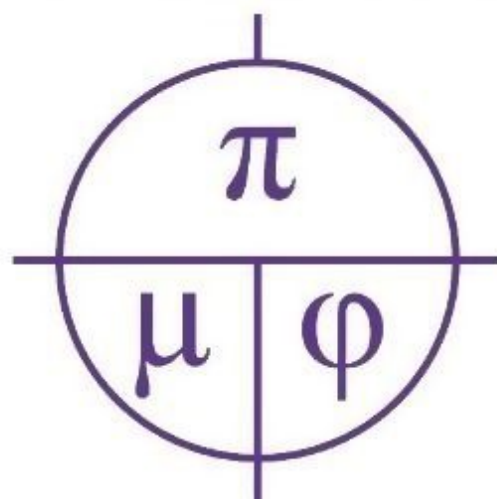
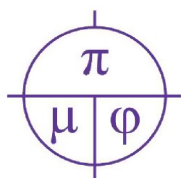


# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

# APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

**2024. Том 56, №1**





## Прикладная математика & Физика

2024. Том 56, № 1

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

### 1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

### 1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

### 1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

#### Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;

Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;

Ашбыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Вирченко Ю. П., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;

Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;

Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;

Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;

Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;

Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;

Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Ивахненко

Корректурщик Ю. В. Ивахненко

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 8,6

Дата выхода 30.03.2024.

Оригинал-макет подготовлен отделом объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

***Ройтенберг В. Ш.***

О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией 5

***Соломатин Д. В.***

Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения 13

***Букушева А. В.***

О слоениях на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа 21

***Шишкина Э. Л., Алзамилли Хитам, Кудоси Абдул Мохаммад, Ситник С. М.***

Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям 27

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

***Зверева М. Б., Каменский М. И., Шабров С. А.***

Модель деформаций стержня – консоли с ограничителем на смещение 35

***Сыщенко В. В., Парахин А. С.***

Квантовое описание каналирования позитронов вблизи направления  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния 50

***Кочура А. В., Родионов В. В., Кочура Е. П., Маренкин С. Ф., Аронзон Б. А.***

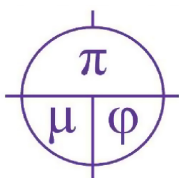
Электрические свойства эвтектической композиции InSb-MnSb 60

***Носков А. В., Киперша В. К., Плесканев А. А., Блажевич С. В., Ильинский Р. Ю., Волошкина Е. В.***

Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде 66

***Ищанов Т. Р.***

Теоретико-множественный подход к определению прочностных характеристик дискретной модели цилиндрической оболочки на основе векторной аппроксимации 75



# Applied Mathematics & Physics

2024. Volume 56, No 1

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

## 1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

## 1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

## 1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
"Belgorod National Research University".

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

### Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

A. V. Noskov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

**Executive Secretary:** O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Virchenko Yu. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia

Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Ivakhnenko

Proofreading Yu. V. Ivakhnenko

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 8,6

Date of publishing 30.03.2024.

The layout is presented by Department of the united

Editorial Board of Scientific Journals Belgorod

National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate

EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2024

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Roitenberg V. Sh.</b> On Bifurcation of Separatrix Contours of Planar Vector Fields with Involution Symmetry	5
<b>Solomatina D. V.</b> Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations	13
<b>Bukusheva A. V.</b> About Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds of Contact Type	21
<b>Shishkina I. L., Alzamili Hitam, Qudosi Abdul Mohammad, Sitnik S. M.</b> Applications of Transmutations of Vekua – Erdélyi – Lowndes Type to Differential Equations	27

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

<b>Zvereva M. B., Kamenskii M. I., Shabrov S. A.</b> A Model of Deformations of a Rod – Console With a Displacement Limiter	35
<b>Syshchenko V. V., Parakhin A. S.</b> Quantum Description of the Positrons Channeling Near $\langle 111 \rangle$ Direction of the Silicon Crystal	50
<b>Kochura A. V., Rodionov V. V., Kochura E. P., Marenkin S. F., Aronzon B. A.</b> Electrical Properties of Eutectic Composition InSb-MnSb	60
<b>Noskov A. V., Kipersha V. K., Pleskanov A. A., Blazhevich S. V., Ilyinsky R. Yu., Voloshkina E. V.</b> Spectral-angular Densities of Transition Radiation and Diffracted Transition Radiation of Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium	66
<b>Ishchanov T. R.</b> Set-theoretic Approach to Determining the Strength Characteristics of a Discrete Model of a Cylindrical Shell Based on Vector Approximation	75

## МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.92  
MSC 37G40, 34C23  
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12

### О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией

Ройтенберг В. Ш.

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. Н. Куликовым)

Ярославский государственный технический университет,  
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский проспект, 88  
[vroitenberg@mailru](mailto:vroitenberg@mailru)

**Аннотация.** Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство векторных полей на плоскости с симметрией относительно оси  $x$ . Предполагается, что при нулевых значениях параметров векторное поле имеет лежащие на оси  $x$  седло-узел с отрицательным собственным значением матрицы линейной части и грубое седло, а также два симметричных контура, образованные выходящими сепаратрисами седла, совпадающими со входящими сепаратрисами седло-узла. Описана бифуркационная диаграмма такого семейства – разбиение окрестности нуля на плоскости параметров по типам фазовых портретов в окрестности объединения указанных контуров. В частности показано, что из каждого контура может родиться по одному устойчивому грубому предельному циклу.

**Ключевые слова:** векторное поле на плоскости, динамическая система, седло-узел, седло, сепаратрисный контур, предельный цикл, бифуркационная диаграмма

**Для цитирования:** Ройтенберг В. Ш. 2024. О бифуркациях сепаратрисных контуров векторных полей на плоскости с инволютивной симметрией. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 5–12.  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12

Original Research

### On Bifurcation of Separatrix Contours of Planar Vector Fields with Involutive Symmetry

Vladimir Sh. Roitenberg

(Article submitted by a member of the editorial board A. N. Kulikov)

Yaroslavl State Technical University,  
88 Moscow Avenue, Yaroslavl, 150023, Russia  
[vroitenberg@mail.ru](mailto:vroitenberg@mail.ru)

**Abstract.** We consider a two-parameter family of vector fields in the plane with symmetry about the  $x$ -axis. It is assumed that at zero values of the parameters, the vector field has a saddle-node with a negative eigenvalue of the matrix of the linear part of the field and a rough saddle lying on the  $x$ -axis, as well as two symmetric contours formed by the outgoing separatrices of the saddle, coinciding with the incoming separatrices of the saddle-node. A bifurcation diagram of such a family is described – a partition of the neighborhood of zero on the parameter plane by types of phase portraits in a neighborhood of the union of these contours. In particular, it is shown that one stable rough limit cycle can be born from each contour.

**Keywords:** Planar Vector Field, Dynamical System, Saddle-node, Saddle, Separatrix Contour, Limit Cycle, Bifurcation Diagram

**For citation:** Roitenberg V. Sh. 2024. On Bifurcation of Separatrix Contours of Planar Vector Fields with Involutive Symmetry. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 5–12. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-5-12

**1. Введение.** Изучение динамических систем с различного рода симметрией интересно с теоретической точки зрения и полезно для приложений. Имеется ряд работ, в которых рассматриваются бифуркации динамических систем с симметрией, как двумерных, так и многомерных [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Традиционный интерес представляют бифуркации, при которых рождаются устойчивые предельные циклы, поскольку в прикладных задачах они моделируют автоколебания. В основном изучались бифуркации положений равновесия и замкнутых траекторий. Описание бифуркаций сепаратрисных контуров в

типичных однопараметрических семействах динамических систем на плоскости, допускающих простейшие группы симметрий, в большинстве случаев можно извлечь из описания бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах динамических систем без симметрии, хорошо изученных к настоящему времени (см. например, [10, 11]). Однако для двухпараметрических семейств систем с симметрией такой подход невозможен, поскольку описание нетривиальных нелокальных бифуркаций в семействах динамических систем с числом параметров больших двух неизвестно. Некоторые двухпараметрические бифуркации изучались в [5, 8] для систем на плоскости с центральной симметрией. Однако естественно рассматривать нелокальные бифуркации и для систем с другими симметриями.

Пусть  $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – инволюция  $R(x_1, x_2) := (x_1, -x_2)$ ,  $D$  – замкнутая область в  $\mathbb{R}^2$  с гладкой границей,  $R(D) = D$ . Обозначим  $\mathfrak{X}^r(D)$  – банахово пространство  $C^r$ -векторных полей с  $C^r$ -нормой ( $r \geq 3$ ) [12], а  $\mathfrak{X}_R^r(D)$  – его подпространство, состоящее из векторных полей  $X : D \rightarrow TD = \mathbb{R}^2$ , инвариантных относительно инволюции  $R$ , то есть таких, что  $X \circ R = R \circ X$ .

Пусть  $X_\varepsilon(x_1, x_2) = P_1(x_1, x_2, \varepsilon)\partial/\partial x_1 + P_2(x_1, x_2, \varepsilon)\partial/\partial x_2$  – семейство векторных полей из  $\mathfrak{X}_R^r(D)$ ,  $C^r$ -гладко зависящих от точки  $(x_1, x_2)$  и параметра  $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$ . Вследствие симметрии  $P_1(x_1, -x_2, \varepsilon) = P_1(x_1, x_2, \varepsilon)$ ,  $P_2(x_1, -x_2, \varepsilon) = -P_2(x_1, x_2, \varepsilon)$ , а множество неподвижных точек инволюции  $R$ , прямая  $F : x_2 = 0$ , инвариантно для всех полей семейства и разбивает  $D$  на инвариантные множества  $D_+ = \{(x_1, x_2) \in D : x_2 > 0\}$  и  $D_- = \{(x_1, x_2) \in D : x_2 < 0\}$ .

Локальные бифуркации в типичных семействах таких векторных полей изучены Х. Жолондеком в [2]. Мы опишем некоторые нелокальные бифуркации.

Предположим, что поле  $X_0$  удовлетворяет следующим условиям.

**Условия (А).** Поле  $X_0$  имеет особую точку  $S_1^0 = (s_1^0, 0)$  – седло-узел и особую точку  $S_2^0 = (s_2^0, 0)$  – грубое седло,  $s_1^0 < s_2^0$ . Открытая дуга  $(S_1^0 S_2^0)$  прямой  $F$  между точками  $S_1^0$  и  $S_2^0$  является выходящей сепаратрисой седло-узла и входящей сепаратрисой седла. Выходящая сепаратриса седла  $L_+^0$  ( $L_-^0$ ) принадлежит  $\text{int}D_+$  ( $\text{int}D_-$ ) и совпадает с входящей сепаратрисой седло-узла.

Будем исследовать бифуркации полицикла  $\Gamma^0$ , полученного объединением двух симметричных сепаратрисных контуров  $\Gamma_\pm^0 := L_\pm^0 \cup (S_1^0 S_2^0) \cup \{S_1^0, S_2^0\}$ . Векторные поля  $X_0$ , удовлетворяющие условиям (А), образуют в пространстве  $\mathfrak{X}_R^r(D)$   $C^{r-2}$ -подмногообразие коразмерности два. Поэтому естественно рассматривать их бифуркации в двухпараметрических семействах  $X_\varepsilon$  «общего положения». В пространстве  $\mathfrak{X}^r(D)$  эти векторные поля имеют более высокую коразмерность и их бифуркации в  $\mathfrak{X}^r(D)$  следует изучать в семействах векторных полей с большим числом параметров. Однако бифуркации сепаратрисных контуров рассматриваемого вида в семействах векторных полей из  $\mathfrak{X}^r(D)$  с числом параметров  $\geq 3$  не исследовались.

**2. Условие типичности. Формулировка результатов.** Вследствие симметрии поля  $X_0$  относительно оси  $x_1$   $(\partial P_i(s_k^0, 0, 0)/\partial x_j) = \text{diag}(\lambda_{k1}^0, \lambda_{k2}^0)$ . Ввиду условий (А)  $\lambda_{21}^0 < 0$ ,  $\lambda_{22}^0 > 0$ .

Так как  $S_1^0$  – седло-узел, а поле симметрично, то ограничение поля на его инвариантное многообразие  $F$  имеет вид  $(bx_1^2 + o(x_1^2))\partial/\partial x_1$ , где  $b \neq 0$ . Ввиду условий (А)  $\lambda_{11}^0 < 0$ ,  $b > 0$ . Из параграфов 5.1 в [13] и 11.2 в [11] следует, что в окрестности точки  $S_1^0$  существует такая  $C^r$ -замена координат  $x_1 = g_1(x, y, \varepsilon)$ ,  $x_2 = g_2(x, y, \varepsilon)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon \in (-\delta_*, \delta_*)^2$ ,  $g_1(0, 0, 0) = s_1^0$ ,  $\text{sgn}g_2(x, y, \varepsilon) = \text{sgn}y$ , что в координатах  $x, y$  линия  $F$  задается уравнением  $y = 0$ , причем при  $\varepsilon = 0$  точки  $F$  с координатой  $x > 0$  лежат на дуге  $(S_1^0 S_2^0)$ , а векторное поле  $X_\varepsilon$  имеет вид

$$P(x, \varepsilon)\partial/\partial x + (\lambda_{12}^0 + r_2(x, y, \varepsilon))y\partial/\partial y, \quad (1)$$

где

$$P(x, \varepsilon) = a(\varepsilon) + (b + r_1(x, \varepsilon))x^2, \quad a \in C^1, \quad a(0) = 0, \quad r_1, r_2 \in C, \quad r_1(0, 0) = r_2(0, 0, 0) = 0. \quad (2)$$

Обозначим  $l_\varepsilon^2$  дугу, задаваемую условиями  $y = d$ ,  $-d < x < d$ , и параметризованную параметром  $x$ . Ввиду (1), (2) и условий (А) сепаратриса  $L_+^0$  трансверсально пересекает дугу  $l_\varepsilon^2$  в точке с параметром  $x = 0$ . При  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю, поле  $X_\varepsilon$  имеет седло  $S_2(\varepsilon) \in F$ , выходящая сепаратриса которого, лежащая в  $D_+$ , пересекает дугу  $l_\varepsilon^2$  в точке с параметром  $x = \hat{x}(\varepsilon)$ , где  $\hat{x}(\cdot) \in C^1$ ,  $\hat{x}(0) = 0$ .

Пусть теперь выполняется и

**Условие (Б).** Производные  $da(0)/d\varepsilon$  и  $d\hat{x}(0)/d\varepsilon$  – линейно независимы, то есть

$$\begin{vmatrix} da(0)/d\varepsilon_1 & da(0)/d\varepsilon_2 \\ d\hat{x}(0)/d\varepsilon_1 & d\hat{x}(0)/d\varepsilon_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это условие не зависит от произвола в выборе координат  $x, y$  и числа  $d$ . Можно показать, что условие (Б) означает трансверсальность отображения  $\varepsilon \mapsto X_\varepsilon$  в точке  $\varepsilon = 0$  подмногообразию  $\mathfrak{X}_R^r(D)$ , задаваемому условиями (А).

Сделав замену параметров  $\bar{\varepsilon}_1 = a(\varepsilon)$ ,  $\bar{\varepsilon}_2 = \hat{x}(\varepsilon)$  и вернувшись к их прежним обозначениям, мы можем считать

$$a(\varepsilon) = \varepsilon_1, \quad \hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2. \quad (3)$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия (А) и (Б). Тогда существуют число  $\delta > 0$ , окрестность  $U$  полицикла  $\Gamma^0$ ,  $R(U) = U$ , и разбиение области параметров  $E = (-\delta, \delta)^2$  на множества (рис. 1)

$$B_0 = \{(0, 0)\}, B_1 = \{0\} \times (0, \delta), B_3 = (-\delta, 0) \times \{0\}, B_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 = \beta(\varepsilon_2)\},$$

где  $\beta : (0, \delta) \rightarrow (-\delta, 0)$ ,  $\beta \in C^1$ ,  $\beta(+0) = \beta'(+0) = 0$ ,

$$E_1 = (0, \delta) \times (-\delta, \delta), E_2 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 \in (0, \delta), \beta(\varepsilon_2) < \varepsilon_1 < 0\},$$

$$E_3 = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_2 \in (0, \delta), -\delta < \varepsilon_1 < \beta(\varepsilon_2)\} \cup (-\delta, 0) \times (-\delta, 0],$$

такие, что поле  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in E$ , имеет в  $U$  только следующие особые точки:

седло  $S_2(\varepsilon)$  при всех  $\varepsilon \in E$ , седло-узел  $S(\varepsilon) \in F$  при  $\varepsilon \in B_0 \cup B_1 \cup B_3$ , грубое седло  $S_R(\varepsilon) \in F$  и грубый узел  $S_L(\varepsilon) \in F$  при  $\varepsilon \in E_1 \cup B_2 \cup E_2$

и следующие нетривиальные неблуждающие множества:

два симметричных грубых устойчивых предельных цикла при  $\varepsilon \in E_1 \cup B_1 \cup E_2$ , два симметричных устойчивых контура, образованных сепаратрисами седел  $S_1^0$  (соотв.  $O_R(\varepsilon)$ ) и  $O_2(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  (соотв.  $\varepsilon \in B_2$ ).

Доказательство теоремы приведено в разделах 3–5. В силу симметрии векторных полей  $X_\varepsilon$ , достаточно описать поведение их траекторий в окрестности контура  $\Gamma_+^0$  в  $\bar{D}_+$ .

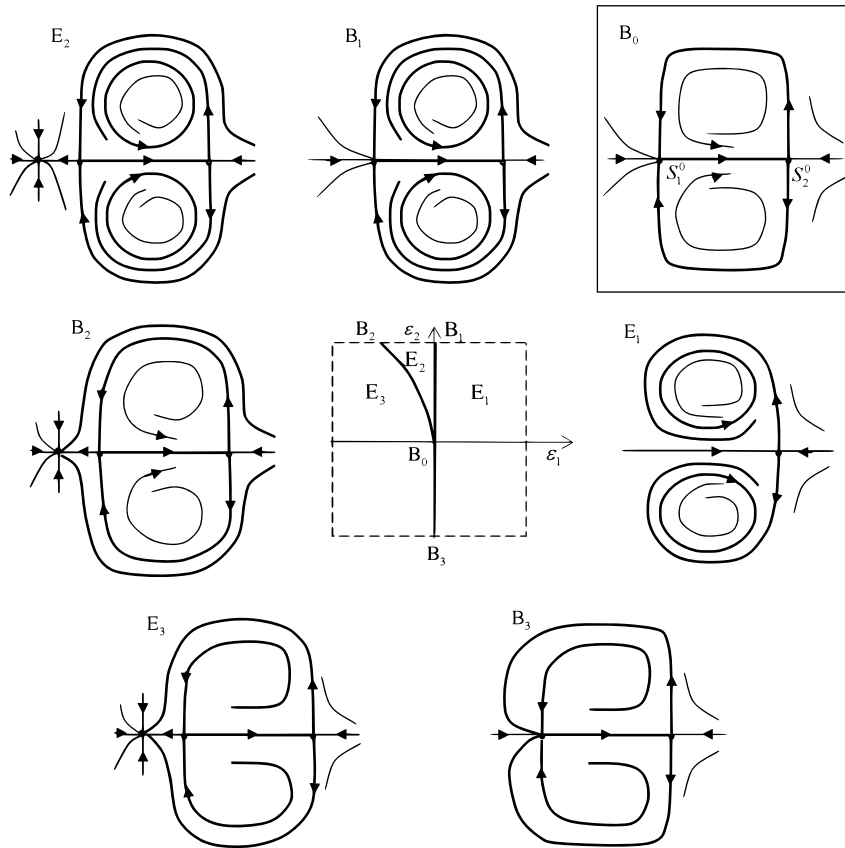


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма

Fig. 1. Bifurcation diagram

**3. Отображения соответствия по траекториям. Функция последования.** Зададим число  $\alpha$ , удовлетворяющее неравенствам

$$0 < \alpha < 1/10; \quad 10\alpha < -\lambda_{21}^0/\lambda_{22}^0. \quad (4)$$

Пусть  $D_\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$ , – область в  $D$ , задаваемая в координатах  $x, y$  неравенствами  $|x| < 2d$ ,  $|y| < 2d$ , где  $d > 0$  и  $\delta' > 0$  выбраны столь малыми, чтобы в  $D_\varepsilon^1$  выполнялось неравенство

$$|\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - \operatorname{div} X_0(s_1^0, 0)| = |\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - \lambda_{11}^0| < \alpha|\lambda_{11}^0|, \quad (5)$$

$$\lambda_{12}^0 + r_2(x, y, \varepsilon) > (1 + \alpha)\lambda_{12}^0. \quad (6)$$

Вследствие (2) и (3) при достаточно малом  $\delta_1 \in (0, \delta')$  уравнение  $P(x, \varepsilon) = 0$  на интервале  $(-d, d)$  имеет при  $\varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1)$  корни  $x = x_R(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) \geq 0$  и  $x = x_L(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) \leq 0$ , где  $x_R$  и  $x_L$  –  $C^1$ -функции на  $(-\delta_1, \delta_1)^2$ , для которых

$$x_R(0, \varepsilon_2) = x_L(0, \varepsilon_2) = 0, \quad (x_R)_\mu'(\mu, \varepsilon_2)|_{\mu=\varepsilon_2=0} = -(x_L)_\mu'(\mu, \varepsilon_2)|_{\mu=\varepsilon_2=0} = 1/\sqrt{b} > 0, \quad (7)$$



а при  $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$  не имеет корней. Если  $\delta_1$  достаточно мало, то поле  $X_\varepsilon$  имеет в  $D_\varepsilon^1$  две особых точки, принадлежащие  $F$ : грубое седло  $S_R(\varepsilon)$  с координатой  $x = x_R(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) > 0$  и грубый узел  $S_L(\varepsilon)$  с координатой  $x = x_L(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) < 0$ , если  $\varepsilon \in (-\delta_1, 0) \times (-\delta_1, \delta_1)$ , седло-узел  $S(\varepsilon)$  с координатой  $x = 0$ , если  $\varepsilon \in \{0\} \times (-\delta_1, \delta_1)$ , и не имеет особых точек, если  $\varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1)$ . Пусть

$$x_+(\varepsilon) := x_R(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2) \text{ при } \varepsilon \in (-\delta_1, 0] \times (-\delta_1, \delta_1) \text{ и } x_+(\varepsilon) := -d \text{ при } \varepsilon \in (0, \delta_1) \times (-\delta_1, \delta_1). \quad (8)$$

Обозначим  $l_\varepsilon^1$  открытую дугу в  $D_\varepsilon^1$ , задаваемую в координатах  $x, y$  условиями  $x = d, -d < y < d$  и параметризованную параметром  $y$  (рис. 2). Дуга  $l_\varepsilon^2$ , заданная условиями  $y = d, -d < x < d$ , уже была введена выше. Вследствие (1), (6), (8) и неравенства  $P(x, \varepsilon) > 0$  для  $x > x_+(\varepsilon)$  отрицательная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , начинающаяся в точке  $A_1 \in l_\varepsilon^1$  с параметром  $u > 0$ , задается в  $G_\varepsilon^1$  уравнением  $x = X(y, u, \varepsilon)$ ,  $y \in [u, 2d]$ , где  $X - C^{r-1}$ -функция, пересекает дугу  $l_\varepsilon^2$  в точке с параметром  $x = \varphi_1(u, \varepsilon) = X(d, u, \varepsilon)$  (см. рис. 2), а время перехода по траекториям поля от точки  $A_2$  до точки  $A_1$

$$T_1(u, \varepsilon) = - \int_u^d \frac{dy}{(\lambda_{12}^0 + r_2(X(y, u, \varepsilon), y, \varepsilon))y} \geq \frac{1}{(1 + \alpha)\lambda_{12}^0} (\ln u - \ln d). \quad (9)$$

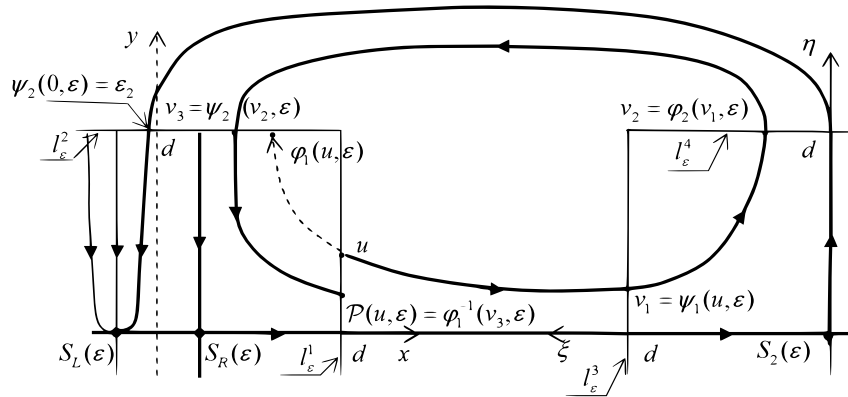


Рис. 2. Функции соответствия. Функция последования  
Fig. 2. Matching functions. Poincaré mapping

Мы можем считать, что при выбранном  $\delta'$  локальные устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия седла  $S_2(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$  задаются, соответственно, уравнениями  $x_2 = 0$  и  $x_1 = w(x_2, \varepsilon)$ , где  $w(\cdot, \cdot) \in C^r$ ,  $w(-x_2, \varepsilon) = w(x_2, \varepsilon)$ ,  $w(0, 0) = s_2^0$ . Сделаем  $C^r$ -замену координат  $\xi = w(x_2, \varepsilon) - x_1$ ,  $\eta = x_2$ , выпрямляющую неустойчивое инвариантное многообразие. В новых координатах поле  $X_\varepsilon$  имеет вид

$$X_\varepsilon = (\lambda_{21}^0 + q_1(\xi, \eta, \varepsilon)) \xi \partial / \partial \xi + (\lambda_{22}^0 + q_2(\xi, \eta, \varepsilon)) \eta \partial / \partial \eta, \quad (10)$$

где  $\lambda_{21}^0 < 0$ ,  $\lambda_{22}^0 > 0$ ,  $q_k$  – непрерывные функции,  $q_k(0, 0, 0) = 0$ ,  $k = 1, 2$ , причем при  $\varepsilon = 0$  точки с координатами  $\eta = 0$ ,  $\xi > 0$  лежат на дуге  $(S_1^0 S_2^0)$ .

Пусть  $D_\varepsilon^2$  – область в  $D$ , задаваемая в выбранных координатах  $\xi, \eta$  в окрестности точки  $S_2(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$ , неравенствами  $|\xi| < 2d$ ,  $|\eta| < 2d$ , где  $d$  и  $\delta'$  можно считать теми же, что были выбраны для области  $D_\varepsilon^1$  и столь малыми, что для  $(x_1, x_2) \in D_\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon \in (-\delta', \delta')^2$

$$|\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - \operatorname{div} X_0(s_2^0, 0)| = |\operatorname{div} X_\varepsilon(x_1, x_2) - (\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0)| < \alpha |\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0|, \quad (11)$$

$$|q_k(x, y, \varepsilon)| \leq \alpha |\lambda_{2k}^0| \text{ при } |x| < 2d, |y| < 2d, \varepsilon \in (-\delta', \delta')^2, k = 1, 2. \quad (12)$$

Обозначим  $l_\varepsilon^3$  (соотв.  $l_\varepsilon^4$ ) открытую дугу в  $D_\varepsilon^2$  (см. рис. 2), задаваемую в координатах  $\xi, \eta$  условиями  $\xi = d, -d < \eta < d$  (соотв.  $\eta = d, -d < \xi < d$ ) и параметризованную параметром  $\eta$  (соотв.  $\xi$ ). Из (10) и (12) следует, что положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ , начинающаяся в точке  $B_1$  дуги  $l_\varepsilon^3$  с параметром  $v > 0$ , задается в  $D_\varepsilon^2$  уравнением  $\xi = \Xi(\eta, v, \varepsilon)$ ,  $\eta \in [v, 2d]$ , где  $\Xi - C^{r-1}$ -функция,  $\Xi(\eta, v, \varepsilon) > 0$ ,  $\Xi(\eta, +0, \varepsilon) = 0$ , пересекает дугу  $l_\varepsilon^4$  в точке  $B_2$  с параметром  $\xi = \varphi_2(v, \varepsilon) = \Xi(d, v, \varepsilon)$ , а для времени перехода по траекториям поля от точки  $B_1$  до точки  $B_2$

$$T_3(v, \varepsilon) = \int_v^d \frac{d\eta}{(\lambda_{22}^0 + q_2(\Xi(\eta, v, \varepsilon), \eta, \varepsilon))\eta}$$

имеем следующую оценку

$$-(\ln v - \ln d) / (1 + \alpha)\lambda_{22}^0 \leq T_3(v, \varepsilon) \leq -(\ln v - \ln d) / (1 - \alpha)\lambda_{22}^0. \quad (13)$$

При достаточно малых  $\sigma > 0$  и  $\delta_2 \in (0, \delta_1]$  положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$ , начинающаяся в точке дуги  $l_\varepsilon^1$  с параметром  $u \in [0, \sigma]$  первый раз пересечет дугу  $l_\varepsilon^2$  в точке с параметром  $v = \psi_1(u, \varepsilon)$  (см. рис. 2) через время  $T_2(u, \varepsilon)$ , где  $\psi_1, T_2 \in C^1$ ,  $\psi_1(0, \varepsilon) \equiv 0$ ,  $(\psi_1)'_u(u, \varepsilon) > 0$ . Тогда при некотором  $K > 0$

$$u/K \leq \psi_1(u, \varepsilon) \leq Ku, \quad 0 < T_2(u, \varepsilon) \leq K \text{ для всех } \varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2, \quad u \in [0, \sigma]. \quad (14)$$

Мы можем также считать, что при выбранных  $\sigma$ ,  $\delta_2$  и  $K$  положительная полутраектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in [-\delta_2, \delta_2]^2$ , начинающаяся в точке дуги  $l_\varepsilon^4$  с параметром  $\xi \in [0, \sigma]$ , первый раз пересечет дугу  $l_\varepsilon^2$  в точке с параметром  $x = \psi_2(\xi, \varepsilon)$  (см. рис. 2), где  $\psi_2 \in C^1$ ,  $\psi_2'(\xi, \varepsilon) > 0$ ,  $\psi_2(0, \varepsilon) = \hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2$ , через время  $T_4(\xi, \varepsilon)$ ,

$$0 < T_4(\xi, \varepsilon) \leq K. \quad (15)$$

Функция  $\mathcal{P}(\cdot, \varepsilon) := \varphi_1^{-1}(\psi_2(\varphi_2(\psi_1(\cdot, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon)$ , где  $\varphi_1^{-1}(\cdot, \varepsilon)$  – отображение, обратное к  $\varphi_1(\cdot, \varepsilon)$ , является функцией последования по траекториям поля  $X_\varepsilon$  на части дуги  $l_\varepsilon^1$  (см. рис. 2). Далее мы уточним ее область определения в зависимости от параметра  $\varepsilon$ .

**4. Оценка характеристического показателя предельного цикла.** Нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма.** *Существуют числа  $\rho > 0$  и  $\delta \in (0, \delta_2)$  такие, что замкнутая траектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , проходящая через точку дуги  $l_\varepsilon^1$  с параметром  $u \in (0, \rho)$ , является грубым устойчивым предельным циклом.*

**Доказательство леммы.** Пусть указанная замкнутая траектория  $L_\varepsilon(u)$  имеет период  $T$  и задается уравнениями  $x_k = \hat{x}_k(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $k = 1, 2$ , где  $(\hat{x}_1(0), \hat{x}_2(0)) \in l_\varepsilon^1$ . Если характеристический показатель [14, с. 126]

$$\chi(L_\varepsilon(u)) = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \quad (16)$$

отрицателен, то  $L_\varepsilon(u)$  является грубым устойчивым предельным циклом.

При достаточно малых  $\rho$  и  $\delta$  траектория  $L_\varepsilon(u)$  последовательно пересекает дуги  $l_\varepsilon^3$ ,  $l_\varepsilon^4$ ,  $l_\varepsilon^2$  и  $l_\varepsilon^1$  соответственно в моменты  $t_1 = T_2(u, \varepsilon)$ ,  $t_2 = T_2(u, \varepsilon) + T_3(v_1, \varepsilon)$ ,  $t_3 = T_2(u, \varepsilon) + T_3(v_1, \varepsilon) + T_4(v_2, \varepsilon)$  и  $T = T_2(u, \varepsilon) + T_3(v_1, \varepsilon) + T_4(v_2, \varepsilon) + T_1(u, \varepsilon)$ , где обозначено  $v_1 = \psi_1(u, \varepsilon)$ ,  $v_2 = \varphi_2(v_1, \varepsilon)$ . Теперь из (5), (9), (11) и (13)–(15) получаем

$$\int_0^{t_1} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq NT_2(u, \varepsilon) \leq NK, \quad \int_{t_2}^{t_3} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq NT_4(v_2, \varepsilon) \leq NK,$$

где  $N = \max_{\varepsilon \in [-\delta', \delta']^2} \max_{z \in D} |\operatorname{div} X_\varepsilon(z)|$ ,

$$\int_{t_3}^T \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq (1 - \alpha)\lambda_{12}^0 T_1(u, \varepsilon) \leq \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} (\ln u - \ln d),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq (1 + \alpha)(\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0) T_3(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) \leq -\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0} (\ln u - \ln K - \ln d),$$

если  $\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 \geq 0$ , и

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq (1 - \alpha)(\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0) T_3(\psi_1(u, \varepsilon), \varepsilon) \leq -\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0} (\ln u + \ln K - \ln d),$$

если  $\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 < 0$ , и, окончательно,

$$\int_0^T \operatorname{div} X_\varepsilon(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)) dt \leq C_1 \ln u + C_2, \quad (17)$$

где  $C_2$  не зависит от  $u$  и  $\varepsilon$ , а  $C_1 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0} > 0$  при  $\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 \leq 0$ , и

$$C_1 = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \frac{\lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0}{\lambda_{22}^0} = \frac{-4\alpha}{1 - \alpha^2} + \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \left( -\frac{\lambda_{21}^0}{\lambda_{22}^0} \right) \text{ при } \lambda_{21}^0 + \lambda_{22}^0 > 0. \quad (18)$$

Из (18) и (4) получаем  $C_1 > 10\alpha - 4\alpha/0,99 > 0$ . Утверждение леммы теперь следует из (16), (17) и положительности  $C_1$ .

**5. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов.** Покажем, что все траектории поля  $X_0$ , проходящие через точки дуги  $I_0^1$  с параметром  $u \in (0, \rho]$ , где  $\rho$  выбрано согласно лемме,  $\omega$ -предельны к контуру  $\Gamma_+^0$ , что равносильно неравенству  $\mathcal{P}(u, 0) < u$ . Пусть это не так. Мы можем считать, что отображение  $\mathcal{P}(\cdot, 0)$  определено на  $(0, \rho]$ , при этом  $\mathcal{P}(0, 0) = 0$ . При сделанном предположении либо  $\mathcal{P}(u_0, 0) > u_0$  для всех  $u_0 \in (0, \rho)$ , либо  $\mathcal{P}(u_*, 0) = u_*$  при некотором  $u_* \in (0, \rho)$ . Из леммы следует, что  $0 < \mathcal{P}'_u(u_*, 0) < 1$  и потому  $\mathcal{P}(u_0, 0) > u_0$  при некотором  $u_0 \in (0, u_*)$ . В обоих случаях фиксируем число  $u_0$ . Тогда при всех  $\varepsilon$ , достаточно близких к нулю,

$$\mathcal{P}(u_0, \varepsilon) > u_0. \quad (19)$$

Пусть  $\varepsilon = (0, \varepsilon_2)$ , где  $\varepsilon_2 < 0$  достаточно близко к нулю. Так как  $\psi_2(0, \varepsilon) = \hat{x}(\varepsilon) = \varepsilon_2 < 0$ , то  $\mathcal{P}(\cdot, \varepsilon)$  определено на интервале  $(x_*(\varepsilon), \rho)$ , где  $x_*(\varepsilon) > 0$  при рассматриваемом  $\varepsilon$ , а

$$P(x_*(\varepsilon) + 0, \varepsilon) = 0 < x_*(\varepsilon). \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что существует  $\bar{u} \in (x_*(\varepsilon), \rho)$  такое, что  $\mathcal{P}(\bar{u}, \varepsilon) = \bar{u}$ . Из леммы получаем  $0 < \mathcal{P}'_u(\bar{u}, \varepsilon) < 1$ . Вместе с (19) и (20) это влечет существование у  $\mathcal{P}(\cdot, 0)$  еще двух неподвижных точек, в противоречие с утверждением леммы. Таким образом, сделанное предположение неверно и все траектории поля  $X_0$ , проходящие через точки дуги  $I_0^1$  с параметром  $u \in (0, \rho)$ ,  $\omega$ -предельны к контуру  $\Gamma_+^0$ .

Так как  $\mathcal{P}(\rho, 0) < \rho$ , то  $\delta$  можно считать выбранным так, что  $\mathcal{P}(\rho, \varepsilon)$  определено для всех  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$  и

$$\mathcal{P}(\rho, \varepsilon) < \rho \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2. \quad (21)$$

Обозначим  $I_{\varepsilon, \rho}^1$  часть дуги  $I_\varepsilon^1$ , состоящую из точек с параметром  $u \in (0, \rho]$ .

Из неравенства (21) при  $\varepsilon = 0$  и [15, с. 100] следует, что через точку  $I_0^1$  с параметром  $x = \mathcal{P}(\rho, 0)$  можно провести замкнутую трансверсаль  $\Gamma_+^{\text{int}} \subset D_+$  к траекториям поля  $X_0$ . Возьмем гладкую замкнутую кривую  $\Gamma^{\text{ext}}$ ,  $R(\Gamma^{\text{ext}}) = \Gamma^{\text{ext}}$ , ограничивающую вместе с  $L_+^0 \cup L_-^0 \cup \{S_1^0, S_2^0\}$  замкнутое кольцо, не пересекающееся с дугой  $(S_1^0 S_2^0)$  и не содержащее особых точек поля  $X_0$ , отличных от  $S_1^0$  и  $S_2^0$ . Пусть  $U$  – окрестность полицикла  $\Gamma^0$ , границей которой является  $\Gamma_+^{\text{int}} \cup R(\Gamma_+^{\text{int}}) \cup \Gamma^{\text{ext}}$ . Если  $\delta$  выбрано достаточно малым, то для любого поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ ,  $S(\varepsilon)$ ,  $S_\pm(\varepsilon)$  и  $S_2(\varepsilon)$  – единственные особые точки, лежащие в  $U$ , любая замкнутая траектория, лежащая в  $U$ , либо пересекает  $I_{\varepsilon, \rho}^1$ , либо ей симметрична.

