

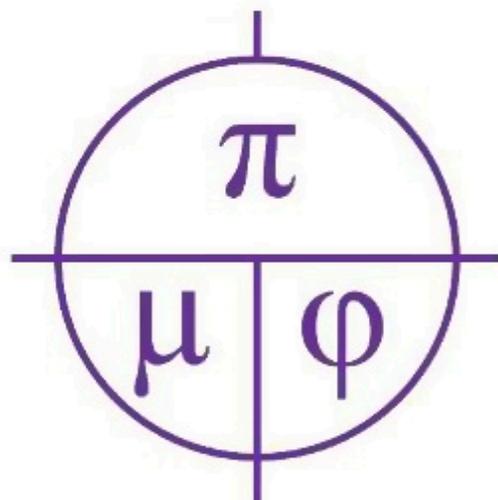


БелГУ
Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959 (online)

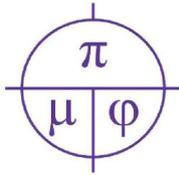
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2024. Том 56, № 2





Прикладная математика & Физика

2024. Том 56, № 2

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

А. В. Носков, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;

Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;

Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Вирченко Ю. П., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;

Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Каримов Ш. Т., д-р ф.-м. н., Фергана, Узбекистан;

Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;

Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;

Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;

Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;

Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;

Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 9,3

Дата выхода 30.06.2024.

Оригинал-макет подготовлен отделом объединенной редакции научных журналов НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

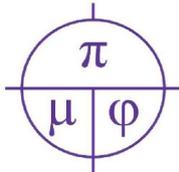
СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

- Архипов В. П., Глушак А. В.**
Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка 87
- Ломовцев Ф. Е., Точко Т. С.**
Смешанная задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны при нестационарных характеристических косых производных в краевых условиях 97
- Масаева О. Х.**
Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа 114
- Чечкина А. Г.**
О повышенной суммируемости решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом 124

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Блажевич С. В., Бронникова М. В., Носков А. В.**
Индикация расходимости пучка ультрарелятивистских электронов по дифрагированному переходному излучению 136
- Зуйко И. С., Малофеев С. С., Михайлов М. Г., Калинин А. А.**
Анализ микроструктуры и свойств разнородных СТП-соединений термоупрочняемых алюминиевых сплавов 146
- Пашин А. В., Крюков Ю. А., Михеева Г. В., Кудинов И. В., Амиров Т. Ф., Пименов А. А.**
Исследование локально-неравновесного процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода 153
- Шибков А. А., Федоров В. А., Золотов А. Е., Кочегаров С. С., Шибков Е. А., Желтова В. М.**
Формирование полос макролокализованной деформации вблизи концентраторов напряжения в алюминий-магниевом сплаве 163



Applied Mathematics & Physics

2024. Volume 56, No 2

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

A. V. Noskov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Virchenko Yu. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia

Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovskiy E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Karimov Sh. T., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Fergana, Uzbekistan;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 9,3

Date of publishing 30.06.2024.

The layout is presented by Department of the united

Editorial Board of Scientific Journals Belgorod

National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate

EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2024

CONTENTS

MATHEMATICS

- Arkhipov V. P., Glushak A. V.**
Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations 87
- Lomovtsev F. E., Tochko T. S.**
Mixed Problem on Forced Oscillations of a Bounded String Under Nonstationary Characteristic Oblique Derivatives in Boundary Modes 97
- Masaeva O. Kh.**
Dirichlet Problem in a Quarter Plane for the Generalized Laplace Equation 114
- Chechkina A. G.**
On Increased Summability of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift 124

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

- Blazhevich S. V., Bronnikova M. V., Noskov A. V.**
Indication of the Divergence of a Beam of Ultrarelativistic Electrons by a Diffracted Transition Radiation 136
- Zuiko I. S., Malopheyev S. S., Mikhaylov M. G., Kalinenko A. A.**
Analysis of the Microstructure and Properties of Dissimilar FSW Joints of Heat-treatable Aluminium Alloys 146
- Pashin A. V., Kryukov Yu. A., Mikheeva G. V., Kudinov I. V., Amirov T. F., Pimenov A. A.**
Study of the Locally Nonequilibrium Process of Induction Heating of Metal in a Hydrogen Generation Reactor 153
- Shibkov A. A., Fedorov V. A., Zolotov A. E., Kochegarov S. S., Shibkov E. A., Zheltova V. M.**
Formation of Macrolocalized Deformation Bands Near Stress Concentrators in an Aluminum-Magnesium Alloy 163

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.926.4

MSC 34A30, 34E05

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-87-96

Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

Архипов В. П.¹, Глушак А. В.²

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается задача Коши с начальными условиями в точке вырождения. Вид начальных условий зависит от знака коэффициента при первой производной. Установлена разрешимость соответствующих начальных задач и определены первые асимптотики построенных решений. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, точка вырождения, асимптотические представления, степенная асимптотика решений

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2024. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 87–96.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-87-96

Original Research

Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations

Viktor P. Arkhipov¹, Alexander V. Glushak²

¹ Oryel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Oryel, 302026, Russia

varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations second order Cauchy problem with initial conditions at the point of degeneracy is considered. The type of initial conditions depends on the sign of the coefficient of the first derivative. The solvability of the corresponding initial problems is established and the first asymptotic of the constructed solutions are determined. Examples are given.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Point of Degeneration, Asymptotic Representations, Power Asymptotic Behavior of Solutions

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2024. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 87–96. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-87-96

1. Введение. Изучение дифференциальных уравнений с обращаемся в нуль коэффициентом при старшей производной проводилось во многих работах. К таким уравнениям приводит исследование уравнений в частных производных переменного типа, а также установление асимптотических разложений бисингулярных задач (см. [1]). Подробно вопрос существования гладких решений вырождающихся уравнений первого и второго порядка исследовал В. П. Глушко в [2, 3, 4, 5].

Асимптотические формулы решений для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \quad (1)$$

в окрестности точки $t = 0$ вырождения его старшего коэффициента ($a(0) = 0$) были получены в [6], [7].

В работах [8], [9] не только исследована гладкость решений уравнения (1), но и получены их асимптотические разложения по специально построенным асимптотическим последовательностям функций. В [9] уравнение (1) рассматривалось в комплексной плоскости и были получены оценки по параметру решений двухточечных краевых задач. Двусторонние асимптотики решений в окрестности точки вырождения, которая находится внутри интервала, получены в [7].

В настоящей работе, которая является продолжением [10], рассматривается вопрос нахождения решений задачи Коши в случае, когда начальные условия задаются непосредственно в точке вырождения. Кроме того, с помощью установленных в [10] асимптотических формул получены первые асимптотики решений в окрестности точки вырождения.

2. Основные предположения. Нас будет интересовать локальная вблизи точки вырождения разрешимость задачи Коши для вырождающегося при $t = 0$ уравнения (1), поэтому будем рассматривать это уравнение на отрезке $[0, \delta]$. Для упрощения формулировок об асимптотике решений будем предполагать, что коэффициенты уравнения и правая часть удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0, \delta]$ функции, причем $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t \in (0, \delta]$ и $b(0) \neq 0$.

В работах [8, 9] построены разложения решений уравнения (1) по асимптотическим рядам специально выбранных функций. В настоящем разделе приведем некоторые из этих результатов, которые понадобятся для наших дальнейших исследований.

Определим следующие функции

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}, \quad s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad w(t) = \int_t^\delta \frac{d(\tau)}{a(\tau)} d\tau, \quad (2)$$

$$h(t) = \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' - 2b'(t) \right), \quad (3)$$

$$v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp \left(\int_t^\delta \frac{b(\tau) - (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)} d\tau \right) \in C^\infty(0, \delta], \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

В силу непрерывности входящих в эти выражения функций можно выбрать достаточно малое $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось

Условие 2. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $t \in [0, \delta]$ справедливы неравенства

$$d(t) = \sqrt{b^2 - 4a(t)c(t)} > \frac{|b(0)|}{2}, \quad \int_0^\delta |h(t)| dt < \frac{1}{2}.$$

При $f(t) \equiv 0$ линейно независимые решения однородного уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$u_1(t) = \Phi(t)v_1(t), \quad u_2(t) = \Psi(t)v_2(t). \quad (5)$$

Функция $\Phi(t)$ — решение задачи

$$\Phi(t) = 1 + K_1\Phi(t), \quad \Phi(0) = 1, \quad (6)$$

где K_1 — интегральный оператор

$$K_1\varphi(t) = \int_0^\delta k_1(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau$$

с ядром $k_1(t, \tau) = h(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq t \leq \delta$ и $k_1(t, \tau) = h(\tau) \exp(w(\tau) - w(t))$ при $t \leq \tau \leq \delta$, функции $h(t)$, $w(t)$ введены в (2), (3).

