 10.1016/j.compfluid.2005.01.006
17. Wang K. A uniformly optimal-order error estimate of an ELLAM scheme for unsteady-state advection-diffusion equations. *International journal of numerical analysis and modeling*. 2008; 5(2): 286-302.
18. Arbogas T., Wen-Hao Wang. Convergence of a fully conservative volume corrected characteristic method for transport problems. *SIAM Journal of numerical analysis*. 2010; 48(3): 797-823. DOI:10.1137/09077415X
19. Vyatkin A., Kuchunova E., Shaydurov V. The conservative semi-Lagrangian approximation for three-dimensional convection-diffusion problem. *AIP Conference Proceedings*. 2022; 2522: 1100010. DOI: 10.1063/5.0100835
20. Shaydurov V., Efremov A., Gileva L. Semi-Lagrangian difference approximations for distinct transfer operators. *AIP Conference Proceedings*. 2018; 2025: 020004. DOI: 10.1063/1.5064877
21. Xiong T., Russo G., Qiu J. Conservative multi-dimensional semi-Lagrangian finite difference scheme: stability and applications to the kinetic and fluid simulations. *Journal of scientific computing*. 2019; 79(2). DOI:10.1007/s10915-018-0892-6.
22. Shaidurov V.V., Vyatkin A.V., Kuchunova E.V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements. *Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling*. 2018; 33(2): 123-135. DOI: 10.1515/rnam-2018-0011
23. Lentine M., Gretaarsson J.T., Fedkiw R. An unconditionally stable fully conservative semi-Lagrangian method. *Journal of Computational Physics*. 2011; 230: 2857-2879.
24. Dementyeva E., Karepova E, Shaidurov V. The semi-Lagrangian method for the Navier-Stokes problem for an incompressible fluid. *AIP conference proceedings*. 2017; 1895: 110001. DOI: 10.1063/1.5007407
25. Celledonia E., Kometaa B. K., Verdiera O. High order semi-Lagrangian methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*. 2016; 91-115 DOI:10.1007/s10915-015-0015-6
26. Shaydurov V., Shchepanovskaya G., Yakubovich M., Liu T. A semi-Lagrangian approximation in the Navier-Stokes equations for the gas flow around a wedge. *AIP Conference Proceedings*. 2015; 1684: 090011. DOI: 10.1063/1.4934336
27. Jonathan R. Sh. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*. 2002; 22: 21-74.

## References

1. Wiin-Nielson A. On the application of trajectory methods in numerical forecasting. *Tellus*. 1959; 11: 180–186.
2. Levy D., Puppo G., and G. Russo. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 1999; 33(3): 547–571.
3. Shu C.-W., Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shockcapturing schemes. *Journal of Computational Physics*. 1988; 77: 439–471.
4. Gottlieb S., Shu C.-W. Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Mathematics of Computation*. 1998; 67 (221): 73–85. DOI: 10.1090/S0025-5718-98-00913-2
5. Simmons A. Development of a high resolution, semi-Lagrangian version of the ecmwf forecast model. *In Seminar on Numerical Methods in Atmospheric Models. ECMWF*. 1991; 281-324.
6. Iske A., Käser M. Conservative semi-Lagrangian advection on adaptive unstructured meshes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2004; 20: 388–411.
7. Terekhov K.M., Olshanskii M.A., Vassilevski Y.V. A semi-Lagrangian method on dynamically adapted octree meshes. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2015; 30 (6): 363–380. DOI: 10.1515/rnam-2015-0033
8. Staniforth A., Cote J. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models — A Review. *Monthly Weather Review*. 1991; 119: 2206-2223.