Выходящая сепаратриса седла  $S_2(\varepsilon)$  идет в седло  $S_R(\varepsilon)$ , образуя вместе с дугой линии  $F$  между этими седлами, контур  $\Gamma_+(\varepsilon)$ , если  $\varepsilon_1 < 0$  и

$$\psi_2(0, \varepsilon) = \varepsilon_2 = x_R(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2). \quad (22)$$

Из (7) по теореме о неявной функции следует, что  $\delta_2$  можно считать выбранным так, что для любого  $\varepsilon_2 \in (-\delta_2, \delta_2)$  существует число  $m(\varepsilon_2) \in (-\delta_1, \delta_1)$ , такое, что  $m(\cdot) \in C^1$ ,  $m(0) = 0$ ,  $m'(0) = \sqrt{b} > 0$ , и  $\text{sgn}(x_R(\mu, \varepsilon_2) - \varepsilon_2) = \text{sgn}(\mu - m(\varepsilon_2))$  для всех  $\mu \in (-\delta_1, \delta_1)$ ,  $\varepsilon_2 \in (-\delta_2, \delta_2)$ . Уменьшив при необходимости  $\delta_2$ , мы можем считать, что  $m(\varepsilon_2) > 0$  при всех  $\varepsilon_2 \in (0, \delta_2)$ . Но тогда  $\varepsilon_1 = \beta(\varepsilon_2)$ , где  $\beta(\varepsilon_2) := -m^2(\varepsilon_2)$  – решение уравнения (22) и, более того,

$$\text{sgn}\left(\varepsilon_2 - x_R\left(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2\right)\right) = \text{sgn}(\varepsilon_1 - \beta(\varepsilon_2)) \text{ для всех } \varepsilon \in (-\delta_2, 0) \times (0, \delta_2). \quad (23)$$

Так как  $\beta(0) = 0$ ,  $\beta'(0) = -2m(0)m'(0) = 0$ , то число  $\delta$  можно считать выбранным столь малым, что  $\beta(\cdot)$  отображает интервал  $(0, \delta)$  в интервал  $(-\delta, 0)$ .

Определим множества  $V_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) и  $E_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) так, как сформулировано в теореме.

Аналогично случаю  $\varepsilon = 0$  доказывается, что все траектории поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in V_2$ , проходящие через точки дуги  $I_\varepsilon^1$  с параметром  $0 < u < \rho$ ,  $\omega$ -предельны к контуру  $\Gamma_+(\varepsilon)$ .

При  $\varepsilon \in E_1 \cup V_1 \cup E_2$  ввиду равенства (23) получаем, что  $\mathcal{P}(\cdot, \varepsilon)$  определена на  $(0, \rho)$  и  $\mathcal{P}(0, \varepsilon) = \varphi_1^{-1}(\varepsilon_2, \varepsilon) > 0$ . Отсюда и из (21) следует, что  $\mathcal{P}(\cdot, \varepsilon)$  имеет на интервале  $(0, \rho)$  неподвижную точку. Вследствие леммы дугу  $I_{\varepsilon, \rho}^1$  пересекает единственная замкнутая траектория – грубый устойчивый предельный цикл.

При  $\varepsilon \in E_3 \cup V_3$ , считая  $\delta$  достаточно малым, получаем, что  $\mathcal{P}(\cdot, \varepsilon)$  определена на интервале  $(x_*(\varepsilon), \rho)$ , где  $x_*(\varepsilon) = \psi_1^{-1}(\varphi_2^{-1}(\psi_2^{-1}(x_R(\sqrt{|\varepsilon_1|}, \varepsilon_2)), \varepsilon), \varepsilon) > 0$ , а  $\mathcal{P}(x_*(\varepsilon) + 0, \varepsilon) = 0 < x_*(\varepsilon)$ . Отсюда, из (21) и леммы следует, что предположение о существовании замкнутой траектории, проходящей через точки дуги  $I_{\varepsilon, \rho}^1$  с параметром  $u \in (x_*(\varepsilon), \rho)$ , приводит к противоречию. Траектории, проходящие через эти точки,  $\omega$ -предельны к узлу  $S_L(\varepsilon)$  (седло-узлу  $S(\varepsilon)$ ). Траектории, проходящие через точки с параметром  $u \in (0, x_*(\varepsilon)]$ , также  $\omega$ -предельны к узлу  $S_L(\varepsilon)$  (седло-узлу  $S(\varepsilon)$ ).

Все утверждения теоремы доказаны.

## Список литературы

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1978. 304 с.
2. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости. *Математический сборник* 1983;120(4):473–499.
3. Лерман Л.М., Тураев Д.В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах. *Нелинейная динамика*. 2012;8(2):323–343.
4. Николаев Е.В. Бифуркации предельных циклов дифференциальных уравнений, допускающих инволютивную симметрию. *Математический сборник*. 1995;186(4):143–160.
5. Ройтенберг В.Ш. Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, Механика Физика»*. 2021;13(3):39–46.
6. Шноль Э.Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений. *Математический сборник*. 2000;191(8): 141–157.
7. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag. 1988.
8. Roitenberg V.Sh. Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of saddles of a dynamical system with central symmetry. Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сборник материалов международной конференции, Белгород, 25–29 октября 2021 г. под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. Белгород, ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ» 2021.:311–312.
9. Takens F. Singularities of vector fields. *Publ. Math. IHES*. 1974; 43:47–100.
10. Ройтенберг В.Ш. Нелокальные двухпараметрические бифуркации векторных полей на поверхностях. Дис. . . канд. физ.-мат. наук. 01.01.02. Ярославль. 2000. 187 с.
11. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. Москва–Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2009. 416 с.
12. Палис Ж., Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Пер. с англ. М., Мир. 1986. 301 с.
13. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва–Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2004. 547 с.
14. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука; 1967. 488 с.
15. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука; 1966. 568 с.

## References

1. Arnold VI. Additional chapters in the theory of ordinary differential equations. Moscow, Nauka Publ. 1978. 304 p. (in Russian).
2. Zholondek H. On the versality of a family of symmetric vector fields on the plane. *Sbornik: Mathematics*. 1983;120(4):473–499. (in Russian).
3. Lerman LM., Turaev DV. On symmetry breaking bifurcations in reversible systems. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2012;8(2):323–343. (in Russian).
4. Nikolaev EV. Bifurcations of limit cycles of differential equations admitting involutive symmetry. *Sbornik: Mathematics*. 1995;186(4):143–160. (in Russian)
5. Roitenberg VSh. Bifurcations of a polycycle formed by two separatrix loops of a non-rough saddle of a dynamical system with central symmetry. *Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathematics. Mechanics. Physics”*. 2021;13(3):39–46. (in Russian).
6. Shnol EE. Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibria of ordinary differential equations. *Sbornik: Mathematics*. 2000;191(8):141–157. (in Russian)
7. Golubitsky M., Shaeffer D., Stewart I. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag. 1988.
8. Roitenberg VSh. Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of saddles of a dynamical system with central symmetry. Differential equations, mathematical modeling and computational algorithms. Collection of materials of the Internatinal Conference. Belgorod, October 25-29. BSTU Publ. 2021:311-312.
9. Takens F. Singularities of vector fields. *Publ. Math. IHES*. 1974;43:47–100.
10. Roitenberg VSh. Nonlocal two-parameter bifurcations of vector fields on surfaces. PhD thesis. Yaroslavl. 2000. 187 p. (in Russian).
11. Shilnikov LP., Shilnikov AL., Turaev DV., Chua LO. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: Part 2. River Edge, N.-J. World Scientific. 2001.
12. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New-York; Heidelberg; Berlin. Springer-Verlag. 1982. 198 p.

13. Shilnikov LP., Shilnikov AL., Turaev DV., Chua LO. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: Part 1. River Edge, N.-J. World Scientific; 1998. 412 p.
14. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. Moscow, Nauka Publ; 1967. 488 p. (in Russian).
15. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. The qualitative theory of dynamical systems of second order. Moscow, Nauka Publ; 1966. 568 p. (in Russian).

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.12.2023

Received December 15, 2023

Поступила после рецензирования 29.01.2024

Revised January 29, 2024

Принята к публикации 03.02.2024

Accepted February 03, 2024

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Ройтенберг Владимир Шлеймович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Vladimir Sh. Roitenberg** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

## Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения

Соломатин Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Омский государственный педагогический университет,  
Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, 14  
[solomatin\\_dv@omgpu.ru](mailto:solomatin_dv@omgpu.ru)

**Аннотация.** Доказаны характеристические свойства внешнепланарности и обобщенной внешнепланарности графов Кэли прямых произведений циклических полугрупп в терминах копредставлений. Основная идея доказательства теорем, приведенных в статье, заключается в следующем: если обнаруженные в результате исследования условия выполнены, то полугруппа допускает обобщенную внешнепланарную [соответственно, внешнепланарную] укладку её графа Кэли (то есть такую укладку, при которой каждое ребро принадлежит одной грани хотя бы одной из своих вершин, и ребра не пересекаются в плоскости) [соответственно, такую укладку, при которой все вершины принадлежат одной грани, а ребра не пересекаются в плоскости]; обратно, по закону контрапозиции, если найденные условия не выполнены, то указывается подграф, гомеоморфный одной из запрещенных конфигураций. Рассуждения ведутся по аналогии с исследованиями полугрупп, допускающих планарные графы, при этом запрещенные конфигурации меняются на новые, в силу критерия Чартрэнда–Харари и Седлачека.

**Ключевые слова:** полугруппа, граф Кэли полугруппы, внешнепланарный граф, прямое произведение

**Для цитирования:** Соломатин Д. В. 2024. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 13–20.  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-13-20

Original Research

## Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations

Denis V. Solomatin 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Omsk State Pedagogical University,  
14 Tukhachevsky emb., Omsk, 644099, Russia  
[solomatin\\_dv@omgpu.ru](mailto:solomatin_dv@omgpu.ru)

**Abstract.** The characteristic properties of outerplanarity and generalized outerplanarity of Cayley graphs of direct products of cyclic semigroups are proved in terms of copresentations. The main idea of the proof of the theorems given in the article is the following: if the conditions discovered as a result of the study are met, then the semigroup admits a generalized outer-plane [respectively, outer-plane] layout of its Cayley graph (that is, such a layout in which each edge belongs to one face of at least one of its vertices, and the edges do not intersect in the plane) [accordingly, such a layout in which all the vertices belong to the same face, and the edges do not intersect in the plane]; conversely, according to the law of contraposition, if the found conditions are not met, then a subgraph is indicated that is homeomorphic to one of the forbidden configurations. The reasoning is carried out by analogy with the study of semigroups admitting planar graphs, while the forbidden configurations are changed to new ones, due to the Chartrand-Harari and Sedlacek criterion.

**Keywords:** Emigroup, Cayley Graph, Outerplanar Graph, Direct Product

**For citation:** Solomatin D. V. 2024. Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 13–20. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-13-20

**1. Введение.** Прямые произведения циклических полугрупп занимают умы ученых долгое время, привлекая своей простотой. Данная статья, выполненная в русле проблематики исследования полугрупп с планарными графами Кэли, продолжая цикл работ, начатый в [1, 2, 3], содержит обобщение и систематизацию накопленного материала о прямых произведениях циклических полугрупп, допускающих внешнепланарные и обобщенные внешнепланарные графы Кэли, а также ряд открытых вопросов для проведения исследований, с той целью, чтобы читателю предоставить возможность в краткие сроки освоить используемую при доказательствах технику и приступить к творческой самореализации.

**2. Предварительные сведения.** Основная идея доказательства теорем, приведенных в статье, заключается в следующем: если обнаруженные в результате исследования условия выполнены, то полугруппа допускает обобщенную внешнеплоскую [соответственно, внешнеплоскую] укладку её графа Кэли (то есть такую укладку, при которой каждое ребро принадлежит одной грани хотя бы одной из своих вершин, и ребра не пересекаются в плоскости) [соответственно, такую укладку, при которой все вершины принадлежат одной грани, а ребра не пересекаются в плоскости]; обратно, по закону контрапозиции, если найденные условия не выполнены, то указывается подграф, гомеоморфный одной из запрещенных конфигураций. Рассуждения ведутся по аналогии с исследованиями полугрупп, допускающих планарные графы, при этом запрещенные конфигурации меняются на новые, в частности, так как в силу критерия Чартрэнда – Харари [4] граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_4$  или  $K_{2,3}$ , представленных на Рис.1.



Рис. 1. Графы  $K_4$  и  $K_{2,3}$   
Fig. 1. Graphs  $K_4$  and  $K_{2,3}$

Для полноты изложения перечислим основные определения:

**Определение 2.1.** *Граф (неориентированный граф)* – это пара  $(V, E)$ , где  $V$  – конечное непустое множество вершин,  $E$  – множество ребер, являющееся произвольным подмножеством множества неупорядоченных пар вершин графа.

**Определение 2.2.** *Ориентированный граф* – это пара  $(V, A)$ , где  $V$  – конечное непустое множество вершин,  $A$  – множество дуг, являющееся произвольным подмножеством декартова квадрата множества вершин графа.

**Определение 2.3.** Пусть  $S$  полугруппа,  $X$  – множество порождающих её элементов. Через  $Cay(S, X)$  традиционно [5] обозначим граф Кэли полугруппы  $S$  относительно  $X$ . Граф  $Cay(S, X)$  состоит из множества вершин  $S$  и множества помеченных дуг – всевозможных троек  $(a, x, b)$ , где  $a, b \in S, x \in X$  и  $ax = b$ . Заметим, что в данном случае граф Кэли является ориентированным мультиграфом с реберной раскраской. Вершины графа обычно изображаются точками на плоскости, а дуга  $(a, x, b)$  – линией, направленной от  $a$  к  $b$  и помеченной элементом  $x$ . Такое понимание графа Кэли не противоречит классическому определению графа Кэли из [6], введённому для групп.

**Определение 2.4.** *Основой* ориентированного мультиграфа называем граф, полученный из данного графа удалением петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины. Ориентированный мультиграф называем планарным, если его основа является планарным графом.

**Определение 2.5.** Будем говорить, что *полугруппа  $S$  допускает планарный граф Кэли*, если для некоторого множества  $X$  основа  $SCay(S, X)$  графа  $Cay(S, X)$  является планарным графом.

Планарный граф называют внешнепланарным, если существует такая его плоская укладка, что каждая вершина графа принадлежит одной и той же грани.

Дополнительно общеупотребительные понятия теории графов приводить не будем; их определения можно найти в [7, 8]. Напомним лишь, что обобщенный внешнепланарный граф – это планарный граф, который можно уложить на плоскости таким образом, что каждое ребро обладает хотя бы одной концевой вершиной на границе одной и той же грани [9]. Обобщенные внешнепланарные графы ввел в рассмотрение Иржи Седлачек, это понятие сыграло важную роль при изучении локальных свойств графов [10]. Кроме того, Седлачек нашел характеристику обобщенных внешнепланарных графов в терминах запрещенных подграфов, а именно: граф является обобщенным внешнепланарным тогда и только тогда, когда не содержит подграфов, гомеоморфных одному из графов, изображенных ниже на Рис.2. Справедливости ради следует отметить, что прежде существовали и другие попытки обобщения внешнепланарных графов. Например, в [11] вводятся  $W$ -внешнепланарные графы, в случае, когда внешней грани принадлежат вершины из непустого множества вершин  $W$ . Кроме того, интересны  $k$ -внешнепланарные графы [12], то есть такие планарные графы, которые имеют плоское вложение, вершины которого принадлежат не более чем  $k$  концентрическим слоям. Позднее стал известен линейный алгоритм распознавания максимальных обобщенных внешнепланарных графов [13], что открыло дорогу публикациям результатов последующих исследований.

Заметим, что по определению всякий внешнепланарный граф является обобщенным внешнепланарным, обратное не верно. Существуют примеры графов, каждое ребро которых хотя бы одной из своих вершин принадлежит внешней грани, но при этом не являющиеся внешнепланарными. В частности, такие графы представлены выше на Рис.1.

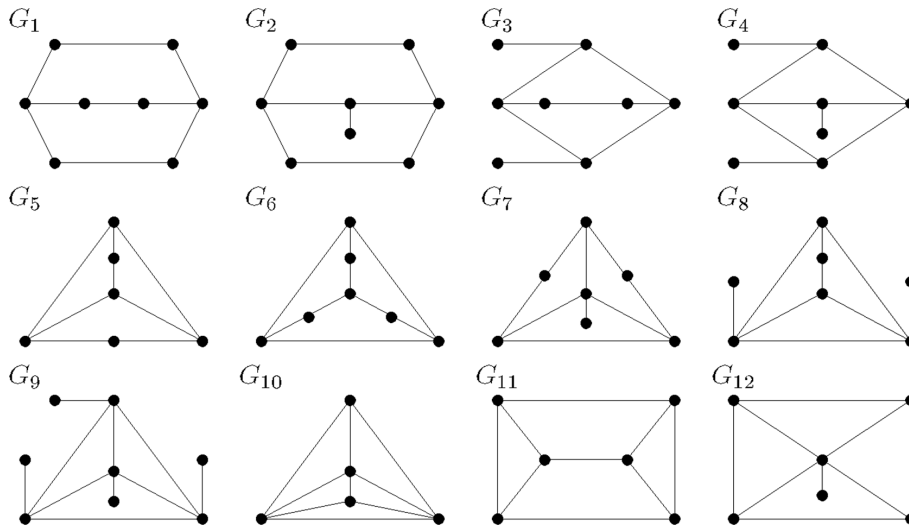


Рис. 2. Графы Седлачека  
Fig. 2. Graphs by Sedláček

Сформулируем основную Теорему из [14] в виде следующей леммы.

**Лемма.** Конечная полугруппа  $S$ , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$ , где для натуральных чисел  $r, m, h$  и  $t$  выполняется одно из ограничений:

- 1.1)  $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) < 3;$
- 1.2)  $r = 1, m = 2, t < 3;$
- 1.3)  $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3;$
- 1.4)  $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1;$
- 1.5)  $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1;$

2)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$ , где для натуральных чисел  $r, m, h, t, k, l$  выполняется одно из следующих ограничений:

- 2.1)  $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2, k = 1, l = 2;$
- 2.2)  $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1;$
- 2.3)  $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3;$
- 2.4)  $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1;$

3)  $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ , где для натуральных чисел  $r$  и  $t$  выполняется одно из следующих ограничений:

- 3.1)  $r = 1, m = 2;$
- 3.2)  $r = 2, m < 3;$
- 3.3)  $r = 3, m = 1.$

**3. Основной результат.** Основным результатом настоящей статьи являются следующие две теоремы, содержащие характеристические свойства полугрупп, допускающих внешнепланарные и обобщенные внешнепланарные графы Кэли. Заметим, что требование неоднородности множителей в формулировках теорем призвано лишь обеспечить конечное число множителей, так как прямое произведение всякой полугруппы  $S$  на одноэлементную циклическую полугруппу изоморфно исходной полугруппе  $S$ .

**Теорема 3.1.** Конечная полугруппа  $S$ , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

1)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$ , где для натуральных чисел  $r, m, h$  и  $t$  выполняется одно из ограничений:

- 1.1)  $r = 1, h = 1, (\text{НОД}(m, t) = 1 \text{ или } m = t = 2);$
- 1.2)  $r = 1, m = 2, (h < 4, t = 1 \text{ или } h = t = 2);$
- 1.3)  $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3;$
- 1.4)  $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1;$

2)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$ , где для натуральных чисел  $r, m, h, t, k, l$  выполняется одно из следующих ограничений:

- 2.1)  $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1;$
- 2.2)  $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3;$
- 2.3)  $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1;$

3)  $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ , при  $n > 2$ , где для натуральных чисел  $r$  и  $t$  выполняется одно из следующих ограничений:

- 3.1)  $r = 1, m = 2;$
- 3.2)  $r = 2, m < 3;$
- 3.3)  $r = 3, m = 1.$

**Теорема 3.2.** Конечная полугруппа  $S$ , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

1)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$ , где для натуральных чисел  $r, m, h$  и  $t$  выполняется одно из ограничений:



- 1.1)  $r = 1, h = 1, (\text{НОД}(m, t) = 1 \text{ или } m = t = 2);$       1.3)  $r = 2, m = 1, h < 4, t = 1;$   
 1.2)  $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1;$   
 2)  $S \cong \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle, \text{ при } n > 2.$

**Доказательство.** Для удобства одновременного доказательства Теорем 3.1 и 3.2 в едином стиле переформулируем условие Теоремы 3.2, изменив нумерацию пунктов таким образом, чтобы применяемые номера 2.1) и 3.2) соответствовали используемым в Лемме.

1)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle,$  где для натуральных чисел  $r, m, h$  и  $t$  выполняется одно из ограничений:

- 1.1)  $r = 1, h = 1, (\text{НОД}(m, t) = 1 \text{ или } m = t = 2);$       1.3)  $r = 2, m = 1, h < 4, t = 1;$   
 1.2)  $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1;$

2)  $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle,$  где для натуральных чисел  $r, m, h, t, k, l$  выполняется следующее ограничение:

- 2.1)  $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1;$

3)  $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle,$  при  $n > 2,$  где для натуральных чисел  $r$  и  $m$  выполняется следующее ограничение:

- 3.2)  $r = 2, m = 1;$

Из имеющегося в Лемме списка выберем полугруппы, графы Кэли которых обобщенные внешнепланарные или являются внешнепланарными, проанализировав каждую серию ограничений.

Достаточность указанных ограничений для планарности доказывается приведением плоской укладки графа Кэли. Так, при выполнении условий Теоремы 3.1, граф Кэли соответствующей полугруппы относительно минимального множества неразложимых образующих оказывается обобщенным внешнепланарным, а при выполнении условий Теоремы 3.2 – внешнепланарным.

В остальных случаях планарных графов, описанных Леммой, основа графа Кэли соответствующей полугруппы обнаруживает подграф гомеоморфный одной из запрещенных конфигураций. Рассмотрим каждый из оставшихся вариантов.

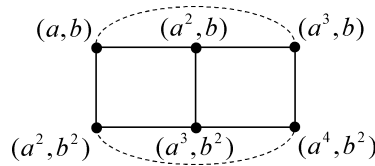


Рис. 3. Подграф графа  $SCay(\langle a \mid a^{1+m} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{1+2} = b^1 \rangle, \{(a, b), (a, b^2)\})$ , гомеоморфный графу  $G_{11}$ , при  $m \geq 3$   
 Fig. 3. Subgraph of the graph  $SCay(\langle a \mid a^{1+m} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{1+2} = b^1 \rangle, \{(a, b), (a, b^2)\})$ , homeomorphic to the graph  $G_{11}$ , for  $m \geq 3$

1.1) Полугруппа  $S \cong \langle a \mid a^{1+m} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{1+t} = b^1 \rangle$  при  $\text{НОД}(m, t)=1$  изоморфна циклической полугруппе, а основой графа Кэли циклической полугруппы является внешнепланарный и обобщенный внешнепланарный при любом числе вершин цикл. Кроме того, при  $\text{НОД}(m, t)=2,$  а  $m = t = 2$  основу графа Кэли тоже формирует цикл, то есть граф Кэли полугруппы  $S$  при выполнении условий Леммы допускает нужную укладку. Но уже при  $m > 2$  или  $t > 2$  в основе графа Кэли рассматриваемой полугруппы обнаруживается изображенный на Рис.3 подграф, гомеоморфный графу  $G_{11}$ , следовательно, граф не является даже обобщенным внешнепланарным, тем более внешнепланарным. Дальнейшее увеличение  $\text{НОД}(m, t) \geq 3$  согласно Леммы приводит к потере планарности как таковой.

1.2) Для  $h = 1$  и  $t = 2,$  либо  $h = 2$  и  $t = 1$  плоская укладка графа Кэли полугруппы  $S \cong \langle a \mid a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$  при допустимых Леммой значениях оказывается внешнепланарной. Но стоит увеличить  $h+t \geq 4,$  как тут же появляются в основе графа Кэли полугруппы подграфы  $K_{2,3}$  и  $G_5,$  изображенные на Рис.4 и Рис.5 соответственно. Следовательно, в первом случае граф является обобщенно внешнепланарным, но не внешнепланарным, а во втором – ни тем, ни другим.

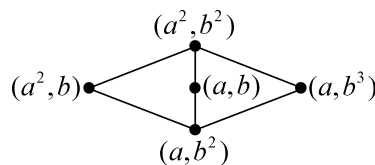


Рис. 4. Подграф графа  $SCay(\langle a \mid a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$  и графа  $SCay(\langle a \mid a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{2+2} = b^2 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$   
 Fig. 4. A subgraph of the graph  $SCay(\langle a \mid a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$  and the graph  $SCay(\langle a \mid a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b \mid b^{2+2} = b^2 \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ , homeomorphic graph  $K_{2,3}$

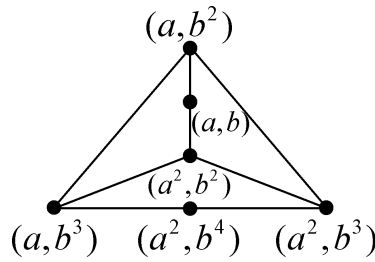


Рис. 5. Подграф графа  $SCay(\langle a | a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b | b^{h+1} = b^h \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ , при  $h \geq 4$ , и графа  $SCay(\langle a | a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b | b^{h+2} = b^h \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ , при  $h \geq 3$ , гомеоморфный графу  $G_5$

Fig. 5. A subgraph of the graph  $SCay(\langle a | a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b | b^{h+1} = b^h \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ , for  $h \geq 4$ , and the graph  $SCay(\langle a | a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b | b^{h+2} = b^h \rangle, \{(a, b), (a^2, b)\})$ , for  $h \geq 3$ , homeomorphic graph  $G_5$

1.3) В случаях, когда  $h < 4$  и  $t = 1$ , либо  $h = 1$  и  $t = 2$ , граф Кэли полугруппы  $S \cong \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{h+t} = b^t \rangle$  допускает внешнеплоскую укладку, а в оставшихся по Лемме комбинациях, основа графа Кэли этой полугруппы обнаруживает подграфы  $K_{2,3}$ , изображенные на Рис.6 и Рис.7, следовательно, является обобщенной внешнепланарной, но не является внешнепланарной.

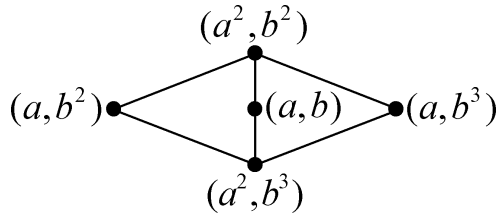


Рис. 6. Подграф графа  $SCay(\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{2+2} = b^2 \rangle, \{(a, b), (a, b^2), (a, b^3), (a^2, b)\})$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$

Fig. 6. Subgraph of the graph  $SCay(\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{2+2} = b^2 \rangle, \{(a, b), (a, b^2), (a, b^3), (a^2, b)\})$ , homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$

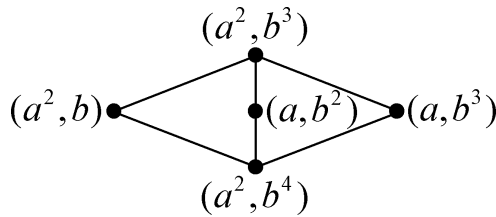


Рис. 7. Подграф графа  $SCay(\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{3+2} = b^3 \rangle, \{(a, b^k) | 1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2, b)\})$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$

Fig. 7. Subgraph of the graph  $SCay(\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{3+2} = b^3 \rangle, \{(a, b^k) | 1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2, b)\})$ , homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$

1.4) Из пункта Леммы с соответствующим номером 1.4) вытекает, что в случае, когда полугруппа  $S \cong \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{h+1} = b^h \rangle$ , граф Кэли полугруппы  $S$  допускает плоскую укладку если и только если  $h < 5$ . Однако, при  $h = 4$  в основе графа Кэли полугруппы  $S$  обнаруживается подграф  $G_{10}$ , изображенный на Рис.8. Следовательно, граф не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным. Тем не менее, случаи  $h < 4$  всё же допустимо имеют место и охвачены пунктом 1.3).

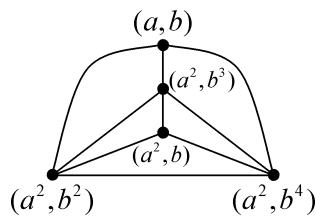


Рис. 8. Подграф графа  $SCay(\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{4+1} = b^4 \rangle, \{(a, b^k) | 1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2, b)\})$ , гомеоморфный графу  $G_{10}$

Fig. 8. Subgraph of the graph  $SCay(\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{4+1} = b^4 \rangle, \{(a, b^k) | 1 \leq k \leq 4\} \cup \{(a^2, b)\})$ , homeomorphic to the graph  $G_{10}$

1.5) Наконец, для  $r = h = 3$  и  $m = t = 1$  основа графа Кэли полугруппы  $S \cong \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b | b^{h+t} = b^h \rangle$  содержит изображенный на Рис.9 подграф  $K_{2,3}$ , следовательно, граф не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

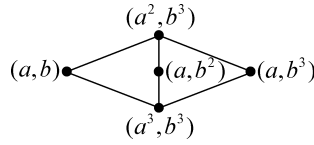


Рис. 9. Подграф основы графа Кэли полугруппы  $\langle a|a^4 = a^3 \rangle \times \langle b|b^4 = b^3 \rangle$  относительно образующих

$$\{(a^k, b^l) | l = 1 \leq k \leq 3 \vee k = 1 \leq l \leq 3\}, \text{ гомеоморфный графу } K_{2,3}$$

Fig. 9. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup  $\langle a|a^4 = a^3 \rangle \times \langle b|b^4 = b^3 \rangle$  with respect to generators

$$\{(a^k, b^l) | l = 1 \leq k \leq 3 \vee k = 1 \leq l \leq 3\}, \text{ homeomorphic to the graph } K_{2,3}$$

2.1) Перейдём к случаю, когда циклических множителя в прямом произведении больше, чем два. Перемножая три циклические группы второго порядка получим, что основа графа Кэли результата изоморфна трёхмерному кубу. А трёхмерный куб содержит гомеоморфный графу  $G_{11}$  подграф, изображенный на Рис.10, поэтому не является обобщенным внешнепланарным и не является внешнепланарным.

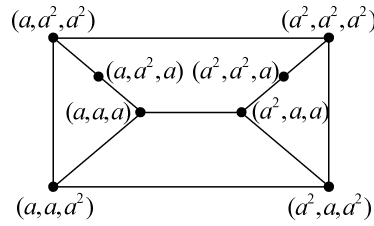


Рис. 10. Подграф основы графа Кэли полугруппы  $\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle^3$  относительно множества образующих

$$\{(a, a^2, a^2), (a^2, a, a^2), (a^2, a^2, a)\}, \text{ гомеоморфный графу } G_{11}$$

Fig. 10. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup  $\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle^3$  with respect to the set of generators

$$\{(a, a^2, a^2), (a^2, a, a^2), (a^2, a^2, a)\}, \text{ homeomorphic to the graph } G_{11}$$

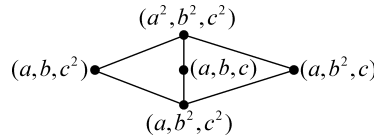


Рис. 11. Подграф основы графа Кэли полугруппы  $\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c|c^{2+1} = c^2 \rangle$  относительно образующих  $\{(a, b, c), \dots, (a^2, b, c)\}$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$

Fig. 11. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup  $\langle a|a^{1+2} = a^1 \rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c|c^{2+1} = c^2 \rangle$  with respect to generators  $\{(a, b, c), \dots, (a^2, b, c)\}$ , homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$

2.2) Перемножая циклическую группу второго порядка с двумя циклическими полугруппами второго порядка, не имеющими нетривиальных подгрупп, получим полугруппу, основа графа Кэли которой содержит изображенный на Рис.11 граф  $K_{2,3}$ , следовательно, граф не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

2.3) Для полугруппы  $S \cong \langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c | c^{2+1} = c^2 \rangle$  случай  $l = 1$  приводит к полугруппе изоморфной полугруппе с нулевым умножением, граф Кэли которой допускает внешнеплоскую укладку. При  $l = 2$  в основе графа Кэли получившейся полугруппы обнаруживается изображенный на Рис.12 подграф  $K_{2,3}$ , следовательно, граф не является внешнепланарным, но при этом допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

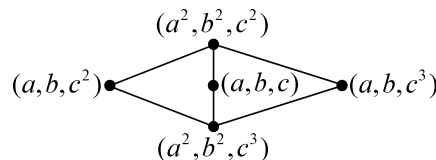


Рис. 12. Подграф основы графа Кэли полугруппы  $\langle a|a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c|c^{2+2} = c^2 \rangle$  относительно образующих  $\{(a, b, c), \dots, (a, b, c^2)\}$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$

Fig. 12. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup  $\langle a|a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c|c^{2+2} = c^2 \rangle$  with respect to generators  $\{(a, b, c), \dots, (a, b, c^2)\}$ , homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$

2.4) В случае, когда полугруппа  $S \cong \langle a|a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b|b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c|c^{3+1} = c^3 \rangle$ , основа графа Кэли данной полугруппы содержит изображенный на Рис.13 подграф  $K_{2,3}$  и не содержит подграфов Седлачека, следовательно, этот граф является обобщенным внешнепланарным, но не внешнепланарным.

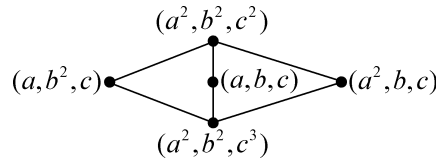


Рис. 13. Подграф основы графа Кэли полугруппы  $\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c | c^{3+1} = c^3 \rangle$  относительно образующих  $\{(a, b, c), \dots, (a, b, c^2)\}$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$   
 Fig. 13. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup  $\langle a | a^{2+1} = a^2 \rangle \times \langle b | b^{2+1} = b^2 \rangle \times \langle c | c^{3+1} = c^3 \rangle$  with respect to generators  $\{(a, b, c), \dots, (a, b, c^2)\}$ , homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$

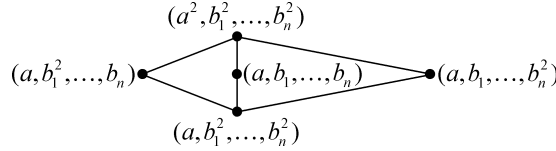


Рис. 14. Подграф основы графа Кэли полугруппы  $\langle a | a^{1+2} = a^1 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i | b_i^{2+1} = b_i^2 \rangle$  относительно образующих  $\{(a, b_1, \dots, b_n), \dots, (a^2, b_1, \dots, b_n)\}$ , гомеоморфный графу  $K_{2,3}$   
 Fig. 14. Subgraph of the basis of the Cayley graph of the semigroup  $\langle a | a^{1+2} = a^1 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i | b_i^{2+1} = b_i^2 \rangle$  with respect to generators  $\{(a, b_1, \dots, b_n), \dots, (a^2, b_1, \dots, b_n)\}$ , homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$

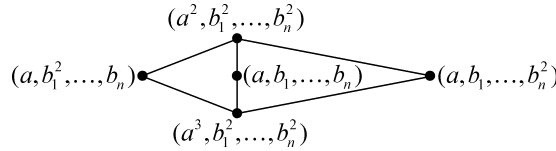


Рис. 15. Гомеоморфный графу  $K_{2,3}$  подграф основы графов Кэли полугрупп  $\langle a | a^{2+2} = a^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i | b_i^{2+1} = b_i^2 \rangle$  и  $\langle a | a^{3+1} = a^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i | b_i^{2+1} = b_i^2 \rangle$  относительно множества образующих вида  $(a, b_1^{i_1}, \dots, b_n^{i_n}), (a^2, b_1^{j_1}, \dots, b_n^{j_n})$ , где степени  $1 \leq i_k \leq 2, 1 \leq j_k \leq 2$  не могут быть равными 2 одновременно  
 Fig. 15. Subgraph of the basis of Cayley graphs of semigroups  $\langle a | a^{2+2} = a^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i | b_i^{2+1} = b_i^2 \rangle$  and  $\langle a | a^{3+1} = a^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle b_i | b_i^{2+1} = b_i^2 \rangle$  homeomorphic to the graph  $K_{2,3}$ , with respect to generators of the form  $(a, b_1^{i_1}, \dots, b_n^{i_n}), (a^2, b_1^{j_1}, \dots, b_n^{j_n})$ , where powers  $1 \leq i_k \leq 2$  and  $1 \leq j_k \leq 2$  are not equal to 2 at one and the same time

3.1) Основа графа Кэли полугруппы  $S \cong \langle a_0 | a_0^{1+2} = a_0^1 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i | a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$  относительно минимального множества неразложимых образующих содержит изображенный на Рис.14 подграф  $K_{2,3}$ , следовательно, граф Кэли такой полугруппы не является внешнепланарным, но, заметим, при этом он допускает обобщенную внешнеплоскую укладку.

3.2) и 3.3) Прямое произведение произвольного числа двухэлементных полугрупп  $\langle a_i | a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ , не имеющих нетривиальных подгрупп, изоморфно полугруппе с нулевым умножением, граф Кэли которой допускает внешнеплоскую укладку. Оставшиеся комбинации в пунктах 3.2) и 3.3) Леммы формируют полугруппы, основы графов Кэли которых содержат изображенный на Рис.15 подграф  $K_{2,3}$ , следовательно, их граф Кэли не внешнепланарный, но при этом обобщенно внешнепланарный, так как обе основы не содержат подграфов Седлачека.

Что и требовалось доказать.

**4. Заключение.** В заключение отметим, интересно было бы узнать, что получится в результате замены множителей прямого произведения на циклические моноиды и полугруппы с нулём? Об этом и многом другом, возможно, пойдёт речь в продолжении наметившейся в [15] серии статей.

### Список литературы

1. Мартынов П.О., Соломатин Д.В. Конечные свободные коммутативные полугруппы и полугруппы с нулём, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли. *Вестник Омского университета*. 2014;3(73):22–26.
2. Мартынов П.О. Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенно внешнепланарные графы Кэли. *Вестник Омского университета*. 2015;4:6–9.
3. Мартынов П.О. Рассыпчатые полугруппы, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли. *Вестник Омского университета*. 2018;3:6–9.
4. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
5. Zelinka V. Graphs of Semigroups. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1981;106:407–408. (in Czech)
6. Maschke H. The representation of finite groups. *American Journal of Mathematics*. 1896;18:156–194.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сараванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Наука; 1990. 384 с.

8. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука; 1987. 384 с.
9. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1988;113(2):213–218. (in Czech)
10. Sedláček J. On local properties of graphs again. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1989;114(4): 381–390. (in Czech)
11. Oubiña L., Zucchetto R.A Generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics, North-Holland*. 1984;51:243–249.
12. Sysło M.M. On some generalizations of outerplanar graphs: Results and open problems. In: Tinhofer, G., Schmidt, G. (eds) *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1986. Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin: Heidelberg; 1987. 246 p. DOI: 10.1007/3-540-17218-1\_56
13. Cáceres J., Márquez A. A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs. *Mathematica Bohemica*. 1997;122(3):225–230.
14. Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли. *Сибирские Электронные Математические Известия*. 2006;3:238–252.
15. Соломатин Д.В. Структура полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли. *Сибирские Электронные Математические Известия*. 2011;8:191–212.