Аналогично, функция $\Psi(t)$ — решение задачи

$$\Psi(t) = 1 + K_2\Psi(t), \quad \Psi(0) = 1, \quad (7)$$

где K_2 — интегральный оператор

$$K_2\psi(t) = \int_0^t k_2(t, \tau)\psi(\tau) d\tau$$

с ядром $k_2(t, \tau) = -h(\tau) (1 - \exp(w(t) - w(\tau)))$ при $0 \leq \tau \leq t \leq \delta$.

При выполнении условий 1 и 2 ядра интегральных операторов K_1, K_2 являются ограниченными, а в случае «сильного» вырождения – и непрерывными функциями в квадрате $[0, \delta] \times [0, \delta]$. Выполнение этих условий обеспечивает для операторов K_1, K_2 справедливость условий сжатия в $C[0, \delta]$ и существование единственных решений уравнений (6), (7) в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t), \quad \varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_{k+1}(t) = K_1 \varphi_k(t), \quad (8)$$

$$\Psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(t), \quad \psi_0(t) = 1, \quad \psi_{k+1}(t) = K_2 \psi_k(t). \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1 и 2. Тогда функции $u_1(t) = \Phi(t)v_1(t), u_2(t) = \Psi(t)v_2(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1), а общее решение этого уравнения представимо на $[0, \delta]$ в виде

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + u_*(t), \quad (10)$$

где все входящие в эти выражения функции определяются соотношениями (2)–(5), а частное решение уравнения (1) $u_*(t)$ имеет вид

$$u_*(t) = \int_0^{\delta} G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$G(t, \tau) = -\frac{\Phi(t)\Psi(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right), \quad 0 < \tau \leq t,$$

$$G(t, \tau) = -\frac{\Phi(t)\Psi(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^{\tau} \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right), \quad t \leq \tau \leq \delta.$$

При этом, если $b(0) < 0$, то $u_i(t) \in C^n[0, \delta]$, $i = 1, 2$, $n = \max(k \in \mathbb{N} : b(0) + ka'(0) < 0)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_2^{(k)}(t) = 0 \quad (0 \leq k \leq n), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u_1(t) = U_1 > 0, \quad u_*(t), u(t) \in C^n[0, \delta].$$

Если $b(0) > 0$, то $u_2(t) \in C^\infty[0, \delta]$, $u_2(0) > 0$, $u_1(t) \in C^\infty(0, \delta]$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_1(t) = +\infty, \quad u_*(t) \in C^\infty[0, \delta], \quad u(t) \in C^\infty[0, \delta] \text{ при } C_1 = 0.$$

Результаты работы [10] позволяют говорить не только о разрешимости задачи Коши, но и выписать первые асимптотики её решений в окрестности нуля. В дальнейшем мы остановимся лишь на исследовании сильных степенных вырождений и поскольку нас интересуют локальные результаты разрешимости, то в дальнейшем будем считать выполненным следующее условие.

Условие 3. Пусть $a(t) = t^m a_0(t)$, $a_0(0) > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, что означает сильное вырождение, и $b(t) = b = \text{const} \neq 0$ при всех $t \in [0, \delta]$.

В статье [10] указано, что при выполнении условия 3 справедливы асимптотические представления:

$$a(t) = t^m O(1), \quad h(t) = t^{2m-2} O(1), \quad d(t) = |b|(1 + t^m O(1)), \quad s(t) = t^{2m-1} O(1), \quad (11)$$

где функции $d(t), h(t), s(t)$ определены в (2), (3).

Асимптотические представления (11) позволяют установить ряд утверждений о разрешимости задачи Коши для уравнения (1).

Теорема 1 фактически определяет постановку начальных условий в точке $t = 0$ в зависимости от знака $b = b(0) \neq 0$, поэтому в дальнейшем при исследовании следует различать два случая: $b(0) > 0$ и $b(0) < 0$.

3. Задача Коши при $b = b(0) > 0$. Установим три утверждения, справедливые для рассматриваемого случая $b > 0$.

Теорема 2. Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1–3 и $b > 0$. Тогда существует единственное решение $u(t) \in C^\infty[0, \delta]$ этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0, \quad (12)$$

для которого при $t \rightarrow 0+$ имеет место асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} u(t) = & \frac{\sqrt{b} u_0}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(-\int_0^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right)\right) + \\ & + A(t) \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + \\ & + B(t) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1), \end{aligned} \quad (13)$$

где $d_1(t) = (|b| + d(t))/2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} A(t) = & -\int_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)} \left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(-\int_{\xi}^t \frac{d_1(\tau) d\tau}{a(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}, \\ B(t) = & \int_0^t \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)} \left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)}\right)'\right) \exp\left(-\int_{\xi}^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + w_*(t) \quad (14)$$

где $w_*(t)$ — такое частное решение уравнения (1), что $w_*(0) = 0$. Отметим, что $w_*(t)$ легко подобрать, используя решения $u_*(t)$ и $u_2(t)$. Из теоремы 1 следует, что для выполнения условия (12) необходимо в (14) положить $C_1 = 0$ и тогда

$$C_2 = \frac{u_0}{u_2(0)} = \frac{u_0}{v_2(0)},$$

где $v_2(t)$ определена равенством (4), причем $v_2(0) > 0$.

При таком выборе постоянных C_1 и C_2 определяемая равенством (14) функция $u(t)$ и будет требуемым единственным решением.

Асимптотические представления при $t \rightarrow 0+$ для $u_2(t)$ и $w_*(t)$ установлены в [10] и они имеют вид:

$$u_2(t) = v_2(t)\Psi(t), \quad \Psi(t) = \left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1)\right), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} w_*(t) = & A(t) \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + \\ & + B(t) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив разложения (15), (16) в решение (14), получим требуемое асимптотическое представление (13). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует однопараметрическое семейство функций $\tilde{u}(t) \in C^\infty(0, \delta]$, каждая функция которого является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \tilde{u}(t) \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) = w_0. \quad (17)$$

Для всех функций этого семейства при $t \rightarrow 0+$ имеет место асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \frac{\sqrt{b} w_0}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) \exp\left(\int_0^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \times \\ & \times \left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)}\right)'\right) + t^{4m-2}O(1)\right) + w_*(t) + C u_2(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где $u_2(t)$ определено в (5), (9), (4), $w_*(t)$ — такое частное решение уравнения (1), что $w_*(0) = 0$, а C — произвольная постоянная.

Доказательство. Как доказано в [8], при $b > 0$ входящие в общее решение (14) функции $u_2(t)$ и $w_*(t)$ ограничены на $[0, \delta]$, а $\lim_{t \rightarrow 0+} v_1^{(n)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} u_1^{(n)}(t) = +\infty$ для $n \in \mathbb{N}_0$.

Асимптотические представления при $t \rightarrow 0+$ для $u_1(t)$ и $w_*(t)$ также установлены в [10], они имеют вид

$$u_1(t) = v_1(t)\Phi(t), \quad \Phi(t) = \left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + t^{4m-2}O(1) \right). \quad (19)$$

$$\begin{aligned} w_*(t) &= A(t) \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + \\ &+ B(t) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + t^{4m-2}O(1), \end{aligned} \quad (20)$$

и из (19), (20) вытекает требуемое асимптотическое представление (18).

Отметим также, что асимптотическое представление (18) может быть записано в виде

$$\tilde{u}(t) = w_0 \exp \left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)} \right) (1 + o(1)) + w_*(t) + Cu_2(t).$$

Учитывая (15), (16), (19), далее для общего решения (14) вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} u(t) \exp \left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)} \right) &= C_1 \lim_{t \rightarrow 0+} v_1(t)\Phi(t) \exp \left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)} \right) = \\ &= \frac{C_1}{\sqrt{b}} \lim_{t \rightarrow 0+} \exp \left(\int_t^\delta \frac{(-b + a(\tau)) d\tau}{2a(\tau)} \right) = \frac{C_1}{\sqrt{b}} \exp \left(- \int_0^\delta \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Если выбрать

$$C_1 = w_0 \sqrt{b} \exp \left(\int_0^\delta \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)} \right),$$

то для функции $\tilde{u}(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + w_*(t)$ из (19), (21) после несложных преобразований вытекает справедливость равенства (17). Теорема доказана.