9. Falcone M., Ferretti R. Semi-Lagrangian Approximation Schemes for Linear and Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM*. 2013; 174 p.
10. Shaydurov V.V., Cherednichenko O.M. Semi-Lagrangian approximations of the convection operator in symmetric form. *Computational Technologies*. 2023; 28 (3): 101-116. doi: 10.25743/ICT.2023.28.3.007 (in Russian).
11. Vyatkin A.V., Kuchunova E.V., Shaydurov V.V. Polulagranzhevyy metod resheniya dvumernogo uravneniya nerazryvnosti s zakonom sokhraneniya. [Semi-Lagrangian method for solving a two-dimensional advection problem with a conservation law] *Computational Technologies*. 2017; 22 (5): 27-38.
12. Scroggs J.S., Semazzi F.H. A conservative semi-Lagrangian method for multi-dimensional fluid dynamics applications. *North Carolina State University. Center for Research in Scientific Computation*. 1993.
13. Shaydurov V., Vyatkin A., Kuchunova E. A Semi-Lagrangian Numerical Method for the Three-Dimensional Advection Problem with an Isoparametric Transformation of Subdomains. *Numerical analysis and its application*. 2017; 10187: 599-607. DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0.
14. Pironneau O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *NumerischeMathematik*. 1982; 38(3): 309-332.
15. Carlini E., Falcone M., and Ferretti R. A time-adaptive semi-Lagrangian approximation to mean curvature motion. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*. 2006; 732-739.
16. Losasso F., Fedkiw R., Osher S. Spatially adaptive techniques for level set methods and incompressible flow. *Computational Fluids*. 2006; 35: 995-1010. DOI: 10.1016/j.compfluid.2005.01.006
17. Wang K. A uniformly optimal-order error estimate of an ELLAM scheme for unsteady-state advection-diffusion equations. *International journal of numerical analysis and modeling*. 2008; 5(2): 286-302.
18. Arbogast T., Wen-Hao Wang. Convergence of a fully conservative volume corrected characteristic method for transport problems. *SIAM Journal of numerical analysis*. 2010; 48(3): 797-823. DOI:10.1137/09077415X
19. Vyatkin A., Kuchunova E., Shaydurov V. The conservative semi-Lagrangian approximation for three-dimensional convection-diffusion problem. *AIP Conference Proceedings*. 2022; 2522: 1100010. DOI: 10.1063/5.0100835
20. Shaydurov V., Efremov A., Gileva L. Semi-Lagrangian difference approximations for distinct transfer operators. *AIP Conference Proceedings*. 2018; 2025: 020004. DOI: 10.1063/1.5064877
21. Xiong T., Russo G., Qiu J. Conservative multi-dimensional semi-Lagrangian finite difference scheme: stability and applications to the kinetic and fluid simulations. *Journal of scientific computing*. 2019; 79(2). DOI:10.1007/s10915-018-0892-6.
22. Shaidurov V.V., Vyatkin A.V., Kuchunova E.V. Semi-Lagrangian difference approximations with different stability requirements. *Russian journal of numerical analysis and mathematical modelling*. 2018; 33(2): 123-135. DOI: 10.1515/rnam-2018-0011
23. Lentine M., Gretaarsson J.T., Fedkiw R. An unconditionally stable fully conservative semi-Lagrangian method. *Journal of Computational Physics*. 2011; 230: 2857-2879.
24. Dementyeva E., Karepova E., Shaidurov V. The semi-Lagrangian method for the Navier-Stokes problem for an incompressible fluid. *AIP conference proceedings*. 2017; 1895: 110001. DOI: 10.1063/1.5007407
25. Celledonia E., Kometaa B. K., Verdiera O. High order semi-Lagrangian methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Scientific Computing*. 2016; 91-115 DOI:10.1007/s10915-015-0015-6
26. Shaydurov V., Shchepanovskaya G., Yakubovich M., Liu T. A semi-Lagrangian approximation in the Navier-Stokes equations for the gas flow around a wedge. *AIP Conference Proceedings*. 2015; 1684: 090011. DOI: 10.1063/1.4934336
27. Jonathan R. Sh. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry*. 2002; 22: 21-74.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 16.10.2023

Received October 16, 2023

Поступила после рецензирования 28.11.2023

Revised November 28, 2023

Принята к публикации 02.12.2023

Accepted December 2, 2023

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Кучунова Елена Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент Базовой кафедры Вычислительных и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

**Вяткин Александр Владимирович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Elena V. Kuchunova** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computing and Information Technologies, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

**Alexander V. Vyatkin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Scientific Researcher, Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russia