### References

1. Martynov PO., Solomatin DV. Finite free commutative semigroups and semigroups with zero how admitting generalized outerplanar Cayley graphs. *Herald of Omsk University*. 2014;3:22–26. (in Russian)
2. Martynov PO. Finite free commutative monoids who admitted generalized outerplanar Cayley graphs. *Herald of Omsk University*. 2015;4:6–9. (in Russian)
3. Martynov PO. Crisp semigroups admit generalized outerplanar Cayley graphs. *Herald of Omsk University*. 2018;3:6–9. (in Russian)
4. Harary F. *Graph Theory: Advanced Book Program Series*. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
5. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1981;106:407–408. (in Czech)
6. Maschke H. The representation of finite groups. *American Journal of Mathematics*. 1896;18:156–194.
7. Emelichev VA., Melnikov OL., Sarvanov VI., Tyshkevich RI. *Lectures on Graph Theory*. Moscow: Nauka Publ.; 1990. 384 p. (in Russian)
8. Zykov AA. Basics of Graph Theory. *Uspekhi Mat. Nauk*. 1974;29(6):89–154. (in Russian)
9. Sedláček J. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1988;113(2):213–218. (in Czech)
10. Sedláček J. On local properties of graphs again. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1989;114(4):381–390. (in Czech)
11. Oubiña L., Zucchetto R. A Generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics, North-Holland*. 1984;51:243–249.
12. Sysło MM. On some generalizations of outerplanar graphs: Results and open problems. In: Tinhofer, G., Schmidt, G. (eds) *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. WG 1986. Lecture Notes in Computer Science*. Springer, Berlin: Heidelberg; 1987. 246 p. DOI: 10.1007/3-540-17218-1\_56
13. Cáceres J., Márquez A. A linear algorithm to recognize maximal generalized outerplanar graphs. *Mathematica Bohemica*. 1997;122(3):225–230.
14. Solomatin DV. Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Caley graph. *Sib. Elektron. Mat. Izv*. 2006;3:238–252. (in Russian)
15. Solomatin DV. Semigroups with outerplanar Cayley graphs. *Sib. Elektron. Mat. Izv*. 2011;8:191–212. (in Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.12.2023

Received December 18, 2023

Поступила после рецензирования 29.01.2024

Revised January 29, 2024

Принята к публикации 03.02.2024

Accepted February 3, 2024


### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Соломатин Денис Владимирович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Denis V. Solomatin** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Professor of Mathematics and Mathematics Education in Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

## О слоениях на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа

Букушева А. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,  
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83  
[bukushevaav@sgu.ru](mailto:bukushevaav@sgu.ru)

**Аннотация.** Вводится понятие субфинслерова многообразия контактного типа. На распределении субфинслерова многообразия как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется продолженная субриманова структура контактного типа с метрикой Сасаки. Изучаются связи между геометрией слоений, естественным образом возникающих на распределениях субфинслеровых многообразий, и геометрией субфинслеровых многообразий контактного типа. В частности, доказывается, что вертикальное слоение на распределении субфинслерова многообразия является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда указанное многообразие является многообразием Ландсберга с проектируемой субфинслеровой структурой.

**Ключевые слова:** субфинслерова многообразия контактного типа, слоения на распределениях субфинслеровых многообразий, продолженная субриманова структура контактного типа

**Для цитирования:** Букушева А. В. 2024. О слоениях на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 21–26.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-21-26

Original Research

## About Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds of Contact Type

Aliya V. Bukusheva 

(Article submitted by a member of the editorial board C. M. Sitnik)

Saratov State University,  
83 Astrakhanskaya st., Saratov, 410012, Russia  
[bukushevaav@sgu.ru](mailto:bukushevaav@sgu.ru)

**Abstract.** A sub-Finsler structure of contact type is defined on a smooth manifold with a distribution of codimension 1 given on it and is reduced to specifying a smooth function on this distribution that repeats the standard properties of the fundamental function of a Finsler manifold. For the convenience of studying the sub-Finsler structure, the definition of a (structural) vector field that does not vanish anywhere and is transversal to the distribution is postulated. On a manifold with a sub-Finsler structure – on a sub-Finsler manifold – the parallel transport of vectors belonging to the distribution along curves tangent to the distribution is determined. The connection that ensures this parallel transfer is called internal connectivity in this work. Using the internal connection and the structure vector field, a contact-type sub-Riemannian structure with a Sasaki-type metric is defined on the distribution of a sub-Finsler manifold as on the total space of a vector bundle. The connections between the geometry of foliations that naturally arise on the distributions of sub-Finsler manifolds and the geometry of sub-Finsler manifolds of contact type are studied. In particular, we prove that a vertical foliation on the distribution of a sub-Finsler manifold is completely geodesic if and only if the specified manifold is a Landsberg manifold with a projectable sub-Finsler structure.

**Keywords:** Sub-Finsler Manifold of Contact Type, Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds, Extended Sub-Riemannian Structure of Contact Type

**For citation:** Bukusheva A. V. 2024. About Foliations on Distributions of Sub-Finsler Manifolds of Contact Type. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 21–26. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-21-26

**1. Введение.** Как показало знакомство с известными исследованиями субфинслеровых многообразий, определяющей мотивацией к развитию новой области дифференциальной геометрии является ее использование в неголономной механике и теории оптимального управления [1, 2, 3]. В предлагаемой статье мы так определяем субфинслеру структуру, чтобы ее изучение, по крайней мере, изучение некоторых аспектов теории субфинслеровых многообразий, можно было бы свести к изучению аналогичных вопросов субримановой геометрии контактного типа [4, 5, 6]. То есть мы следуем здесь уже

давно отработанной системе перехода от финслеровой геометрии к римановой геометрии касательных расслоений финслеровых многообразий [7, 8, 9, 10].

Сравнивая определение субфинслерова многообразия контактного типа с определением субриманова многообразия контактного типа, читатель заметит, что субфинслерова многообразия не является финслеровым многообразием, в то время как субриманово многообразие представляет собой специальный класс римановых многообразий. Казалось бы, что такое различие в понимании «контактного случая» не позволяет рассматривать субриманово многообразие контактного типа как частный случай субфинслерова многообразия контактного типа. Тем не менее это различие носит формальный характер, но мы не будем вдаваться здесь в подробное обсуждение этого обстоятельства. Первые шаги по исследованию субфинслеровых многообразий контактного типа сделаны в работах [11, 4]. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [11].

Под субримановым многообразием контактного типа [6] понимается гладкое многообразие  $M$  размерности  $n = 2m + 1$  с заданной на нем субримановой структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$ , где:  $\eta$  – 1-форма, порождающая распределение  $D : D = \ker(\eta)$ ;  $\vec{\xi}$  – векторное поле, порождающее оснащение  $D^\perp$  распределения  $D : D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ ;  $g$  – риманова метрика на многообразии  $M$ , относительно которой распределения  $D$  и  $D^\perp$  взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства  $\eta(\vec{\xi}) = 1$  и  $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$ . Субфинслерова геометрия является естественным обобщением субримановой геометрии. Субфинслерова структура контактного типа отличается от субримановой структуры контактного типа тем, что вместо скалярного произведения задана норма векторов, принадлежащих распределению  $D$ . При этом векторное поле  $\vec{\xi}$ , порождающее оснащение  $D^\perp$  распределения  $D$ , трансверсально распределению  $D$ .

В настоящей работе определяется и исследуется геометрия субфинслерова многообразия контактного типа методом продолжения субфинслеровой структуры до субримановой структуры на распределение исходного многообразия. Используемый подход соответствует методу построения римановой структуры на касательном расслоении финслерова многообразия. На распределении субфинслерова многообразия как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется продолженная субриманова структура контактного типа с метрикой Сасаки. Исследуются естественным образом возникающие на распределениях субфинслеровых многообразий слоения. Изучаются связи между геометрией слоений и геометрией субфинслеровых многообразий контактного типа.

**2. Основные понятия.** Рассмотрим гладкое многообразие  $M$  нечетной размерности  $n = 2m + 1$  с заданной на нем структурой  $(M, \vec{\xi}, \eta, D)$ , где:  $\eta$  – 1-форма, порождающая распределение  $D : D = \ker(\eta)$ ;  $\vec{\xi}$  – векторное поле, порождающее оснащение  $D^\perp$  распределения  $D : D^\perp = \text{Span}(\vec{\xi})$ . При этом выполняются равенства:  $\eta(\vec{\xi}) = 1, TM = D \oplus D^\perp$ . Потребуем дополнительно выполнения следующего условия:  $d\eta(\vec{\xi}, \cdot) = \omega(\vec{\xi}, \cdot) = 0$ . Будем рассматривать распределение  $D$  как тотальное пространство векторного расслоения  $(D, \pi, M)$ .

Карта  $k(x^i)$  ( $i, j, k = 1, \dots, n; a, b, c = 1, \dots, n - 1; \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, 4m + 1$ ) многообразия  $M$  называется адаптированной к распределению  $D$ , если  $\partial_n = \vec{\xi}$ . Пусть  $P : TM \rightarrow D$  – проектор, определяемый разложением  $TM = D \oplus D^\perp$ , и  $k(x^i)$  – адаптированная карта. Векторные поля  $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$  порождают распределение  $D : D = \text{Span}(\vec{e}_a)$ . Для неголономного поля базисов  $(\vec{e}_i) = (\vec{e}_a, \partial_n)$  выполняется соотношение  $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$ . Пусть  $k(x^i)$  и  $k'(x'^i)$  – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат:  $x^a = x^a(x'^a), x^n = x'^n + x^n(x'^a)$ .

Превратим распределение  $D$  в гладкое многообразие размерности  $n = 4m + 1$ , поставив в соответствие каждой адаптированной карте  $k(x^i)$  многообразия  $M$  сверхкарту  $\tilde{k}(x^i, x^{n+a})$  на распределении  $D$ , полагая, что  $\tilde{k}(X) = (x^i, x^{n+a})$ , где  $x^{n+a}$  – (слоевые) координаты допустимого вектора  $X$  в базисе  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n : X = x^{n+a}\vec{e}_a$ . Сверхкарту  $\tilde{k}(x^i, x^{n+a})$  назовем адаптированной сверхкартой.

Будем называть набор  $(M, \vec{\xi}, \eta, F, D)$  субфинслеровой структурой контактного типа,  $M$  – субфинслеровым многообразием контактного типа, где  $F = L^2, L$  – гладкая функция, заданная на распределении  $D^0 = D \setminus \vec{0}$  отличных от нуля векторов распределения  $D$  и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $L(x^i, x^{n+a})$  – положительная функция;
- 2)  $L(x^i, x^{n+a})$  – положительно однородна первой степени относительно слоевых координат;
- 3) квадратичная форма  $L_{a,b}^2 \xi^a \xi^b = \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} \xi^a \xi^b$  положительно определена.

Символ “ $\cdot$ ” означает дифференцирование по слоевым координатам. Символ  $D^0$  в дальнейшем будем заменять символом  $D$ .

Оснастим распределение  $D$  субримановой структурой контактного типа. С этой целью введем в рассмотрение функции  $G_a^b = G_{a,b}^b$ , где  $G^b = \frac{1}{4}g^{bc}(\vec{e}_a F_{,c} x^{n+d} - \vec{e}_c F)$ .

Назовем объект  $G_a^b$  внутренней связностью. Задание внутренней связности влечет разложение распределения  $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$ , где  $\pi : D \rightarrow M$  – естественная проекция, в прямую сумму вида  $\tilde{D} = HD \oplus VD$ , где  $VD$  – вертикальное распределение на тотальном пространстве  $D$ ,  $HD$  – горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями  $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$ . Векторные поля  $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a})$

определяют на распределении  $D$  как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы  $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} G_b^n dx^b)$  – соответствующее поле кобазисов.

Пусть  $g(X, Y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial x^{n+a} \partial x^{n+b}} X^a Y^b$ ,  $X, Y \in \Gamma(D)$ , где  $\Gamma(D)$  – модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению  $D$ ). Субфинслеровым тензорным полем  $t$  типа  $(p, q)$  на многообразии  $M$  будем называть морфизм  $t : D \rightarrow T_q^p(D)$ , такой, что  $t(z) \in T_{\pi(z)q}^p(D)$ . Здесь  $\pi : D \rightarrow M$  – естественная проекция,  $T_{\pi(z)q}^p(D)$  – пространство допустимых тензоров в точке  $\pi(z)$  (обращающихся в нуль каждый раз, когда среди аргументов тензора встречаются  $\vec{\xi}$  или  $\eta$ ). Объект  $g(X, Y)$  является примером субфинслерова тензорного поля. Определим на многообразии  $D$  метрику  $\tilde{g}$ , полагая

$$\tilde{g}(X^h, Y^h) = \tilde{g}(X^v, Y^v) = \tilde{g}(X, Y), \quad \tilde{g}(X^h, Y^v) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^v, \vec{u}) = 0, \quad \tilde{g}(\vec{u}, \vec{u}) = 1.$$

Здесь  $\vec{u} = \partial_n$ . Горизонтальный  $X^h$  и вертикальный  $X^v$  лифт любого допустимого вектора (векторного поля)  $X$  определяется естественным образом. В адаптированной сверхкарте: если  $X = X^a \vec{e}_a$ , то  $X^h = X^a \vec{e}_a$ ,  $X^v = X^a \partial_{n+a}$ . Таким образом, на распределении  $D$  нами задана субриманова структура контактного типа  $(D, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ . Прямыми вычислениями получаем следующие структурные уравнения:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + R_{ab}^c \partial_{n+c}, \quad [\vec{e}_a, \partial_n] = \partial_n G_a^c \partial_{n+c}, \quad [\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = G_{ab}^c \partial_{n+c}.$$

Мы здесь положили  $R_{ab}^c = \vec{e}_b G_a^c - \vec{e}_a G_b^c$ ,  $G_{ab}^c = G_{a-b}^c$ . Тензор  $R_{ab}^c$  по аналогии с субримановым случаем назовем тензором Схоутена. Заметим, что тензор  $R_{ab}^c$  (как и любое субфинслерово тензорное поле) допускает отождествление (разными способами) с тензорным полем, заданным на распределении субфинслерова многообразия. Например, в первом структурном уравнении  $R = R_{ab}^c \partial_{n+c} \otimes dx^a \otimes dx^b$ .

**Предложение 1.** [11] *Связность Леви – Чивиты  $\tilde{\nabla}$  субримановой структуры в адаптированных координатах получает следующее представление:*

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a \vec{e}_b &= -(C_{ba}^e + \frac{1}{2} R_{ba}^e) \partial_{n+e} + F_{ba}^e \vec{e}_e + (\omega_{ba} - \tilde{C}_{ab}) \partial_n, \\ \tilde{\nabla}_a \partial_{n+b} &= C_{ba}^e \partial_{n+e} - \frac{1}{2} g_{ab|c} g^{ce} \vec{e}_e - \tilde{C}_{ab} \partial_n, \\ \tilde{\nabla}_a \partial_{n+b} &= F_{ba}^e \partial_{n+e} + (C_{ba}^e + \frac{1}{2} g_{bc} R_{da}^c g^{de}) \vec{e}_e - \frac{1}{2} g_{cb} (\partial_n G_a^c) \partial_n, \\ \tilde{\nabla}_{n+a} \vec{e}_b &= \tilde{\nabla}_b \partial_{n+a} - G_{ba}^e \partial_{n+e}, \\ \tilde{\nabla}_b \partial_n &= \tilde{\nabla}_n \vec{e}_b = (\tilde{C}_b^e + \psi_b^e) \vec{e}_e - \frac{1}{2} (\partial_n G_b^e) \partial_{n+e}, \\ \tilde{\nabla}_b \partial_{n+b} &= \frac{1}{2} g_{eb} (\partial_n G_a^e) g^{dc} \vec{e}_c + \tilde{C}_b^e \partial_{n+e}. \end{aligned}$$

Встречающиеся здесь объекты задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} C_{ba}^e &= \frac{1}{2} g^{ec} g_{ba-c}, \\ F_{ba}^e &= \frac{1}{2} g^{ec} (\vec{e}_b g_{ac} + \vec{e}_a g_{bc} - \vec{e}_c g_{ba}), \\ g_{ab|c} &= \vec{e}_c g_{ab} - G_{ca}^d g_{db} - G_{cb}^d g_{ad}, \psi_b^e = g^{ce} \omega_{bc}, \\ \tilde{C}_{ab} &= \frac{1}{2} \partial_n g_{ba}, \quad \tilde{C}_b^e = g^{ce} \tilde{C}_{cb}. \end{aligned}$$

По аналогии с финслеровым случаем, субфинслерово многообразии  $M$  будем называть субфинслеровым многообразием контактного типа Ландсберга (многообразием Ландсберга), если выполняется условие  $F_{ab}^c = G_{ab}^c$ . Субфинслерово многообразие  $M$  назовем плоским многообразием (а соответствующую субфинслерову структуру – плоской), если тензор Схоутена обращается в нуль. Назовем субфинслерову структуру проектируемой, если  $\partial_n F = 0$ . Из определения тензора Схоутена и структурных уравнений получаем следующие утверждения.

**Предложение 2.** *Плоская субфинслерова структура проектируема.*

**Теорема 1.** *Распределение  $\tilde{H}D \oplus \langle \vec{u} \rangle = \tilde{H}D$  субфинслерова многообразия  $M$  инволютивно тогда и только тогда, когда  $M$  – плоское многообразие.*

Распределение  $\tilde{H}D$  будем называть расширенным горизонтальным распределением. Если  $\tilde{H}D$  – инволютивное распределение, то определяемое им слоение будем называть горизонтальным слоением и обозначать  $F_h$ .



**3. Слоения на распределениях субфинслеровых многообразий.** В настоящем разделе мы опишем геометрические свойства слоений, естественным образом возникающих на распределениях субфинслеровых многообразий. Начнем с вертикального слоения  $F_v$  – слоения, порождаемого вертикальным распределением  $VD$ . Имеет место следующая теорема:

**Теорема 2.** *Вертикальное слоение  $F_v$  на распределении субфинслерова многообразия  $M$  является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда  $M$  – многообразие Ландсберга с проектируемой субфинслеровой структурой.*

**Доказательство.** По определению, слоение  $F_v$  является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда  $\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} \in \Gamma(VD)$ . Равенство

$$\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} = C_{ba}^e\partial_{n+e} - \frac{1}{2}g_{ab|c}g^{ce}\tilde{\varepsilon}_e - \tilde{C}_{ab}\partial_n$$

перепишем в виде

$$\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} = C_{ba}^e\partial_{n+e} + g_{bc}(G_{ad}^c - F_{bd}^c)g^{de}\tilde{\varepsilon}_e - \tilde{C}_{ab}\partial_n.$$

Отсюда получаем, что условие  $\tilde{\nabla}_{n+a}\partial_{n+b} \in \Gamma(VD)$  выполняется тогда и только тогда, когда  $G_{ad}^c - F_{bd}^c = 0$  и  $\tilde{C}_{ab} = 0$ . Что и доказывает теорему. Перейдем к расширенному горизонтальному распределению  $\tilde{H}\tilde{D}$ .

**Теорема 3.** *Пусть расширенное горизонтальное распределение  $\tilde{H}\tilde{D}$  инволютивно. Тогда горизонтальное слоение  $F_h$  является вполне геодезическим тогда и только тогда, когда субфинслерова многообразие  $M$  является субримановым многообразием с инволютивным распределением  $D$ .*

Доказательство теоремы следует из того, что условие  $\tilde{\nabla}_a\tilde{\varepsilon}_b \in \Gamma(\tilde{H}\tilde{D})$  эквивалентно тому, что  $C_{ba}^e = 0$  и  $\omega_{ba} = 0$ .

Рассмотрим на многообразии  $D$  два глобально определенных векторных поля

$$L = x^{n+a}\partial_{n+a}, L^* = x^{n+a}\tilde{\varepsilon}_a.$$

Назовем эти поля, соответственно, вертикальным полем Лиувилля и горизонтальным полем Лиувилля. Введем в рассмотрение двумерное распределение  $\tilde{L} = \langle L \rangle \oplus \langle L^* \rangle$ . Проводя непосредственные вычисления, получаем  $[L, L^*] = L^*$ . Таким образом, убеждаемся в справедливости следующего предложения.

**Предложение 3.** *Распределение, порождаемое вертикальным полем Лиувилля и горизонтальным полем Лиувилля, является инволютивным распределением.*

**4. Заключение.** В работах [12, 13, 14, 1, 7] представлен богатейший материал, демонстрирующий, с одной стороны, красоту и прикладные возможности финслеровой геометрии, а с другой стороны, эффективность использования геометрии касательных расслоений в исследовании финслеровых структур. В настоящей работе получены интересные результаты, относящиеся к геометрии слоений на распределениях субфинслеровых многообразий контактного типа. Содержание работ [14, 15, 9] указывает на перспективу дальнейших исследований в этом направлении. В частности, представляется интересным изучение слоений на распределениях субфинслеровых многообразий с метрикой типа Чигера – Громола. Геометрия слоений на распределениях субфинслеровых многообразий имеет свою специфику по отношению к геометрии слоений на касательных расслоениях финслеровых многообразий. Необходимый инструментарий для исследования геометрии слоений на распределениях субфинслеровых многообразий содержат работы [11, 4, 16, 17, 5, 6].

#### Список литературы

1. Bucataru I., Miron, R. Finsler-Lagrange geometry. Applications to dynamical systems. Editura Academiei Romane, Bucharest. 2007. 252 p.
2. Clelland J.N., Moseley C.G. Sub-Finsler geometry in dimension three. *Differential Geometry and its Applications*. 2006;24(6):628–651.
3. Lopez C., Martinez E. *Sub-Finslerian metric associated to an optimal control system*, *SIAM J. Control Optim.* 2000;39:798–811. doi.org/10.1137/S0363012999357562
4. Букушева А.В., Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2012;12(3):17–22.
5. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика*. 2016. 16(3):263–272.
6. Галаев С.В.  $\nabla^N$ -Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021;70:5–15. doi.org/10.17223/19988621/70/1
7. Matsumoto M. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Kaiseisha, Japan, 1986.
8. Miron R., Anastasie M. The geometry of Lagrange spaces: theory and applications. Fundamental Theories of Physics, 59. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1994.

9. Peyghan E., Tayebi A., Zhong C. Foliations on the tangent bundle of Finsler manifolds. *Science China Mathematics*. 2012;55:647–662. doi.org/10.1007/s11425-011-4288-4
10. Raei Z. On the geometry of tangent bundle of Finsler manifold with Cheeger-Gromoll metric. *Journal of Finsler Geometry and its Applications*. 2021;2(1):1-30. doi.org/10.22098/jfga.2021.1260
11. Букушева А.В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2014;14(3):247–151.
12. Bao D, Chern S., Shen Z. An introduction to Riemann-Finsler geometry. Graduate Texts in Mathematics 200. New York: Springer-Verlag, 2000. 435 p.
13. Bejancu A, Farran H.R. Foliations and geometric structures. Mathematics and Its Applications 580. Dordrecht: Springer. 2006. 300 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-3720-1
14. Bejancu A., Farran H.R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle. *Rep. Math Phys*. 2006;58:131–146. doi.org/10.1016/S0034-4877(06)80044-3
15. Manea A. Some new types of vertical 2-jets on the tangent bundle of a Finsler manifold. *Politehn Univ Bucharest Sci Bull Ser A Appl Math Phys*. 2010;72:177–194.
16. Галаев С.В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2017;3:15-23. doi.org/10.3103/S1066369X17030021
17. Галаев С.В. Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой. *Вестник Башкирского университета*. 2016;21(3):551–555.

### References

1. Bucataru I., Miron, R. Finsler-Lagrange geometry. Applications to dynamical systems. Editura Academiei Romane, Bucharest. 2007. 252 p.
2. Clelland J.N., Moseley C.G. Sub-Finsler geometry in dimension three. *Differential Geometry and its Applications*. 2006;24(6):628–651.
3. Lopez C., Martinez E. Sub-Finslerian metric associated to an optimal control system, *SIAM J. Control Optim*. 2000;39:798–811. doi.org/10.1137/S0363012999357562
4. Bukusheva AV., Galaev SV. Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform*. 2012;12(3):17–22. (in Russian)
5. Galaev SV. Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform*. 2016;16(3):263–272. doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-3-263-272 (in Russian)
6. Galaev SV.  $\nabla^N$ -Einstein almost contact metric manifolds. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*. 2021;70:5–15. doi.org/10.17223/19988621/70/1 (in Russian)
7. Matsumoto M. Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces. Kaiseisha, Japan, 1986.
8. Miron R., Anastasie M. The geometry of Lagrange spaces: theory and applications. Fundamental Theories of Physics, 59. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group. 1994.
9. Peyghan E., Tayebi A., Zhong C. Foliations on the tangent bundle of Finsler manifolds. *Science China Mathematics*. 2012;55:647–662. doi.org/10.1007/s11425-011-4288-4
10. Raei Z. On the geometry of tangent bundle of Finsler manifold with Cheeger-Gromoll metric. *Journal of Finsler Geometry and its Applications*. 2021;2(1):1-30. doi.org/10.22098/jfga.2021.1260
11. Bukusheva AV. Foliation on distribution with Finslerian metric. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform*. 2014;14(3):247–151. (in Russian)
12. Bao D, Chern S., Shen Z. An introduction to Riemann-Finsler geometry. Graduate Texts in Mathematics 200. New York: Springer-Verlag, 2000. 435 p.
13. Bejancu A, Farran H.R. Foliations and geometric structures. Mathematics and Its Applications 580. Dordrecht: Springer. 2006. 300 p. https://doi.org/10.1007/1-4020-3720-1
14. Bejancu A., Farran H.R. Finsler geometry and natural foliations on the tangent bundle. *Rep. Math Phys*. 2006;58:131–146. doi.org/10.1016/S0034-4877(06)80044-3
15. Manea A. Some new types of vertical 2-jets on the tangent bundle of a Finsler manifold. *Politehn Univ Bucharest Sci Bull Ser A Appl Math Phys*. 2010;72:177–194.
16. Galaev SV. N-extended symplectic connections in almost contact metric spaces. *Russian Mathematics*. 2017;61:12–19. doi.org/10.3103/S1066369X17030021
17. Galaev SV. Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-hermitian structure. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2016;21(3):551–555. (in Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.12.2023

Поступила после рецензирования 02.02.2024

Принята к публикации 06.02.2024

Received December 22, 2023

Revised February 2, 2024

Accepted February 6, 2024

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Букушева Алия Владимировна** – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Aliya V. Bukusheva** – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Geometry, Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

## Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям

Шишкина Э. Л.<sup>1</sup>, Алзамили Хитам<sup>2</sup>, Кудоси Абдул Мохаммад<sup>2</sup>, Ситник С. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет,  
Россия, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1

<sup>2</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
[ilina\\_dico@mail.ru](mailto:ilina_dico@mail.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается один из классов операторов преобразования. Операторы преобразования – это известный раздел теории дифференциальных уравнений, в его рамках были получены заметные результаты для этой теории. В данной работе рассматривается круг задач для операторов преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса. Эти операторы преобразования, которые были введены в работах указанных математиков, позволяют сплести дифференциальные операторы различной природы со спектральным параметром с аналогичными дифференциальными операторами без спектральных параметров. В частности, на этом пути устанавливаются и явные формулы соответствия между решениями этих двух классов дифференциальных уравнений. Для иллюстрации метода он применяется к некоторым конкретным дифференциальным уравнениям.

**Ключевые слова:** операторы преобразования, операторы Векуа – Эрдейи – Лаундеса, композиционный метод, телеграфное уравнение, функции Бесселя

**Для цитирования:** Шишкина Э. Л., Алзамили Хитам, Кудоси Абдул Мохаммад, Ситник С. М. 2024. Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 27–34.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-27-34

Original Research

## Applications of Transmutations of Vekua – Erdélyi - Lowndes Type to Differential Equations

Ilina L. Shishkina<sup>1</sup>, Alzamili Khitam<sup>2</sup>, Qudosi Abdul Mohammad<sup>2</sup>, Sergei M. Sitnik<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Voronezh State University,  
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia

<sup>2</sup>Belgorod National Research University,  
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia  
[ilina\\_dico@mail.ru](mailto:ilina_dico@mail.ru)

**Abstract.** In the paper we study an important class of transmutations. Transmutation theory is a well-known field of differential equations, by its methods many remarkable results on differential equations were received. We consider an important class of transmutations - Vekua-Erdelyi-Lowndes operators. These transmutations, which were introduced and studied by above mentioned mathematicians, transmute differential operators of different nature with a spectral parameter to similar operators without a spectral parameter. In particular, by this method explicit connection formulas are obtained for solutions of perturbed and unperturbed differential equations. To illustrate our results some special differential equations are considered.

**Keywords:** Transmutations, Vekua – Erdélyi – Lowndes Transmutations, Composition Method, Telegraph Equation, Bessel Functions

**For citation:** Shishkina I. L., Alzamili Hitam, Qudosi Abdul Mohammad, Sitnik S. M. 2024. Applications of Transmutations of Vekua – Erdélyi – Lowndes Type to Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 27–34. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-27-34

**1. Введение.** В этой статье мы развиваем математический метод, состоящий в сведении более сложных задач к более простым и уже решённым. Для этого используется метод операторов преобразования, см. [1, 2, 3, 4]. Этот метод впервые возник в работах Дельсарта и Лионса и затем был развит в работах математиков русской школы В. А. Марченко, Б. М. Левитана и других, достаточно подробный исторический обзор см. в [2].

Кратко напомним основные положения теории операторов преобразования. Пусть дана пара операторов  $(A, B)$ . Говорят, что ненулевой оператор преобразования  $T$  преобразует (сплетает) операторы  $(A, B)$ , если выполняется на подходящих функциях следующее соотношение

$$T A = B T. \quad (1)$$

В конкретных ситуациях оператор преобразования  $T$  часто является интегральным с некоторым ядром, и во многих задачах он может быть найден в явном виде. Важным моментом также является выбор подходящего пространства функций, для которого выполняется равенство (1).

В данной статье мы рассматриваем специальный класс операторов преобразования, который сплетает операторы  $A + \lambda_1$  и  $A + \lambda_2$ , где  $A$  является оператором, действующим в паре пространств  $S_1, S_2$ , постоянные  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Кратко, мы рассматриваем операторы преобразования, которые переводят некоторый дифференциальный оператор со спектральным параметром в тот же оператор, но без спектрального параметра. Такие операторы впервые вводились в разных ситуациях в работах А. Эрдейи [5, 6, 7, 8], И. Н. Векуа [9] и Дж. С. Лаундеса [10, 11, 12]. Поэтому в работе [13] этот класс было предложено называть: *операторы преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса*, или сокращённо операторы ВЭЛ. Эти операторы подробнее рассматривались в [4, 14].

В этой работе с использованием операторов преобразования ВЭЛ устанавливаются формулы связи между решениями задачи Коши для уравнений вида  $w_{tt} = Aw$  и решений подобных уравнений со спектральным параметром  $w_{tt} \pm c^2 w = Aw$ , где  $w = w(x, t)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $A$  есть линейный оператор, действующий по переменной  $x \in \mathbb{R}^n$ . Этот класс задач включает, например, телеграфное уравнение, уравнение Гельмгольца, уравнение Буссинеска и ряд других.

Отметим, что в [2] подробно изложена теория операторов преобразования для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, включая операторы Бесселя. Также в [15] изучены композиции операторов преобразования типа ВЭЛ для дифференциальных операторов высоких порядков, в частности, для итерированных операторов Бесселя. Оператор преобразования, ассоциированный с группой  $S_3$ , который отображает обычный Лапласиан в инвариантный дифференциальный оператор второго порядка на Римановом симметричном пространстве, был построен в [16].

## 2. Операторы преобразования в форме интегральных операторов Вольтерра второго рода.

В этом разделе мы построим операторы преобразования  $S_c^\pm$  со сплетающим свойством

$$S_c^\pm D^2 = (D^2 \pm c^2) S_c^\pm.$$

**Теорема 2.1.** Пусть  $f \in C^2$ . Тогда существует оператор преобразования, удовлетворяющий тождеству

$$S_c^\pm D^2 f = (D^2 \pm c^2) S_c^\pm f, \quad (2)$$

где  $D = \frac{d}{dt}$ , и имеющий форму интегрального оператора Вольтерра второго рода

$$(S_c^\pm f)(t) = f(t) + \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

с ядром

$$K^\pm(t, \tau) = \frac{c\sqrt{t+\tau}}{2\sqrt{t-\tau}} \begin{cases} -J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}); \\ I_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}). \end{cases}$$

При этом ядро  $K^\pm(t, \tau)$  является гладким по обоим переменным.

**Доказательство.** Подстановка в формулу (2) приводит к соотношению

$$\int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f''(\tau) d\tau = \frac{d^2}{dt^2} \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau \pm c^2 \left( f(t) + \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f''(\tau) d\tau &= K^\pm(t, t) f'(t) - K^\pm(t, -t) f'(-t) - K_\tau^\pm(t, \tau) |_{\tau=t} f(t) + \\ &+ K_\tau^\pm(t, \tau) |_{\tau=-t} f(-t) + \int_{-t}^t K_{\tau\tau}^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau = \\ & = \int_{-t}^t K_{tt}^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau + K_t^\pm(t, \tau) \Big|_{\tau=t} f(t) - K_t^\pm(t, \tau) \Big|_{\tau=-t} f(-t) + \\ & + \frac{K^\pm(t, t)}{dt} f(t) + K^\pm(t, t) f'(t) - \frac{K^\pm(t, -t)}{dt} f(-t) - K^\pm(t, -t) f'(-t), \end{aligned}$$

то получаем

$$K_{\tau\tau}^\pm(t, \tau) = K_{tt}^\pm(t, \tau) \pm c^2 K^\pm(t, \tau), \tag{4}$$

$$\frac{dK^\pm(t, t)}{dt} + \lim_{\tau \rightarrow t} (K_t^\pm(t, \tau) + K_t^\pm(t, \tau)) = \mp c^2, \tag{5}$$

$$\frac{dK^\pm(t, -t)}{dt} + \lim_{\tau \rightarrow -t} (K_t^\pm(t, \tau) + K_t^\pm(t, \tau)) = 0. \tag{6}$$

Пусть  $K^\pm(t, \tau) \in C^1(\Omega)$ ,  $\overline{\Omega} \cap \{(t, \tau) \mid t = \tau\} \neq \emptyset$ . Тогда для  $(t, x) \in \Omega$  выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} K^\pm(t, t) = \lim_{\tau \rightarrow t} \left( \frac{\partial K^\pm(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial K^\pm(t, \tau)}{\partial \tau} \right).$$

Таким образом условия (5) и (6) принимают вид

$$\frac{dK^\pm(t, t)}{dt} = \mp \frac{c^2}{2} \tag{7}$$

и

$$K^\pm(t, -t) = const. \tag{8}$$

Введём новые переменные

$$u = \frac{t + \tau}{2}, \quad v = \frac{t - \tau}{2}. \tag{9}$$

Используя обозначения  $H^\pm(u, v) = K^\pm(u + v, u - v) = K^\pm(t, \tau)$  получаем задачу

$$H_{u,v}^\pm(u, v) = \mp c^2 H^\pm(u, v), \tag{10}$$

$$H^\pm(u, 0) = \mp \frac{c^2}{2} u. \tag{11}$$

Для получения ядер, удовлетворяющих (10)–(11), используем формулу

$$H^\pm(u, v) = \mp \frac{c^2}{2} u \mp c^2 \int_0^u d\alpha \int_0^v H^\pm(\alpha, \beta) d\beta. \tag{12}$$

Итерации определяются по формулам

$$H_0^\pm(u, v) = \mp \frac{c^2}{2} u,$$

$$H_{n+1}^\pm(u, v) = \mp c^2 \int_0^u d\alpha \int_0^v H_n^\pm(\alpha, \beta) d\beta.$$

Из первых итераций получаем

$$H_1^\pm(u, v) = \frac{1}{2} (\mp c^2)^2 \frac{u^2}{2!} v,$$

$$H_2^\pm(u, v) = \frac{1}{2} (\mp c^2)^3 \frac{u^3}{3!} \frac{v^2}{2!}$$

и

$$H_n^\pm(u, v) = \frac{1}{2} \frac{(\mp c^2)^{n+1}}{n!(n+1)!} u^{n+1} v^n.$$

Теперь используем формулы для функций Бесселя первого рода и модифицированных функций Бесселя первого рода для  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  (see [17]):

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n!(m+n)!} x^{2n+m}, \quad I_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+m} n!(m+n)!} x^{2n+m}$$

Суммируя ряд Неймана, получаем

$$H^{\pm}(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp c^2)^{n+1}}{n!(n+1)!} u^{n+1} v^n = \frac{c\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \begin{cases} -J_1(2c\sqrt{uv}); \\ I_1(2c\sqrt{uv}). \end{cases}$$

Используя асимптотические формулы для  $0 < x \ll \sqrt{\alpha+1}$  вида

$$J_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha}$$

и соотношение  $I_{\alpha}(x) = i^{-\alpha} J_{\alpha}(ix)$ , получаем, что соотношение (11) является верным.

Возвращаясь к переменным  $x$  и  $t$ , получаем

$$K^{\pm}(t, \tau) = \frac{c\sqrt{t+\tau}}{2\sqrt{t-\tau}} \begin{cases} -J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}); \\ I_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что  $K^{\pm}(t, -t) = 0$  и условие (8) выполнено. Теорема 2.1. полностью доказана.

### 3. Приложения операторов преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса к задачам Коши.

В этом разделе мы получим результаты, основанные на основной идее операторов преобразования: получить явное решение более сложной задачи из более простой.

**Теорема 3.1.** Пусть  $A$  – линейный оператор, действующий по переменным  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , а  $w$  есть решение задачи

$$w_{tt} = Aw, \quad w = w(x, t), \quad (13)$$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_t(x, 0) = g(x). \quad (14)$$

Тогда функция

$$w^c = S_+ w,$$

где

$$(S_+)_t w(x, t) = w(x, t) - \frac{c}{2} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) d\tau$$

есть решение другой задачи

$$w_{tt}^c + c^2 w^c = Aw^c, \quad w^c = w^c(x, t), \quad (15)$$

$$w^c(x, 0) = f(x), \quad w_t^c(x, 0) = g(x). \quad (16)$$

**Доказательство.** Нетрудно заметить, что  $w^c(x, 0) = w(x, 0)$ , поэтому если  $w$  удовлетворяет первому условию в (14), тогда  $w^c$  удовлетворяет первому условию в (16) и наоборот.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} w_t^c(x, t) &= w_t(x, t) - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) d\tau = w_t(x, t) - \frac{c}{2} \times \\ &\times \left( \lim_{\tau \rightarrow t} \left( \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) \right) - \lim_{\tau \rightarrow -t} \left( \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-t}^t \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) d\tau \right) = \\ &= w_t(x, t) - \frac{c^2}{2} \left( t w(x, t) + \int_{-t}^t \left( \frac{t J_0(c\sqrt{t^2-\tau^2})}{t-\tau} - \frac{\sqrt{t+\tau}}{c(t-\tau)^{3/2}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) \right) w(x, \tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Таким образом, устремляя к пределу  $t \rightarrow 0$ , получаем  $w_t^c(x, 0) = w_t(x, 0)$ .