Установленные в [10] асимптотические представления позволяют рассмотреть вопрос о разрешимости уравнения (1) и для неограниченной в окрестности точки $t = 0$ правой части уравнения $f(t)$ специального вида.

Теорема 4. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия 1–3, $b > 0$ и правая часть имеет вид

$$f(t) = \exp \left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)} \right) f_0(t), \quad f_0(t) \in C^\infty[0, \delta].$$

Тогда существует однопараметрическое семейство $\tilde{y}(t) \in C^\infty(0, \delta]$ решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (17). Для всех функций семейства имеет место асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \frac{(w_0 - \varphi_0)\sqrt{b}}{\sqrt{d(t)}} \exp \left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)} \right) \exp \left(\int_0^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)} \right) \times \\ &\times \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) - \Phi(t) \int_0^t \frac{\Psi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp \left(\int_\tau^t \frac{c(\xi) d\xi}{d_1(\xi)} \right) - \\ &- \Psi(t) \int_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp \left(- \int_t^\tau \frac{(b + d(\xi)) d\xi}{2a(\xi)} \right) d\tau + t^{4m-2}O(1) + Cu_2(t), \end{aligned} \quad (22)$$

где $Cu_2(t)$ — произвольная функция из семейства ограниченных решений однородного уравнения (1),

$$\varphi_0 = - \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{bd(\tau)}} \exp \left(- \int_t^\tau \frac{(b + d(\xi)) d\xi}{2a(\xi)} \right) d\tau.$$

Доказательство. Согласно теореме 1, общее решение уравнения (1) представимо на $(0, \delta]$ в виде $u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + u_*(t)$ (см. (10)), где $u_*(t)$ – частное решение, для которого справедливо представление

$$\begin{aligned} u_*(t) &= \int_0^\delta G(t, \tau) f(\tau) d\tau = -\Phi(t) \int_0^t \frac{\Psi(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{(b+d(\xi)) d\xi}{2a(\xi)}\right) \exp\left(\int_\tau^\delta \frac{b d\xi}{a(\xi)}\right) d\tau - \\ &-\Psi(t) \int_t^\delta \frac{\Phi(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{(b-d(\xi)) d\xi}{2a(\xi)}\right) \exp\left(\int_\tau^\delta \frac{b d\xi}{a(\xi)}\right) d\tau = -\exp\left(b \int_t^\delta \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) \times \\ &\times \left(\int_0^t \frac{\Phi(t)\Psi(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_\tau^t \frac{c(\xi) d\xi}{d_1(\xi)}\right) d\tau - \int_t^\delta \frac{\Psi(t)\Phi(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{(b+d(\xi)) d\xi}{-2a(\xi)}\right) d\tau \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая представление (23), вычислим соответствующие пределы каждого из слагаемых общего решения. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u_*(t) \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^\delta \frac{\Phi(\tau)\Psi(t) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_t^\tau \frac{(b+d(\xi)) d\xi}{2a(\xi)}\right) d\tau = \varphi_0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u_2(t) \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{b}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) \exp\left(\int_t^\delta \frac{(b-d(\tau)) d\tau}{2a(\tau)}\right) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u_1(t) \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{b}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) \exp\left(\int_t^\delta \frac{(b+d(\tau)) d\tau}{2a(\tau)}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{b}} \exp\left(\int_0^\delta \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) = \varphi_1 > 0. \end{aligned}$$

Подставляя общее решение в условие (17) и учитывая только что найденные пределы, определим постоянную C_1 и, тем самым, требуемое семейство решений $\tilde{u}(t)$:

$$C_1 = \frac{w_0 - \varphi_0}{\varphi_1}, \quad \tilde{u}(t) = \frac{w_0 - \varphi_0}{\varphi_1} u_1(t) + C_2 u_2(t) + u_*(t).$$

Наконец, асимптотическое представление (22) функций из указанного семейства вытекает из (15), (19), (20).

В заключение заметим, что для получения конкретной асимптотики в представлении (22) следует заменить функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ их асимптотическими представлениями из (15), (19), а саму формулу (22) тогда можно записать в виде:

$$\tilde{u}(t) = w_0 \exp\left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) (1 + o(1)) + C_2 u_2(t).$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$(t^2 u'(t))' + b u'(t) + \omega(1 - \omega) u(t) = f(t), \quad (24)$$

на промежутке $t \in [0, \delta]$, где $\delta > 0$, $b \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Общее решение $\hat{u}(t)$ однородного дифференциального уравнения (24) имеет вид

$$\hat{u}(t) = C_1 \left(-\frac{b}{t}\right)^{1-\omega} {}_1F_1\left(1-\omega, 2-2\omega; \frac{b}{t}\right) + C_2 \left(-\frac{b}{t}\right)^\omega {}_1F_1\left(\omega, 2\omega; \frac{b}{t}\right),$$

где ${}_1F_1(\cdot)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Пусть в уравнении (24) $b = 1$, $\omega = 2$, $f(t) = t$. В этом частном случае общим решением неоднородного дифференциального уравнения (24) будет функция

$$u(t) = C_1(2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) + C_2(2t + 1) + \frac{t}{6} + \frac{2t - 1}{6} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_{1/t}^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau. \quad (25)$$

Выберем в (25) $C_1 = 0$, а постоянную $C_2 = u_0$ определим из начального условия (12). По теореме 2 функция

$$u(t) = u_0(2t + 1) + \frac{t}{6} + \frac{2t - 1}{6} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_{1/t}^{+\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau = u_0(2t + 1) + o(1) \quad (t \rightarrow 0+)$$

будет единственным решением уравнения

$$(t^2 u'(t))' + u'(t) - 2u(t) = t, \quad (26)$$

удовлетворяющим условию (12).

Если в общем решении (25) выбрать постоянную $C_1 = -w_0 e^{-1/\delta}$ так, чтобы выполнялось условие (17), то по теореме 3 каждая функция однопараметрического семейства функций

$$\tilde{u}(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right) \left(-w_0(2t - 1) \exp\left(-\frac{1}{\delta}\right) - t \right) + C_2(2t + 1)$$

является решением уравнения (26) и удовлетворяет условию (17).

Рассмотрим, наконец, уравнение (24) с неограниченной в окрестности точки $t = 0$ правой частью уравнения вида $f(t) = e^{1/t}$, и пусть, по-прежнему, $b = 1$, $\omega = 2$. По теореме 4 каждая функция однопараметрического семейства функций

$$\tilde{u}(t) = -w_0(2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\delta}\right) + C_2(2t + 1) - t \exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

является решением уравнения

$$(t^2 u'(t))' + u'(t) - 2u(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

и удовлетворяет условию (17).

4. Задача Коши при $b = b(0) < 0$. В теоремах 2–4 мы предполагали, что в уравнении (1) коэффициент $b > 0$. Далее установим два утверждения при $b < 0$.

Теорема 5. Пусть для уравнения (1) выполнены условия 1–3 и $b < 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство функций $u(t) \in C^\infty[0, \delta]$, каждая функция которого является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (12). Функции этого семейства могут быть записаны в виде $u(t) = u_3(t) + C u_2(t)$, где C – произвольная постоянная, $u_2(t)$ – определяемое равенством (15) решение однородного уравнения (1) и такое, что $u_2^{(k)}(0) = 0$, $u^{(k)}(0) = u_3^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}_0$, а для $u_3(t) \in C^\infty[0, \delta]$ при $t \rightarrow 0+$ имеет место асимптотическое представление:

$$u_3(t) = \left(\frac{u_0 \sqrt{|b|}}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_0^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) + A_3(t) \right) \left(1 + s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) + \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) \right) + \\ + B_3(t) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)}{d(t)} \left(h(t) - \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) \right) + t^{4m-2} O(1), \quad (27)$$

где

$$A_3(t) = - \int_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)} \left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} \right)' \right) \exp\left(\int_\xi^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}, \\ B_3(t) = - \int_t^\delta \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)} \left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} \right)' \right) \exp\left(-\int_t^\xi \frac{d_1(\tau) d\tau}{a(\tau)}\right) \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}.$$

Доказательство. Как указано в теореме 1, общее решение уравнения (1) имеет вид (10). При сделанных предположениях все входящие в (10) функции оказываются бесконечно дифференцируемыми на $[0, \delta]$, причем

$$u_1(0) = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(-\int_0^\delta \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) > 0, \quad u_2^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Условие (12) будет выполнено, если положить $C_1 = u_0 - u_*(0)/u_1(0)$. Тогда удовлетворяющее условиям теоремы решение $u(t)$ записывается в виде

$$u(t) = u_3(t) + C u_2(t), \quad u_3(t) = \left(u_0 - \frac{u_*(0)}{u_1(0)} \right) u_1(t) + u_*(t). \quad (28)$$

Асимптотика функции $u_1(t)$ указана в формуле (19), а асимптотика функции $u_*(t)$ установлена в работе [10] и она имеет вид:

$$\begin{aligned} u_*(t) = & A_3(t) \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + \\ & + B_3(t) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + t^{4m-2}O(1). \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя асимптотики (19), (29) в (28) получим требуемую асимптотику (27). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости уравнения (1) для быстро убывающих при $t \rightarrow 0+$ функций $f(t) \in C^\infty[0, \delta]$.