Покажем, что если  $w$  удовлетворяет уравнению (13), тогда  $w^c$  удовлетворяет уравнению (15). Действительно,

$$(D_t^2 + c^2)w^c = (D_t^2 + c^2)S_+w = S_+D_t^2w = S_+Aw = ASw = Aw^c,$$

поэтому  $(D_t^2 + c^2)w^c = Aw^c$ , и, следовательно,  $w^c$  удовлетворяет (15). Теорема 3.1. доказана.

Аналогично, получается

**Теорема 3.2.** Пусть  $A$  является линейным оператором, действующим по переменным  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , а функция  $w$  является решением задачи

$$\begin{aligned} w_{tt} &= Aw, & w &= w(x, t), \\ w(x, 0) &= f(x), & w_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Тогда функция

$$w^c = S_-w,$$

где

$$(S_-)_t w(x, t) = w(x, t) + \frac{c}{2} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} I_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) d\tau$$

является решением другой задачи

$$\begin{aligned} w_{tt}^c - c^2w^c &= Aw^c, & w^c &= w^c(x, t), \\ w^c(x, 0) &= f(x), & w_t^c(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

**Пример 3.1.** Рассмотрим одномерное волновое уравнение следующего вида

$$w_{tt} = a^2w_{xx}$$

с начальными условиями

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_t(x, 0) = g(x).$$

Его решение даётся по формуле Д'Аламбера, см. [18, стр. 64]:

$$w(x, t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds.$$

Тогда по теореме 3.1 получаем, что

$$\begin{aligned} w^c(x, t) &= (S_+)_t w(x, t) = w(x, t) - \frac{c}{2} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) w(x, \tau) d\tau = \\ &= \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} - \frac{c}{4} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) (f(x-a\tau) + f(x+a\tau)) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds - \frac{c}{4a} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) \left( \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} g(s) ds \right) d\tau \end{aligned} \tag{17}$$

является решением телеграфного уравнения

$$\begin{aligned} w_{tt}^c &= a^2w_{xx}^c - c^2w^c. \\ w^c(x, 0) &= f(x), & w_t^c(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Преобразуем второе слагаемое в (17)

$$\begin{aligned} &\frac{c}{4} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) (f(x-a\tau) + f(x+a\tau)) d\tau = \\ &= \frac{c}{4} \int_{-t}^t \frac{t+\tau}{\sqrt{t^2-\tau^2}} J_1(c\sqrt{t^2-\tau^2}) [f(x-a\tau) + f(x+a\tau)] d\tau = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{ct}{2} \int_{-t}^t \frac{J_1(c\sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} f(x - a\tau) d\tau = \{x + a\tau = s\} = \\
&= \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1\left(c\sqrt{t^2 - \left(\frac{x-s}{a}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{x-s}{a}\right)^2}} f(s) ds.
\end{aligned}$$

Кроме того, в выражении

$$\int \tau \frac{J_1(c\sqrt{t^2 - \tau^2})}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{c} \left( J_0(c\sqrt{t^2 - \tau^2}) - 1 \right) + C$$

мы преобразуем третье и четвертое слагаемые в (17):

$$\begin{aligned}
&(S_+)_t \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds = \\
&= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds - \frac{c}{4a} \int_{-t}^t \frac{t + \tau}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} J_1(c\sqrt{t^2 - \tau^2}) \left( \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} g(s) ds \right) d\tau = \\
&= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} J_0\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-s)^2}{a^2}}\right) g(s) ds.
\end{aligned}$$

Окончательно, мы получаем известную формулу, см. [19, стр. 302]

$$\begin{aligned}
w^c(x, t) &= \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} - \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-s)^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-s)^2}{a^2}}} f(s) ds + \\
&+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} J_0\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-s)^2}{a^2}}\right) g(s) ds.
\end{aligned}$$

**Пример 3.2.** Рассмотрим уравнение, которое встречается при изучении трансверсальных колебаний эластичного стержня

$$w_{tt} = -a^2 w_{xxxx}, \quad w = w(x, t). \quad (18)$$

Добавим условие по переменной  $x \in \mathbb{R}$

$$w(x, 0) = f(x), \quad w_t(x, t) = ag''(x). \quad (19)$$

Получаем задачу Коши для уравнения Буссинеска (см. [19, стр. 617])

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2p\sqrt{at}) (\cos(p^2) + \sin(p^2)) dp + \\
&+ \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - 2p\sqrt{at}) (\cos(p^2) - \sin(p^2)) dp.
\end{aligned}$$

Как следствие нашей теоремы 3.1 получаем, что

$$\begin{aligned}
w^c(x, t) &= (S_+)_t w(x, t) = w(x, t) - \frac{c}{2} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2 - \tau^2}) w(x, \tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2p\sqrt{at}) (\cos(p^2) + \sin(p^2)) dp +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x - 2p\sqrt{at})(\cos(p^2) - \sin(p^2))dp - \\
& - \frac{c}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2 - \tau^2}) \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2p\sqrt{a\tau})(\cos(p^2) + \sin(p^2))dp \right) d\tau - \\
& - \frac{c}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t \frac{\sqrt{t+\tau}}{\sqrt{t-\tau}} J_1(c\sqrt{t^2 - \tau^2}) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x - 2p\sqrt{a\tau})(\cos(p^2) - \sin(p^2))dp \right) d\tau
\end{aligned}$$

есть решение задачи Коши для возмущённого уравнения типа Буссинеска со спектральным параметром.

$$w_{tt}^c = -a^2 w_{xxxx}^c - c^2 w^c.$$

$$w^c(x, 0) = f(x), \quad w_t^c(x, 0) = ag''(x).$$

**4. Заключение.** Мы используем метод теории операторов преобразования для связи возмущённых уравнений с невозмущёнными. Этот метод также может быть применён для вывода похожих формул для других уравнений или областей. Следует отметить, что метод существенно использует интегрирование по частям, при котором внеинтегральные члены должны сократиться. Рассмотрены в качестве примеров явные формулы для решений задачи Коши для уравнения Гельмгольца и уравнения Буссинеска со спектральным параметром.

#### References

1. Carroll RW, Showalter RE. Singular and Degenerate Cauchy problems. Academic Press, New York; 1976. 343 p.
2. Katrakhov VV., Sitnik SM. The Transmutation Method and Boundary-Value Problems for Singular Elliptic Equations. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 2018;64(2):211–426. (in Russian)
3. Kravchenko VV., Sitnik SM. (Eds.) Some recent developments in the transmutation operator approach. Springer International Publishing, Cham; 2020. 686 p.
4. Shishkina EL., Sitnik SM. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Elsevier, Amsterdam; 2020. 592 p.
5. Erdélyi A. On fractional integration and its application to the Hankel transforms. *Quart. J. Math. Oxford*. 1940;11:293–303.
6. Erdélyi A. An integral equation involving Legendre functions. *SIAM Rev*. 1964;12:1:15–30.
7. Erdélyi A. An application of fractional integrals. *J. Analyse Math*. 1965;14:113–126.
8. Erdélyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals. *Glasgow Math. J*. 1967;8:1:50–54.
9. Vekua IN. New Methods for Solving Elliptic Equations. North-Holland Series in Applied Mathematics & Mechanics), North-Holland Publishing Company, 1967. 358 p.
10. Lowndes JS. An application of some fractional integrals. *Glasg. Math. J*. 1979;20:1:35–41.
11. Lowndes JS. On some generalizations of Riemann–Liouville and Weil fractional integrals and their applications. *Glasg. Math. J*. 1981;22:2:73–80.
12. Lowndes JS. Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients. *Proc. Edinb. Math. Soc*. 1983;26:3:97–105.
13. Sitnik SM., Lyakhovetskii GV. The Vekua-Erdelyi-Lowndes transmutations. Preprint. Institute of automation and control processes of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 1994. (in Russian).
14. Sitnik SM., Lyakhovetskii GV. Construction of Vekua-Erdelyi-Laundes transformation operators. "Differential equations, theory of functions and applications". International conference dedicated to the 100th anniversary of the birth of Academician Ilya Nestorovich Vekua. Abstracts of reports. Novosibirsk, 2007, 469–470. (in Russian).
15. Karimov ShT. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order, *Filomat* 2018;32:3:873–883.
16. Beerends RJ. A transmutation property of the generalized Abel transform associated with root system  $A_2$ . *Indag. Math. (N.S.)*. 1990;1:155–168.
17. Abramowitz M., Stegun I. (Eds.) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, 1972. 1060 p.
18. Karapetyants AN., Kravchenko VV. Methods of Mathematical Physics: Classical and Modern. Birkhäuser, Cham, Switzerland, 2022. 405 p.
19. Polyanin AD. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. Chapman & Hall/CRC Press, 2002. 800 p.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.11.2023

Поступила после рецензирования 10.01.2024

Принята к публикации 14.02.2024

Received November 27, 2023

Revised January 10, 2024

Accepted February 14, 2024

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Шишкина Элина Леонидовна** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладного и математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**Алзамили Хитам** – аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Кудоси Абдул Мохаммад** – аспирант кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Ситник Сергей Михайлович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Ilina L. Shishkina** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied and Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Alzamili Khitam** – Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Qudosi Abdul Mohammad** – Postgraduate student of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Sergei M. Sitnik** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING



УДК 517.927

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-35-49

MSC 34A06

Оригинальное исследование

### Модель деформаций стержня – консоли с ограничителем на смещение

Зверева М. Б.<sup>1</sup> , Каменский М. И.<sup>2</sup> , Шабров С. А.<sup>1</sup>   
(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Глушаком)

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет,  
Россия, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1

<sup>2</sup>Воронежский государственный педагогический университет,  
Россия, 394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86  
[margz@rambler.ru](mailto:margz@rambler.ru), [mikhailkamenski@mail.ru](mailto:mikhailkamenski@mail.ru), [shaspoteha@mail.ru](mailto:shaspoteha@mail.ru)

**Аннотация.** В настоящей работе исследуется модель деформаций сингулярного стержня – консоли под воздействием внешней силы. При этом предполагается, что один из концов стержня шарнирно закреплен, а смещение свободного конца стержня ограничено препятствием. Соответствующая модель реализуется в форме граничной задачи для интегро–дифференциального уравнения с интегрированием по Стильтесу и нелинейным краевым условием. Проведено вариационное обоснование модели, получены необходимые и достаточные условия минимума соответствующего функционала потенциальной энергии. Доказаны теоремы существования и единственности решения исследуемой модели, в явном виде выписана формула представления решения.




**Ключевые слова:** ограниченная вариация, интеграл Стильтеса, абсолютно непрерывная функция, внешний нормальный конус, граничная задача, модель деформаций стержня

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

**Для цитирования:** Зверева М. Б., Каменский М. И., Шабров С. А. 2024. Модель деформаций стержня – консоли с ограничителем на смещение. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 35–49. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-35-49

Original Research

### A Model of Deformations of a Rod – Console With a Displacement Limiter

Margarita B. Zvereva<sup>1</sup> , Mikhail I. Kamenskii<sup>2</sup> , Sergey A. Shabrov<sup>1</sup>   
(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Glushak)

<sup>1</sup>Voronezh State University,  
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia

<sup>2</sup>Voronezh State Pedagogical University,  
86 Lenina st., Voronezh, 394043, Russia  
[margz@rambler.ru](mailto:margz@rambler.ru), [mikhailkamenski@mail.ru](mailto:mikhailkamenski@mail.ru), [shaspoteha@mail.ru](mailto:shaspoteha@mail.ru)

**Abstract.** In the present paper a model of deformations of a singular rod – console under the influence of an external force is studied. We assume that one of the ends of the rod is hinged, and the displacement of the free end of the console is restricted by a limiter. Depending on the applied external force this end of the console either remains the internal point of the limiter or touches the boundary of the limiter. The corresponding model is implemented in the form of a boundary value problem for an integro-differential equation with the Stieltjes integral and a nonlinear boundary condition. A variational justification of the model is carried out; the necessary and sufficient conditions for the minimum of the corresponding potential energy functional are established; theorems of existence and uniqueness of the solution to the model are proved; a formula for representing of the solution is written out explicitly; the solution dependence on the size of the limiter is studied.

**Keywords:** Bounded Variation, Stieltjes Integral, Absolutely Continuous Function, Outward Normal Cone, Boundary Value Problem, Rod Deformation Model

**Acknowledgements:** The work is supported by the Russian Science Foundation (project number 22-71-10008).

**For citation:** Zvereva M. B., Kamenskii M. I., Shabrov S. A. 2024. A Model of Deformations of a Rod – Console With a Displacement Limiter. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 35–49. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-35-49

**1. Введение.** Дифференциальное уравнение вида

$$(pu'')'' + qu = f \quad (1)$$

является основой разных моделей естествознания, поэтому исследованию этого уравнения посвящено много работ (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15] и библиографию в них). Изучаемое в данной статье уравнение (1) может иметь особенности в коэффициентах и правой части (типа  $\delta$ -функции). Мы будем придерживаться подхода Ю. В. Покорного, согласно которому такого рода уравнение заменяется интегро-дифференциальным уравнением

$$(pu'')'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0) \quad (2)$$

с интегрированием по Стильтесу. На протяжении всей статьи предполагается, что

- 1) функции  $p, F$  имеют ограниченную вариацию на  $[0, l]$ , и  $\inf_{x \in [0, l]} p(x) > 0$ ;
- 2) функция  $Q$  не убывает на  $[0, l]$ ;
- 3) функции  $p, Q, F$  непрерывны в точках  $x = 0$  и  $x = l$ .

Заметим, что в случае гладких  $p, Q, F$  уравнение (2) эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению (1), где  $q = Q', f = F'$ .

В настоящей работе для уравнения (2) будет рассмотрена граничная задача с нелинейным краевым условием. Такая задача возникает при моделировании деформаций стержня, расположенного вдоль отрезка  $[0, l]$  оси  $Ox$ , под воздействием внешней нагрузки. Предполагается, что один конец стержня шарнирно закреплен. Второй конец свободен, однако не может выйти за пределы установленного ограничителя на перемещение. Пусть функция  $F(x)$  описывает внешнюю силу, направленную параллельно  $Oy$ , на участке от 0 до  $x$ , где  $x \in [0, l]$ . Через  $u(x)$  обозначим функцию, описывающую деформацию стержня под воздействием этой силы. Условие шарнирного закрепления означает, что  $u(0) = 0, u''(0) = 0$ . Ограничение на смещение второго конца может быть записано как  $u(l) \in C$ . Рассмотрим случай, когда  $C = [-m, m]$ . В зависимости от приложенной внешней силы,  $u(l)$  либо остается внутренней точкой  $C$ , либо становится граничной точкой  $C$ . Соответствующая математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ u''(l) = 0, \\ (pu'')'(l) \in N_C(u(l)), \end{cases} \quad (3)$$

где  $N_C(u(l))$  обозначает внешний нормальный конус (см. [12]) в точке  $u(l) \in C$  ко множеству  $C$ , определяемый как

$$N_C(u(l)) = \{\xi \in R : \xi(c - u(l)) \leq 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Здесь функция  $Q(x)$  описывает упругую реакцию внешней среды,  $p(x)$  определяется свойствами материала стержня. Решения  $u(x)$  задачи (3) будем рассматривать в классе  $E$  абсолютно непрерывных на  $[0, l]$  функций, производные которых абсолютно непрерывны. Более того, мы предполагаем, что функция  $pu''$  абсолютно непрерывна на  $[0, l]$ , и  $(pu'')$ ' имеет ограниченную вариацию на  $[0, l]$ .

В настоящей работе проведено вариационное обоснование и установлена корректность модели (3).

**2. Предварительные сведения.** В этом разделе выпишем основные понятия и факты, которыми будем пользоваться.

**Пространство  $BV[0, l]$**  (см. [8], [13]). Это пространство определено для множества функций, чья вариация

$$V_0^l(v) = \sup_{0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_k \leq l} \sum_{i=0}^{k-1} |v(x_{i+1}) - v(x_i)|$$

ограничена. Согласно теореме Жордана, всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух неубывающих функций.

**Скачки функций.** Для любой функции  $v(x)$  из  $BV[0, l]$  в любой точке  $\xi \in (0, l)$  ( $\xi \in [0, l)$ ) существуют предел слева, т. е.  $v(\xi - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} v(x)$  и предел справа  $v(\xi + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} v(x)$ . Скачком функции  $v(x)$  в точке  $x = \xi$  называется величина  $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$  ( $v(0 - 0) = v(0)$  и  $v(l + 0) = v(l)$ ).

Через  $S(v)$  будем обозначать множество точек разрыва функции  $v(x)$ . Для любой  $v \in BV[0, l]$  множество  $S(v)$  не более чем счетно.

**Интеграл Римана – Стильеса** (см. [8],[13]). Для пары функций  $f(x), \mu(x)$  интеграл  $\int_0^l f(x)d\mu(x)$  определяется как предел интегральных сумм

$$\left( \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)) \right),$$

когда  $\max_i |x_{i+1} - x_i| \rightarrow 0$ . В частности, если одна из функций  $f(x), \mu(x)$  непрерывна, а вторая имеет ограниченную вариацию, то интеграл  $\int_0^l f d\mu$  наверняка существует.

**Теорема о преобразовании меры** (см. [8],[13]). Для любой функции  $\sigma(x)$  из  $BV[0, l]$  и непрерывных функций  $w(x), \varphi(x)$  верно равенство

$$\int_0^l \varphi d\mu = \int_0^l \varphi w d\sigma,$$

$$\text{где } \mu(x) = \int_0^x w d\sigma + \text{const.}$$

**Абсолютно непрерывная функция** (см. [8],[13]). Функция  $v$  называется абсолютно непрерывной на  $[0, l]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$ , что для любой конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов  $(\alpha_i, \beta_i)$  с суммой длин меньше  $\delta$ , т. е.

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \delta$$

выполняется неравенство

$$\sum_i |v(\beta_i) - v(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Согласно теореме Лебега, производная  $w = v'$  абсолютно непрерывной функции интегрируема, и для любого  $x \in [0, l]$  верно равенство

$$\int_0^x w(x) dx = v(x) - v(0).$$

Заметим, что любая абсолютно непрерывная на  $[0, l]$  функция имеет ограниченную вариацию на  $[0, l]$ .

**Лемма 2.1.** (см. [2]). Пусть функция  $G(x)$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, l]$ . Пусть для любой функции  $h \in E$ , удовлетворяющей условиям  $h(0) = h'(0) = 0, h(l) = h'(l) = 0$ , верно равенство

$$\int_0^l h' dG = 0.$$

Тогда для всех  $x \in (0, l)$  выполнено равенство

$$G(x-0) = G(x+0) \equiv ax + b.$$

**Интегро-дифференциальное уравнение** (см. [2]).

Уравнение

$$(pu'')'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0) \quad (4)$$

играет важную роль в этой статье. Оно содержит разрывные функции  $p(x), Q(x), F(x)$  и интеграл Стильеса. Для того, чтобы иметь возможность корректно определить уравнение (4) в каждой точке введем следующие понятия. Пусть  $S$  – множество точек, в которых функции  $p(x), Q(x), F(x)$  имеют ненулевые скачки. Через  $[0, l]_\sigma$  обозначим множество, полученное из  $[0, l]$  заменой точек  $\xi \in S$  на пары  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ . При этом предполагается, что  $\xi - 0 > x$  для всех  $x < \xi$  и  $\xi + 0 < x$  для любых  $x > \xi$ . Множеству  $[0, l]_\sigma$  можно дать строгое определение как одномерному метрическому пространству. Рассмотрев жордановы представления функций ограниченной вариации  $p, F$  в виде разности неубывающих функций, т. е.  $p = p^+ - p^-$  и  $F = F^+ - F^-$  обозначим через  $\sigma$  следующую функцию

$$\sigma(x) = x + p^+(x) + p^-(x) + Q(x) + F^+(x) + F^-(x). \quad (5)$$

Заметим, что функции из жорданова представления можно выбрать так, что  $\sigma(x)$  разрывна только в точках из  $S$ . Введем на множестве  $[0, l] \setminus S$  метрику  $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ . Если  $S \neq \emptyset$ , то это метрическое пространство, очевидно, не является полным. Его стандартное метрическое пополнение (с точностью до изоморфизма) совпадает с  $\overline{[0, l]}_\sigma$  и индуцирует на нем топологию.

Будем рассматривать уравнение (4), когда переменная  $x$  принадлежит  $\overline{[0, l]}_\sigma$ , т. е.  $x$  не совпадает с точками разрыва  $p, Q, F$ . Функции  $p(\cdot), Q(\cdot), F(\cdot)$  становятся непрерывными на  $\overline{[0, l]}_\sigma$ , поскольку величины  $p(\xi \pm 0), Q(\xi \pm 0)$  и  $F(\xi \pm 0)$ , которые были ранее предельными, теперь становятся собственными в соответствующих точках из  $\overline{[0, l]}_\sigma$ . Непрерывность функций  $u(\cdot)$  позволяет сохранить обычный смысл интеграла Римана – Стильтеса в уравнении (4), когда  $x = \xi - 0$  и  $x = \xi + 0$ .

Таким образом, уравнение (4) рассматривается послойно: нижний уровень для значений  $x \in [0, l]$ , когда речь идет о самих решениях  $u(x)$  (под знаком интеграла), и верхний уровень для остальных  $x$  в (4), где  $x \in \overline{[0, l]}_\sigma$ .

Заметим, что в каждой точке  $\xi \in S$  имеет место равенство

$$\Delta(pu'')'(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi).$$

Нам также понадобятся следующие теоремы из [2].

**Теорема 2.1** Для любых чисел  $u_0, u_1, u_2, u_3$  и для любой точки  $x_0 \in \overline{[0, l]}_\sigma$  задача

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(x_0) = u_0, \\ u'(x_0) = u_1, \\ u''(x_0) = u_2, \\ (pu'')'(x_0) = u_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$(pu'')'(x) + \int_0^x u dQ = (pu'')'(0). \quad (6)$$

Из теоремы 2.1 следует, что пространство решений уравнения (6) имеет размерность 4.

Определим аналог определителя Вронского  $W(x)$  на множестве  $\overline{[0, l]}_\sigma$  как

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \\ \varphi_1''(x) & \varphi_2''(x) & \varphi_3''(x) & \varphi_4''(x) \\ (p\varphi_1'')'(x) & (p\varphi_2'')'(x) & (p\varphi_3'')'(x) & (p\varphi_4'')'(x) \end{vmatrix}, \quad (7)$$

где  $\varphi_i(x) (i = 1, 2, 3, 4)$  – решения однородного уравнения (6).

**Теорема 2.2** Пусть функции  $\varphi_i(x) (i = 1, 2, 3, 4)$  являются решениями однородного уравнения (6).

Следующие свойства эквивалентны:

1) существует точка  $x_0 \in \overline{[0, l]}_\sigma$  такая, что  $W(x_0) = 0$ ;

2)  $W(x_0) \equiv 0$  на множестве  $\overline{[0, l]}_\sigma$ ;

3) функции  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$  линейно независимы.

**Теорема 2.3.** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$  и  $\varphi_4(x)$  – решения однородного уравнения (6). Тогда  $(pW)(x) \equiv \text{const}$  на множестве  $\overline{[0, l]}_\sigma$ .

**3. Вариационное обоснование модели.** Покажем, что задача (3) является необходимым условием экстремума функционала потенциальной энергии рассматриваемой физической системы. Согласно [2], если деформация стержня определяется функцией  $u(x)$ , то его потенциальная энергия имеет вид

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{p(x)u''^2(x)}{2} dx + \int_0^l \frac{u^2(x)}{2} dQ(x) - \int_0^l u(x) dF(x). \quad (8)$$

Подчеркнем, что функция  $u(x)$  – это гипотетическая (виртуальная) деформация. Рассмотрим функционал  $\Phi(u)$  на множестве функций  $u \in E$  таких, что

$$u(0) = 0, \quad u(l) \in C. \quad (9)$$

Согласно принципу Гамильтона – Лагранжа, реальная деформация  $u_0(x)$  минимизирует функционал  $\Phi$  с условиями (9). Пусть функции  $h \in E$  такие, что

$$h(0) = h'(0) = 0, \quad h(l) = h'(l) = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим функции  $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$ , где  $\lambda$  – вещественное число. Заметим, что  $u \in E$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u'(0) = 0$ ,  $u(l) = u_0(l) \in C$ . Тогда

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав  $h$ , рассмотрим функцию  $\varphi_h(\lambda)$  вещественного аргумента  $\lambda$ , определенную как  $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ . Тогда для всех чисел  $\lambda$  выполнено неравенство

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda),$$

и по теореме Ферма  $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ . Последнее равенство может быть записано как

$$\int_0^l pu_0'' h'' dx + \int_0^l u_0 h dQ - \int_0^l h dF = 0.$$

Обозначим

$$g(x) = \int_0^x u_0 dQ. \quad (11)$$

После интегрирования по частям получим равенства

$$\begin{aligned} \int_0^l pu_0'' dh' + \int_0^l h dg - \int_0^l h dF = 0, \\ p(l)u_0''(l)h'(l) - p(0)u_0''(0)h'(0) - \int_0^l h' d(pu_0'') + h(l)g(l) - h(0)g(0) - \int_0^l gh' dx - \\ - h(l)F(l) + h(0)F(0) + \int_0^l Fh' dx = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом условий (10), последнее равенство примет вид

$$\int_0^l h' d(pu_0'') + \int_0^l gh' dx - \int_0^l Fh' dx = 0.$$

Обозначим  $\tilde{g}(x) = \int_0^x g(s) ds$ ,  $\tilde{F}(x) = \int_0^x F(s) ds$ . Тогда

$$\int_0^l h' d((pu_0'') + \tilde{g} - \tilde{F}) = 0. \quad (13)$$

Равенство (13) выполнено для всех функций  $h \in E$ , удовлетворяющих (10). Применив лемму 2.1, получим

$$(pu_0'')(x) + \tilde{g}(x) - \tilde{F}(x) = ax + b,$$

т. е.

$$(pu_0'')(x) = \int_0^x F(s) ds + ax + b - \int_0^x g(s) ds. \quad (14)$$

Следовательно, функция  $(pu_0'')$  абсолютно непрерывна и

$$(pu_0'')'(x) + \int_0^x u_0 dQ = F(x) + a. \quad (15)$$

Перепишем равенство (15), как

$$(pu_0'')'(x) + \int_0^x u_0 dQ = (pu_0'')'(0) + F(x) - F(0). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь функции  $h$  такие, что  $h \in E$ ,

$$h(0) = h'(0) = 0, \quad h(l) = 0 \quad (17)$$



и функции  $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$ , где  $\lambda \in R$ . Заметим, что  $u \in E$ ,  $u(0) = 0$ ,  $u(l) = u_0(l) \in C$ . Тогда

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав  $h$ , обозначим  $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ . Аналогично, по теореме Ферма  $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ , и из (12) с учетом условий (17), получим

$$p(l)u_0''(l)h'(l) - \int_0^l h' d(pu_0'') - \int_0^l gh' dx + \int_0^l Fh' dx = 0,$$

где  $g(x)$  определена (11). С учетом (14), последнее равенство принимает вид

$$p(l)u_0''(l)h'(l) - \int_0^l h'(F(x) + a - g(x))dx - \int_0^l gh' dx + \int_0^l Fh' dx = 0.$$

Поскольку  $h(l) = h(0) = 0$ , то

$$p(l)u_0''(l)h'(l) = 0.$$

Следовательно,

$$p(l)u_0''(l) = 0. \quad (18)$$

Аналогично, рассматривая функции  $h \in E$ , удовлетворяющие условиям  $h(0) = 0$ ,  $h(l) = 0$ ,  $h'(l) = 0$ , получим

$$p(0)u_0''(0) = 0. \quad (19)$$

Зафиксируем теперь любой элемент  $c \in C$ . Рассмотрим функцию  $h$  такую, что  $h \in E$ ,  $h(0) = 0$ ,  $h(l) = c - u_0(l)$ . Пусть  $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$ . Заметим, что  $u \in E$ , и  $u(0) = 0$ . Выпишем условие в точке  $x = l$ . Имеем

$$\begin{aligned} u(l) &= u_0(l) + \lambda h(l) = u_0(l) + \lambda(c - u_0(l)) = \\ &= \lambda c + (1 - \lambda)u_0(l). \end{aligned}$$

Так как  $c \in C$ ,  $u_0(l) \in C$ , множество  $C$  выпуклое, то для всех  $\lambda \in [0, 1]$  имеем  $u(l) \in C$ . Таким образом,

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав  $h$ , введем функцию  $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$  вещественной переменной  $\lambda \in [0, 1]$ . Следовательно,

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda).$$

Тогда правая производная удовлетворяет неравенству

$$\frac{d^+}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geq 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} p(l)u_0''(l)h'(l) - p(0)u_0''(0)h'(0) - \int_0^l h' d(pu_0'') + h(l)g(l) - h(0)g(0) - \int_0^l gh' dx - \\ - h(l)F(l) + h(0)F(0) + \int_0^l Fh' dx \geq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $g(x)$  определена (11). Воспользовавшись  $h(0) = 0$ , (14), (18) и (19), неравенство (20) может быть переписано как

$$h(l)(g(l) - F(l) - a) \geq 0.$$

Согласно (15),

$$a = (pu_0'')'(l) + g(l) - F(l).$$

Следовательно, получим, что

$$-(pu_0'')'(l)h(l) \geq 0,$$

т. е.

$$(pu_0'')'(l)(c - u_0(l)) \leq 0,$$

где  $c \in C$ . Значит,  $(pu_0'')'(l) \in N_C(u_0(l))$ .

Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 3.1.** Пусть функция  $u_0$  минимизирует функционал энергии (8) при условиях  $u(0) = 0$ ,  $u(l) \in C$ . Тогда  $u_0$  — решение задачи (3), т. е.

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ u''(l) = 0, \\ (pu'')'(l) \in N_C(u(l)), \end{cases}$$

где  $x \in \overline{[0, l]}_\sigma$ ,  $\sigma(x)$  определена (5).

**4. Основные результаты.** Рассмотрим задачу (3). Решением задачи (3) назовем функцию  $u \in E$ , удовлетворяющую уравнению (4) для всех  $x \in [0, l]_\sigma$ , где  $\sigma(x)$  определена (5), и удовлетворяющую граничным условиям  $u(0) = 0 = u''(0)$ ,  $u''(l) = 0$ ,  $(pu'')'(l) \in N_C(u(l))$ .

**Теорема 4.1.** Если решение задачи (3) существует, то оно единственно.

**Доказательство.** Предположим, что функции  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  являются решениями задачи (3). Тогда функция  $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(pw'')'(x) + \int_0^x wdQ = (pw'')'(0), \quad (21)$$

и условиям  $w(0) = w''(0) = 0$ ,  $w''(l) = 0$ . При этом для всех  $c \in C$  имеем

$$\begin{aligned} (pu_1'')'(l)(c - u_1(l)) &\leq 0, \\ (pu_2'')'(l)(c - u_2(l)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $u_1(l) \in C$ ,  $u_2(l) \in C$ , то

$$\begin{aligned} (pu_1'')'(l)(u_2(l) - u_1(l)) &\leq 0, \\ (pu_2'')'(l)(u_1(l) - u_2(l)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(pw'')'(l)w(l) \geq 0.$$

Из равенства (21) следует, что

$$\int_0^l wd(pw'')' + \int_0^l w^2 dQ = 0.$$

Таким образом,

$$w(l)(pw'')'(l) - \int_0^l (pw'')'w dx + \int_0^l w^2 dQ = 0,$$

т. е.

$$w(l)(pw'')'(l) + \int_0^l pw''^2 dx + \int_0^l w^2 dQ = 0.$$

Следовательно,  $w \equiv 0$ . Теорема доказана.

Пусть функции  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  — система решений однородного уравнения

$$(pu'')'(x) + \int_0^x udQ = (pu'')'(0),$$

удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 1, \\ \varphi_1''(0) = 0, \\ \varphi_1'(l) = 0, \\ (p\varphi_1'')'(l) = 0; \\ \varphi_2(0) = 0, \\ \varphi_2''(0) = 1, \\ \varphi_2'(l) = 0, \\ (p\varphi_2'')'(l) = 0; \\ \varphi_3(0) = 0, \\ \varphi_3''(0) = 0, \\ \varphi_3'(l) = 1, \\ (p\varphi_3'')'(l) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_4(0) = 0, \\ \varphi_4''(0) = 0, \\ \varphi_4'(l) = 0, \\ (p\varphi_4'')'(l) = 1. \end{cases}$$

Покажем существование функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ . Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} (pw'')'(x) + \int_0^x wdQ = (pw'')'(0), \\ w(0) = 0, w''(0) = 0, \\ w''(l) = 0, \\ (pw'')'(l) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, что задача (22) имеет только нулевое решение. В самом деле, из уравнения (21) следует, что

$$\int_0^l wd(pw'')' + \int_0^l w^2 dQ = 0.$$

Интегрируя первый интеграл по частям 2 раза, получим

$$\int_0^l pw''^2 dx + \int_0^l w^2 dQ = 0,$$

следовательно,  $w \equiv 0$ .

Рассмотрим следующие задачи.

$$\begin{cases} (pw_1'')'(x) + \int_0^x w_1 dQ = (pw_1'')'(0), \\ w_1(0) = 1, w_1'(0) = 0, \\ w_1''(0) = 0, (pw_1'')'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (pw_2'')'(x) + \int_0^x w_2 dQ = (pw_2'')'(0), \\ w_2(0) = 0, w_2'(0) = 1, \\ w_2''(0) = 0, (pw_2'')'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (pw_3'')'(x) + \int_0^x w_3 dQ = (pw_3'')'(0), \\ w_3(0) = 0, w_3'(0) = 0, \\ w_3''(0) = 1, (pw_3'')'(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (pw_4'')'(x) + \int_0^x w_4 dQ = (pw_4'')'(0), \\ w_4(0) = 0, w_4'(0) = 0, \\ w_4''(0) = 0, (pw_4'')'(0) = 1. \end{cases}$$

Представим решение уравнения (21) в виде  $w = d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 w_3 + d_4 w_4$  и подставим в условия (22). Поскольку задача (22) имеет только нулевое решение, то определитель матрицы системы отличен от нуля, т. е.

$$\begin{vmatrix} w_1(0) & w_2(0) & w_3(0) & w_4(0) \\ w_1''(0) & w_2''(0) & w_3''(0) & w_4''(0) \\ w_1'(l) & w_2'(l) & w_3'(l) & w_4'(l) \\ (pw_1'')'(l) & (pw_2'')'(l) & (pw_3'')'(l) & (pw_4'')'(l) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (23)$$

Представим  $\varphi_1$  в виде  $\varphi_1 = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 + c_4 w_4$ . Воспользовавшись условиями для  $\varphi_1$ , получим систему для определения  $c_1, c_2, c_3, c_4$

$$\begin{cases} c_1 w_1(0) + c_2 w_2(0) + c_3 w_3(0) + c_4 w_4(0) = 1, \\ c_1 w_1''(0) + c_2 w_2''(0) + c_3 w_3''(0) + c_4 w_4''(0) = 0, \\ c_1 w_1'(l) + c_2 w_2'(l) + c_3 w_3'(l) + c_4 w_4'(l) = 0, \\ c_1 (pw_1'')'(l) + c_2 (pw_2'')'(l) + c_3 (pw_3'')'(l) + c_4 (pw_4'')'(l) = 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись (23), последняя система имеет единственное решение. Следовательно, функция  $\varphi_1$  определена единственным образом. Существование функций  $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  доказывается аналогично.

Обозначим

$$\Delta_1(s) = - \begin{vmatrix} \varphi_2(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_2'(s) & \varphi_3'(s) & \varphi_4'(s) \\ p(s)\varphi_2''(s) & p(s)\varphi_3''(s) & p(s)\varphi_4''(s) \end{vmatrix}; \Delta_2(s) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_3(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_3'(s) & \varphi_4'(s) \\ p(s)\varphi_1''(s) & p(s)\varphi_3''(s) & p(s)\varphi_4''(s) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3(s) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_4(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \varphi_4'(s) \\ p(s)\varphi_1''(s) & p(s)\varphi_2''(s) & p(s)\varphi_4''(s) \end{vmatrix}; \Delta_4(s) = - \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) & \varphi_3(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) & \varphi_3'(s) \\ p(s)\varphi_1''(s) & p(s)\varphi_2''(s) & p(s)\varphi_3''(s) \end{vmatrix}.$$

**Теорема 4.2.** Если  $\left| \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \right| < m$ , то решение задачи (3) имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \varphi_3(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \varphi_4(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s)). \quad (24)$$

Если  $\frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \geq m$ , то решение задачи (3) имеет вид

$$u(x) = \frac{m\varphi_4(x)}{\varphi_4(l)} + \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \varphi_3(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \varphi_4(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s)) - \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) - \frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_2(s) dF(s). \quad (25)$$

Если  $\frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \leq -m$ , то решение задачи (3) имеет вид

$$u(x) = \frac{-m\varphi_4(x)}{\varphi_4(l)} + \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \varphi_3(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \varphi_4(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s)) - \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) - \frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_2(s) dF(s). \quad (26)$$

Здесь через  $W$  обозначен вронскиан, определяемый равенством (7).

**Доказательство.** Легко видеть, что система функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$  линейно независима, следовательно, составляет фундаментальную систему решений однородного уравнения (6). Согласно теореме 2.2, имеем  $p(0)W(0) \neq 0$ .

Рассмотрим случай  $\left| \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \right| < m$ . Докажем, что функция (1) является решением задачи (3). Сначала покажем, что функция (1) принадлежит множеству  $E$ . Заметим, что

интегралы в правой части равенства (1) существуют, так как функции  $\Delta_i(s)$  непрерывны. Из представления функции (1) для всех точек  $x \in S$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \frac{1}{p(0)W(0)} \left( \varphi_1(x+0) \int_0^{x+0} \Delta_1(s) dF(s) + \right. \\ &+ \varphi_2(x+0) \int_0^{x+0} \Delta_2(s) dF(s) + \varphi_3(x+0) \int_{x+0}^l \Delta_3(s) dF(s) + \\ &+ \varphi_4(x+0) \int_{x+0}^l \Delta_4(s) dF(s) - \varphi_1(x-0) \int_0^{x-0} \Delta_1(s) dF(s) - \\ &- \varphi_2(x-0) \int_0^{x-0} \Delta_2(s) dF(s) - \varphi_3(x-0) \int_{x-0}^l \Delta_3(s) dF(s) - \varphi_4(x-0) \int_{x-0}^l \Delta_4(s) dF(s) \Big) = \\ &= \frac{\Delta F(x)}{p(0)W(0)} \left( \varphi_1(x)\Delta_1(x) + \varphi_2(x)\Delta_2(x) - \varphi_3(x)\Delta_3(x) - \varphi_4(x)\Delta_4(x) \right) = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x)\Delta_1(x) + \varphi_2(x)\Delta_2(x) - \varphi_3(x)\Delta_3(x) - \varphi_4(x)\Delta_4(x) = \\ &= - \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_3'(x) & \varphi_4'(x) \\ (p\varphi_1'')(x) & (p\varphi_2'')(x) & (p\varphi_3'')(x) & (p\varphi_4'')(x) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Следовательно, функция  $u(x)$  может быть определена по непрерывности на весь отрезок  $[0, l]$ .

Покажем, что функция  $u(x)$  абсолютно непрерывна. Для любых  $\alpha, \beta \in [0, l]_\sigma$  имеем

$$\begin{aligned} u(\beta) - u(\alpha) &= \frac{1}{p(0)W(0)} \left( (\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)) \int_0^\beta \Delta_1(s) dF(s) + (\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)) \int_0^\beta \Delta_2(s) dF(s) + \right. \\ &+ (\varphi_3(\beta) - \varphi_3(\alpha)) \int_\beta^l \Delta_3(s) dF(s) + (\varphi_4(\beta) - \varphi_4(\alpha)) \int_\beta^l \Delta_4(s) dF(s) + \\ &+ \int_\alpha^\beta (\varphi_1(\alpha) - \varphi_1(s)) \Delta_1(s) dF(s) + \int_\alpha^\beta (\varphi_2(\alpha) - \varphi_2(s)) \Delta_2(s) dF(s) + \\ &+ \int_\alpha^\beta (\varphi_3(s) - \varphi_3(\alpha)) \Delta_3(s) dF(s) + \int_\alpha^\beta (\varphi_4(s) - \varphi_4(\alpha)) \Delta_4(s) dF(s) + \\ &+ \int_\alpha^\beta (\varphi_1(s)\Delta_1(s) + \varphi_2(s)\Delta_2(s) - \varphi_3(s)\Delta_3(s) - \varphi_4(s)\Delta_4(s)) dF(s) \Big). \end{aligned}$$

Согласно (27)

$$\int_\alpha^\beta (\varphi_1(s)\Delta_1(s) + \varphi_2(s)\Delta_2(s) - \varphi_3(s)\Delta_3(s) - \varphi_4(s)\Delta_4(s)) dF(s) = 0$$

и следовательно, функция  $u(x)$  абсолютно непрерывна.

Покажем, что

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{p(0)W(0)} \left( (\varphi_1'(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2'(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \right. \\ &+ \varphi_3'(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \varphi_4'(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s) \Big). \end{aligned} \quad (28)$$

Обозначим  $\Delta_\varepsilon z = z(x+\varepsilon) - z(x)$ , где  $\varepsilon > 0$ . Покажем справедливость утверждения для правых производных (для левых можно доказать аналогично). Имеем

$$\frac{\Delta_\varepsilon u}{\varepsilon} = \frac{1}{p(0)W(0)} \left( \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \Delta_1 dF + \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_2 dF + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_3}{\varepsilon} \int_{x+\varepsilon}^l \Delta_3 dF + \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_4}{\varepsilon} \int_{x+\varepsilon}^l \Delta_4 dF + \\
& + \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)}{\varepsilon} dF.
\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)}{\varepsilon} dF = 0. \quad (29)$$

Имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)) dF(s) \right| \leq \\
& \leq \frac{\sup_{x+0 \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)|}{\varepsilon} V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F).
\end{aligned}$$

Пусть в точке  $\tau$  непрерывная функция

$$|\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)|$$

достигает максимального значения на компакте  $[x+0, x+\varepsilon]$ . Тогда выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
& \frac{\max_{x+0 \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)|}{\varepsilon} \leq \\
& \leq |\Delta_1(\tau)| \left| \frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(\tau)}{\varepsilon} \right| + |\Delta_2(\tau)| \left| \frac{\varphi_2(x) - \varphi_2(\tau)}{\varepsilon} \right| + \\
& + |\Delta_3(\tau)| \left| \frac{\varphi_3(x) - \varphi_3(\tau)}{\varepsilon} \right| + |\Delta_4(\tau)| \left| \frac{\varphi_4(x) - \varphi_4(\tau)}{\varepsilon} \right| + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} |\Delta_1(\tau)\varphi_1(\tau) + \Delta_2(\tau)\varphi_2(\tau) - \Delta_3(\tau)\varphi_3(\tau) - \Delta_4(\tau)\varphi_4(\tau)|.
\end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{\varepsilon} |\varphi_i(x) - \varphi_i(\tau)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_x^\tau \varphi_i'(s) ds \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \varphi_i'(s) ds \leq c_i,$$

где ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), то используя (27) получим, что дробь

$$\frac{\max_{x+0 \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x)\Delta_1(s) + \varphi_2(x)\Delta_2(s) - \varphi_3(x)\Delta_3(s) - \varphi_4(x)\Delta_4(s)|}{\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon > 0$$

ограничена. Поскольку  $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , получим равенство (29). Таким образом, доказано представление (28).

Аналогично можно доказать, что функции  $u'(x)$  и  $(pu'')(x)$  абсолютно непрерывны и

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{1}{p(0)W(0)} \left( (\varphi_1''(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2''(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \right. \\
& \left. + \varphi_3''(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \varphi_4''(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s) \right), \\
(pu'')'(x) &= \frac{1}{p(0)W(0)} \left( ((p\varphi_1'')'(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + (p\varphi_2'')'(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \right. \\
& \left. + (p\varphi_3'')'(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + (p\varphi_4'')'(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s) \right).
\end{aligned}$$

Покажем, что функция (1) – решение уравнения (4). Рассмотрим интеграл  $\int_0^x udQ$ . Имеем

$$\int_0^x udQ = \frac{1}{p(0)W(0)} \left( \int_0^x \varphi_1(s) \int_0^s \Delta_1(t) dF(t) dQ(s) + \int_0^x \varphi_2(s) \int_0^s \Delta_2(t) dF(t) dQ(s) + \right.$$

$$+ \int_0^x \varphi_3(s) \int_s^l \Delta_3(t) dF(t) dQ(s) + \int_0^x \varphi_4(s) \int_s^l \Delta_4(t) dF(t) dQ(s).$$

Изменив пределы интегрирования, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^x \varphi_1(s) \int_0^s \Delta_1(t) dF(t) dQ(s) + \int_0^x \varphi_2(s) \int_0^s \Delta_2(t) dF(t) dQ(s) = \\ & = \int_0^x \Delta_1(t) ((-p\varphi_1'')'(x) + (p\varphi_1'')'(t)) dF(t) + \int_0^x \Delta_2(t) ((-p\varphi_2'')'(x) + (p\varphi_2'')'(t)) dF(t). \\ & \int_0^x \varphi_3(s) \int_s^l \Delta_3(t) dF(t) dQ(s) + \int_0^x \varphi_4(s) \int_s^l \Delta_4(t) dF(t) dQ(s) = \\ & = \int_0^x \Delta_3(t) ((-p\varphi_3'')'(t) + (p\varphi_3'')'(0)) dF(t) + \int_x^l \Delta_3(t) ((-p\varphi_3'')'(x) + (p\varphi_3'')'(0)) dF(t) + \\ & + \int_0^x \Delta_4(t) ((-p\varphi_4'')'(t) + (p\varphi_4'')'(0)) dF(t) + \int_x^l \Delta_4(t) ((-p\varphi_4'')'(x) + (p\varphi_4'')'(0)) dF(t). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} & (pu'')'(x) + \int_0^x udQ = \\ & = \frac{1}{p(0)W(0)} \left( \int_0^x (\Delta_1(t)(p\varphi_1'')'(t) + \Delta_2(t)(p\varphi_2'')'(t) - \Delta_3(t)(p\varphi_3'')'(t) - \Delta_4(t)(p\varphi_4'')'(t)) dF(t) + \right. \\ & \quad \left. + (p\varphi_3'')'(0) \int_0^l \Delta_3(t) dF(t) + (p\varphi_4'')'(0) \int_0^l \Delta_4(t) dF(t) \right) = \\ & = \frac{1}{p(0)W(0)} \int_0^x p(t)W(t) dF(t) + (pu'')'(0). \end{aligned}$$

Согласно теореме 2.3,  $p(t)W(t) = p(0)W(0)$ , и мы получаем

$$(pu'')'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0),$$

что и требовалось доказать. Легко проверить, что функция  $u(x)$  удовлетворяет условиям  $u(0) = u''(0) = u''(l) = 0$ . Поскольку

$$|u(l)| = \left| \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \right| < m,$$

то  $u(l) \in (-m, m)$ , и

$$(pu'')'(l) = \frac{1}{p(0)W(0)} ((p\varphi_1'')'(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + (p\varphi_2'')'(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай  $\frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \geq m$ . Аналогично первому случаю можно доказать, что функция, определяемая равенством (2), является решением уравнения (4) и удовлетворяет условиям  $u(0) = u''(0) = u''(l) = 0$ . Так как  $u(l) = m$ , то  $u(l) \in C = [-m, m]$ . Покажем, что  $(pu'')'(l) \in N_C(u(l))$ , т. е.  $(pu'')'(l) \geq 0$ .

Заметим, что  $\varphi_4(l) < 0$ . Поскольку

$$(p\varphi_4'')'(x) + \int_0^x \varphi_4 dQ = (p\varphi_4'')'(0),$$

имеем

$$\int_0^l \varphi_4 d(p\varphi_4'')' + \int_0^l \varphi_4^2 dQ = 0,$$

т. е.

$$\varphi_4(l)(p\varphi_4'')'(l) - \varphi_4(0)(p\varphi_4'')'(0) - \int_0^l (p\varphi_4'')' \varphi_4' dx + \int_0^l \varphi_4^2 dQ = 0.$$

С учетом условий на  $\varphi_4(x)$ , получим

$$\varphi_4(l) = -\left(\int_0^l \varphi_4^2 dQ + \int_0^l p\varphi_4''^2 dx\right).$$

Если  $\varphi_4(l) = 0$ , то  $\int_0^l \varphi_4^2 dQ + \int_0^l p\varphi_4''^2 dx = 0$ , и  $\varphi_4 \equiv 0$ , что противоречит условию  $(p\varphi_4'')'(l) = 1$ . Следовательно,  $\varphi_4(l) < 0$ .

Тогда для  $(pu'')'(l)$  имеем

$$(pu'')'(l) = \frac{1}{\varphi_4(l)} \left(m - \frac{\varphi_1(l)}{p(0)W(0)} \int_0^l \Delta_1 dF - \frac{\varphi_2(l)}{p(0)W(0)} \int_0^l \Delta_2 dF\right) \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

Случай, когда  $\frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \leq -m$  может быть рассмотрен аналогично. Теорема доказана.

**Теорема 4.3.** Пусть функция  $u_0(x)$  является решением задачи (3). Тогда  $u_0(x)$  минимизирует функционал энергии (8) при условиях  $u(0) = 0$ ,  $u(l) \in C$ .

**Доказательство.** Покажем, что для любой функции  $u \in E$ , удовлетворяющей условиям  $u(0) = 0$ ,  $u(l) \in C$ , выполняется неравенство

$$\Phi(u) - \Phi(u_0) \geq 0.$$

Представим функцию  $u(x)$  в виде  $u(x) = u_0(x) + h(x)$ , где  $h(x) = u(x) - u_0(x)$ . Заметим, что  $h \in E$ ,  $h(0) = 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) &= -h(l)(pu_0'')'(l) + \int_0^l \frac{ph''^2}{2} dx + \int_0^l \frac{h^2}{2} dQ = \\ &= -(pu_0'')'(l)(u(l) - u_0(l)) + \int_0^l \frac{ph''^2}{2} dx + \int_0^l \frac{h^2}{2} dQ. \end{aligned}$$

Поскольку  $u(l) \in C$ ,  $(pu_0'')'(l) \in N_C(u_0(l))$ , имеем  $-(pu_0'')'(l)(u(l) - u_0(l)) \geq 0$ . С учетом условий на функции  $p(x)$ ,  $Q(x)$ , получим  $\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) \geq 0$ , что и требовалось. Теорема доказана.

**Теорема 4.4.** Если  $t \rightarrow 0$  то решение задачи (3) равномерно на  $[0, l]_\sigma$  стремится к решению задачи

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ p(l)u''(l) = 0, \\ u(l) = 0. \end{cases} \quad (30)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения  $u_m(x)$  задачи (3). Так как  $t \rightarrow 0$ , имеем  $\left| \frac{1}{p(0)W(0)}(\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \right| \geq m$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \left| u_m(x) - \frac{1}{p(0)W(0)} \left( \varphi_1(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varphi_3(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \varphi_4(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s) \right) + \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \right. \\ & \left. + \frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_2(s) dF(s) \right| = \left| \frac{m\varphi_4(x)}{\varphi_4(l)} \right| \leq cm \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} u_m(x) &\rightrightarrows u^*(x) = \\ &= \frac{1}{p(0)W(0)} \left( \varphi_1(x) \int_0^x \Delta_1(s) dF(s) + \right. \\ & \left. + \varphi_2(x) \int_0^x \Delta_2(s) dF(s) + \varphi_3(x) \int_x^l \Delta_3(s) dF(s) + \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +\varphi_4(x) \int_x^l \Delta_4(s) dF(s) - \frac{\varphi_4(x)\varphi_1(l)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) - \\
& - \frac{\varphi_2(l)\varphi_4(x)}{p(0)W(0)\varphi_4(l)} \int_0^l \Delta_2(s) dF(s).
\end{aligned}$$

Аналогично теореме 4.2, можно показать, что функция  $u^*(x)$  является решением задачи (30). Теорема доказана.

**Теорема 4.5.** Если  $t \rightarrow \infty$ , то решение задачи (3) равномерно на  $\overline{[0, l]}_\sigma$  стремится к решению задачи

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x udQ = F(x) - F(0) + (pu'')'(0), \\ u(0) = 0, u''(0) = 0, \\ u''(l) = 0, \\ (pu'')'(l) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения  $u_m(x)$  задачи (3). Так как  $t \rightarrow \infty$ , имеем  $\left| \frac{1}{p(0)W(0)} (\varphi_1(l) \int_0^l \Delta_1(s) dF(s) + \varphi_2(l) \int_0^l \Delta_2(s) dF(s)) \right| < t$ , начиная с некоторых  $t$ . Обозначим через  $u^*(x)$  функцию, определяемую равенством (1). Тогда, начиная с некоторого  $t$ , верно

$$|u_m(x) - u^*(x)| = 0.$$

В ходе доказательства теоремы 4.1 установлено, что функция  $u^*(x)$  – решение задачи (31). Теорема доказана.

#### Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2004. 272 с.
2. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2013;1:232–250.
3. Шабров С.А., Ткаченко Д.А., Белов Н.А., Ильченко А.Г. Аналог теоремы Штурма для дифференциальных уравнений четвертого порядка с производными по мере. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2022; 2:107–114.
4. Шабров С.А., Бородин Е.А., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б. О числе решений нелинейной граничной задачи четвертого порядка с производными по мере. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2019;3:93–100.
5. Ben Amara J., Vladimirov A.A., Shkalikov A.A. Spectral and Oscillatory Properties of a Linear Pencil of Fourth-Order Differential Operators. *Mathematical Notes.* 2013;94(1):49–59.
6. Borovskikh A.V., Lazarev K.P. Fourth-order differential equations on geometric graphs. *Journal of Mathematical Sciences.* 2004;119(6):719–738.
7. Borovskikh A.V., Mustafokulov R., Lazarev K.P., Pokorniy Yu.V. A class of fourth-order differential equations on a spatial net. *Doklady Mathematics.* 1995;52(3):433–435.
8. Halmos P.R. Measure theory. Springer – Verlag; 1950. 304 p.
9. Kulaev R.Ch. On the oscillation property of Green's function of a fourth-order boundary value problem. *Mathematical Notes.* 2016;100(3-4):391–402.
10. Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A. Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph. *Mathematical Notes.* 2022;111(5-6):977–981.
11. Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A. On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph. *Differential Equations.* 2022;58(7):869–876.
12. Kunze M., Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. *Lecture Notes in Physics.* 2000;551:1–60.
13. Rudin W. Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill; 1964. 342 p.
14. Shabrov S., Ilina O., Shaina E., Chechin D. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon-Nikodim derivatives. *Journal of Physics: Conference Series.* 2020;1479:1–12.
15. Vladimirov A.A., Shkalikov A.A. On oscillation properties of self-adjoint boundary value problems of fourth order. *Doklady Mathematics.* 2021;103(1):5–9.

## References

1. Pokornyi YuV., Penkin OM., Pryadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential equations on geometrical graphs. Moscow: Fizmatlit; 2004. 272 p. (in Russian)
2. Shabrov SA. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2013;1:232 – 250. (in Russian)
3. Shabrov SA., Tkachenko DA., Belov NA., Ilchenko AG. Analogue of Sturm's theorem for fourth-order differential equations with measure derivatives. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2022;2:107–114. (in Russian)
4. Shabrov SA., Borodina EA., Golovanova FV., Davidova MB. On the number of solutions of the nonlinear boundary problem of the fourth order with derivatives by measure. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.* 2019;3:93–100. (in Russian)
5. Ben Amara J, Vladimirov AA., Shkalikov AA. Spectral and Oscillatory Properties of a Linear Pencil of Fourth-Order Differential Operators. *Mathematical Notes.* 2013;94(1):49–59.
6. Borovskikh AV., Lazarev KP. Fourth-order differential equations on geometric graphs. *Journal of Mathematical Sciences.* 2004;119(6):719–738.
7. Borovskikh AV., Mustafokulov R., Lazarev KP., Pokornyi YuV. A class of fourth-order differential equations on a spatial net. *Doklady Mathematics.* 1995;52(3):433–435.
8. Halmos PR. Measure theory. Springer – Verlag; 1950. 304 p.
9. Kulaev RCh. On the oscillation property of Green's function of a fourth-order boundary value problem. *Mathematical Notes.* 2016;100(3-4):391–402.
10. Kulaev RCh., Urtaeva AA. Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph. *Mathematical Notes.* 2022;111 (5-6):977–981.
11. Kulaev RCh., Urtaeva AA. On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph. *Differential Equations.* 2022;58(7):869–876.
12. Kunze M, Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. *Lecture Notes in Physics.* 2000;551:1–60.
13. Rudin W. Principles of mathematical analysis. McGraw-Hill; 1964. 342 p.
14. Shabrov S., Ilina O., Shaina E., Chechin D. On the growth speed of own values for the fourth order spectral problem with Radon-Nikodim derivatives. *Journal of Physics: Conference Series.* 2020;1479:1–12.
15. Vladimirov AA., Shkalikov AA. On oscillation properties of self-adjoint boundary value problems of fourth order. *Doklady Mathematics.* 2021;103(1):5–9.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 16.12.2023

Received December 16, 2023

Поступила после рецензирования 31.01.2024

Revised January 31, 2024

Принята к публикации 04.02.2024

Accepted February 4, 2024

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Зверева Маргарита Борисовна** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**Каменский Михаил Игоревич** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории нелинейного анализа и теории краевых задач, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

**Шабров Сергей Александрович** – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Margarita B. Zvereva** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Mikhail I. Kamenskii** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Leading Researcher, Research Laboratory of Nonlinear Analysis and Theory of Boundary Value Problems, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

**Sergey A. Shabrov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

## Квантовое описание каналирования позитронов вблизи направления $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния

Сыщенко В. В. , Парахин А. С. 

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
[syshch@yandex.ru](mailto:syshch@yandex.ru)

**Аннотация.** Движение быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом к одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей с хорошей точностью описывается как движение в непрерывных потенциалах параллельных атомных цепочек, при котором сохраняется параллельная оси цепочки компонента импульса частицы. При этом финитное движение частицы в поперечной плоскости называется аксиальным каналированием. Известно, что в аксиальном каналировании могут проявляться квантовые эффекты, в частности, квантование значений энергии движения в поперечной плоскости. В статье представлен численный метод поиска уровней энергии и соответствующих им волновых функций поперечного движения позитронов, каналирующих в направлении  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния.

**Ключевые слова:** каналирование, быстрые частицы, высокие энергии, спектральный метод, гексагональная сетка, кремний

**Для цитирования:** Сыщенко В. В., Парахин А. С. 2024. Квантовое описание каналирования позитронов вблизи направления  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 50–59.  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-50-59

Short Communication

## Quantum Description of the Positrons Channeling Near $\langle 111 \rangle$ Direction of the Silicon Crystal

Vladislav V. Syshchenko , Alexander S. Parakhin 

Belgorod National Research University,  
85 Pobedy st., Belgorod, 308015, Russia  
[syshch@yandex.ru](mailto:syshch@yandex.ru)

**Abstract.** The fast charged particle's motion in the crystal under small angle to one of the crystallographic axes densely packed with atoms can be described with high accuracy as the motion in the uniform potentials of the parallel atomic strings that conserves the particle's momentum component parallel to the string axis. The finite motion in the transverse plane in this case is called as the axial channeling. The quantum effects in the axial channeling can manifest inselves, first of all, as the energy quantization for the motion in the transverse plane. This paper describes the numerical method for the transverse energy levels and the corresponding wave functions for the positrons channeling in the  $\langle 111 \rangle$  direction of the Silicon crystal.

**Keywords:** Channeling, Fast Particles, High Energy, Spectral Method, Hexagonal Grid, Silicon

**For citation:** Syshchenko V. V., Parakhin A. S. 2024. Quantum Description of the Positrons Channeling Near  $\langle 111 \rangle$  Direction of the Silicon Crystal. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 50–59. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-50-59

**1. Введение.** Быстрая заряженная частица, движущаяся в кристалле вблизи одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей или плоскостей, может захватываться в образованную этими осями или плоскостями потенциальную яму, совершая финитное движение в плоскости, перпендикулярной соответствующей оси (плоскости) и аномально глубоко проникая в кристалл. Такое явление называется, соответственно, аксиальным или плоскостным каналированием. Оно было предсказано на основе численного моделирования в [1]; последующие теоретические и экспериментальные исследования отражены в многочисленных монографиях и обзорах (см., например, [2, 3, 4, 5]). Движение частицы в режиме аксиального каналирования с хорошей точность может быть описано как движение в непрерывном потенциале атомной цепочки, то есть в потенциале, усредненном вдоль оси цепочки [6]. В таком потенциале сохраняется продольная компонента импульса частицы  $p_z$ , и задача о движении частицы сводится к двумерной задаче о движении в поперечной плоскости.

В предыдущей статье [7] было развито классическое описание каналирования позитронов в направлении  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния. Известно, однако (см., например, [2]), что в каналировании быстрых частиц в кристаллах могут проявляться квантовые эффекты. В настоящей статье будет дано квантовое описание поперечного движения позитронов в направлении  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния, описан численный метод нахождения собственных функций и собственных значений энергии поперечного движения, найдены уровни энергии поперечного движения позитрона в потенциальной ямке, образованной непрерывными потенциалами трех соседних цепочек  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния. Обсуждаются нефизические артефакты, возникающие при численном интегрировании уравнения Шрёдингера с таким потенциалом на квадратной дискретной сетке. Показано, что использование вместо последней гексагональной сетки, учитывающей симметрию потенциала, приводит к устранению этих недостатков.

**2. Квантовое описание каналирования.** При движении частицы под малым углом  $\psi \ll 1$  к оси атомной цепочки и сохранении параллельной оси цепочки компоненты импульса  $p_z$  в непрерывном потенциале цепочки  $U_s$  движение частицы в поперечной плоскости будет описываться нестационарным уравнением Шрёдингера

$$\hat{H}\Psi(x, y, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, y, t) \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$\hat{H} = -\frac{c^2\hbar^2}{2E_z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + U(x, y), \quad (2)$$

что аналогично описанию двумерного движения нерелятивистской частицы с точностью до замены

$$m \rightarrow E_z/c^2, \quad (3)$$

где  $E_z = \sqrt{m^2c^4 + p_z^2c^2} = \text{const} \approx E$ .

Непрерывный потенциал уединенной атомной цепочки может быть описан простой модификацией потенциала Линдхарда [2]

$$U^{(1)}(x, y) = U_0 \ln \left[ 1 + \frac{\beta R^2}{x^2 + y^2 + \alpha R^2} \right], \quad (4)$$

где в случае цепочки  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния  $U_0 = 58.8$  эВ,  $\alpha = 0.37$ ,  $\beta = 2.0$ ,  $R = 0.194 \text{ \AA}$  (радиус Томаса – Ферми). Такие цепочки образуют в поперечной им плоскости  $(111)$  гексагональную центрированную решетку. Для электронов потенциал (4) является притягивающим, поэтому каналирование электрона будет происходить в потенциале одной цепочки, слабо возмущенной потенциалами шести ближайших соседей, то есть поле будет обладать осью симметрии шестого порядка. Иная ситуация возникает при движении в кристалле положительно заряженной частицы, например, позитрона или протона (в дальнейшем, для определенности, мы будем говорить о позитроне). Для них потенциалы отдельных цепочек будут отталкивающими, однако между тремя ближайшими соседними цепочками (чьи оси расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = a_z/\sqrt{6} \approx 2.217 \text{ \AA}$ , где  $a_z$  – основной период кристалла кремния, то есть период цепочки  $\langle 100 \rangle$ ) возникает небольшая потенциальная ямка с осью симметрии третьего порядка, в которой возможно финитное в поперечной плоскости движение частицы. Таким образом, потенциальная энергия позитрона в поле трех ближайших атомных цепочек будет описываться формулой

$$U_s^{(+)}(x, y) = U^{(1)}(x, y - a/\sqrt{3}) + U^{(1)}(x + a/2, y + a/2\sqrt{3}) + U^{(1)}(x - a/2, y + a/2\sqrt{3}) - 7.8571 \text{ eV}, \quad (5)$$

где константа выбрана таким образом, чтобы потенциал в центре треугольника был равен нулю. Глубина центральной ямки (или высота седловой точки потенциала) составляет приблизительно

$$U_0 = 0.3278 \text{ эВ}. \quad (6)$$

Интегрирование уравнения Шрёдингера (1) с потенциалом (5) возможно только численно; нами использован для этой цели так называемый спектральный метод [8].

Спектральный метод поиска собственных значений энергии квантовой системы [8] основан на вычислении корреляционной функции между волновыми функциями системы в начальный и текущий моменты времени,  $\Psi(x, y, 0)$  и  $\Psi(x, y, t)$  (последняя должна быть предварительно найдена численно):

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, y, 0) \Psi(x, y, t) dx dy. \quad (7)$$

Фурье-образ этой корреляционной функции,

$$P_E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \exp(iEt/\hbar) dt, \quad (8)$$

содержит информацию о собственных значениях энергии. Действительно, любое решение временного уравнения Шрёдингера (1) может быть представлено в виде суперпозиции

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{n,j} A_{n,j} u_{n,j}(x, y) \exp(-iE_n t/\hbar) \quad (9)$$

собственных функций гамильтониана  $u_{n,j}(x, y)$ ,

$$\hat{H}u_{n,j}(x, y) = E_n u_{n,j}(x, y),$$

где индекс  $j$  нумерует (различает) вырожденные состояния, соответствующие энергии  $E_n$ . Вычисление корреляционной функции (7) для волновой функции в виде (9) дает

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{n,n',j,j'} \exp(-iE_{n'} t/\hbar) A_{n,j}^* A_{n',j'} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{n,j}^*(x, y) u_{n',j'}(x, y) dx dy = \\ &= \sum_{n,n',j,j'} \exp(-iE_{n'} t/\hbar) A_{n,j}^* A_{n',j'} \delta_{nn'} \delta_{jj'} = \\ &= \sum_{n,j} |A_{n,j}|^2 \exp(-iE_n t/\hbar). \end{aligned} \quad (10)$$

Вычисление ее фурье-образа (10) приводит к выражению

$$P_E = 2\pi\hbar \sum_{n,j} |A_{n,j}|^2 \delta(E - E_n). \quad (11)$$

Мы видим, что фурье-образ корреляционной функции будет представлять собой серию  $\delta$ -образных пиков, положения которых соответствуют собственным значениям гамильтониана (собственным значениям энергии системы).

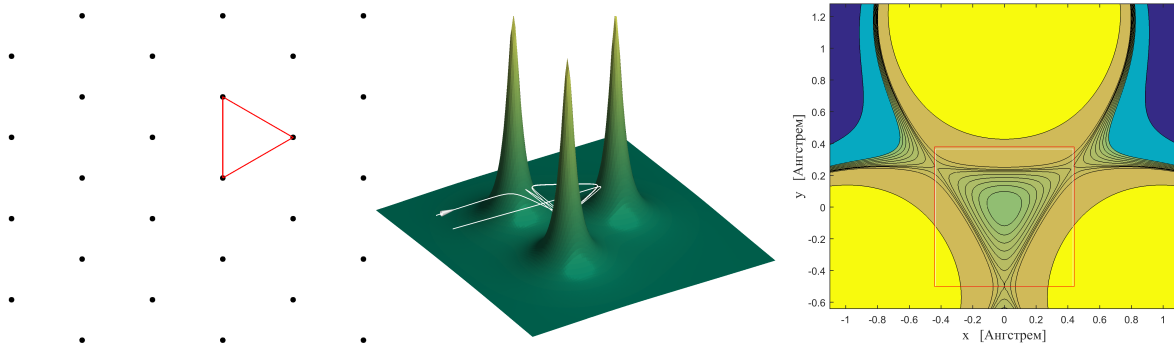


Рис. 1. Слева: проекция решетки кристалла типа алмаза на плоскость  $(111)$ . В центре: Потенциал (5) и пример инфинитной траектории, возникающей, когда энергия поперечного движения  $E_{\perp}$  немного превышает величину (6).

Справа: линии уровня потенциала (5); вблизи начала координат видна потенциальная ямка

Fig. 1. Left: Projection of the dimond-like lattice on the  $(111)$  plane. Center: The potential (5) and the sample infinite trajectory that arizes while the transverse motion energy  $E_{\perp}$  slightly exceeds the value (6). Right: equipotentials of (5); the small potential pit is seen near the origin of coordinates

Этот же метод позволяет найти собственные функции, соответствующие найденным на первом этапе собственным значениям энергии. Подставляя волновую функцию  $\Psi(x, y, t)$  в виде суперпозиции (9), нетрудно убедиться, что интегрирование

$$u_n(x, y) = \frac{1}{T} \int_0^T \Psi(x, y, t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right) dt \quad (12)$$

в течение достаточно длительного промежутка времени  $T$  приведет к тому, что из всей суперпозиции (9) существенный вклад в результат будет вносить единственная собственная функция  $u_n(x, y)$ , соответствующая собственному значению энергии  $E_n$  (или некоторая суперпозиция собственных функций, соответствующая вырожденному уровню энергии).

Обсудим теперь детали алгоритма, реализующего этот метод. Зависящее от времени уравнение Шрёдингера (1) позволяет записать конечно-разностную формулу, описывающую временную эволюцию волновой функции  $\Psi(x, y, t)$ :

$$\Psi(x, y, t + \Delta t) \approx \exp\left[-i \frac{\Delta t}{\hbar} \hat{H}\right] \Psi(x, y, t). \quad (13)$$

Сложность, однако, состоит в том, что гамильтониан (2) представляет собой сумму двух некоммутирующих между собой слагаемых, первое из которых диагонально в импульсном представлении, а второе — в координатном. В этом случае удобно использовать так называемый метод расщепления (см., например, [8, 9, 10]), который состоит в последовательном действии на волновую функцию тройки экспонент

$$\exp \left[ -i \Delta t (\hat{T}_{kin} + \hat{U}) / \hbar \right] = \exp \left[ -i \frac{\Delta t}{2} \hat{U} / \hbar \right] \exp \left[ -i \Delta t \hat{T}_{kin} / \hbar \right] \exp \left[ -i \frac{\Delta t}{2} \hat{U} / \hbar \right] (1 + O((\Delta t)^3)). \quad (14)$$

Результат действия «кинетического» эволюционного оператора на волновую функцию легко может быть найден, если последнюю представить в виде разложения по собственным функциям оператора кинетической энергии, то есть в виде интеграла Фурье в общем случае, или в виде дискретного ряда Фурье — в случае периодической функции или в случае функции, заданной на ограниченной области пространства. В предыдущих работах [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] в качестве таковой выбиралась квадратная область и, в свою очередь, значения функции задавались в пределах этой области на квадратной сетке. Наряду с таким выбором, в настоящей работе мы представим результаты моделирования при ином выборе пространственной области и дискретной пространственной сетки, учитывающем симметрию потенциала (5).

**3. Параметры численного моделирования на квадратной сетке.** Волновая функция, заданная на квадратной области  $-L/2 \leq x, y < L/2$  будет выражаться рядом Фурье

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{k_x=-\infty}^{\infty} \sum_{k_y=-\infty}^{\infty} \Psi_k(t) \exp \left[ i \frac{2\pi}{L} (k_x x + k_y y) \right], \quad (15)$$

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \Psi(x, y, t) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{L} (k_x x + k_y y) \right] dx dy. \quad (16)$$

Для численных расчетов волновая функция определяется на дискретной сетке с шагом  $\Delta x$ , то есть  $x = n_x \Delta x$ ,  $y = n_y \Delta x$ , где  $n_x = 0, \dots, N-1$ ,  $n_y = 0, \dots, N-1$ . Соответствующие формулы, аналогичные (15), (16), будут иметь вид

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{k_x=-k_{max}}^{k_{max}-1} \sum_{k_y=-k_{max}}^{k_{max}-1} \Psi_k(t) \exp \left[ i \frac{2\pi}{L} (k_x x + k_y y) \right] = \sum_{k_x=-k_{max}}^{k_{max}-1} \sum_{k_y=-k_{max}}^{k_{max}-1} \Psi_k(t) \exp \left[ i \frac{2\pi}{N} (k_x n_x + k_y n_y) \right], \quad (17)$$

$$\Psi_k(t) = \frac{1}{N^2} \sum_{n_x=-N/2}^{N/2-1} \sum_{n_y=-N/2}^{N/2-1} \Psi(n_x \Delta x, n_y \Delta x, t) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{N} (k_x n_x + k_y n_y) \right], \quad (18)$$

где  $N = L/\Delta x$  — число шагов пространственной сетки,

$$k_{max} = N/2. \quad (19)$$

Тогда результат действия кинетического оператора на волновую функцию (17) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \exp \left[ -i \frac{\Delta t}{\hbar} \hat{T}_{kin} \right] \Psi(x, y, t) &= \exp \left[ i \frac{\Delta t}{\hbar} \frac{\hbar^2 c^2}{2E_z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \Psi(x, y, t) = \\ &= \sum_{k_x=-k_{max}}^{k_{max}-1} \sum_{k_y=-k_{max}}^{k_{max}-1} \Psi_k(t) \exp \left[ -i \frac{\Delta t}{\hbar} \frac{\hbar^2 c^2}{2E_z} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2) \right] \exp \left[ i \frac{2\pi}{L} (k_x x + k_y y) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Для нахождения уровней энергии поперечного движения и собственных функций позитрона в потенциальной яме (5) была выбрана квадратная область со стороной  $L = 0.987 \text{ \AA}$  (отмечена тонкой штрих-пунктирной линией на рис. 2, а) и пространственная сетка  $N \times N = 128 \times 128$  узлов с шагом  $\Delta x = L/N = 0.0077 \text{ \AA}$ . Шаг по времени был выбран равным  $\Delta t/\hbar = 10^{-4} \text{ эВ}^{-1}$ , число шагов по времени  $N_T = 1.37 \cdot 10^8$ ; выбор этих двух параметров совпадает с таковым в работах [11, 12, 13, 17], где выполнялось моделирование движения электронов, каналированных в направлении  $\langle 110 \rangle$  кристалла кремния, и в работах [14, 15, 16, 18, 19], посвященных каналированию электронов и позитронов в направлении  $\langle 100 \rangle$ .

При выборе параметров моделирования принимаются во внимание следующие соображения. Величина

$$\frac{\hbar^2 c^2}{2E_z} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (k_x^2 + k_y^2) \equiv E^{kin}(k_x, k_y) \quad (21)$$

в показателе первой экспоненты в (20) имеет смысл собственного значения кинетической энергии поперечного движения, соответствующего собственной функции с данными  $k_x, k_y$  в разложении вида

(17). Имея в виду использование вычисленной волновой функции  $\Psi(x, y, t)$  для нахождения уровней энергии частицы в потенциальной яме, необходимо обеспечить покрытие собственными значениями кинетической энергии всего интервала от дна потенциальной ямы до ее краев (то есть до значения глубины потенциальной ямы  $|U_{max}|$ ). Поэтому условие, определяющее величину  $k_{max}$  максимального значения  $|k_x|$  и  $|k_y|$ , будет иметь вид

$$E^{kin}(k_{max}, 0) = E^{kin}(0, k_{max}) = \frac{\hbar^2 c^2}{2E_z} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 k_{max}^2 \geq |U_{max}|. \quad (22)$$

В силу (19) это условие определяет число точек  $N$  на пространственной сетке или, что эквивалентно, шаг по координате  $\Delta x$ .

С другой стороны, для устойчивости метода расщепления необходимо (см., например, [10]), чтобы абсолютное значение аргумента «кинетической» экспоненты в любой ситуации было меньше единицы, откуда

$$\Delta t \cdot 2E^{kin}(k_{max}, 0) < \hbar \quad (23)$$

(поскольку максимальное значение кинетической энергии достигается при  $|k_x| = |k_y| = k_{max}$ ). Условие (23) определяет шаг по времени нашего итерационного алгоритма.

Отметим, что статья [8, Eq. (11)] устанавливает другое условие на величину  $\Delta t$ ,

$$\Delta t < \frac{\hbar}{|U_{max}|}, \quad (24)$$

основанное на простом критерии Найквиста – Котельникова – Шеннона по времени. На первый взгляд, оно не отличается от нашего условия (23) в силу (22). Однако, условие (23) включает в себя два важных параметра, число шагов на пространственной сетке  $N$  (посредством (18)) и энергию продольного движения, в то время как условие (24) о них «не знает». Поэтому использование критерия (24) вместо (23) может привести к потере устойчивости алгоритма при некоторых обстоятельствах.

И, наконец, желательно использовать условие

$$\Delta t \cdot 2E^{kin}(k_{max}, 0) \ll \hbar \quad (25)$$

для шага по времени вместо (23), чтобы уменьшить ошибку, вносимую расщеплением операторов (14). В этом случае условие (24) (то есть Eq. (11) из статьи [8]) будет удовлетворено автоматически. Таким образом, наиболее сильное ограничение на величину  $\Delta t$  возникает для электронов наименьшей энергии  $E_z$ .

С другой стороны, с ростом  $E_z$  роль основного лимитирующего фактора начинает играть условие (22), так как величина  $E^{kin}(k_{max}, 0)$  (22) при недостаточном количестве узлов координатной сетки перестает дотягивать до краев потенциальной ямы.