Теорема 6. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия 1–3, $b < 0$ и правая часть имеет вид

$$f(t) = \exp\left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) f_0(t), \quad f_0(t) \in C^\infty[0, \delta].$$

Тогда существует единственное решение $\tilde{u}(t) \in C^\infty[0, \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (17). Это решение при $t \rightarrow 0+$ допускает асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) = & \exp\left(b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) \left(\tilde{A}(t) \left(1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + \right. \\ & + \frac{(w_0 - \varphi_2)\sqrt{b}}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(-\int_0^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' \right) + \\ & \left. + \tilde{B}(t) \left(1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)' + t^{4m-2}O(1) \right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) = & - \int_0^t \left(1 - s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} - \frac{a(\xi)}{d(\xi)} \left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} \right)' \right) \exp\left(-\int_\xi^t \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f_0(\xi) d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}, \\ \tilde{B}(t) = & \int_t^\delta \left(1 + s(\xi) + \frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} + \frac{a(\xi)}{d(\xi)} \left(\frac{a(\xi)h(\xi)}{d(\xi)} \right)' \right) \exp\left(\int_t^\xi \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) \frac{f_0(\xi) d\xi}{\sqrt{d(t)d(\xi)}}, \\ \varphi_2 = & - \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^\delta \frac{\Phi(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{bd(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{c(\xi) d\xi}{d_1(\xi)}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно теореме 1, общее решение уравнения (1) представимо на $(0, \delta]$ в виде $u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + u_*(t)$ (см. (10)), и для справедливости условия (12) следует положить $C_1 = 0$.

Далее рассмотрим соответствующие пределы слагаемых общего решения. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} u_2(t) \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{b}} \lim_{t \rightarrow 0+} \exp\left(-\int_t^\delta \frac{(b+d(\tau)) d\tau}{2a(\tau)}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{b}} \exp\left(\int_0^\delta \frac{c(\tau) d\tau}{d_1(\tau)}\right) = \varphi_3 > 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} u_*(t) \exp\left(-b \int_t^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)}\right) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^\delta f_0(\tau) G(t, \tau) \exp\left(-b \int_t^\tau \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) d\tau = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^t \frac{-\Phi(t)\Psi(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{(b+d(\tau)) d\tau}{2a(\tau)}\right) \exp\left(b \int_\tau^t \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^\delta \frac{-\Phi(\tau)\Psi(t)f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_t^\tau \frac{(b-d(\tau))d\tau}{2a(\tau)}\right) \exp\left(b \int_t^\tau \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) d\tau = \\
& = -\frac{1}{\sqrt{|b|}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^\delta \frac{\Phi(\tau)f_0(\tau)}{\sqrt{d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{c(\xi)d\xi}{d_1(\xi)}\right) d\tau = \varphi_2.
\end{aligned} \tag{32}$$

Учитывая пределы (31), (32), для выполнения условия (12), следует выбрать постоянную C_2 из равенства $B_2C_2 + B_* = w_0$ и тогда функция

$$\tilde{u}(t) = \frac{w_0 - \varphi_2}{\varphi_3} u_2(t) + u_*(t)$$

будет искомым единственным решением задачи (1), (12).

Асимптотическое представление (30) этого решения получается из (15), (23).

Пример 2. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение (24), и, в отличие от примера 1, пусть теперь $b = -1$, $\omega = 2$, $f(t) = t$. В этом частном случае общим решением неоднородного дифференциального уравнения (24) будет функция

$$u(t) = C_1(2t - 1) + \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \left(C_2(2t + 1) + \frac{t}{6} - \frac{2t + 1}{6} \text{Ei}_1\left(\frac{1}{t}\right) \right) \tag{33}$$

или

$$u(t) = C_1(2t - 1) + C_2(2t + 1) \exp\left(-\frac{1}{t}\right) + o(1) \quad (t \rightarrow 0),$$

где $\text{Ei}_1(\cdot)$ – модифицированная интегральная показательная функция, которая при действительных $x > 0$ имеет вид

$$\text{Ei}_1(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!},$$

$\gamma = 0,5772157\dots$ – постоянная Эйлера.

Постоянную $C_1 = -u_0$ определим из начального условия (12). По теореме 5 при таком выборе произвольной постоянной C_1 каждая функция из определяемого равенством (33) семейства $u(t)$ будет решением уравнения

$$(t^2 u'(t))' - u'(t) - 2u(t) = t,$$

удовлетворяющим условию (17).

Если в качестве правой части неоднородного дифференциального уравнения (24) взять быстро убывающую при $t \rightarrow 0^+$ функцию $f(t) = e^{-1/t}$, то в этом случае общим решением неоднородного дифференциального уравнения (24) будет функция

$$u(t) = C_1(2t - 1) + C_2(2t + 1) \exp\left(-\frac{1}{t}\right) + t \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$$

и, если положить $C_1 = 0$, то по теореме 6 функция

$$u(t) = w_0(2t + 1) \exp\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{t}\right) + t \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$$

будет единственным решением уравнения

$$(t^2 u'(t))' - u'(t) - 2u(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right),$$

удовлетворяющим условию (17).

5. Заключение. В настоящей работе рассмотрен случай, когда начальные условия задачи Коши заданы в точке вырождения $t = 0$. Естественно, дальнейшим развитием полученных результатов являются начальные задачи, когда точка вырождения $t = t_0$, в которой задаются начальные условия, будет внутренней точкой промежутка $[0, T]$. Основанием для этих исследований являются полученные в [7] результаты.

Список литературы

1. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.
2. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. *Дифференциальные уравнения*. 1968;4(9):1584–1597.

3. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференциальные уравнения*. 1968;4(11):1956–1966.
4. Глушко В.П. 1969. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. III. *Дифференциальные уравнения*. 1969;5(3):443–455.
5. Глушко В.П. 1969. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. IV. *Дифференциальные уравнения*. 1969;5(4):599–611.
6. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998;4(3):1063–1095.
7. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016;20(241)44:5–22.
8. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
9. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2013;5(148)30:5–18.
10. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(3):197–206.

References

1. Ilyin AM. Coordination of asymptotic expansions of solutions to boundary value problems. M.: Nauka. 1989. 336 p. (in Russian)
2. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. I. *Differential Equations*. 1968;4:9:1584–1597. (in Russian)
3. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. II. *Differential Equations*. 1968;4:11:1956–1966. (in Russian)
4. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. III. *Differential Equations*. 1969;5:3:443–455. (in Russian)
5. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. IV. *Differential Equations*. 1969;5:4:599–611. (in Russian)
6. Rosov NKh, Sushko VG, Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundamental and applied mathematics*. 1998;4(3):1063–1095. (in Russian)
7. Arhipov VP., Glushak AV. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of of solutions. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2016;20(241)44:5–22. (in Russian)
8. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393. (in Russian)
9. Arhipov VP., Glushak AV. Asymptotic representations of solutions of differential second order equations near the point of degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2013;5(148)30:5–18. (in Russian)
10. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(3):197–206. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.12.2023

Поступила после рецензирования 29.01.2024

Принята к публикации 03.02.2024

Received December 15, 2023

Revised January 29, 2024

Accepted February 03, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Oryel State University named after I. S. Turgenev, Oryel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Смешанная задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны при нестационарных характеристических косых производных в краевых условиях

Ломовцев Ф. Е. , Точко Т. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным)

Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, 4
lomovcev@bsu.by, tanja-shlapakova@mail.ru

Аннотация. Приведены явные рекуррентные формулы единственного и устойчивого классического решения характеристической смешанной задачи для неоднородного простейшего уравнения колебаний ограниченной струны. Для любого момента времени в характеристических граничных условиях на концах струны косые производные с зависящими от времени коэффициентами направлены вдоль критических характеристик уравнения. Выведен критерий корректности этой смешанной задачи, т.е. необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования характеристических граничных условий с начальными условиями и уравнением колебаний струны для существования, единственности и устойчивости её классических решений. Вывод условий согласования существенно использует новое понятие критериальных значений суммы старших производных от правой части уравнения. Эти результаты получены известным методом вспомогательных смешанных задач для полуграниченной струны, который не требует явных периодических продолжений данных смешанных задач вне множеств их определения.

Ключевые слова: характеристическая смешанная задача; ограниченная струна, нестационарные граничные условия; характеристические косые производные; классическое решение; критерий корректности

Для цитирования: Ломовцев Ф. Е., Точко Т. С. 2024. Смешанная задача о вынужденных колебаниях ограниченной струны при нестационарных характеристических косых производных в краевых условиях. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 97–113. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-97-113

Original Research

Mixed Problem on Forced Oscillations of a Bounded String Under Nonstationary Characteristic Oblique Derivatives in Boundary Modes

Fedor E. Lomovtsev , Tatyana S. Tochko 

(Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin)

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti avenue, Minsk, 220030, Belarus
lomovcev@bsu.by, tanja-shlapakova@mail.ru

Abstract. Explicit recurrent formulas are given for the unique and stable classical solution of the characteristic mixed problem for the inhomogeneous simplest vibration equation of a bounded string. For any moment of time in the characteristic boundary conditions at the ends of the string, the oblique derivatives with time-dependent coefficients are directed along the critical characteristics of the equation. A correctness criterion of this mixed problem is derived, i.e. necessary and sufficient smoothness requirements and matching conditions the characteristic boundary conditions with the initial conditions and the string vibration equation for the existence, uniqueness and stability of its classical solutions. The derivation of matching conditions essentially uses the new concept of criterion values for the sum of the highest derivatives of the right-hand side of the equation. These results were obtained by the well-known method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string, which does not require explicit periodic continuations of the mixed problems data outside their definition sets.

Keywords: Characteristic Mixed Problem, Bounded String, Nonstationary Boundary Conditions; Characteristic First Oblique Derivatives, Classical Solution, Correctness Criterion

For citation: Lomovtsev F. E., Tochko T. S. 2024. Mixed Problem on Forced Oscillations of a Bounded String Under Nonstationary Characteristic Oblique Derivatives in Boundary Modes. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 97–113. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-97-113

1. Введение. Критерии корректности смешанных задач для ограниченной струны – это необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования граничных режимов с начальными условиями и волновыми уравнениями. Они дают существование, единственность и устойчивость (непрерывность)

их классических решений по правым частям уравнений, граничных режимов и начальных условий в соответствующих банаховых пространствах. Эти банаховы пространства нашей работы указаны в конце доказательства теоремы 3.1. В случае полуограниченной струны каждая смешанная задача для волнового уравнения с нехарактеристической или характеристической косою производной в граничном условии имеет разные классические решения и критерии корректности [1]. Для некоторых и нехарактеристических смешанных задач найдены необходимые и достаточные требования гладкости только на начальные и граничные данные в работах тех авторов, которые не используют метод Ломовцева Ф. Е. корректировки пробных решений в классические решения на первой четверти плоскости. В этих работах правые части волновых уравнений имеют лишь завышенную достаточную гладкость. Отсутствовали необходимые и достаточные требования гладкости даже на начальные и граничные данные для характеристических смешанных задач в связи с их сложностью. В характеристической смешанной задаче для ограниченной струны гладкость решений и, следовательно, входных данных задачи неограниченно увеличивается с ростом времени колебаний [2]. В настоящей работе впервые выведен полный критерий корректности характеристической смешанной задачи для ограниченной струны.

В нашей работе без периодических продолжений (отражений) исходных данных найден критерий корректности (по Адамару) смешанной задачи при нестационарных (зависящих от времени) характеристических косою производных на концах. Их характеристичность означает, что в любой момент времени косою производные на концах струны направлены вдоль критических характеристик уравнения. Этот критерий корректности состоит из необходимых и достаточных требований гладкости и условий согласования на правую часть уравнения, начальные и граничные данные характеристической смешанной задачи, которые гарантируют существование единственного и устойчивого по исходным данным её классического решения. Также без периодических продолжений (отражений) исходных данных нами установлены рекуррентные по промежуточным начальным данным явные формулы классического решения этой характеристической смешанной задачи. Эти результаты получены методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, предложенным Ф. Е. Ломовцевым в [3], из явной формулы решения и критерия корректности по Адамару вспомогательной характеристической смешанной задачи для полуограниченной струны статьи [4]. Для классического (дважды непрерывно дифференцируемого) решения критерий корректности этой характеристической смешанной задачи для полуограниченной струны из статьи [4] был доказан уже в работе [5], где требований гладкости на каждое из исходных данных задачи на одно больше, чем на исходные данные аналогичной нехарактеристической смешанной задачи в диссертации Новикова Е. Н. [6]. В его диссертации для классического решения два условия согласования в случае нехарактеристической косою производной вместо трёх условий согласования в нашем случае характеристической косою производной для каждой из граничных точек струны. Такая же закономерность сохраняется и для решений любой целой гладкости этих двух смешанных задач. В работах [7, 8] были получены минимальные достаточные требования гладкости чётных порядков гладкости решения (в нечётных прямоугольниках) и условия согласования нашей смешанной задачи, используя производные по векторам $v_i = \{a, (-1)^{i+1}\}$, $i = 1, 2$, от сумм частных производных наибольших порядков от правой части уравнения на концах струны в двух условиях согласования. Известно, что минимальные достаточные требования и условия фактически являются необходимыми требованиями и условиями. В статье [4] критерий корректности характеристической смешанной задачи для нечётных порядков гладкости решения (в чётных прямоугольниках) установлен с помощью нового понятия критериальных значений сумм частных производных наибольших порядков от правой части уравнения на концах струны в двух условиях согласования из [9, 10].

Ранее был изучен частный случай рассмотренной характеристической смешанной задачи для однородного уравнения при однородной стационарной характеристической косою производной на левом конце и однородном граничном режиме первого рода на правом конце струны с помощью кусочно-гладких справа специальных продолжений начальных данных с отрезка $[0, d]$ на отрезки $[-2nd, 2nd]$, $n = 1, 2, \dots$ [2]. В [11] обсуждались необходимые условия корректности по Адамару этого частного случая характеристической смешанной задачи. Получены единственные обобщенные решения четырех смешанных задач для уравнения колебаний струны с граничным условием Бицадзе – Самарского общего вида на правом конце и с неоднородным условием Неймана или Дирихле на левом конце в [12]. Первая смешанная задача для волновых уравнений изучалась в [13] и др. В отечественных и зарубежных работах отсутствуют одновременно явные формулы классических решений и критерии корректности смешанных задач, тем более, с нестационарными граничными режимами. Статьи [14], [15] и др. посвящены использованию метода Фурье для явного решения и вывода достаточных условий корректности некоторых смешанных задач для неоднородных волновых уравнений с потенциалом $q = q(x, t)$ методом Хромова. Его метод состоит в применении метода Фурье, метода резольвент, идеи А. Н. Крылова об ускорении сходимости рядов Фурье и идеи Л. Эйлера о расходящихся рядах. Наша смешанная задача не допускает применения метода Фурье (разделения переменных) из-за нестационарных граничных режимов.

2. Вспомогательная характеристическая смешанная задача. В первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ изучена смешанная задача [4]

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad a > 0, \quad (x, t) \in \dot{G}_\infty, \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x > 0, \quad (2)$$

$$[\alpha(t)u_t(x, t) + \beta(t)u_x(x, t) + \gamma(t)u(x, t)]|_{x=0} = \mu(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

где коэффициенты α, β, γ – заданные вещественные функции переменной t , исходные данные f, φ, ψ, μ – заданные вещественные функции своих переменных x и t . Частные производные соответствующих порядков от искомой функции u обозначаем нижними индексами по указанным в индексах переменным. В граничном режиме (3) косая производная предполагается характеристической (в любой момент времени t направленной вдоль критической характеристики $x = at$ уравнения (1)), т. е. $\alpha\alpha'(t) = \beta(t), \gamma(t) \neq 0, t \in R_+ = [0, +\infty)$.

Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega \subset R^2$ и $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Найдены гладкие решения $u \in C^m(G_\infty), G_\infty = [0, +\infty) \times [0, +\infty), m \geq 2$, и критерий корректности (необходимые и достаточные условия, налагаемые на исходные данные f, φ, ψ, μ) для однозначной и устойчивой везде разрешимости характеристической смешанной задачи (1)–(3) во множестве гладких решений.

Определение 2.1. Гладким решением смешанной задачи (1)–(3) в \dot{G}_∞ называется функция $u \in C^m(G_\infty), G_\infty = [0, +\infty) \times [0, +\infty), m \geq 2$, удовлетворяющая уравнению (1) на \dot{G}_∞ в обычном смысле, а начальным условиям (2) и граничному режиму (3) в смысле пределов соответствующих выражений от значений $u(\dot{x}, \dot{t})$ во внутренних точках $(\dot{x}, \dot{t}) \in \dot{G}_\infty$ при $\dot{x} \rightarrow x, \dot{t} \rightarrow t$ ко всем граничным точкам (x, t) из G_∞ .

При $m = 2$ оно служит определением классических решений этой задачи (1)–(3).

Определение 2.2. Характеристика $x = at$, где коэффициент $a > 0$, называется критической для уравнения (1) в первой четверти плоскости G_∞ [16].

Уравнение (1) в плоскости R^2 имеет два различных семейства характеристик

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2, \quad C_1, C_2 \in R, \quad R = (-\infty, +\infty). \quad (4)$$

Критическая характеристика $x = at$ делит первую четверть G_∞ на два множества

$$G_- = \{(x, t) \in G_\infty : x > at > 0\}, \quad G_+ = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x \leq at\}.$$

Из самой постановки смешанной задачи (1)–(3) для гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ вытекают очевидные необходимые требования гладкости

$$\varphi \in C^m(R_+), \quad \psi \in C^{m-1}(R_+), \quad f \in C^{m-2}(G_\infty), \quad \mu \in C^{m-1}(R_+), \quad (5)$$

где $R_+ = [0, +\infty)$. Ниже мы укажем дополнительные требования гладкости на φ, ψ, f и $\mu \in C^m(R_+)$, которые отсутствуют в [6] для случая нехарактеристической косой производной, а у нас они вызваны характеристичностью косой производной в нашем граничном режиме (3). Полагая $t = 0$ в левой и правой частях граничного режима (3) и в первой производной по t от левой и правой частей граничного режима (3) в силу начальных условий (2) при $x = 0$ и уравнения (1) при $x = 0, t = 0$ для второй производной по t соответственно выводим два условия согласования

$$S_0 \equiv \beta(0)[a\varphi'(0) + \psi(0)] + a\gamma(0)\varphi(0) = a\mu(0), \quad (6)$$

$$S_1 \equiv \beta'(0)[a\varphi'(0) + \psi(0)] + \beta(0)[a^2\varphi''(0) + a\psi'(0) + f(0, 0)] + a[\gamma'(0)\varphi(0) + \gamma(0)\psi(0)] = a\mu'(0). \quad (7)$$

В лемме 1 из [4], исходя из гладкости коэффициентов $\beta, \gamma \in C^m(R_+)$, граничного данного $\mu \in C^m(R_+), m \geq 2$, ниже в предположениях теоремы 2.1 и завышенной на «единицу» гладкости функции $u \in \overline{C^{m+1}}(G_\infty)$, дифференцируем l раз по t левую и правую части равенства (3) при $\alpha\alpha'(t) = \beta(t), t \geq 0$, для $l = 0, m$. В результате этого дифференцирования по формуле Лейбница имеем $m + 1$ равенств

$$\sum_{j=0}^l C_l^j \left(\beta^{(l-j)}(t) \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial^{j+1} u(x, t)}{\partial t^{j+1}} + \frac{\partial^{j+1} u(x, t)}{\partial t^j \partial x} \right\} + \gamma^{(l-j)}(t) \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial t^j} \right) \Big|_{x=0} = \mu^{(l)}(t), \quad (8)$$

$$t \geq 0, \quad l = \overline{0, m},$$

где биномиальные коэффициенты $C_l^j = l! / j!(l-j)!$ – число сочетаний из l по j элементов. Благодаря начальным условиям (2) и уравнению (1) из равенств (8) аналогичным образом находим дополнительные к (6), (7) следующие условия согласования

$$S_l \equiv \sum_{j=0}^l C_l^j \left\{ \beta^{(l-j)}(0) [aP_j'(0) + P_{j+1}(0)] + a\gamma^{(l-j)}(0)P_j(0) \right\} = a\mu^{(l)}(0), \quad l = \overline{2, m}, \quad (9)$$

где из [7] функции:

$$P_0(x) = \varphi(x), P_q(x) = \sum_{m=0}^{(q-2)/2} a^{2m} \frac{\partial^{q-2} f(x, t)}{\partial x^{2m} \partial t^{q-2-2m}} \Big|_{t=0} + a^q \varphi^{(q)}(x), \quad \text{если } q - \text{четное}, q \geq 2, \quad (10)$$

$$P_1(x) = \psi(x), P_q(x) = \sum_{m=0}^{(q-3)/2} a^{2m} \frac{\partial^{q-2} f(x, t)}{\partial x^{2m} \partial t^{q-2-2m}} \Big|_{t=0} + a^{q-1} \psi^{(q-1)}(x), \quad \text{если } q - \text{нечетное}, q \geq 3,$$

$P_q'(0)$ – значения первой производной по x от функций P_q при $x = 0$ и $\beta^{(l-j)}(0)$, $\gamma^{(l-j)}(0)$, $\mu^{(l)}(0)$ – значения соответственно производных по t порядков $l-j$ и l от функций β , γ , μ при $t = 0$.

Мы обозначаем количеством штрихов и индексами в круглых скобках над функциями одной переменной соответствующие порядки их или в них обыкновенных производных по этим переменным. В работе [7] сначала для более гладких на «единицу» исходных данных, чем в требованиях (5), условие согласования (9) при $l = m$ преобразовано следующим образом:

$$S_m \equiv \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \left\{ \beta^{(m-j)}(0) [aP_j'(0) + P_{j+1}(0)] + a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0) \right\} + \beta(0) [aP_m'(0) + P_{m+1}(0)] + a\gamma(0)P_m(0) = a\mu^{(m)}(0), \quad m \geq 2. \quad (11)$$

Если m – чётное или нечётное, то ввиду (10) функция $\beta(0) [aP_m'(0) + P_{m+1}(0)]$ соответственно равна

$$\beta(0) \left[\sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i+1} \frac{\partial^{m-1} f(x, t)}{\partial x^{2i+1} \partial t^{m-2-2i}} \Big|_{t=0} + a^{m+1} \varphi^{(m+1)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-2)/2} a^{2i} \frac{\partial^{m-1} f(x, t)}{\partial x^{2i} \partial t^{m-1-2i}} \Big|_{t=0} + a^m \psi^{(m)}(x) \right], \quad m \geq 2, \quad (12)$$

$$\beta(0) \left[\sum_{i=0}^{(m-3)/2} a^{2i+1} \frac{\partial^{m-1} f(x, t)}{\partial x^{2i+1} \partial t^{m-2-2i}} \Big|_{t=0} + a^m \psi^{(m)}(x) + \sum_{i=0}^{(m-1)/2} a^{2i} \frac{\partial^{m-1} f(x, t)}{\partial x^{2i} \partial t^{m-1-2i}} \Big|_{t=0} + a^{m+1} \varphi^{(m+1)}(x) \right], \quad m \geq 3. \quad (13)$$

Непосредственным сравнением слагаемых убеждаемся в совпадении всех частных производных от f соответственно в суммах (12) и (13) с одной и той же суммой

$$K_m(x) \equiv \beta(0) \sum_{j=0}^{m-1} a^j \frac{\partial^{m-1} f(x, t)}{\partial x^j \partial t^{m-1-j}} \Big|_{t=0}, \quad m \geq 2, \quad (14)$$

для чётных и нечётных $m \geq 2$. Справедливость этих неочевидных равенств вытекает из деления максимально возможного индекса суммирования на 2 в (12) и (13), удвоения в них индекса суммирования i и одинакового количества слагаемых m . Легко заметить, что для более гладких на «единицу» исходных данных φ и ψ , чем в требованиях (5), аналогично сумме (14) в суммах (12) и (13) для чётных и нечётных m также совпадают слагаемые с производными от начальных данных φ и ψ :

$$a^m [a\beta(0)\varphi^{(m+1)}(x) + \beta(0)\psi^{(m)}(x)], \quad x \geq 0, \quad m \geq 2. \quad (15)$$

Напоминаем, что все частные производные от функции f в суммах (12) и (13) равны сумме (14) и также совпадают слагаемые с производными от начальных данных φ и ψ в суммах (12) и (13), равные (15) для чётных и нечётных $m \geq 2$.