**4. Параметры численного моделирования на гексагональной сетке.** Недостатком выбора квадратной области задания функций в нашей задаче и, соответственно, квадратной дискретной координатной сетки является то обстоятельство, что потенциальная энергия (5) обладает другим типом симметрии, а именно, симметрией равностороннего треугольника, описываемой группой  $C_{3v}$ . Такое несоответствие, как мы увидим в следующем разделе, приводит к появлению артефактов численного моделирования.

Описанный недостаток устраняется использованием области в виде правильного шестиугольника и, соответственно, гексагональной решетки (рис. 2). В дальнейшем будет удобно, чтобы в треугольнике потенциальной ямы, определяемом условием  $U_s^{(+)}(x, y) = U_0$  (см. (5) и (6)), укладывалось нечетное число строк гексагональной сетки  $N_{lines}$ , причем один из узлов сетки попадал бы в центр треугольника – в точку с координатами  $(0, 0)$  (на рис. 2,  $a$  узлы сетки на соответствующих строках отмечены красным). Область задания функции, построенная на двух векторах трансляции

$$\mathbf{a}_1 = N_{lines} \left( \frac{\Delta x}{2}, \Delta y, 0 \right), \quad \mathbf{a}_2 = N_{lines} \left( -\frac{\Delta x}{2}, \Delta y, 0 \right), \quad \Delta y = \Delta x \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (26)$$

как на сторонах, будет представлять собой ячейку Браве (красный ромб на рис. 2,  $a$ ), узлы сетки внутри которой отмечены красными кружочками. Для дальнейшего учета симметрии задачи следует, однако, перейти к ячейке в форме Вигнера – Зейтца [20, 21] (синий шестиугольник на рис. 2,  $a$ ), причем все недостающие узлы сетки могут быть получены параллельным переносом узлов, оказавшихся снаружи шестиугольника (пустые красные кружочки), векторами  $-\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_2$ .

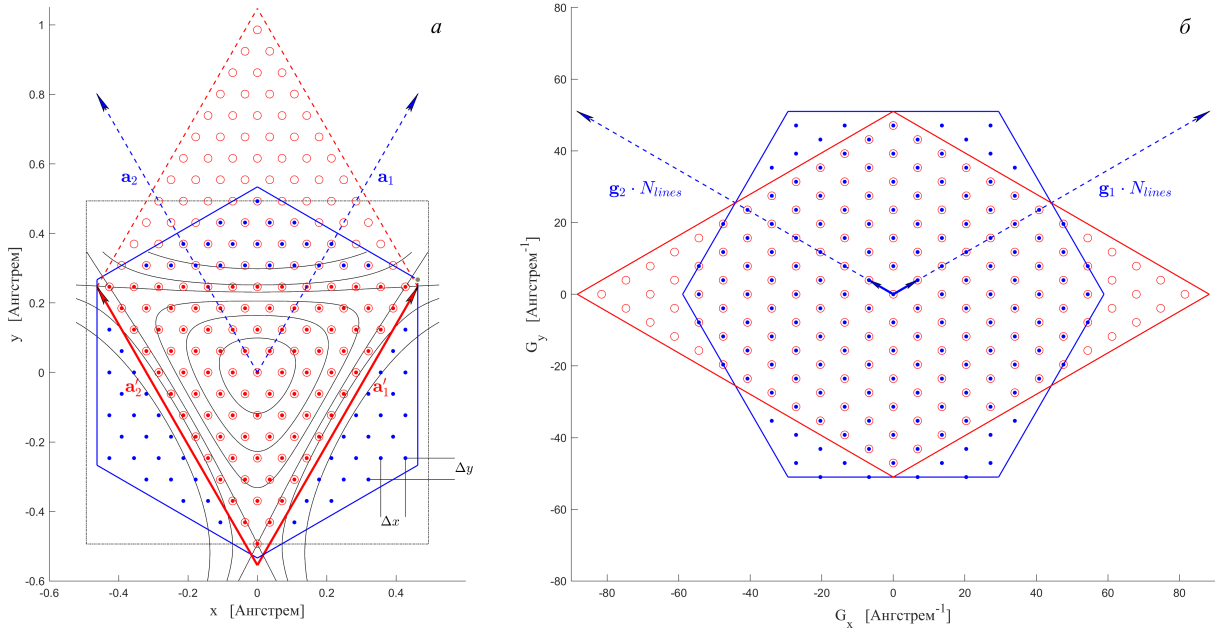


Рис. 2. Схематическое изображение дискретной гексагональной сетки для процедуры численного моделирования в конфигурационном пространстве (а) и в обратном пространстве (б)  
 Fig. 2. Scheme of the discrete hexagonal grid for the numerical simulation in the configuration space (a) and the reciprocal space (b)

Как известно, функцию, заданную на конечном интервале, как и периодическую функцию, можно представить в виде бесконечного ряда Фурье,

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \Psi_{k_1, k_2} \exp \left\{ 2\pi i \left( \frac{k_1 \xi_1}{a_1} + \frac{k_2 \xi_2}{a_2} \right) \right\}, \quad (27)$$

где  $a_1, a_2$  – минимальные периоды функции (в нашем случае – длины векторов (26)),  $k_1, k_2$  – целые числа,  $\xi_1, \xi_2$  – координаты вдоль основных векторов трансляции. Однако, от косоугольных, вообще говоря (и в нашем конкретном случае) координат  $\xi_1, \xi_2$  удобно перейти к декартовым (в частности, чтобы легко было применять к такой функции оператор кинетической энергии, см. (2) и (20)). С этой целью вводится так называемая обратная решетка (см., например, [20, 21]) с основными векторами трансляции

$$\mathbf{b}_1 = \frac{[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]}{\mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]} = \frac{1}{N_{lines} \Delta x \Delta y} \left( \Delta y, \frac{\Delta x}{2}, 0 \right), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]}{\mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]} = \frac{1}{N_{lines} \Delta x \Delta y} \left( -\Delta y, \frac{\Delta x}{2}, 0 \right), \quad (28)$$

где вектор  $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1)$  дополняет (26) до трехмерного базиса. С их помощью разложение (27) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \Psi_{m_1, m_2} \exp \{ 2\pi i (m_1 \mathbf{b}_1 + m_2 \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{r} \} = \\ &= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \Psi_{m_1, m_2} \exp \{ i (m_1 \mathbf{g}_1 + m_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{r} \} = \sum_j \Psi_j \exp (i \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (29)$$

Дискретность сетки в конфигурационном пространстве приводит, в соответствии с теоремой Найквиста – Котельникова – Шеннона, к ограниченности спектра функции в обратном пространстве, то есть к замене бесконечной суммы в (27), (29) конечной, аналогично переходу от (15) к (17):

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{m_1=-(N_{lines}-1)}^{N_{lines}-1} \sum_{m_2=-(N_{lines}-1)}^{N_{lines}-1} \Psi_{m_1, m_2} \exp \{ i (m_1 \mathbf{g}_1 + m_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{r} \}. \quad (30)$$

При этом максимальные значения векторов обратной решетки будут равны  $N_{lines} \mathbf{g}_{1,2}$ , что задает ячейку Браве в обратном пространстве (красный ромб на рис. 2б). На основе последней с помощью параллельных переносов (которые не нарушают справедливости разложения (29)) строится ячейка Фигнера – Зейтца в обратном пространстве, известная в физике твердого тела как первая зона Бриллюэна (синий шестиугольник на рис. 2б), в наибольшей степени соответствующая симметрии рассматриваемой задачи.



В нашем моделировании мы использовали величину  $\Delta x \approx 0.007487 \text{ \AA}$ , близкую к шагу квадратной сетки (см. предыдущий раздел). Остальные параметры моделирования совпадают в обоих подходах.

**5. Классификация стационарных состояний и выбор затравочных функций.** Задаваемая в начальный момент времени волновая функция общего вида  $\Psi(x, y, 0)$ , например, в виде несимметричной гауссианы

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right), \quad (31)$$

содержит в себе, вообще говоря, все собственные функции гамильтониана (2), и описанный выше спектральный метод возвращает полный набор уровней энергии поперечного движения в потенциальной яме (5). Однако, удобнее задавать начальные волновые функции специального вида, представляющие собой суперпозиции собственных функций, обладающих симметрией только одного определенного типа.

Из теории групп известно (см., например, [22]), что группа симметрии нашей треугольной потенциальной ямы — группа  $C_{3v}$  — имеет два одномерных неприводимых представления  $A_1$  и  $A_2$  и одно двумерное неприводимое представление  $E$ . Элементами группы являются тождественное преобразование  $I$ , повороты  $R^2$  (на углы  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$ , соответственно), отражение в «вертикальной» плоскости  $P$ , а также комбинации  $PR$  и  $PR^2$ . Функция, остающаяся неизменной при всех преобразованиях симметрии треугольника, образует базис неприводимого представления  $A_1$ . Затравочную функцию, удовлетворяющую этому требованию, легко построить, подвергнув (31) всем преобразованиям группы и собрав из них суперпозицию с одинаковыми коэффициентами:

$$\psi^{(A_1)} = \psi + R\psi + R^2\psi + P\psi + PR\psi + PR^2\psi \quad (32)$$

(рис. 3, слева). Функция, меняющая знак при преобразованиях, содержащих отражение, преобразуется по неприводимому представлению  $A_2$ :

$$\psi^{(A_2)} = \psi + R\psi + R^2\psi - P\psi - PR\psi - PR^2\psi. \quad (33)$$

Базис двумерного неприводимого представления  $E$  образуют линейные комбинации с комплексными коэффициентами:

$$\psi_1^{(E)} = \psi + e^{2\pi i/3}R\psi + e^{4\pi i/3}R^2\psi + P\psi + e^{-2\pi i/3}PR\psi + e^{-4\pi i/3}PR^2\psi, \quad (34)$$

$$\psi_2^{(E)} = \psi + e^{-2\pi i/3}R\psi + e^{-4\pi i/3}R^2\psi + P\psi + e^{2\pi i/3}PR\psi + e^{4\pi i/3}PR^2\psi, \quad (35)$$

так что  $\psi_2^{(E)} = \psi_1^{(E)*}$ . Эти функции переходят друг в друга при отражениях, а при поворотах приобретают фазовый множитель. Для наших целей, однако, будет удобно выбрать в качестве затравочных функций вещественную и мнимую части (34):

$$\psi_R^{(E)} = \text{Re } \psi_1^{(E)}, \quad \psi_I^{(E)} = \text{Im } \psi_1^{(E)} \quad (36)$$

(рис. 3, справа), поскольку известно, что полный набор собственных функций вещественного гамильтониана всегда можно выбрать вещественным.

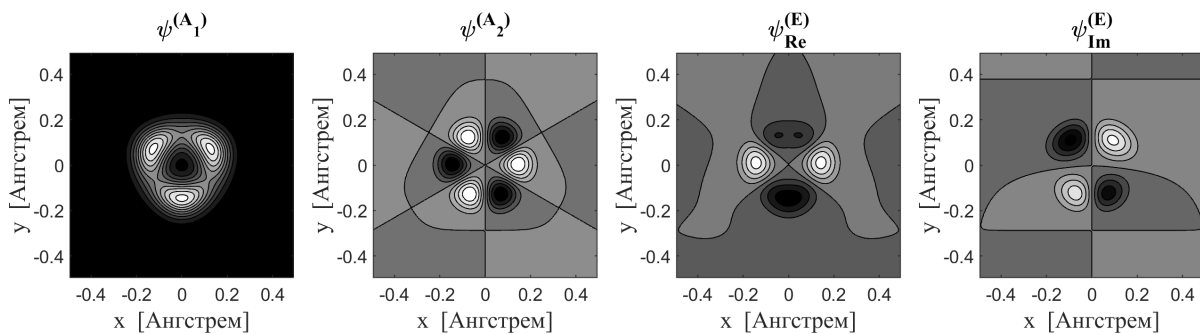


Рис. 3. Затравочные волновые функции (32), (33) и (36)  
Fig. 3. Initial waveforms with specific symmetry (32), (33) and (36)

Подстановка одной из функций (32), (33), (36) в (7) приводит к нахождению уровней энергии связанных состояний в нашей потенциальной яме, отвечающих собственным функциям гамильтониана с соответствующим типом симметрии.

**6. Обсуждение результатов.** В таблице 1 перечислены уровни энергии поперечного движения позитрона с энергией продольного движения  $E_z = 1.5$  ГэВ, найденные с помощью моделирования на квадратной сетке (слева) и на гексагональной сетке (справа). Данный выбор энергии продольного движения обусловлен тем обстоятельством, что в этом случае в потенциальной яме (5) имеются всего два связанных состояния: невырожденное основное, обладающее симметрией типа  $A_1$ , и двукратно вырожденное первое возбужденное, обладающее симметрией типа  $E$ .

Таблица 1  
Table 1

Уровни энергии поперечного движения позитрона (в эВ) с  $E_z = 1.5$  ГэВ в яме (5), найденные численно на квадратной и гексагональной сетках  
Energy levels of transverse motion of a positron (in eV) with  $E_z = 1.5$  GeV in a well (5), found numerically on square and hexagonal grids

Квадратная сетка			Гексагональная сетка		
$A_1$	$E_R$	$E_I$	$A_1$	$E_R$	$E_I$
0.15028			0.15040		
0.29277	0.29277	0.29281		0.29422	0.29422

Мы видим, что, помимо небольших отличий в найденных численно уровнях энергии стационарных состояний, моделирование на квадратной сетке приводит к появлению двух типов артефактов: появление ложных уровней энергии, несвойственных данному типу симметрии волновой функции, и возникновение расщепления по энергии состояний, которые в силу симметрии гамильтониана должны быть вырожденными.

Причина появления артефактов первого типа заключается в том, что функция с определенной симметрией, такая как (32) или  $\psi_R^{(E)}$  из (36), будучи заданной на дискретной сетке, не обладающей соответствующей симметрией, будет проявлять себя как суперпозиция функций с этими двумя типами симметрии.

Кроме того, в случае квадратной сетки наблюдается артефакт второго типа — «нефизическое» расщепление уровней, соответствующих  $\psi_R^{(E)}$  и  $\psi_I^{(E)}$  для состояний, которые, в силу симметрии задачи, должны быть строго вырожденными. Причина такого расщепления заключается в том, что потенциал (5), заданный на квадратной области, фактически, не будет обладать симметрией  $3v$ , обуславливающей данное вырождение.

Результаты моделирования на гексагональной сетке свободны от обоих этих недостатков.

Развитый метод будет использован в дальнейшем при исследовании квантового хаоса в данной системе. Проблематика квантового хаоса (см., например, [23, 24]) означает поиск отличий в поведении квантовых систем, чей классический аналог обладает хаотической динамикой, от поведения систем, чей классический аналог обладает регулярной динамикой. Проявления квантового хаоса в аксиальном каналировании электронов в кристалле кремния в направлении  $\langle 110 \rangle$  исследовались ранее в работах [11, 12, 13, 17], при каналировании электронов в направлении  $\langle 100 \rangle$  — в работах [14, 15, 16], при каналировании позитронов в направлении  $\langle 100 \rangle$  — в работах [15, 18, 19].

#### Список литературы

1. Robinson M.T., Oen O.S. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. *Phys. Rev.* 1963;132(6):2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М., Наука; 1993. 344 с.
3. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф., Трутень В.И., Гриненко А.А., Сыщенко В.В. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах. *УФН.* 1995;165(10):1165–1192. DOI: 10.3367/UFNr.0165.199510c.1165
4. Gemmel D.S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974;46(1):129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129
5. Uggerhøj U.I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(4):1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131
6. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. *УФН.* 1969;99(2):249–296. DOI: 10.3367/UFNr.0099.196910c.0249
7. Исупов А.Ю., Сыщенко В.В., Парахин А.С. Об устойчивости движения позитронов вблизи направления  $\langle 111 \rangle$  кристалла кремния. *Прикладная математика & Физика.* 2023;55(1):49–56. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56
8. Feit M.D., Fleck J.A., Jr., Steiger A. Solution of the Schrödinger equation by a spectral method. *Journal of Computational Physics* 1982;47:412–433. DOI:10.1016/0021-9991(82)90091-2

9. Scholz D., Weyrauch M. A note on the Zassenhaus product formula. *J. Math. Phys.* 2006;47:033505. DOI: 10.1063/1.2178586
10. Серов В.В. Численные методы решения нестационарных квантовомеханических задач. Саратов, Новый ветер; 2011. 56 с.
11. Шульга Н.Ф., Сыщенко В.В., Тарновский А.И., Исупов А.Ю. Проявления квантового хаоса в аксиальном каналировании электронов. *Поверхность. Рентген., синхротрон. и нейтрон. исслед.* 2015;7:72–76. DOI: 10.7868/S0207352815070197
12. Shul'ga N.F., Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Isupov A.Yu. Structure of the channeling electrons wave functions under dynamical chaos conditions. *Nuclear Instrum. Methods B.* 2016;370:1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.nimb.2015.12.040
13. Shul'ga N.F., Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Isupov A.Yu. Wave functions of channeling electrons in regular and chaotic cases. *Journal of Physics: Conference Series*, 2016;732:012028. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012028
14. Shul'ga N.F., Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Solovyev I.I., Isupov A.Yu. Positrons vs electrons channeling in silicon crystal: energy levels, wave functions and quantum chaos manifestations. *Journal of Instrumentation.* 2018;13:C01017. DOI: 10.1088/1748-0221/13/01/C01017
15. Shul'ga N.F., Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Dronik V.I., Isupov A.Yu. Regular and chaotic motion domains in the channeling electron's phase space and mean level density for its transverse motion energy. *Journal of Instrumentation.* 2019;14:C12022. DOI: 10.1088/1748-0221/14/12/C12022
16. Сыщенко В.В., Тарновский А.И., Исупов А.Ю., Соловьев И.И. Структура областей регулярного движения в фазовом пространстве каналированных электронов. *Рентгеновские синхротронные и нейтронные исследования.* 2020;3:103–108. DOI: 10.31857/S1028096020030188
17. Сыщенко В.В., Тарновский А.И. Статистические свойства уровней энергии поперечного движения при каналировании электронов в кристалле кремния. *Рентгеновские синхротронные и нейтронные исследования.* 2021;7:84–88. DOI: 10.31857/S1028096021070207
18. Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Dronik V.I. Channeling in crystals and quantum chaos. Partial differential equations and related topics (PDERT'22): collection of materials of the International Conference. Belgorod, Publishing house "BelSU" NRU "BelSU"; 2022:188–190.
19. Сыщенко В.В., Тарновский А.И., Дроник В.И., Исупов А.Ю. Расщепление уровней энергии поперечного движения позитронов при каналировании в направлении  $[100]$  кристалла кремния. *Рентгеновские синхротронные и нейтронные исследования.* 2022;3:79–88. DOI: 10.31857/S1028096022030207
20. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М., Наука; 1978. 791 с.
21. Сыщенко В.В., Сыщенко В.Г. Теория твердого тела для начинающих. М.–Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика; 2022. 260 с.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., Наука; 1989. 768 с.
23. Gutzwiller M.C. *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, New York, Springer-Verlag; 1990. 432 p.
24. Райхл Л.Е. Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; 2008. 756 с.

#### References

1. Robinson M.T., Oen O.S. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. *Phys. Rev.* 1963;132(6):2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
2. Akhiezer A.I., Shul'ga N.F. *High-Energy Electrodynamics in Matter*. Gordon and Breach; 1996. 400 p.
3. Akhiezer A.I., Shul'ga N.F., Truten' V.I., Grinenko A.A., Syshchenko V.V. Dynamics of high-energy charged particles in straight and bent crystals. *Physics-Uspokhi.* 1995;38:1119–1145. DOI: 10.1070/PU1995v038n10ABEH000114
4. Gemmel D.S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974;46(1):129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129
5. Uggerhøj U.I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, *Rev. Mod. Phys.* 2005;77(4):1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131
6. Lindhard J. Influence of Crystal Lattice on Motion of Energetic Charged Particles. *Kongel. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* 1965;34(14):1–64.
7. Isupov Alexander, Syshchenko Vladislav, Parakhin Alexander. On the stability of the positron's motion near  $\langle 111 \rangle$  direction of the Silicon crystal. *Applied Mathematics & Physics.* 2023;55(1): 49–56. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56
8. Feit M.D., Fleck J.A., Jr., Steiger A. Solution of the Schrödinger equation by a spectral method. *Journal of Computational Physics* 1982;47:412–433. DOI:10.1016/0021-9991(82)90091-2
9. Scholz D., Weyrauch M. A note on the Zassenhaus product formula. *J. Math. Phys.* 2006;47:033505. DOI: 10.1063/1.2178586
10. Serov V.V. Numerical Methods for Nonstationary Quantum Mechanical Problems Solving. Saratov, Novy Veter; 2011. 56 p. (in Russian).

11. Shul'ga NF., Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Isupov AYu. Quantum Chaos Effects in the Axial Channeling of Electrons. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2015;9(4):721–725. DOI: 10.7868/S0207352815070197
12. Shul'ga NF., Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Isupov AYu. Structure of the channeling electrons wave functions under dynamical chaos conditions. *Nuclear Instrum. Methods B*. 2016;370:1–9. DOI: doi.org/10.1016/j.nimb.2015.12.040
13. Shul'ga NF., Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Isupov AYu. Wave functions of channeling electrons in regular and chaotic cases. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732:012028. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012028
14. Shul'ga NF., Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Solovyev II., Isupov AYu. Positrons vs electrons channeling in silicon crystal: energy levels, wave functions and quantum chaos manifestations. *Journal of Instrumentation*. 2018;13:C01017. DOI: 10.1088/1748-0221/13/01/C01017
15. Shul'ga NF., Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Dronik VI., Isupov AYu. Regular and chaotic motion domains in the channeling electron's phase space and mean level density for its transverse motion energy. *Journal of Instrumentation*. 2019;14:C12022. DOI: 10.1088/1748-0221/14/12/C12022
16. Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Isupov AYu., Solovyev II. Structure of Regions of Regular Motion in the Phase Space of Channeled Electrons. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14 (2):306–311. DOI: 10.1134/S1027451020020354
17. Syshchenko VV., Tarnovsky AI. Statistical Properties of the Transverse-Motion Energy Levels for Channeling Electrons in a Silicon Crystal under Dynamical Chaos Conditions. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2021;15(7):84–88. DOI: 10.1134/S1027451021040200
18. Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Dronik VI. Channeling in crystals and quantum chaos. Partial differential equations and related topics (PDERT'22): collection of materials of the International Conference. Belgorod, Publishing house "BelSU" NRU "BelSU"; 2022:188–190.
19. Shul'ga NF., Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Dronik VI., Isupov AYu. Splitting of the Transverse-Motion Energy Levels of Positrons during Channeling in the [100] Direction of a Silicon Crystal. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2021;15(Suppl. 1):79–88. DOI: 10.1134/S1027451022020203
20. Kittel C. Introduction to Solid State Physics. John Wiley & Sons; 2005. 680 p.
21. Syshchenko VV., Syshchenko VG. Solid state theory for beginners. M.–Izhevsk, Regularnaya i haoticheskaya dinamika Publ.; 2022. 260 p. (in Russian)
22. Landau LD., Lifshitz EM. Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory, Vol. 3 of Course of Theoretical Physics. Oxford, Pergamon Press; 1977. 677 p.
23. Gutzwiller MC. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York, Springer-Verlag; 1990. 432 p.
24. Reichl LE. The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations, 2nd ed. New York, Springer; 2004. 675 p.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.12.2023

Received December 21, 2023

Поступила после рецензирования 01.02.2024

Revised February 1, 2024

Принята к публикации 05.02.2024

Accepted February 5, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Сыщенко Владислав Вячеславович** – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Парахин Александр Сергеевич** – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Vladislav V. Syshchenko** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Alexander S. Parakhin** – Postgraduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

## Электрические свойства эвтектической композиции InSb-MnSb

Кочура А. В.<sup>1</sup>, Родионов В. В.<sup>1</sup>, Кочура Е. П.<sup>1</sup>, Маренкин С. Ф.<sup>2</sup>, Аронзон Б. А.<sup>3</sup>  
(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет,  
Россия, 305040, г. Курск, ул. 50 лет октября, 94  
[akochura@mail.ru](mailto:akochura@mail.ru), [vovarodionov2009@yandex.ru](mailto:vovarodionov2009@yandex.ru), [ekochura@mail.ru](mailto:ekochura@mail.ru)

<sup>2</sup> Институт общей и неорганической химии им. Н.С. Курнакова РАН,  
Россия, 119991, г. Москва, Ленинский просп., 31  
[marenkin@rambler.ru](mailto:marenkin@rambler.ru)

<sup>3</sup> Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН,  
Россия, 119991, г. Москва, Ленинский просп., 51  
[aronzon@mail.ru](mailto:aronzon@mail.ru)

**Аннотация.** Синтезированы направленно закристаллизованные монокристаллические эвтектики InSb-MnSb и выполнены исследования их электрических свойств. Игольчатые включения с высоким аспектным соотношением ферромагнитного металла MnSb располагаются параллельно в полупроводниковой матрице InSb. Температурные зависимости удельного сопротивления демонстрируют наличие высокой анизотропии электрических свойств в образцах с различной ориентацией направления электрического тока и игольчатых включений MnSb. При достаточно высокой эффективной концентрации основных носителей заряда (дырок)  $7 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$  их подвижность достигает  $70 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ . Удельное сопротивление игольчатых включений MnSb ниже, чем в объемных кристаллах, что говорит об их более высоком кристаллическом совершенстве.

**Ключевые слова:** эвтектический сплав, антимонид индия, антимонид марганца, проводимость, эффективная подвижность, эффективная концентрация основных носителей заряда

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования Российской Федерации (г/з № 0851-2020-0035) и в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (Соглашение № 075-15-2021-1213) в части получения и характеристики объектов исследования, РФФ (21-12-00254) в части изучения их электрических свойств.

**Для цитирования:** Кочура А. В., Родионов В. В., Кочура Е. П., Маренкин С. Ф., Аронзон Б. А. 2024. Электрические свойства эвтектической композиции InSb-MnSb. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 60–65.  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-60-65

Original Research

## Electrical Properties of Eutectic Composition InSb-MnSb

Alexey V. Kochura<sup>1</sup>, Vladimir V. Rodionov<sup>1</sup>, Evgenia P. Kochura<sup>1</sup>, Sergey F. Marenkin<sup>2</sup>,  
Boris A. Aronzon<sup>3</sup>

(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

<sup>1</sup>SouthWest State University,  
94 50 Let Oktyabrya st., Kursk, 305040, Russia  
[akochura@mail.ru](mailto:akochura@mail.ru), [vovarodionov2009@yandex.ru](mailto:vovarodionov2009@yandex.ru), [ekochura@mail.ru](mailto:ekochura@mail.ru)

<sup>2</sup>N. S. Kurnakov Institute of General and Nonorganic Chemistry of the Russian Academy of Science,  
31 Leninsky Prospekt st., Moscow, 119991, Russia  
[marenkin@rambler.ru](mailto:marenkin@rambler.ru)

<sup>3</sup>P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Science,  
51 Leninsky Prospekt st., Moscow, 119991, Russia  
[aronzon@mail.ru](mailto:aronzon@mail.ru)

**Abstract.** A single crystal of directionally crystallized eutectic InSb-MnSb were synthesized and the electrical properties was determined. Needle inclusions with a high aspect ratio of MnSb ferromagnetic metal are arranged in parallel in the InSb semiconductor matrix. The temperature dependences of the resistivity demonstrate the presence of high anisotropy of electrical properties in samples with different orientations of the direction of electric current and MnSb needle inclusions. The high effective concentration of the main charge carriers (holes) is  $7 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ . The mobility of the main charge carriers reaches  $70 \text{ cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ . The resistivity of MnSb needle inclusions is lower than in bulk crystals, which indicates their higher crystal perfection.

**Keywords:** Eutectic Alloy, Indium Antimonide, Manganese Antimonide, Conductivity, Effective Mobility, Effective Concentration of the Main Charge Carriers

**Acknowledgements:** The paper was carried out with the support of the Ministry of Science and Education of the Russian Federation (g/w № 0851-2020-0035) and within the framework of the strategic academic leadership program "Priority 2030" (Agreement № 075-15-2021-1213) in terms of obtaining and characterizing research objects, RNF (21-12-00254) in terms of studying their electrical properties.

**For citation:** Kochura A. V., Rodionov V. V., Kochura E. P., Marenkin S. F., Aronzon B. A. 2024. Electrical Properties of Eutectic Composition InSb-MnSb. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 60–65. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-60-65

**1. Введение.** Протяженные микро- и наноразмерные магнитные материалы в виде стержней с высоким аспектным соотношением могут найти применение в устройствах спиновой электроники [1, 2], а их внедрение в полупроводниковую матрицу может облегчить манипулирование спинами носителей заряда в двухфазных магнитных системах. Примером такой системы может служить направленно закристаллизованный эвтектический сплав InSb-MnSb. Он входит в состав группы эвтектических сплавов InSb-MeSb, где одним из компонентов является атом 3d-металла Me = Mn, Ni, Fe, Cr. Ранее в композитах InSb-MnSb было обнаружено гигантское положительное магнитосопротивление при температуре порядка комнатной [3]. Кроме того, они могут выступать в качестве поляризаторов инфракрасного излучения с эффективностью более 99 % [4]. Также предлагалось использовать InSb-MnSb в качестве элемента Пельтье для детекторов дальнего инфракрасного диапазона [5]. Следует отметить, что MnSb является ферромагнитным полуметаллом с температурой Кюри значительно выше комнатной  $T_c = 585 - 598$  K [6, 7]. С учетом того, что MnSb имеет достаточно хорошую структурную совместимость с традиционными материалами электроники, ранее проводились исследования гибридных структур MnSb/полупроводник (Si, GaAs, GaSb, InP) [8, 9, 10, 11]. Например, было показано, что внедрение включений MnSb в полупроводниковую матрицу приводит к возникновению магнито-оптического эффекта, что свидетельствует о спиновой поляризации носителей заряда в немагнитной полупроводниковой матрице [12]. Вторым компонент системы InSb – узкозонный полупроводник с шириной запрещенной зоны 0,18 эВ ( $T = 300$  K) с подвижностью электронов  $\mu = 8 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ , что на порядок превышает значение для наиболее широко используемого в сверхбыстродействующих устройствах GaAs. Поэтому InSb является основным материалом ряда инфракрасных детекторов, систем теплового зрения и высокоскоростных электронных элементов [13]. Простое внедрение микро- и нановключений MnSb в матрицу InSb сопровождается резким снижением подвижности носителей заряда, поэтому представляет интерес исследование особенностей проводимости гибридной анизотропной системы, в которой включения MnSb представляют собой соориентированные монокристаллические иглы, внедренные в монокристалл InSb.

**2. Материалы и методика эксперимента.** Направленно закристаллизованные эвтектические сплавы InSb-MnSb выращивали методом Бриджмена – Стокбаргера. Исходными материалами служили монокристаллы InSb (чистота 99,999 %) и поликристаллы MnSb, синтезированные предварительно прямым сплавлением Sb (чистота 99,99 %) и дважды сублимированного Mn (чистота 99,999 %). Исходные материалы измельчали и загружали в ростовые ампулы. Содержание MnSb выдерживалось в 6,5 % мол., что соответствует эвтектической области на фазовой диаграмме системы InSb-MnSb [14]. Было установлено, что наиболее совершенные по структуре образцы с наименьшим количеством объемных дефектов синтезировались в ходе пятиэтапного процесса. Вначале ампулы нагревали до 803 K в «горячей» зоне, выдерживали при этой температуре 10 ч, затем температуру поднимали до 838 K. После выдержки при этой температуре в течение 5 ч включали вращательный механизм ампулы и медленно опускали ее до «холодной» зоны (593 K), чтобы температурный градиент был не менее 50 K/см. После полного перехода ампулы в «холодную» зону подогрев отключали и осуществляли охлаждение в естественном режиме до комнатной температуры. Дополнительно для выращивания эвтектических сплавов с однородным распределением ориентированных игл MnSb требовалось выполнение ряда условий: температура перегрева выставлялась выше температуры плавления не более чем на 3-5 K, скорость кристаллизации поддерживалась не более 1 см/сут и для ориентированного роста использовался затравочный кристалл InSb, помещенный на дно ампулы так, что его кристаллографическая плоскость (110) была ориентирована поперек направления роста эвтектического сплава.

Состав синтезированных кристаллов изучали методами атомно-сканирующей электронной (СЭМ) микроскопии и энергодисперсионного анализа. Для обнаружения возможных неосновных фаз был проведен анализ порошковых рентгеновских дифрактограмм. Дифрактограммы образцов из центральной части були имели только пики, принадлежащие InSb и MnSb, а также наблюдались слабые рефлексы  $\text{InMn}_3$  и  $\text{Mn}_2\text{Sb}$ , когда образцы были взяты с края були.  $\text{InMn}_3$  и  $\text{Mn}_2\text{Sb}$  являются магнитными соединениями – ферримагнетиками, у которых температуры Нееля равны 583 K [15] и 550 K [6], соответственно. Поэтому для исключения их влияния на электрические свойства эвтектической композиции образцы

для исследований вырезались только из центральной части були в параллельном (осевом) (образец №1) и перпендикулярном (поперечном) (образец №2) направлении наиболее длинных сторон к оси роста. Электрические и магнитотранспортные свойства исследовали в интервале от 1,6 до 320 К с использованием стандартной шестизондовой геометрии в постоянном (до 70 кГс) магнитном поле. Образцы имели высокую проводимость р-типа и линейные вольт-амперные характеристики в выбранном для измерений диапазоне.

**3. Результаты и обсуждение.** Исследование лауэграмм показало соориентацию кристаллических структур полупроводниковой матрицы InSb [110] и монокристаллических игольчатых включений MnSb [001] по отношению к направлению роста. По СЭМ изображениям хорошо видно, что игольчатые включения были распределены равномерно (рис. 1), причем их длинная сторона была ориентирована вдоль оси роста. Диаметр включений находился в диапазоне  $d = 9-15$  мкм, а их длина  $l$  превышала 1 мм, поэтому аспектное соотношение  $a = l/r > 100$ .

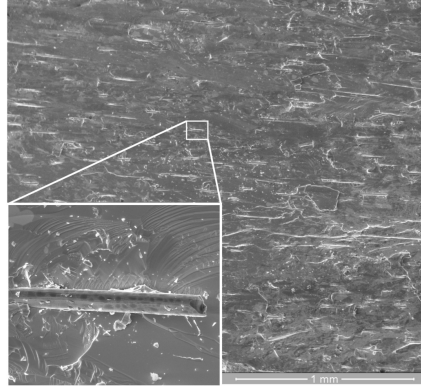


Рис. 1. СЭМ изображение поверхности скола слитка InSb-MnSb вдоль направления роста. Отдельное игольчатое включение MnSb показано на увеличенной части рисунка

Fig. 1. SEM image of the chipping surface of an InSb-MnSb ingot along the growth direction. A separate needle-like inclusion of MnSb is shown in the enlarged part of the figure

Для MnSb существует проблема нестехиометрии, возникающая из-за фазовой нестабильности всех соединений со структурой арсенида никеля, которую имеет и MnSb, что отражено на бинарной фазовой диаграмме системы Mn-Sb [6]. Так, в соединениях  $Mn_{1+\delta}Sb$  избыток Mn занимает межузельные позиции, что вызывает уменьшение  $T_c$  и намагниченности насыщения с увеличением  $\delta$  [16]. Энергодисперсионный анализ состава монокристаллических игольчатых включений показал, что они содержат 2 % мол. избытка Sb ( $MnSb_{1.02}$ ). В отличие от Mn максимальный предел растворимости Sb в MnSb близок к стехиометрическому составу [17] и максимальное наблюдаемое ранее содержание Sb 52 ат. % в MnSb [18] близко к нашему значению. Также ранее было установлено, что избыточное содержание Sb в MnSb не приводит к снижению  $T_c$  [18], в отличие от избытка Mn. Признаков присутствия Mn в полупроводниковой матрице InSb с точностью 0,1 % ат. обнаружено не было.

На рис. 2 представлены результаты исследования температурной зависимости продольного удельного сопротивления  $\rho(T)$  образцов эвтектического сплава InSb-MnSb в диапазоне 1,6 - 320 К и эффективных значений концентрации и подвижности основных носителей заряда.

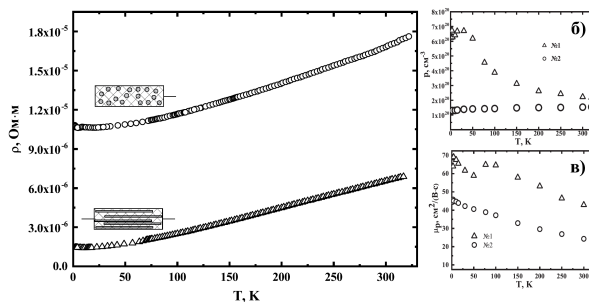


Рис. 2. Зависимости основных электрических параметров от температуры образцов InSb-MnSb с разными ориентациями игольчатых включений относительно протекающего тока: удельного сопротивления (а), эффективной концентрации основных носителей заряда – дырок (б) и их эффективной подвижности (в)

Fig. 2. The dependences of the main electrical parameters on the temperature of InSb-MnSb samples with different orientations of needle inclusions relative to the flowing current: resistivity (a), the effective concentration of the main charge carriers – holes (b) and their effective mobility (c)

Металлическое поведение преобладает при обеих ориентациях электрического тока относительно игольчатых включений (рис. 2а). Лишь при  $T < 20$  К для образца №2 вид  $\rho(T)$  приобретает полупроводниковый характер. Недавно было показано, что в подобных эвтектических композициях при низких температурах преобладает прыжковая проводимость с переменной длиной прыжка в режиме Мотта [19]. Эффективная концентрация носителей заряда превышает  $10^{20}$  см<sup>3</sup>, а ее измеренная величина отличается для различных ориентаций игольчатых включений (рис. 2б), что связано с существенным различием реальных концентраций дырок в узкозонном полупроводнике  $p^{InSb}$  (InSb, легированный марганцем) и ферромагнитном полуметалле  $p^{MnSb}$  (MnSb). Следует также указать, что при учете вклада в проводимость нужно учитывать наличие двух подзон в валентной зоне InSb – легких и тяжелых дырок. Однако, выполненные нами измерения проводимости и эффекта Холла недостаточны для разделения вкладов всех трех видов дырок и требуют дополнительно проведения исследований зависимостей магнитосопротивления от температуры и магнитных полей. Механизмы рассеяния носителей заряда во включениях и основной матрице различны, на что указывает вид зависимостей их эффективной подвижности от температуры (рис. 2в). Обращает на себя внимание достаточно высокое значение  $\mu$  для двухфазной системы полупроводник/ферромагнетик (до 70 см<sup>2</sup>/(В·с)), что представляет интерес для исследования влияния ферромагнитных включений на спиновую поляризацию основных носителей заряда в полупроводниковой матрице.