В работе [4] с помощью нового понятия критериальных значений суммы частных производных порядка $m-1$ от f из [9], [10] модификацией метода характеристик доказана следующая вспомогательная

Теорема 2.1. [4] Пусть в граничном режиме (3) с характеристической косою производной коэффициенты $\beta, \gamma \in C^m(R_+)$, $m \geq 2$, $t \in R_+ = [0, +\infty)$. Смешанная задача (1)–(3) в \dot{G}_∞ имеет единственное и устойчивое по φ, ψ, μ, f гладкое решение и $\in C^m(G_\infty)$, $m \geq 2$, тогда и только тогда, когда верны требования гладкости (5), $\mu \in C^m(R_+)$,

$$F_p(x, t) \equiv \int_0^t f(|x + (-1)^p a(t - \tau)|, \tau) d\tau \in C^{m-1}(G_\infty), \quad p = 1, 2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\Phi_m(t) &\equiv \beta(t)\varphi^{(m)}(at), \quad \Psi_{m-1}(t) \equiv \beta(t)\psi^{(m-1)}(at), \\ \mathfrak{F}_{m-1}(t) &\equiv \beta(t) \left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} \left(\int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \right) \right] \in C^1(\mathbb{R}_+)\end{aligned}\quad (17)$$

и условия согласования (9) для $l = 0, m-1$ и

$$\begin{aligned}S_m &\equiv \sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \{ \beta^{(m-j)}(0) [aP_j'(0) + P_{j+1}(0)] + a\gamma^{(m-j)}(0)P_j(0) \} + \\ &+ K_m(0) + a^m [(\Phi_m)'(0) - \beta'(0)\varphi^{(m)}(0)] + a^{m-1} [(\Psi_{m-1})'(0) - \beta'(0)\psi^{(m-1)}(0)] + \\ &+ a\gamma(0)P_m(0) = a\mu^{(m)}(0), \quad m \geq 2,\end{aligned}\quad (18)$$

где $K_m(0)$ – критериальное значение суммы частных производных порядка $m-1$. Гладким решением $u \in C^m(G_\infty)$ смешанной задачи (1)–(3) в \hat{G}_∞ является функция

$$\begin{aligned}u_-(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (x, t) \in G_-, \end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}u_+(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau + \frac{1}{a\gamma(t-\frac{x}{a})} \left\{ a\mu \left(t - \frac{x}{a} \right) - \right. \\ &- a\beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \varphi'(at-x) - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \psi(at-x) - \beta \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_0^{t-\frac{x}{a}} f(a(t-\tau)-x, \tau) d\tau \left. \right\} - \\ &- \frac{1}{a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \int_0^{a(t-\tau)-x} f(s, \tau) ds d\tau, \quad (x, t) \in G_+.\end{aligned}\quad (20)$$

Доказательство. Подробное доказательство теоремы 2.1 приведено в [4]. В доказательстве теоремы 2.1 необходимость условий согласования (9) следует из того, что в лемме 1 из [4] они получены соответствующим дифференцированием l раз по t граничного режима (3) при $aa(t) = \beta(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, для $l = 0, m-1$, вычислением значений этих производных по t при $t = 0$ и применением понятия критериальных значений $K_m(0)$ и требований гладкости (17), т.е. фактически из постановки и определения гладких решений $u \in C^m(G_\infty)$ задачи (1)–(3).

Определение 2.3. [9, 10] Критериальным значением суммы старших частных производных порядка $m-1$ от правой части f уравнения (1) в условии согласования (11) при $l = m$ для целых $m \geq 2$ называется конечное значение $K_m(0)$ функции (14) при $f(x, t) = f_0(x, t)$ и $x = 0$ для пределов

$$f_0(x, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, t) \in C^{m-2}(G_\infty), \quad f_n(x, t) \in C^m(G_\infty),$$

которые сходятся по указанной в доказательстве теоремы 2.1 норме банахова пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ к функциям $f_0(x, t) \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющим требованиям гладкости $F_p(x, t) \in C^{m-1}(G_\infty)$, $p = 1, 2$, из (16) и $\mathfrak{F}_{m-1}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ из (17) теоремы 2.1.

Банахово пространство $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ и его норма указаны нами ниже в комментариях доказательства теоремы 2.1 из [4].

В статье [4] достаточность m условий согласования (6), (7), (9) частных производных до порядка $l = 0, m-1$ включительно и условия согласования (18) при $l = m$ для непрерывности решения смешанной задачи (1)–(3) на $x = at$ в G_∞ обеспечивается соответствующей леммой 2. В доказательстве леммы 2 используется эквивалентная запись условий согласований (9) и (18) теоремы 2.1 из [10], основанная на записи сумм частных производных от f одной суммой (14) и от φ, ψ одним выражением (15) для всех $m \geq 2$. В лемме 2 достаточность этих условий согласования для m раз непрерывной дифференцируемости функций (19) в G_- и (20) в G_+ на критической характеристике $x = at$ подтверждается непосредственным вычислением и сравнением частных производных от решений (19), (20) при $x = at$. Из формулы (20) при любом $T > 0$ легко выводится непрерывная зависимость решения u_+ в банаховом пространстве $C^m(G_T^+)$ с нормой

$$\|u\|_{C^m(G_T^+)} = \max_{(x,t) \in G_T^+} \sum_{0 \leq i+j \leq m} \left| \partial_x^i \partial_t^j u(x, t) \right|$$

от данных φ, ψ, μ, f в декартовом произведении банаховых пространств $\hat{C}^m[0, X_a] \times \hat{C}^{m-1}[0, X_a] \times C^m[0, T] \times \hat{C}^{m-2}(G^T)$, в которых множества $G_T^+ = G^T \cap G_+, G^T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x + at \leq X_a, 0 \leq t \leq T\}$ и постоянная $X_a = 2aT$, с нормами:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\hat{C}^m[0, X_a]} &= \max_{0 \leq x \leq X_a} \sum_{k=0}^m |\varphi^{(k)}(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} (|(\Phi_m)'(t)| + |\Phi_m(t)|), \\ \|\psi\|_{\hat{C}^{m-1}[0, X_a]} &= \max_{0 \leq x \leq X_a} \sum_{k=1}^{m-1} |\psi^{(k)}(x)| + \max_{0 \leq t \leq T} (|(\Psi_{m-1})'(t)| + |\Psi_{m-1}(t)|), \\ \|\mu\|_{C^m[0, T]} &= \max_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{k=0}^m |\mu^{(k)}(x)| \right), \\ \|f\|_{\hat{C}^{m-2}(G^T)} &= \max_{(x, t) \in G^T} \left(\sum_{0 \leq i+j \leq m-2} \left| \partial_x^i \partial_t^j f(x, t) \right| + \sum_{p=0}^1 \sum_{0 \leq i+j \leq m-1} \left| \partial_x^i \partial_t^j F_p(x, t) \right| \right) + \\ &\quad + \max_{0 \leq t \leq T} (|(\mathfrak{F}_{m-1})'(t)| + |\mathfrak{F}_{m-1}(t)|). \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично в [4] из формулы (19) при любом $T > 0$ выводится непрерывная зависимость (устойчивость по правой части и начальным данным) решения u_- в соответствующем банаховом пространстве $C^m(G_T^-)$ от исходных данных φ, ψ, f в декартовом произведении соответствующих банаховых пространств $C^m(R_+) \times C^{m-1}(R_+) \times \hat{C}^{m-1}(G_T^-)$, где множества $G_T^- = G_T \cap G_-, G_T = \{(x, t) \in G_\infty : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$. В теореме 2.1 все условия согласования (6), (7), (9), (18) выводятся, прежде всего, из граничного режима (3) для решения u_+ . Краткое доказательство теоремы 2.1 из [4] завершено.