Наличие температурных зависимостей  $\rho(T)$  для различных ориентаций игольчатых включений в полупроводниковой матрице позволяет использовать теорию проводимости двухфазных систем, состоящих из цилиндрических, ориентированных в одном направлении стержней, игл или волокон, встроенных в непрерывную матрицу из другого материала. Согласно этой теории общая электропроводность таких систем при измерениях в соосном ( $\sigma_A$ ) и поперечном ( $\sigma_T$ ) направлениях электрического тока и игольчатых включений определяются системой уравнений [5]:

$$\sigma_A = V_1\sigma_1 + V_2\sigma_2 \tag{1}$$

$$\sigma_T = \sigma_2 + \frac{V_1}{\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} + \frac{V_2}{2\sigma_2}}, \tag{2}$$

где  $V_1$  – объемная доля включений,  $V_2 = 1 - V_1$  – объемная доля матрицы,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – проводимости включений и матрицы, соответственно. Структурные исследования показали, что для наших образцов плотность распределения игл составляет 503 мм<sup>-2</sup>. Это позволило рассчитать  $V_1 = 0,057$ . Подставив экспериментальные данные  $\sigma(T) = 1 / \rho(T)$  (рис. 2) в уравнения (1) и (2), можно решить обратную задачу и найти отдельно температурную зависимость удельного сопротивления игольчатых включений MnSb  $\rho_1(T)$  и полупроводниковой матрицы InSb  $\rho_2(T)$  (рис. 3).

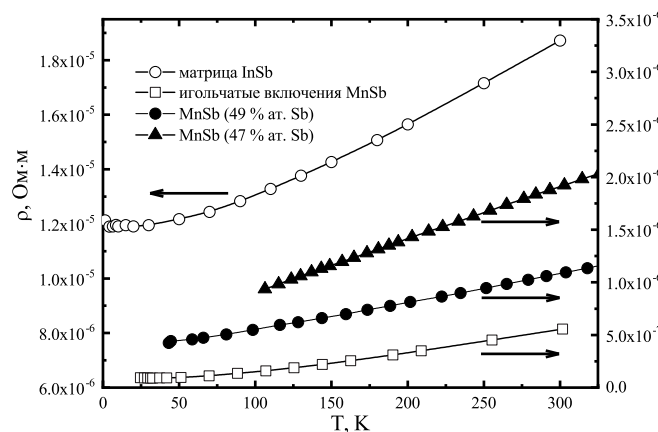


Рис. 3. Восстановленные из экспериментальных зависимостей удельного сопротивления образцов InSb-MnSb от температуры (Рис. 2а), согласно уравнениям (1) и (2), зависимости удельного сопротивления основной матрицы InSb и игольчатых включений MnSb. Показаны также данные по зависимостям  $\rho(T)$  для кристаллов MnSb с содержанием Sb 47 и 49 % ат., взятые из работы [20]. Интерполяция вычисленных и экспериментальных данных выполнена с помощью  $\beta$ -сплайнов для наглядности

Fig. 3. Recovered from the experimental dependences of the resistivity of InSb-MnSb samples on temperature (Fig. 2a), according to equations (1) and (2), the dependences of the resistivity of the main InSb matrix and MnSb needle inclusions. The data on the dependences of  $\rho(T)$  for MnSb crystals with Sb content of 47 and 49 % at. are also shown, taken from [20]. The interpolation of the calculated and experimental data was performed using  $\beta$  - splines for clarity



Как следует из рис. 3, удельное сопротивление матрицы InSb  $\rho_2$  примерно в 40–100 раз превышает  $\rho_1$  и близко к наблюдаемому в пленках InSb, легированных Mn, и объемных образцах с неориентированными микро- и нановключениями MnSb, выращиваемыми равновесными или околоравновесными методами [21, 22, 23]. Это косвенно свидетельствует о возможном легировании основной матрицы InSb атомами Mn и переходе ее из диамагнитного в парамагнитное состояние. Для сравнения температурных зависимостей удельного сопротивления MnSb на рис. 3 приведены экспериментальные кривые, полученные в [20] при изучении электропроводности образцов системы Mn-Sb с избытком Mn. Для игольчатых включений MnSb в образцах №1 и №2, с избыточным содержанием Sb, удельное сопротивление меньше, чем для MnSb, с избытком Mn из работы [20]. Это согласуется с тенденцией снижения  $\rho$  с увеличением содержания Sb в  $Mn_{1+\delta}Sb$  [18]. Следует также отметить еще одну возможную причину пониженного сопротивления игольчатых микровключений MnSb в образцах №1 и №2. Согласно исследованиям рентгеновской дифракции, они являются монокристаллическими. В то время как синтез объемных монокристаллов MnSb существенно затруднен высокой вероятностью образования трещин при их выращивании из расплава, что способствует существенному увеличению концентрации основных носителей заряда и значительному снижению их подвижности [24]. Это указывает на перспективность использования методики синтеза эвтектической композиции в матрице для получения микро- и микрометровых монокристаллов MnSb со сниженным количеством структурных дефектов.

**4. Заключение.** Методом Бриджмена – Стокбаргера синтезированы направленно закристаллизованные монокристаллические эвтектические сплавы InSb-MnSb, обладающие высокой анизотропией электрических свойств. По экспериментальным зависимостям удельного сопротивления с использованием теории проводимости двухфазных систем восстановлены значения удельного сопротивления основной полупроводниковой матрицы InSb и игольчатых включений MnSb. Значение  $\rho$  для последних оказалось ниже, чем наблюдаемое ранее для кристаллов MnSb, что в совокупности с достаточно высокой подвижностью основных носителей заряда делает эти материалы перспективными для исследования спин-зависимых эффектов и использования их в устройствах спинтроники.

#### References

1. Sun L., et. al. Tuning the properties of magnetic nanowires. *IBM J. Res. & Dev.* 2005;49(1):79-102.
2. Yuste C., et. al. Review: from computational design to the synthesis of molecular magnetic wires for single-molecule spintronics and quantum computing nanotechnologies. *Journal of Coordination Chemistry.* 2022;75(17-19):2359-2383.
3. Umehara Y., Koda S. Structure and phase-boundary energies of the directionally solidified InSb-MnSb, InSb-NiSb, InSb-FeSb and InSb-CrSb eutectic alloys. *Metallography.* 1974;7(4):313-331.
4. Paul B., et. al. Die polarisierende Wirkung von zweiphasigem Indiumantimonid im Ultraroten. *Solid State Electronics.* 1964;7(12):835-841.
5. Hale KD. The physical properties of composite materials. *J. Mat. Sci.* 1976;11:2105-2141.
6. Marenkin SF., et. al. Manganese pnictides MnP, MnAs, and MnSb are ferromagnetic semimetals: Preparation, structure, and properties (a survey). *Russian Journal of Inorganic Chemistry.* 2018;63(14):1753-1763.
7. Liang D., et. al. Tunable structural and magnetic properties of NiAs-type  $Mn_xSb$  (1.00 x 1.30) compounds. *Journal of Alloys and Compounds.* 2021;856(158184):1-5.
8. Burrows ChW, et. al. Hybrid heteroepitaxial growth mode. *Physica Status Solidi A.* 2018;216(1800600):1-6.
9. Hatfield SA., Bell GR. Growth by molecular beam epitaxy and interfacial reactivity of MnSb on InP(001). *J. Cryst. Growth.* 2006;296:165-173.
10. Oveshnikov LN., et. al. High-temperature magnetism and microstructure of a semiconducting ferromagnetic  $(GaSb)_1 - x(MnSb)_x$  alloy. *Belstein Journal of Nanotechnology.* 2018;9:2457-2465.
11. Zhang H., et. al. Synthesis and magnetic properties of MnSb nanoparticles on Si-based substrates. *Applied Physics Letters.* 2007;90:202503 p.
12. Han GC., et. al. Magnetic and magneto-optical properties of MnSb films on various substrates. *J. Magn. Magn. Mat.* 1999;192(2):233-237.
13. Yavorskiy D., et. al. Indium antimonide detector for spectral characterization of terahertz sources. *Journal of Applied Physics.* 2018;123:064502 p.
14. Novotortsev VM., et. al. Synthesis and magnetic properties of the InSb-MnSb eutectic. *Russian Journal of Inorganic Chemistry.* 2011;56(12):1951-1956.
15. Shon Y., et. al. Ferromagnetic formation of two phases due to MnP and InMn3 from InMnP:Zn implanted with Mn. *Appl. Phys. Lett.* 2006;88:232511 p.
16. Reimers W, et. al. Magnetic phase diagram of the system  $Mn_{1-x}Cr_xSb$ . *J. Phys. C: Solid State Phys.* 1982;15:3597 p.
17. Chen T., et. al. Growth of MnSb single crystals by pulling with a seed from nonstoichiometric molten solution. *J. Cryst. Growth.* 1977;37:29-36.

18. Okita T, et. al. Crystal Magnetic Anisotropy and Magnetization of MnSb. *J. Phys. Soc. Jap.* 1968;25(1):120-124.
19. Kochura AV., et. al. The effect of high pressure on the electrical and transport properties of the InSb-MnSb magnetic eutectic composition. *AIP Advances*. 2022;12(035330):1-5.
20. Teramoto I., Van Run A. The existence region and the magnetic and electrical properties of MnSb. *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. 1968;29(2):347-352.
21. Ganesan K., Bhat HL. Growth, magnetotransport, and magnetic properties of ferromagnetic (In, Mn) Sb crystals. *Journal of Applied Physics*. 2008;103(4):043701 p.
22. Ganesan K., et. al. Influence of magnetic clusters on electrical and magnetic properties of  $\text{In}_1 - x\text{Mn}_x\text{Sb}/\text{GaAs}$  dilute magnetic semiconductor grown by liquid phase epitaxy. *Sol. St. Comm.* 2007;143(4-5):272-275.
23. Yakovleva EI., et. al. Anomalous Hall Effect in the  $\text{In}_1 - x\text{Mn}_x\text{Sb}$  Dilute Magnetic Semiconductor with MnSb Inclusions. *JETP Letters*. 2015;101(2):130-135.
24. Oveshnikov LN., et. al. Magnetic and magnetotransport properties of MnSb polycrystals near equatomic composition. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2022;563(169873):1-7.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.12.2023

Received December 20, 2023

Поступила после рецензирования 03.02.2024

Revised February 3, 2024

Принята к публикации 06.02.2024

Accepted February 6, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Кочура Алексей Вячеславович** – кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель директора по научной работе Регионального центра нанотехнологий, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

**Родионов Владимир Викторович** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Регионального центра нанотехнологий, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

**Кочура Евгения Павловна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры программной инженерии, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

**Маренкин Сергей Федорович** – доктор химических наук, профессор, Институт Общей и неорганической химии им. Н. С. Курнакова РАН, г. Москва, Россия

**Аронзон Борис Аронович** – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией физики твердотельных структур для космических приложений, Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, г. Москва, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Alexey V. Kochura** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Deputy Head, Regional Centre of Nanotechnology, SouthWest State University, Kursk, Russia

**Vladimir V. Rodionov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Regional Centre of Nanotechnology, SouthWest State University, Kursk, Russia

**Evgenia P. Kochura** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Software Engineering, SouthWest State University, Kursk, Russia

**Sergey F. Marenkin** – Doctor of Chemical Sciences, Professor, Chief Researcher, N. S. Kurnakov Institute of General and Nonorganic Chemistry of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia

**Boris A. Aronzon** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia

## Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде

Носков А. В.<sup>1</sup>, Киперша В. К.<sup>2</sup>, Плесканев А. А.<sup>2</sup>, Блажевич С. В.<sup>3</sup>, Ильинский Р. Ю.<sup>3</sup>,  
Волошкина Е. В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Московский технический университет связи и информатики,  
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а

<sup>2</sup>Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова,  
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

<sup>3</sup>Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
[a.v.noskov@mtuci.ru](mailto:a.v.noskov@mtuci.ru)

**Аннотация.** Развита динамическая теория дифрагированного переходного излучения и переходного излучения пучка релятивистских электронов, пересекающих пластинку из периодической слоистой среды в геометрии рассеяния Брэгга в условиях асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности пластины. Учитывается поглощение излучения слоистой структурой. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции рентгеновских волн в периодической слоистой среде получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности переходного излучения (ПИ) и дифрагированного переходного излучения (ДПИ).

**Ключевые слова:** дифрагированное переходное излучение, переходное излучение, релятивистский электрон, асимметрия отражения, спектрально-угловая плотность

**Для цитирования:** Носков А. В., Киперша В. К., Плесканев А. А., Блажевич С. В., Ильинский Р. Ю., Волошкина Е. В. 2024. Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 66–74.  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-66-74

Short Communication

## Spectral-angular Densities of Transition Radiation and Diffracted Transition Radiation of Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium

Anton V. Noskov<sup>1</sup>, Vladislav K. Kipersha<sup>2</sup>, Aleksey A. Pleskanev<sup>2</sup>, Sergey V. Blazhevich<sup>3</sup>,  
Roman Yu. Ilyinsky<sup>3</sup>, Elena V. Voloshkina<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Moscow Technical University of Communications and Informatics,  
8a Aviamotornaya St., Moscow, 111024, Russia

<sup>2</sup>Belgorod State Shukhov's Technological University,  
46 Kostyukova St., Belgorod, 308012, Russia

<sup>3</sup>Belgorod National Research University,  
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia  
[a.v.noskov@mtuci.ru](mailto:a.v.noskov@mtuci.ru)

**Abstract.** A dynamic theory of diffracted transition radiation and transition radiation of a beam of relativistic electrons crossing a plate from a periodic layered medium in the Bragg scattering geometry under conditions of asymmetric reflection of the electron field relative to the surface of the plate has been developed. The absorption of radiation by the layered structure is taken into account. Within the framework of the two-wave approximation of the dynamic theory of diffraction of X-ray waves in a periodic layered medium, expressions describing the spectral-angular densities of transition radiation (TR) and diffracted transition radiation (DTR) are obtained.

**Keywords:** Diffracted Transition Radiation, Transition Radiation, Relativistic Electron, Reflection Asymmetry, Spectral-angular Density

**For citation:** Noskov A. V., Kipersha V. K., Pleskanev A. A., Blazhevich S. V., Ilyinsky R. Yu., Voloshkina E. V. 2024. Spectral-angular Densities of Transition Radiation and Diffracted Transition Radiation of Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 66–74. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-66-74

**1. Введение.** При пересечении заряженной частицы границы раздела двух различных сред возникает переходное излучение (ПИ) [1, 2]. В работах [3, 4] было показано, что в монокристаллической мишени ПИ от передней границы может дифрагировать в направлении рассеяния Брэгга на атомных плоскостях монокристалла. При этом образуется дифрагированное переходное излучение (ДПИ), которое в геометрии рассеяния Брэгга выходит из мишени через переднюю границу. В недавних работах [5, 6, 7] ДПИ рассматривалось в монокристалле в случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени. Дифрагированное переходное излучение в периодической слоистой среде с двумя разными слоями на периоде в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции впервые рассматривалось в работе [8]. По аналогии с монокристаллом ДПИ генерируется вследствие дифракции на слоях мишени переходного излучения, генерируемого на входной поверхности мишени.

ДПИ релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривалось в работе [9], а в геометрии рассеяния Брэгга в работах [10, 11].

Переходное излучение в монокристаллической пластине в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени впервые рассматривалось в работах [12, 13]. В периодической слоистой среде ПИ в условиях асимметричной дифракции в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга впервые рассматривалось в работах [14, 15], однако в них не учитывалось поглощение рентгеновского излучения материалом среды.

В настоящей работе рассматривается ПИ и ДПИ релятивистских электронов, пересекающих мишень из периодической слоистой среды с двумя слоями на периоде в геометрии рассеяния Брэгга в общем случае асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ и ПИ с учетом их фотопоглощения слоистой структуры.

**2. Геометрия излучения электронов в периодической слоистой среде.** Рассмотрим излучение пучка релятивистских электронов, которые пересекают пластинку из периодической слоистой среды в геометрии рассеяния Брэгга (Рис.1).

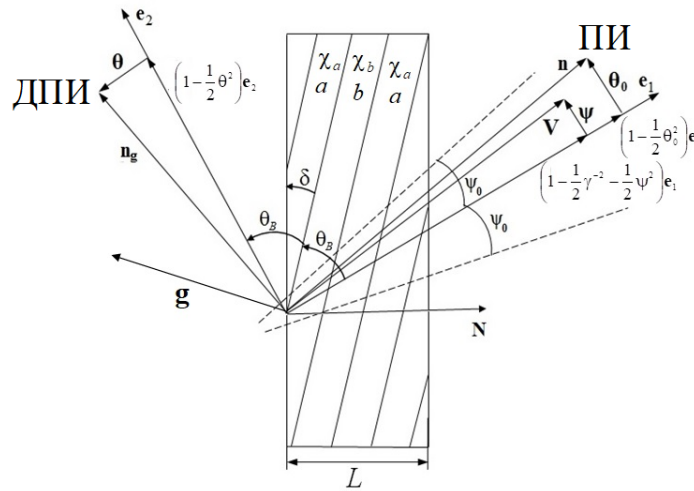


Рис. 1. Геометрия процесса излучения  
Fig. 1. Geometry of the radiation process

Периодическая слоистая среда состоит из слоев с толщинами  $a$  и  $b$ , и соответственно диэлектрическими восприимчивостями  $\chi_a$  и  $\chi_b$ ,  $T = a + b$  – период слоистой среды. Слои мишени находятся под произвольным углом  $\delta$  к поверхности пластинки (Рис.1), что означает асимметричное отражение поля электрона относительно поверхности мишени. Введем угловые переменные  $\Psi$ ,  $\Theta$  и  $\Theta_0$  согласно выражениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\Psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \Psi, & \mathbf{e}_1 \Psi &= 0, \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\Theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \Theta_0, & \mathbf{e}_1 \Theta_0 &= 0, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\Theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \Theta, & \mathbf{e}_2 \Theta &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$\mathbf{V}$  – скорость электрона,  $\mathbf{n}$  – направление импульса излученного вблизи направления вектора скорости электрона фотона,  $\mathbf{n}_g$  – направление импульса излученного фотона вблизи направления рассеяния

Брэгга,  $\Theta$  – угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения  $\mathbf{e}_2$ ,  $\Psi$  – угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка  $\mathbf{e}_1$ ,  $\Theta_0$  – угол между направлением распространения падающего фотона и осью  $\mathbf{e}_1$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$  – Лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих, параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка:  $\Theta = \Theta_{\parallel} + \Theta_{\perp}$ ,  $\Theta_0 = \Theta_{0\parallel} + \Theta_{0\perp}$ ,  $\Psi = \Psi_{\parallel} + \Psi_{\perp}$ . Вектор  $\mathbf{g}$  (Рис.1) аналогичен вектору обратной решетки в кристалле – он перпендикулярен слоям мишени и его длина равна  $g = \frac{2\pi n}{T}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

**3. Амплитуды напряженностей электрических полей ПИ и ДПИ.** Рассмотрим уравнение для Фурье-образа электрического поля, возбуждаемого электроном в периодической слоистой среде, которое следует из системы уравнений Максвелла:

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0)) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}) - \omega^2 \sum_{\mathbf{g} \neq 0} \chi_{-\mathbf{g}} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}} = 4\pi i \omega \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \quad (2)$$

где  $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{J}_{\omega, \mathbf{k}} = 2\pi e \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V})$  – Фурье-образы напряженности электрического поля и плотности тока излучающего электрона,  $\chi_0(\omega)$  – средняя диэлектрическая восприимчивость в ПСС,  $\chi_{\mathbf{g}}$  и  $\chi_{-\mathbf{g}}$  коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам  $\mathbf{g}$ :  $\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(-i\mathbf{g}\mathbf{x})$ . Для рассматриваемой структуры параметры рассеяния и поглощения рентгеновских волн принимают вид:

$\chi_0(\omega) = (a\chi_a + b\chi_b)/T$ ,  $\chi_{\mathbf{g}} = (\chi_b - \chi_a)(1 - e^{i\mathbf{g}\mathbf{a}})/i\mathbf{g}T$ . Из этих выражений следуют соотношения:

$$\chi'_0 = \frac{a}{T}\chi'_a + \frac{b}{T}\chi'_b, \chi''_0 = \frac{a}{T}\chi''_a + \frac{b}{T}\chi''_b, |\chi'_{\mathbf{g}}| = \frac{2}{gT} \left| \sin\left(\frac{g\mathbf{a}}{2}\right) (\chi'_b - \chi'_a) \right|, |\chi''_{\mathbf{g}}| = \frac{2}{gT} \left| \sin\left(\frac{g\mathbf{a}}{2}\right) (\chi''_b - \chi''_a) \right| \quad (3)$$

Так как электрическое поле релятивистского электрона практически поперечно, представим Фурье-образ вектора его напряженности в виде:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}} = E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(1)} \mathbf{e}_g^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(2)} \mathbf{e}_g^{(2)}. \quad (4)$$

Векторы поляризации  $\mathbf{e}^{(1)}$  и  $\mathbf{e}^{(2)}$  перпендикулярны волновому вектору  $\mathbf{k}$ , а векторы  $\mathbf{e}_g^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(2)}$  перпендикулярны вектору  $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$ . Векторы поляризации  $\mathbf{e}^{(2)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(2)}$  лежат в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_g$  соответствующие им напряженности электрического поля  $\pi$ -поляризованные.  $\mathbf{e}^{(1)}$  и  $\mathbf{e}_g^{(1)}$  перпендикулярны плоскости волновых векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_g$ , а напряженности  $\sigma$ -поляризованные. Подставляя (4) в (2), в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции, в которой значимы две волны – падающая и отражённая, получим систему уравнений для Фурье-образов напряженностей электрических полей  $E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)}$  и  $E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)}$ :

$$\begin{aligned} (k^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega))) E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} - \omega^2 \chi_{-\mathbf{g}}(\omega) E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)} C^{s, \tau} &= 8\pi^2 i e \omega \mathbf{e}^{(s)} \mathbf{V} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}), \\ ((\mathbf{k} + \mathbf{g})^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega))) E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)} - \omega^2 \chi_{\mathbf{g}}(\omega) E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} C^{s, \tau} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $C^{s, \tau} = \mathbf{e}_g^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}$ ,  $C^{(1)} = 1$ ,  $C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|$ , которые при значениях параметров  $s = 1$  и  $\tau = 2$  описывают напряженности  $\sigma$ -поляризованных электрических полей. При значениях параметра  $s = 2$  напряженности электрических полей будут  $\pi$ -поляризованными. В случае значения угла Брэгга:  $2\theta_B < \frac{\pi}{2}$ , параметр  $\tau$  имеет значение:  $\tau = 2$ . Если  $2\theta_B \geq \frac{\pi}{2}$ , то параметр  $\tau = 1$ , где  $\theta_B$  – угол Брэгга.

Решим следующее из системы (5) дисперсионное уравнение для рентгеновских волн в периодической слоистой среде:

$$(\omega^2(1 + \chi_0) - k^2) (\omega^2(1 + \chi_0) - k_g^2) - \omega^4 \chi_{-\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}} C^{(s)2} = 0. \quad (6)$$

Длины волновых векторов имеют вид:  $k = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0$ ,  $k_g = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g$ , где неизвестные динамические добавки  $\lambda_0$  и  $\lambda_g$ . Учтем соотношение, связывающее динамические добавки [16]:  $\lambda_g = \frac{\omega\beta}{2} + \lambda_0 \frac{\gamma_g}{\gamma_0}$ . Где

$\beta = \alpha - \chi_0 \left(1 - \frac{\gamma_g}{\gamma_0}\right)$ ,  $\alpha = \frac{1}{\omega^2} (k_g^2 - k^2)$ ,  $\gamma_0 = \cos \varphi_0$ ,  $\gamma_g = \cos \varphi_g$ ,  $\varphi_0$  – угол между волновым вектором подающей волны  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$  и вектором нормали к поверхности пластинки  $\mathbf{N}$ ,  $\varphi_g$  – угол между волновым вектором  $\mathbf{k}_g = k_g \mathbf{n}_g$  и вектором нормали (см. рис.1). Так как динамические добавки малы  $|\lambda_0| \ll \omega$ ,  $|\lambda_g| \ll \omega$ , можно показать, что  $\theta_0 \approx \theta$  (см. рис.1), и поэтому в дальнейшем будем это использовать.

Решая уравнение (6) относительно  $\lambda_0$  и  $\lambda_g$ , получим выражения, описывающие динамические добавки для падающего и дифрагированного фотонов в периодической слоистой среде:

$$\lambda_0^{(1,2)} = \frac{1}{2\varepsilon L_{ext}^{(s)}} \left( \xi^{(s)}(\omega) - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \pm K^{(s)} \right), \quad (7)$$

$$\lambda_0^{(1,2)} = \frac{1}{2L_{ext}^{(s)}} \left( \xi^{(s)}(\omega) - \frac{i\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} \pm K^{(s)} \right), \quad (8)$$

при этом заметим, что дисперсионное уравнение (6) дает только два значимых решения в рентгеновской области частот, так как выполняются неравенства:  $\lambda_0^2 \ll 2\omega\lambda_0$  и  $\lambda_g^2 \ll 2\omega\lambda_g$ . В выражениях (7–8) приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \xi^{(s)}(\omega) &= \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \quad \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2}{T^2 \omega_B} L_{ext}^{(s)} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_B} \left( 1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2 n^2} - 1} \right) \right), \\ L_{ext}^{(s)} &= \frac{1}{\omega} \frac{\pi n}{\left| \sin\left(\frac{\pi n}{1+r}\right) \right| |\chi'_2 - \chi'_1| C^{(s)}}, \quad \omega_B = \frac{\pi n}{T \sin \theta_B}, \quad \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \\ K^{(s)} &= \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1+\varepsilon)\xi^{(s)}(\omega) - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left( \frac{(1+\varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon \right)}, \\ \nu^{(s)} &= \frac{C^{(s)} \left| \sin\left(\frac{\pi n}{1+r}\right) \right|}{\frac{\pi n}{1+r}} \left| \frac{\chi'_2 - \chi'_1}{\chi'_1 + r\chi'_2} \right|, \quad \kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)} \left| \sin\left(\frac{\pi n}{1+r}\right) \right|}{\frac{\pi n}{1+r}} \left| \frac{\chi''_2 - \chi''_1}{\chi''_1 + r\chi''_2} \right|, \\ \rho^{(s)} &= \frac{L_{ext}^{(s)}}{L_{abs}}, \quad \chi'_0 = \frac{l_1 \chi'_1 + l_2 \chi'_2}{T}, \quad r = \frac{l_2}{l_1}, \quad L_{abs} = \frac{1+r}{\omega(\chi''_1 + r\chi''_2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение первого уравнения системы (5) для падающего поля в вакууме имеет вид:

$$E_0^{(s)vac} = \frac{8\pi^2 i e V \Omega^{(s)}}{\omega} \frac{1}{\frac{\gamma_0}{|\gamma_g|} \left( -\chi_0(\omega) - \frac{2}{\omega} \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \lambda_g + \beta \frac{\gamma_0}{\gamma_g} \right)} \delta(\lambda_g^* - \lambda_g), \quad (10)$$

где  $\lambda_g^* = \frac{\omega\beta}{2} + \frac{\gamma_g}{\gamma_0} \left( \frac{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0}{2} \right)$ ,  $\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}$ ,  $\Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}$ .

Решение системы уравнений (5) для дифрагированного поля в рассматриваемой периодической слоистой среде имеет вид:

$$\begin{aligned} E_g^{(s)medium} &= \frac{8\pi^2 i e V \Omega^{(s)}}{\omega} \frac{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}}{4 \frac{\gamma_0^2}{\gamma_g^2} (\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) (\lambda_g - \lambda_g^{(2)})} \delta(\lambda_g^* - \lambda_g) + \\ &+ E_g^{(s)(1)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(1)}) + E_g^{(s)(2)} \delta(\lambda_g - \lambda_g^{(2)}), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $E_g^{(s)(1)}$  и  $E_g^{(s)(2)}$  – свободные поля, соответствующие двум решениям (8) дисперсионного уравнения (6).

Дифрагированное поле в вакууме запишем в следующем виде:  $E_g^{(s)vac} = E_{Rad}^{(s)} \delta\left(\lambda_g + \frac{\omega\chi_0}{2}\right)$ , где  $E_{Rad}^{(s)}$  – искомое поле излучения. Выражение, связывающее дифрагированное и падающее поля в среде, следует из второго уравнения системы (5):  $E_0^{(s)medium} = \frac{2\omega\lambda_g}{\omega^2 \chi_g C^{(s,\tau)}} E_g^{(s)medium}$ .

Воспользовавшись граничными условиями на входной и выходной поверхностях мишени:

$$\int E_0^{(s)vac} d\lambda_g = \int E_0^{(s)medium} d\lambda_g, \quad \int E_g^{(s)vac} d\lambda_g = \int E_g^{(s)medium} d\lambda_g, \quad \int E_g^{(s)medium} \exp\left(i \frac{\lambda_g}{\gamma_g} L\right) d\lambda_g = 0,$$

получим выражение для Фурье-образа напряженности электрического поля излучения из периодической слоистой среды в направлении  $\mathbf{k}_g$ :

$$E_{ДПИ}^{(s)} = \frac{8\pi^2 i e \Omega^{(s)}}{\omega} \varepsilon \left[ \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda - \chi_0} \right] \left( \frac{e^{-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - e^{ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Delta^{(s)}} \right). \quad (12)$$

Аналогично находим Фурье-образ напряженности электрического поля в направлении  $\mathbf{k}$ :

$$E_{\text{ПИ}}^{(s)} = -\frac{8\pi^2 i e \Omega_0^{(s)}}{\omega} e^{\frac{i\omega\Lambda_0}{2\sin(\delta+\theta_B)}} L \left[ \frac{1}{\Lambda_0} - \frac{1}{\Lambda_0 - \chi_0'} \right] \left[ \frac{2K^{(s)} e^{-ib^{(s)} \left( \sigma_0^{(s)} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon} \right)}}{\Delta^{(s)}} + 1 \right]. \quad (13)$$

В выражениях (12) и (13) введены следующие обозначения:

$$\Omega_0^{(1)} = \theta_{0\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega_0^{(2)} = \theta_0 - \psi, \quad \Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \theta + \psi, \quad \Lambda_0 = \gamma^{-2} + (\theta_{0\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{0\parallel} - \psi_{\parallel})^2,$$

$$\Lambda = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2, \quad b^{(s)} = \frac{L_e}{2L_{ext}^{(s)}}, \quad L_e = \frac{L}{\sin(\delta + \theta_B)},$$

$$\sigma_0^{(s)} = \frac{1}{|\chi_g'| C^{(s)}} (\gamma^{-2} + (\theta_{0\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_0 - \psi)^2 - \chi_0'),$$

$$\Delta^{(s)} = \left( \xi^{(s)} - i \frac{\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} - K^{(s)} \right) e^{-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - \left( \xi^{(s)} - i \frac{\rho^{(s)}(1+\varepsilon)}{2} + K^{(s)} \right) e^{ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}, \quad (14)$$

$\eta^{(s)}(\omega)$  – является быстрой функцией от частоты  $\omega$  и ее удобно рассматривать в качестве спектральной переменной. Параметр  $\varepsilon$  характеризует асимметрию отражения излучения относительно поверхности мишени и при фиксированном угле Брэгга  $\theta_B$  определяет угол  $\delta$ . Параметр  $\rho^{(s)}$  характеризует поглощение рентгеновского излучения в слоистой среде. Параметр  $\nu^{(s)}$  определяет степень отражения рентгеновского излучения от слоистой структуры, которая обуславливается конструктивной ( $\nu^{(s)} \approx 1$ ) или деструктивной ( $\nu^{(s)} \approx 0$ ) интерференцией волн, отраженных от разных плоскостей. Параметр  $\kappa^{(s)}$  характеризует расположения пучностей стоячих волн относительно слоев мишени.

**4. Спектрально-угловые плотности излучений.** Найдем спектрально-угловые плотности ПИ и ДПИ с учетом асимметрии отражения (параметр  $\varepsilon$ ) и фотопоглощения излучения в веществе (параметр  $\rho^{(s)}$ ). Подставим амплитуды Фурье-образов напряженностей электрического поля ПИ и ДПИ (12) и (13) в выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения [17]:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПИ, ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \left| E_{\text{ПИ, ДПИ}}^{(s)} \right|^2. \quad (15)$$

Получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ и ПИ:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda} - \frac{\Omega^{(s)}}{\Lambda - \chi_0'} \right)^2 R_{\text{ДПИ}}^{(s)}, \quad (16)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{(s)} = \varepsilon^2 \left| \frac{e^{-ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - e^{ib^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Delta^{(s)}} \right|^2, \quad (17)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_0} = \frac{e^2}{\pi^2} \left( \frac{\Omega_0^{(s)}}{\Lambda_0} - \frac{\Omega_0^{(s)}}{\Lambda_0 - \chi_0'} \right)^2 R_{\text{ПИ}}^{(s)}, \quad (18)$$

$$R_{\text{ПИ}}^{(s)} = 1 + R_1^{(s)} + R_{int}^{(s)},$$

$$R_1^{(s)} = 4 \left| \frac{K^{(s)} e^{-ib^{(s)} \left( \sigma_0^{(s)} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon} \right)}}{\Delta^{(s)}} \right|^2, \quad R_{int}^{(s)} = 4\text{Re} \left[ \frac{K^{(s)} e^{-ib^{(s)} \left( \sigma_0^{(s)} + \frac{i\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon} \right)}}{\Delta^{(s)}} \right]. \quad (19)$$

Выражения  $R_{\text{ДПИ}}^{(s)}$  и  $R_{\text{ПИ}}^{(s)}$  являются спектральными функциями, описывающими спектры ДПИ и ПИ. При этом в спектральную функцию переходного излучения  $R_{\text{ПИ}}^{(s)}$  вносят вклад спектральные функции:  $R_1^{(s)}$  и  $R_{int}^{(s)}$ .  $R_1^{(s)}$  описывает спектр ПИ сгенерированного на передней границы мишени, далее испытавшего динамическую дифракцию на слоях мишени и вышедшего за заднюю границу мишени.  $R_{int}^{(s)}$  описывает влияние на суммарную спектральную плотность интерференции переходных излучений.

Для рассматриваемых рентгеновских волн коэффициент поглощения в периодической слоистой среде  $\rho^{(s)} \ll 1$ . Вычислим в этом случае спектральную функцию ДПИ (17) для случая, когда спектральная переменная принимает значения из промежутков  $\xi^{(s)}(\omega)^2 > \varepsilon$  и  $\xi^{(s)}(\omega)^2 < \varepsilon$ . Выражение для спектральных функций (17) принимает вид:

$$R_{\text{ДПИ}}^{\xi^2 > \varepsilon} = \varepsilon^2 \frac{e^{-2\frac{N^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} + e^{2\frac{N^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} - 2 \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\left(\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_{\rho}^{(s)}\right)b^{(s)}\right)}{M_1^{(s)}}, \quad (20)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{\xi^2 < \varepsilon} = \varepsilon^2 \frac{e^{2\frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2} + F_{\rho}^{(s)}}}{\varepsilon}b^{(s)}} + e^{-2\frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2} + F_{\rho}^{(s)}}}{\varepsilon}b^{(s)}} - 2 \cos\left(\frac{2N^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}\right)}{M_2^{(s)}}. \quad (21)$$

В полученных выражениях введены обозначения:

$$M_1^{(s)} = \left[ \Sigma_2^{(s)2} + F_2^{(s)2} \right] e^{-2\frac{N^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} + \left[ \Sigma_1^{(s)2} + F_1^{(s)2} \right] e^{2\frac{N^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} - 2 \left[ \Sigma_1^{(s)}\Sigma_2^{(s)} + F_1^{(s)}F_2^{(s)} \right] \cos\left(\frac{2b^{(s)}\left(\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_{\rho}^{(s)}\right)}{\varepsilon}\right) - 2 \left[ 2N^{(s)}\xi^{(s)} - \rho^{(s)}(1 + \varepsilon)\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} \right] \sin\left(\frac{2b^{(s)}\left(\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_{\rho}^{(s)}\right)}{\varepsilon}\right), \quad (22)$$

$$M_2^{(s)} = \left[ \left(\xi^{(s)} + N^{(s)}\right)^2 + N_1^{(s)2} \right] e^{2b^{(s)}\frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}}}{\varepsilon}} + \left[ \left(\xi^{(s)} - N^{(s)}\right)^2 + N_2^{(s)2} \right] e^{-2b^{(s)}\frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}}}{\varepsilon}} - 2 \left[ \xi^{(s)2} - N^{(s)2} - N_1^{(s)}N_2^{(s)} \right] \cos\left(2b^{(s)}\frac{N^{(s)}}{\varepsilon}\right) + 2 \left[ 2\xi^{(s)}\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}} - \rho^{(s)}(1 + \varepsilon)N^{(s)} \right] \sin\left(2b^{(s)}\frac{N^{(s)}}{\varepsilon}\right), \quad (23)$$

где:

$$N^{(s)} = \frac{\rho^{(s)}}{2} \left( \frac{(1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon}{\sqrt{|\xi^{(s)2} - \varepsilon|}} \right), \quad \Sigma_1^{(s)} = \xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_{\rho}^{(s)},$$

$$\Sigma_2^{(s)} = \xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} - F_{\rho}^{(s)}, \quad F_{\rho}^{(s)} = \frac{\rho^{(s)2}}{2\sqrt{|\xi^{(s)2} - \varepsilon|}} \left( \frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon \right),$$

$$N_1^{(s)} = \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2} + \rho^{(s)}\frac{\varepsilon + 1}{2}}, \quad N_2^{(s)} = \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2} - \rho^{(s)}\frac{\varepsilon + 1}{2}}.$$

Далее вычислим спектральные функции ПИ (17) для спектральных интервалов интервала  $\xi^{(s)}(\omega)^2 > \varepsilon$  и  $\xi^{(s)}(\omega)^2 < \varepsilon$ , получим следующие выражения:

$$R_1^{(s)\xi^2 > \varepsilon} = \frac{4\left(\xi^{(s)2} - \varepsilon + N^{(s)2}\right)}{M_1^{(s)}} e^{-2\rho^{(s)}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}b^{(s)}}, \quad R_1^{(s)\xi^2 < \varepsilon} = \frac{4\left(N^{(s)2} + \varepsilon - \xi^{(s)2}\right)}{M_2^{(s)}} e^{-2\rho^{(s)}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}b^{(s)}},$$

$$R_{\text{int}}^{(s)\xi^2 > \varepsilon} = \frac{4e^{\frac{\rho^{(s)}(1 - \varepsilon)}{2\varepsilon}b^{(s)}}}{M_1^{(s)}} \times$$

$$\times \left[ \left( \Sigma_2^{(s)}\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} - N^{(s)}F_2^{(s)} \right) \cos\left(\left(\frac{\Sigma_1^{(s)} + \xi^{(s)}}{\varepsilon} - 2\sigma_0^{(s)}\right)b^{(s)}\right) e^{-\frac{F_2^{(s)} + \rho^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} + \left( \Sigma_2^{(s)}N^{(s)} + F_2^{(s)}\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} \right) \sin\left(\left(\frac{\Sigma_1^{(s)} + \xi^{(s)}}{\varepsilon} - 2\sigma_0^{(s)}\right)b^{(s)}\right) e^{-\frac{F_2^{(s)} + \rho^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} - \left( \Sigma_1^{(s)}\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + N^{(s)}F_1^{(s)} \right) \cos\left(\left(\frac{\Sigma_2^{(s)} + \xi^{(s)}}{\varepsilon} - 2\sigma_0^{(s)}\right)b^{(s)}\right) e^{\frac{F_1^{(s)} - \rho^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} - \left( \Sigma_1^{(s)}N^{(s)} + F_1^{(s)}\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} \right) \sin\left(\left(\frac{\Sigma_2^{(s)} + \xi^{(s)}}{\varepsilon} - 2\sigma_0^{(s)}\right)b^{(s)}\right) e^{\frac{F_1^{(s)} - \rho^{(s)}}{\varepsilon}b^{(s)}} \right].$$



$$R_{int}^{(s)\xi^2 < \varepsilon} = \frac{4e^{\frac{\rho^{(s)}(1-\varepsilon)}{2\varepsilon} b^{(s)}}}{M_2^{(s)}} \operatorname{Re} \left[ e^{-i\left(\sigma^{(s)} - \frac{\xi^{(s)}}{\varepsilon}\right)} K^{(s)} \Delta^{(s)*} \right].$$

**5. Заключение.** В работе рассматриваются дифрагированное переходное излучение и переходное излучение релятивистских электронов, пересекающих мишень из периодической слоистой среды. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получены выражения, описывающие амплитуду Фурье-образов напряженности электрических полей волн ПИ и ДПИ. Далее получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ и ПИ. Получены выражения, описывающие спектральные функции ПИ и ДПИ для интервалов спектральной переменной  $\xi^{(s)}(\omega)^2 > \varepsilon$  и  $\xi^{(s)}(\omega)^2 < \varepsilon$ . Эти выражения позволят в дальнейшем исследовать спектрально-угловые свойства ПИ и ДПИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде с учетом многократного рассеяния электронов на атомах мишени. Они учитывают поглощение рентгеновских волн материалом среды, а также асимметрию отражения поля электрона относительно поверхности мишени.

#### Список литературы

1. Гинзбург В.Л., Франк И.М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1946;16(1):15–28.
2. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние. М.: Наука. 1984. 360 с.
3. Блажевич С.В., Горлов А.С., Носков А.В., Федосеев А.Э. Влияние многократного рассеяния на спектрально-угловую плотность дифрагированного переходного излучения. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2023;5:73–79.
4. Nasonov N.N. Influence of the density effect upon the parametric X-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148–152.
5. Blazhevich S.V., Noskov A.V., Fedoseev A.E. Effect of multiple scattering on diffracted transition radiation of a relativistic electron crossing a single crystal target. *Journal of Instrumentation*. 2022;17(7):11–19. DOI: 10.1088/1748-0221/17/07/P07029.
6. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x rays. *Physical Review A*. 1989;40(8):4322.
7. Носков А.В., Бондаренко В.А., Блажевич С.В., Юрьева А.А., Федосеев А.Э. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(2):183–192.
8. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504.
9. Блажевич С.В., Колосова И.В., Носков А.В. Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона в искусственной периодической структуре. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2012;141(4):627–635.
10. Блажевич С.В., Гладких Ю.П., Носков А.В. Когерентное рентгеновское излучение, возбуждаемое релятивистским электроном в периодической слоистой структуре в геометрии рассеяния Брэгга. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2013;4:99–109.
11. Блажевич С.В., Носков А.В. Когерентное рентгеновское излучение, возбуждаемое пучком релятивистских электронов в периодической слоистой среде в геометрии рассеяния Брэгга. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2017;152(2):267–279.
12. Blazhevich S.V., Noskov A.V. On the dynamical effects in the characteristics of transition radiation produced by a relativistic electron in a single crystal plate. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. 2006;252:69–74.
13. Блажевич С.В., Носков А.В. Параметрическое рентгеновское излучение вдоль скорости релятивистского электрона в условиях асимметричного отражения. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2009;136(6):1043–1056.
14. Blazhevich S., Kolosova I., Noskov A. Coherent X-radiation along the velocity of a relativistic electron in a bounded periodic multilayer medium. *Journal of Physics: Conference Series*. 2012;357:012016.
15. Блажевич С.В., Дрыгина Ю.А., Шевчук О.Ю., Носков А.В. Когерентное рентгеновское излучение, генерируемое вблизи оси пучка релятивистских электронов в искусственной периодической структуре. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2020;6:43–53.
16. Пинскер З.Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. М.: Наука. 1974. 376 с.
17. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Излучение быстрых частиц в веществе и внешних полях. М.: Наука. 1987. 272 с.

#### References

1. Ginzburg V.L., Frank I.M. Radiation of a uniformly moving electron arising during its transition from one medium to another. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1946;16(1):15–28. (in Russian)

2. Ginzburg VL., Tsytovich VN. Transition Radiation and Transition Scattering. M.: Nauka. 1984. 360 p. (in Russian)
3. Blazhevich SV., Gorlov AS., Noskov AV., Fedoseev AE. Effect of Multiple Scattering on the Spectral-Angular Density of Diffracted Transition Radiation. *Journal of Surface Investigation. X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2023;17(3):592–597.
4. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric X-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148–152.
5. Blazhevich SV., Noskov AV., Fedoseev AE. Effect of multiple scattering on diffracted transition radiation of a relativistic electron crossing a single crystal target. *Journal of Instrumentation*. 2022;17(7):11–19. DOI: 10.1088/1748-0221/17/07/P07029.
6. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x rays. *Physical Review A*. 1989;40(8):4322.
7. Noskov A., Bondarenko V., Blazhevich S., Yurieva A., Fedoseev A. On the Effect of Multiple Scattering on the Transition Radiation in a Single Crystal. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(2):183–192.
8. Nasonov NN., VV. Kaplin, Uglov SR., Piestrup MA. and Gary CK. X-rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):365041-365047. DOI:10.1103/PhysRevE.68.036504.
9. Blazhevich SV., Kolosova IV., Noskov AV. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114(4): 547–554.
10. Blazhevich S., Gladkih Yu., Noskov A. Coherent X-Rays Excited by a Relativistic Electron Crossing a Periodic Stratified Structure in Bragg Scattering Geometry. *Journal of Surface Investigation. X ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2013;7(2):388–397.
11. Blazhevich SV., Noskov AV. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223–234.
12. Blazhevich SV., Noskov AV. On the dynamical effects in the characteristics of transition radiation produced by a relativistic electron in a single crystal plate. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. 2006;252:69-74.
13. Blazhevich SV., Noskov AV. Parametric X-ray radiation along relativistic electron velocity in asymmetric Laue geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2009;109:901-912.
14. Blazhevich S., Kolosova I., Noskov A. Coherent X-radiation along the velocity of a relativistic electron in a bounded periodic multilayer medium. *Journal of Physics: Conference Series*. 2012;357:012016. DOI:10.1088/1742-6596/357/1/012016
15. Blazhevich SV., Drygina YuA., Shevchuk OYu., Noskov AV. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586–595.
16. Pinsky Z. Dynamical Scattering of X-rays in Crystals. Springer. Berlin. 1984. 514 p.
17. Bazylev V., Zhevago N. Emission From Fast Particles Moving in a Medium and External Fields. Moscow. USSR. 1987. 272 p. (in Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.12.2023

Received December 27, 2023

Поступила после рецензирования 07.02.2024

Revised February 7, 2024

Принята к публикации 11.02.2024

Accepted February 11, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Носков Антон Валерьевич** – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

**Киперша Владислав Константинович** – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

**Плесканев Алексей Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

**Блажевич Сергей Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Ильинский Роман Юрьевич** – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Волошкина Елена Викторовна** – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Anton V. Noskov** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

**Vladislav K. Kipersha** – Postgraduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, V. G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia


**Aleksey A. Pleskanev** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, V. G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, Russia

**Sergey V. Blazhevich** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Roman Yu. Ilyinsky** – Postgraduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

**Elena V. Voloshkina** – Postgraduate student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

## Теоретико-множественный подход к определению прочностных характеристик дискретной модели цилиндрической оболочки на основе векторной аппроксимации

Ищанов Т. Р. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

Волгоградский государственный аграрный университет,  
Россия, 400002, г. Волгоград, пр. Университетский, 26  
[ishchanov.volgau@ya.ru](mailto:ishchanov.volgau@ya.ru)

**Аннотация.** Для определения напряженно-деформированного состояния оболочечной конструкции использована дискретная модель эллиптического цилиндра. Вся исследуемая область была разбита на конечное число непересекающихся множеств (конечные элементы), взаимодействующих только в узловых точках. В качестве узловых неизвестных приняты компоненты вектора перемещения и компоненты вектора угла поворота нормали. В данной работе представлен алгоритм прочностного расчета эллиптического цилиндра при отсчете угла наклона нормали от ее деформированного состояния при учете векторной интерполяционной процедуры. На конкретном примере показана высокая эффективность предложенного алгоритма, который решает проблему учета смещения конечного элемента как жесткого целого.

**Ключевые слова:** угол наклона нормали, векторная и скалярная аппроксимации, конечный элемент дискретизации

**Для цитирования:** Ищанов Т. Р. 2024. Теоретико-множественный подход к определению прочностных характеристик дискретной модели цилиндрической оболочки на основе векторной аппроксимации. *Прикладная математика & Физика*, 56(1): 75–82. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-75-82

Original Research

## Set-theoretic Approach to Determining the Strength Characteristics of a Discrete Model of a Cylindrical Shell Based on Vector Approximation

Tlek R. Ishchanov 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

Volgograd State Agricultural University,  
26 Universitetskii Ave., Volgograd, 400002, Russia  
[ishchanov.volgau@ya.ru](mailto:ishchanov.volgau@ya.ru)

**Abstract.** To determine the stress-strain state of the shell structure, a discrete model of an elliptical cylinder was used. The entire study area was divided into a finite number of disjoint sets (finite elements), interacting only at nodal points. The derivation of basic geometric relationships involves two calculation options: counting the angle of rotation of the normal from its initial state and from its deformed position. The components of the displacement vector, their first derivatives, and the components of the normal rotation angle vector are taken as nodal unknowns. Approximating expressions between the components of the displacement vector, their derivatives, the vector of the normal rotation angle of the internal point of the finite element and the components of the displacement vectors, their derivatives, the vectors of the normal rotation angles of its node points were obtained on the basis of a vector interpolation procedure, which makes it possible to automatically take into account the displacements of the cylindrical shell as absolutely solid body. This paper presents an algorithm for the strength calculation of an elliptical cylinder when measuring the angle of inclination of the normal from its deformed state, taking into account the vector interpolation procedure. A specific example shows the high efficiency of the proposed algorithm, which solves the problem of taking into account the displacement of a finite element as a rigid whole.

**Keywords:** Normal Slope Angle, Vector and Scalar Approximation, Finite Sampling Element

**For citation:** Ishchanov T. R. 2024. Set-theoretic Approach to Determining the Strength Characteristics of a Discrete Model of a Cylindrical Shell Based on Vector Approximation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(1): 75–82. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-75-82

**1. Введение.** В инженерной практике для определения прочностных характеристик реальная конструкция заменяется математической моделью, что позволяет провести ее анализ и составить объективный прогноз будущего состояния системы при заданных нагрузках [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Вычислительные мощности

современных компьютеров обеспечили успешную интеграцию численных методов в инженерные расчеты оболочечных конструкций различной геометрии [7].

В данной работе проведено исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) дискретной модели эллиптического цилиндра на основе метода конечных элементов (МКЭ) и раздела дискретной математики – теории множеств. В рамках деформационной теории Тимошенко [8, 9, 10, 11] предложен математический алгоритм расчета дискретной модели цилиндрической конструкции при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния [12], который показал неоспоримые преимущества в сравнении с общепринятым подходом отсчета угла поворота нормали от ее исходного состояния [13, 14, 15]. На основе векторной аппроксимации получены аппроксимирующие соотношения между компонентами вектора перемещения, вектора угла поворота нормали внутренней точки конечного элемента и компонентами векторов перемещений, векторов угла поворота нормали его узловых точек. Предложенный алгоритм в сочетании с векторной интерполяцией позволяет учитывать смещения цилиндрической оболочки как абсолютно твердого тела, вне зависимости от выбранной системы координат, что является общепризнанной проблемой МКЭ.

**2. Геометрия эллиптического цилиндра.** В ходе исследования рассматриваются положения точек, находящиеся на срединной поверхности цилиндра и в произвольном слое на расстоянии  $\zeta$  до деформирования цилиндрической оболочки ( $M^0$ ,  $M^{0\zeta}$ ) и после ее деформации ( $M$ ,  $M^\zeta$ ).

Опишем положение точки  $M^0$  формулой

$$\vec{R}^o = x \vec{i} + b \cdot \sin(t) \vec{j} + c \cdot \cos(t) \vec{k}, \quad (1)$$

где  $b$ ,  $c$  – полуоси эллиптического цилиндра,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – орты декартовой системы координат,  $x$ ,  $t$  – криволинейные координаты.

Дифференцированием (1) по глобальным координатам найдем векторы, касательные к срединной поверхности цилиндра в точке  $M^0$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^o &= \vec{R}_{,x}^o = \vec{i}, \\ \vec{a}_2^o &= \vec{R}_{,t}^o = b \cdot \cos(t) \vec{j} - c \cdot \sin(t) \vec{k}, \\ \vec{a}_n^o &= \frac{\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o}{|\vec{a}_1^o \times \vec{a}_2^o|} = \frac{d_1}{d} \vec{i} + \frac{d_2}{d} \vec{j} + \frac{d_3}{d} \vec{k}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = c \cdot \sin(t)$ ,  $d_3 = b \cdot \cos(t)$ ,  $d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$ .

Соотношения (2) запишем в матричном виде

$$\{\vec{a}^o\} = [r^o] \{\vec{i}\}; \{\vec{i}\} = [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\}, \quad (3)$$

где  $\{\vec{a}^o\}^T = \{\vec{a}_1^o \vec{a}_2^o \vec{a}_n^o\}$ ;  $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}$ ;

$$[r^o] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot \cos(t) & -c \cdot \sin(t) \\ 0 & \frac{c \cdot \sin(t)}{d} & \frac{b \cdot \cos(t)}{d} \end{bmatrix}.$$

Определим в базисе  $\{\vec{a}_1^o \vec{a}_2^o \vec{a}_n^o\}$  производные его базисных векторов

$$\begin{aligned} \{\vec{a}_{,x}^o\} &= [r_{,x}^o] \{\vec{i}\} = [r_{,x}^o] [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\} = [\omega] \{\vec{a}^o\}; \\ \{\vec{a}_{,t}^o\} &= [r_{,t}^o] \{\vec{i}\} = [r_{,t}^o] [r^o]^{-1} \{\vec{a}^o\} = [k] \{\vec{a}^o\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\{\vec{a}_{,x}^o\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^o \vec{a}_{2,x}^o \vec{a}_{n,x}^o\}$ ;  $\{\vec{a}_{,t}^o\}^T = \{\vec{a}_{1,t}^o \vec{a}_{2,t}^o \vec{a}_{n,t}^o\}$ ;

Радиус-векторы, которые определяют положения точек  $M$ ,  $M^{0\zeta}$ ,  $M^\zeta$ , описываются формулами

$$\vec{R} = \vec{R}^o + \vec{v}; \vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o; \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}. \quad (5)$$

Вектор перемещения  $\vec{v}$  представляется в базисе  $\{\vec{a}^o\}$  (3) следующей записью

$$\vec{v} = v^i \vec{a}_i^o. \quad (6)$$

Дифференцированием (6) по  $x$ ,  $t$ , воспользовавшись (4), найдем производные вектора перемещения  $\vec{v}$

$$\vec{v}_{, \alpha} = q_{\alpha}^s \vec{a}_s^o; \vec{v}_{, \alpha \beta} = q_{\alpha \beta}^s \vec{a}_s^o, \quad (7)$$

где  $q_{\alpha}^s$ ,  $q_{\alpha \beta}^s$  – содержат компоненты  $\vec{v}$ , их первые и вторые производные;  $\alpha$  и  $\beta$  определяют операции дифференцирования по  $x$  и  $t$ .

При отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния вектор  $\vec{V}$ , входящий в (5), задается соотношением

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \vec{\gamma}, \quad (8)$$

где  $\vec{\gamma} = \gamma^1 \vec{a}_1^0 + \gamma^2 \vec{a}_2^0 + \gamma \vec{a}_n^0$  – вектор углов поворота нормали.

Предложенный вариант отсчета угла поворота нормали от ее деформированного состояния определяет вектор  $\vec{V}$  согласно следующей формуле:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta \left( \vec{v}^n \times \vec{a}_n^0 \right) + \zeta \left( \vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0 \right), \quad (9)$$

где  $\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0$  – вектор разности нормалей в деформированном и исходном состояниях.

Определим деформации в произвольном слое оболочки, который находится на расстоянии  $\zeta$  от срединной поверхности, воспользовавшись формулами механики сплошной среды [16]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta} = \frac{\left( \mathbf{g}_{\alpha\beta} - \mathbf{g}_{\alpha\beta}^0 \right)}{2}; \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{\zeta} = \frac{\left( \mathbf{g}_{\alpha 3} - \mathbf{g}_{\alpha 3}^0 \right)}{2}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta$ ;  $\mathbf{g}_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0$ ;  $\mathbf{g}_{\alpha 3} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_3$ ;  $\mathbf{g}_{\alpha 3}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_3^0$ .

Дифференцированием радиус-векторов по глобальным координатам найдем базисные векторы (10) в произвольном слое оболочки

$$\vec{g}_\alpha^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta}; \quad \vec{g}_\alpha = \vec{R}_{,\alpha}^{\zeta}; \quad \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta} = \vec{a}_n^0; \quad \vec{g}_3 = \vec{R}_{,\zeta}^{\zeta} = \vec{a}_n^0 + \vec{V}_{,\zeta}. \quad (11)$$

**3. Элемент дискретизации.** Под элементами дискретизации понимаются подмножества, объединение которых составляет поверхность эллиптического цилиндра. В данной статье рассматриваются четырехугольные объекты дискретизации. Для реализации численного интегрирования четырехугольный фрагмент отображается на квадрат, между элементами которых устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Элементами данных множеств являются точки интегрирования, в программной реализации алгоритма использовалось 36 точек интегрирования. Локальная система координат представлена следующим образом:  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ .

При использовании векторной аппроксимации в качестве узловых варьируемых параметров используются векторы перемещений узловых точек и векторы углов поворота нормали в локальной и глобальной системах координат

$$\left\{ \vec{U}_y^L \right\}_{1 \times 16}^T = \left\{ \left\{ \vec{v}_y^L \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{\gamma} \right\}_{1 \times 4}^T \right\}; \quad (12)$$

$$\left\{ \vec{U}_y^G \right\}_{1 \times 16}^T = \left\{ \left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{\gamma} \right\}_{1 \times 4}^T \right\}, \quad (13)$$

где

$$\left\{ \vec{v}_y^L \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \vec{v}_{,\xi}^i \vec{v}_{,\xi}^j \vec{v}_{,\xi}^k \vec{v}_{,\xi}^l \vec{v}_{,\eta}^i \vec{v}_{,\eta}^j \vec{v}_{,\eta}^k \vec{v}_{,\eta}^l \right\};$$

$$\left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{1 \times 12}^T = \left\{ \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l \right\};$$

$$\left\{ \vec{\gamma} \right\}_{1 \times 4}^T = \left\{ \vec{\gamma}^i \vec{\gamma}^j \vec{\gamma}^k \vec{\gamma}^l \right\}.$$

Матрица  $[LG]$  устанавливает взаимосвязь между узловыми неизвестными (12) и (13)

$$\left\{ \vec{U}_y^L \right\}_{16 \times 1} = [LG]_{16 \times 16} \left\{ \vec{U}_y^G \right\}_{16 \times 1}. \quad (14)$$

Посредством следующих формул вектор перемещения точки  $M$  выражается через узловые величины (12), (13)

$$\vec{v} = \left\{ f \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \vec{v}_y^L \right\}_{12 \times 1} = \left\{ f \right\}_{1 \times 12}^T [PK]_{12 \times 12} \left\{ \vec{v}_y^G \right\}_{12 \times 1}; \quad \vec{\gamma} = \left\{ \lambda \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \vec{\gamma}_y \right\}_{4 \times 1}, \quad (15)$$

где  $\{f\}_{1 \times 12}^T = \{f_1 f_2 \dots f_{12}\}$ ;  $\{\lambda\}_{1 \times 4}^T = \{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4\}$  – функции формы, представляющие собой произведения полиномов Эрмита третьей степени и билинейные функции локальных координат соответственно;  $[PK]$  – матрица перехода от столбца  $\{\vec{v}_y^L\}$  к столбцу  $\{\vec{v}_y^G\}$  (14).

Используя соотношения (6), (7) и (11), запишем формулы (15) в следующем виде

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{f\}_{1 \times 12}^T [PK]_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \end{bmatrix}_{12 \times 36} \{h_v\}_{36 \times 1} = \{f\}_{1 \times 12}^T \begin{bmatrix} \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \end{bmatrix}_{12 \times 36} [KP]_{36 \times 36} \{h_v\}_{36 \times 1}; \\ \vec{\gamma} &= \{\lambda\}_{1 \times 4}^T \begin{bmatrix} \vec{B}_\gamma \\ \vec{B}_\gamma \end{bmatrix}_{4 \times 8} \{h_\gamma\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\begin{bmatrix} \vec{B}_v \\ \vec{B}_v \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \vec{B}_\gamma \\ \vec{B}_\gamma \end{bmatrix}$  – квазидиагональные матрицы, элементами которых являются векторы локальных базисов узлов КЭ;  $[KP]$  – матрица перехода от столбца  $\{\vec{v}_y^G\}$  к столбцу  $\{\vec{v}_y^L\}$ ;

$$\{h_v\}_{1 \times 36}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^i \dots v^l q_1^{1i} q_1^{2i} q_1^i \dots q_1^l q_2^{1i} q_2^{2i} q_2^i \dots q_2^l\};$$

$$\{h_\gamma\}_{1 \times 8}^T = \{\gamma^{1i} \gamma^{2i} \gamma^{1j} \gamma^{2j} \gamma^{1k} \gamma^{2k} \gamma^{1l} \gamma^{2l}\}.$$

Выразим векторы базиса узловых точек через векторы базиса внутренней точки КЭ

$$\{\vec{a}^{ow}\} = [n^{ow}] \{\vec{a}^o\}, \quad (17)$$

где  $\{\vec{a}^{ow}\} = \{\vec{a}_1^{ow} \vec{a}_2^{ow} \dots \vec{a}_n^{ow}\}$ ; верхний индекс  $w$  обозначает узел КЭ  $i, j, k$  или  $l$ .

Принимая во внимание (6) и (17), формулы (16) перепишем в следующем виде

$$\begin{aligned} v^1 \vec{a}_1^o + v^2 \vec{a}_2^o + v \vec{a}_n^o &= \{f\}_{1 \times 12}^T \left( \begin{bmatrix} B_v^1 \\ B_v^2 \end{bmatrix}_{12 \times 36} \vec{a}_1^o + \begin{bmatrix} B_v^2 \\ B_v^1 \end{bmatrix}_{12 \times 36} \vec{a}_2^o + \begin{bmatrix} B_v \\ B_v \end{bmatrix}_{12 \times 36} \vec{a}_n^o \right) \{D_{vy}\}_{36 \times 1}; \\ \gamma^1 \vec{a}_1^o + \gamma^2 \vec{a}_2^o &= \{\lambda\}_{1 \times 4}^T \left( \begin{bmatrix} B_\gamma^1 \\ B_\gamma^2 \end{bmatrix}_{4 \times 8} \vec{a}_1^o + \begin{bmatrix} B_\gamma^2 \\ B_\gamma^1 \end{bmatrix}_{4 \times 8} \vec{a}_2^o \right) \{N_{\gamma y}\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\{D_{vy}\}_{36 \times 1} = [KP]_{36 \times 36} [K_v]_{36 \times 36} \left\{ \begin{bmatrix} v_y^1 \\ v_y^2 \\ v_y \end{bmatrix} \right\}_{12 \times 1}$ ;  $\{N_{\gamma y}\}_{8 \times 1} = [K_\gamma]_{8 \times 8} \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_y^1 \\ \gamma_y^2 \end{bmatrix} \right\}_{4 \times 1}$ .

Компоненты вектора перемещения и вектора углов поворота нормалей получим из (18), приравняв коэффициенты при векторах  $\vec{a}_1^o, \vec{a}_2^o, \vec{a}_n^o$

$$\begin{aligned} v^1 &= \{f\}_{1 \times 12}^T \begin{bmatrix} B_v^1 \\ B_v^2 \end{bmatrix} \{D_{vy}\}; \quad v^2 = \{f\}_{1 \times 12}^T \begin{bmatrix} B_v^2 \\ B_v^1 \end{bmatrix} \{D_{vy}\}; \quad v = \{f\}_{1 \times 12}^T \begin{bmatrix} B_v \\ B_v \end{bmatrix} \{D_{vy}\}; \\ \gamma^1 &= \{\lambda\}_{1 \times 4}^T \begin{bmatrix} B_\gamma^1 \\ B_\gamma^2 \end{bmatrix} \{N_{\gamma y}\}; \quad \gamma^2 = \{\lambda\}_{1 \times 4}^T \begin{bmatrix} B_\gamma^2 \\ B_\gamma^1 \end{bmatrix} \{N_{\gamma y}\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Анализ формул (19) показывает, что при векторном варианте аппроксимации каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента зависит от узловых значений всех трех компонент и их производных, каждая компонента угла поворота нормали зависит от узловых значений обеих компонент вектора угла поворота нормали [12].

Матрица жесткости и столбец узловых усилий записываются согласно стандартной для МКЭ процедуре в форме метода перемещений [17].

**4. Результаты численных расчетов.** Решена тестовая задача по определению НДС эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейной нагрузкой интенсивности  $q$ , с пружинными опорами (рис.1). Исходные данные:  $q = 5 \cdot 10^{-3}$  МПа;  $b = 0, 1$  м;  $c = 0, 025$ ;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0, 3$ ;  $h = 0,001$  м;  $L = 0,4$  м.

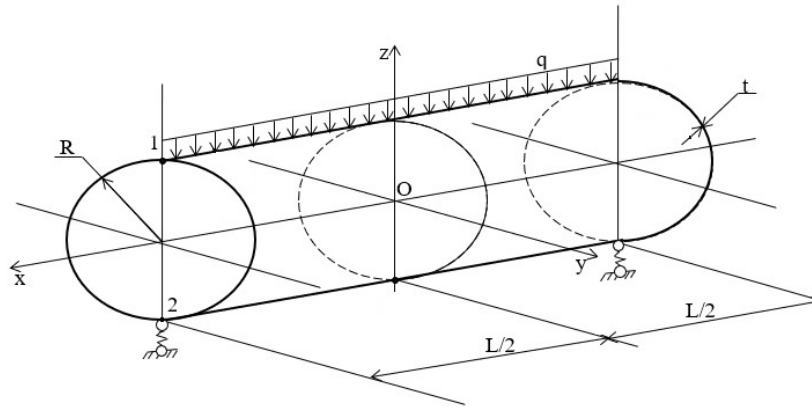


Рис. 1. Расчетная схема эллиптического цилиндра  
Fig. 1. Calculation diagram of an elliptical cylinder

Расчеты осуществлялись в двух вариантах: в первом варианте отсчет угла наклона нормали производился от ее исходного состояния (8), во втором – от ее деформированного состояния (9) на основании скалярной [17] и векторной форм аппроксимаций (15).

В таблицах 1-4 представлены значения физических кольцевых напряжений на внутренней  $\sigma_{tt}^B$  и наружной  $\sigma_{tt}^H$  поверхностях цилиндрической оболочки в точках 1 и 2 в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения эллиптического цилиндра для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений при использовании первого и второго вариантов отсчета угла поворота нормали.

В качестве основных критериев достоверности производимых расчетов были выбраны сходимость вычислительного процесса и условие равенства численных значений окружных напряжений в точках 1 и 2.

Согласно статическому условию равновесия в точках 1 и 2 должно соблюдаться равенство кольцевых напряжений, что не выполняется при скалярном варианте аппроксимации как в первом (таблица 1), так и во втором (таблица 2) вариантах поворота нормали. При векторной интерполяции данное условие соблюдается при различных вариантах сетки дискретизации и способах отсчета угла наклона нормали.

Таблица 1  
Table 1

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,1 м (первый вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value 0.1 m (first calculation option)

Жесткость пружины			10 <sup>2</sup> Н/м			
Величина жесткого смещения			0,1 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	38,42	49,23	120,39	143,03
		$\sigma_{tt}^H$	-39,03	-48,73	-120,47	-143,13
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	183,03	246,33	187,11	175,27
		$\sigma_{tt}^H$	-177,63	-244,77	-186,13	-175,13
Вертикальное смещение оболочки, 10 <sup>-2</sup> м			3,51298	7,24479	9,73310	9,99627
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
Вертикальное смещение оболочки, 10 <sup>-2</sup> м			10	10	10	10

При смещении цилиндрической конструкции на 0,1 и 0,2 м традиционная аппроксимация и в первом (таблицы 1 и 3) и во втором (таблицы 2 и 4) вариантах расчета не позволяет получить удовлетворительные результаты. Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  при векторном варианте аппроксимации полей перемещений с использованием различных сеток дискретизации и смещениях цилиндра на 0,1 и 0,2 м в обоих вариантах отсчета угла наклона нормали остаются достоверными и неизменными по величине.

Также важно отметить, что при смещении цилиндрической оболочки на 0,2 м в первом варианте расчета при более редкой сетке дискретизации наблюдается небольшая погрешность, которая устраняется при увеличении числа конечных элементов, во втором варианте результаты стабильны при различном числе элементов дискретизации.



Таблица 2  
Table 2

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,1 м (второй вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value 0.1 m (second calculation option)

Жесткость пружины			$10^2$ Н/м			
Величина жесткого смещения			0,1 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	108,33	99,84	114,33	126,15
		$\sigma_{tt}^H$	-109,47	-98,37	-115,23	-126,17
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	69,23	733,36	156,72	168,38
		$\sigma_{tt}^H$	-67,17	-79,17	-155,12	-167,73
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			0,74323	1,82233	5,32218	9,44288
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			10	10	10	10

Таблица 3  
Table 3

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,2 м (первый вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value 0.2 m (first calculation option)

Жесткость пружины			$10^2$ Н/м			
Величина жесткого смещения			0,2 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	0,37	-33,04	69,13	119,67
		$\sigma_{tt}^H$	-3,97	31,07	-68,49	-119,53
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	217,63	279,11	247,11	193,27
		$\sigma_{tt}^H$	-220,33	-269,15	-245,16	-192,13
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			9,38166	13,1367	19,93754	19,97153
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	155,53	156,36	157,33	157,84
		$\sigma_{tt}^H$	-154,87	-155,84	-156,93	-157,53
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	155,53	156,36	157,33	157,84
		$\sigma_{tt}^H$	-154,87	-155,84	-156,93	-157,53
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			20	20	20	20

Таблица 4  
Table 4

Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  в зависимости от густоты сетки дискретизации и величины жесткого смещения 0,2 м (второй вариант расчета)  
Voltage values  $\sigma_{tt}$  depending on sampling grid density and hard displacement value of 0.2 m (second calculation option)

Жесткость пружины			$10^2$ Н/м			
Величина жесткого смещения			0,2 м			
Интерполяция	Координаты (x; t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации			
			145x2	193x2	337x2	529x2
Скалярная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	107,37	86,23	91,63	149,53
		$\sigma_{tt}^H$	-107,23	-87,43	-93,29	-149,31
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	49,23	68,27	154,27	163,41
		$\sigma_{tt}^H$	-48,36	-67,36	-152,16	-162,74
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			0,81326	2,55477	10,54611	4,93624
Векторная	Точка (1)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
	Точка (2)	$\sigma_{tt}^B$	158,37	158,37	158,37	158,37
		$\sigma_{tt}^H$	-158,73	-158,73	-158,73	-158,73
Вертикальное смещение оболочки, $10^{-2}$ м			20	20	20	20

**5. Заключение.** Анализируя результаты вышеприведенных расчетов, можно сделать вывод, что разработанный алгоритм может быть использован в инженерной практике для численного анализа НДС тонких оболочек с учетом деформации поперечного сдвига.

Данные таблиц 1-4 показывают, что векторная интерполяция позволяет получать достоверные численные значения напряжений и при значительном вертикальном смещении цилиндрической оболочки как абсолютно твердого тела, а в сочетании с предложенным вариантом отсчета угла поворота нормали от ее деформированного состояния при редкой сетке элементов дискретизации.

Традиционная аппроксимация не позволяет получать достоверные значения напряжений в контролируемых точках цилиндрической конструкции при ее смещении как жесткого целого, что является общепризнанной проблемой МКЭ. Предложенный алгоритм позволяет автоматически учитывать смещения КЭ оболочки как абсолютно твердого тела.

### Список литературы

1. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит; 2006. 391 с.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.- Петерб. ун-та; 2010. 380 с.
3. Салахутдинов М.А., Каюмов Р.А., Арипов Д.Н., Ханеков А.Р. Численное исследование несущей способности балки составного двутаврового сечения из пултрузионных стеклопластиковых профилей. *Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета*. 2022;2(60):15–23. DOI: 10.52409/20731523\_2022\_2\_15
4. Bishop J. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2014;97(1):1–31.
5. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. Polygonal finite elements for finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015;101:305–328.
6. Liang K., Ruess M., Abdalla M. Co-rotational finite element formulation used in the Koiter-Newton method for nonlinear buckling analyses. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2016;116:38–54.
7. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение; 1974. 344 с.
8. Вольмир А.С. Современные проблемы теории пластинок и оболочек в летательных аппаратах. *Актуальные проблемы авиационной науки и техники*. 1984;77–87.
9. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне; 1988. 248 с.
10. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука; 1966. 636 с.
11. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. Ленинград, Изд-во ЛГУ; 1964. 394 с.
12. Ищанов Т.Р. Анализ НДС цилиндрической оболочки при использовании четырехугольного элемента дискретизации с учетом деформации поперечного сдвига. В сборнике: *Инновационные технологии в агропромышленном комплексе в условиях цифровой трансформации. Материалы Международной научно-практической конференции. Волгоград*. 2022;117–122.
13. Паймушин В.Н., Камалутдинов А.М., Шишов М.А., Чумакова С.Ф. Уточненная трансформационная модель деформирования стержня-полосы с закрепленным участком на одной из лицевых поверхностей. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2023;8:78–86. DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-78-86
14. Паймушин В.Н. Плоские задачи механики прямых стержней с учетом деформируемости участков закрепления, имеющих конечную длину. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2022;3:89–96. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-89-96
15. Badriev I., Paimushin V., Shihov M. A. Refined equations of the sandwich shells theory with composite external layers and a transverse soft core at average bending. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(11):1904–1914. DOI: 10.1134/S1995080219110076
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука; 1976. 536 с.
17. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Ключков Ю.В., Гуреева Н.А., Ищанов Т.Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2022;22(1):48–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61

### References

1. Golovanov AI., Tjuleneva ON., Shigabutdinov AF. Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures. M.: Fizmatlit; 2006. 391 p. (in Russian)
2. Novozhilov VV. Thin shell theory. SPb.: Izd-vo S.- Peterb. un-ta; 2010. 380 p. (in Russian)
3. Salakhutdinov MA., Kayumov RA., Aripov DN., Khanekov AR. Numerical study of the load-bearing capacity of a composite I-section beam made of pultruded fiberglass profiles. *News of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering*. 2022;2(60):15–23. (in Russian) DOI: 10.52409/20731523\_2022\_2\_15
4. Bishop J. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2014;97(1):1–31.

5. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O. Polygonal finite elements for finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015;101:305–328.
6. Liang K., Ruess M., Abdalla M. Co-rotational finite element formulation used in the Koiter-Newton method for nonlinear buckling analyzes. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2016;116:38–54.
7. Postnov VA., Kharhurim IYa. Finite element method in calculations of ship structures. L.: Shipbuilding; 1974. 344 p. (in Russian)
8. Volmir AS. Modern problems of the theory of plates and shells in aircraft. *Current problems of aviation science and technology*. 1984;77–87. (in Russian)
9. Rickards RB. Finite element method in shell theory and plates Riga: Zinatne; 1988. 248 p. (in Russian)
10. Timoshenko SP., Voinovsky-Krieger S. Plates and shells. M.: The science; 1966. 636 p. (in Russian)
11. Chernykh KF. Linear theory of shells. Part 2. Some theoretical issues. Leningrad, Leningrad State University Publishing House; 1964. 394 p. (in Russian)
12. Ishchanov TR. SSS analysis of cylindrical shell when used quadrilateral sampling element taking into account deformation transverse shear. *In the collection: Innovative technologies in agro-industrial complex in the context of digital transformation. Materials of the International Scientific and Practical Conference. Volgograd*. 2022;117–122. (in Russian)
13. Paimushin VN., Kamalutdinov AM., Shishov MA., Chumakova SF. Refined transformation model of rod-strip deformation with fixed area on one of the front surfaces. *Izvestia institutions of higher education. Mathematics*. 2023;8:78–86. (in Russian) DOI: 10.26907/0021-3446-2023-8-78-86
14. Paimushin VN. Plane problems of mechanics of straight rods taking into account deformability of fastening sections having a finite length. *Izvestia institutions of higher education. Mathematics*. 2022;3:89–96. (in Russian) DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-89-96
15. Badriev I., Paimushin V., Shihov MA. Refined equations of the sandwich shells theory with composite external layers and a transverse soft core at average bending. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(11):1904–1914. DOI: 10.1134/S1995080219110076
16. Sedov LI. Continuum mechanics. M.: Science; 1976. 536 p. (in Russian)
17. Dzhabrailov ASh., Nikolaev AP., Klochkov YuV., Gureeva NA., Ishchanov TR. Nonlinear deformation of an axisymmetrically loaded shells of revolution based on FEM with various variants of defining equations. *News of Saratov University. New episode. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2022;22(1):48–61. (in Russian) DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-1-48-61

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.12.2023

Received December 27, 2023

Поступила после рецензирования 09.02.2024

Revised February 9, 2024

Принята к публикации 12.02.2024

Accepted February 12, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Ищанов Тлек Рахметолович** – кандидат технических наук, доцент кафедры Высшей математики, Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Tlek R. Ishchanov** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russia