Замечание 2.1. [4] При характеристической косой производной в (3) не следует выносить общий множитель $\beta(t - x/a)$ за скобки в формуле классического решения (20) теоремы 2.1 из-за требований гладкости (17) для всех $m \geq 2$. В условиях согласования (9) теоремы 2.1 можно выносить общий множитель $\beta(0)$ за скобки только при $l = 0, m - 1, m \geq 2$. Слагаемые из суммы (15) с завышенной на «единицу» гладкостью начальных данных φ и ψ явно отсутствуют в условии согласования (18), так как по предположениям теоремы 2.1 не существуют производные $\varphi^{(m+1)}$ и $\psi^{(m)}$ по x для $m \geq 2$. Доказательство теоремы 2.1 упрощается при коэффициенте $\gamma(t) \equiv 1, t \in R_+$. Для этого характеристическое граничное условие (3) приводится к соответствующему эквивалентному граничному условию делением его на $\gamma(t) \neq 0, t \in R_+$. Но если коэффициент $\beta(t) \neq \text{const} \times \gamma(t), t \in R_+$, то после деления граничного условия (3) на $\gamma(t) \neq 0, t \in R_+$, эквивалентное характеристическое граничное условие тоже не допускает разделения переменных x и t при решении соответствующей эквивалентной смешанной задачи методом Фурье. Таким образом, в общем случае характеристическая смешанная задача (1)–(3) как для полуограниченной струны на G_∞ , так и для ограниченной струны на $G = [0, d] \times R_+$ явно не решается методом Фурье, т.е. методом периодических продолжений (отражений) по $x \in [0, d]$ начальных данных φ, ψ и правой части f .

Аналогично диссертации [6, с. 27, 53–55] и статье [16] доказываются

Следствие 2.1. Если правая часть f уравнения (1) зависит только от x или t и $f \in C^{m-2}(R_+)$ по x или t , то утверждение теоремы 2.1 верно без требований гладкости (16) на f .

В случае зависимости правой части $f \in C^{m-2}(R_+)$ только от x или только от t интегральные требования гладкости (16) на правую часть выполняются и поэтому эти интегральные требования гладкости (16) отсутствуют в формулировке следствия 2.1.

Следствие 2.2. Теорема 2.1 при $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ даёт критерий корректности и формулу единственного и устойчивого гладкого решения $u \in C^m(G_\infty), m \geq 2$, первой смешанной задачи для уравнения (1) на G_∞ .

Когда коэффициенты $\alpha \equiv \beta \equiv 0, \gamma \neq 0$, тогда в (3) характеристическая косая производная становится граничным режимом первого рода $u(0, t) = \mu(t)/\gamma(t), t > 0$.

Замечание 2.2. Можно показать [6], что если правая часть f зависит от x и t , то для смешанной задачи (1)–(3) указанная в (16) принадлежность интегралов множеству $C^{m-1}(G_\infty)$ от функции $f \in C^{m-2}(G_\infty)$ эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ или $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$. Здесь $C^{(m-1,0)}(G_\infty)$ и $C^{(0,m-1)}(G_\infty)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых $m - 1$ раз по x или непрерывных по x и непрерывных по t или непрерывно дифференцируемых $m - 1$ раз по t функций на G_∞ .

Замечание 2.3. В определении 2.3 для всех чётных m критериальные значения равны

$$\begin{aligned} K_m(0) &\equiv \beta(0) \sum_{j=0}^{m-1} a^j f^{(j, m-1-j)}(0, t) |_{t=0} = \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \beta(0) \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\sum_{s=0}^{(m-2)/2} a^{2s} f^{(2s, m-2-2s)}(0, 0) \right), \quad m = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

где символом $\partial(\Sigma) / \partial \vec{v}$ из статьи [7] обозначено значение производной по вектору $\vec{v} = \{a, 1\}$ при $x = 0$ и $t = 0$ от указанной в (22) суммы частных производных порядка $m - 2$ от функции $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющей требованиям (16), (17).

3. Основная характеристическая смешанная задача. Решается уравнение вынужденных колебаний ограниченной струны

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad a > 0, \quad (x, t) \in Q_n = [0, d] \times [0, d_{n+1}], \quad (23)$$

$$d_n = (n - 1)d / (2a),$$

при начальных условиях

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x, t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, d], \quad d > 0, \quad (24)$$

и зависящих от времени t характеристических граничных режимах

$$[\alpha_i(t)u_t(x, t) + \beta_i(t)u_x(x, t) + \gamma_i(t)u(x, t)]|_{x=\hat{d}_i} = \mu_i(t), \quad t \in [0, d_{n+1}], \quad (25)$$

$$i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – вещественные функции от t , удовлетворяющие условию характеристичности косых производных на концах $\hat{d}_i = (i - 1)d$ струны: $a\alpha_i(t) = (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0, d_{n+1}]$, $i = 1, 2$, т.е. в (25) для любого момента времени $t \geq 0$ косые производные направлены вдоль своего семейства характеристик из (4) уравнений (1) и (23). Определение гладких и классических решений смешанной задачи (23)–(25) аналогично определению 2.1. Кроме критической характеристики $x = at$ в задаче (23)–(25) появляется еще *критическая характеристика* $x = d - at$ для другой вспомогательной смешанной задачи, которая невырожденной заменой независимых переменных $x = d - \tilde{x}$, $t = \tilde{t}$ сводится к вспомогательной смешанной задаче (1)–(3). Первая частная производная u_t по t в граничных условиях (25) означает приращение динамических сил к концам струны $\hat{d}_i = (i - 1)d$, $i = 1, 2$, т.е. при $x = 0$ и $x = d$. В теореме 2.1 указаны явные формулы единственного и устойчивого классического решения и критерий корректности вспомогательной смешанной задачи (1)–(3) на полупрямой. Так же, как в [7], для поиска критерия корректности и явного решения смешанной задачи (23)–(25) с помощью теоремы 2.1 прямоугольники Q_n разбиваются на прямоугольники $G_k = [0, d] \times [d_k, d_{k+1}]$ и делятся характеристиками уравнения (1) на треугольники:

$$\Delta_{3k-2} = \{(x, t) \in G_k : x \geq at_k, \quad x + at_k \leq d, \quad x \in [0, d]\},$$

$$\Delta_{3k-1} = \{(x, t) \in G_k : x \leq at_k, \quad x \in [0, d/2]\},$$

$$\Delta_{3k} = \{(x, t) \in G_k : x + at_k \geq d, \quad x \in [d/2, d]\}, \quad t_k = t - d_k, \quad d_k = (k - 1)d / (2a),$$

$$k = \overline{1, n}.$$

Требуется найти в явном аналитическом виде классические решения $u \in C^2(Q_n)$ характеристической смешанной задачи (23)–(25) и критерий корректности на исходные данные $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, f$ для ее корректности по Адамару: существования, единственности и непрерывной зависимости классического решения от этих исходных данных.

Пусть в характеристических граничных режимах (25) коэффициенты $\beta_i, \gamma_i \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$. Если в смешанной задаче (23)–(25) исходные данные имеют гладкость

$$\varphi \in C^{n+1}[0, d], \quad \psi \in C^n[0, d], \quad f \in C^{n-k}(G_k), \quad (26)$$

$$\mu_i \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}], \quad k = \overline{1, n}, \quad i = 1, 2,$$

то для ее решений $u \in C^{n+1}(G_1)$ в характеристических граничных режимах (25) и их частных производных по t до порядка n включительно полагаем $t = 0$ и вычисляем значения слагаемых с помощью начальных условий (24) при $x = \hat{d}_i$ и уравнения (23) при $t = 0$, $x = \hat{d}_i$, $i = 1, 2$. В результате имеем следующих $2n + 2$ условий согласования

$$\sum_{j=0}^l C_l^j \left\{ \beta_i^{(l-j)}(0) \left[aP_j'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1}P_{j+1}(\hat{d}_i) \right] + a\gamma_i^{(l-j)}(0)P_j(\hat{d}_i) \right\} =$$

$$= a\mu_i^{(l)}(0), \quad l = \overline{0, n}, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

граничных режимов (25), начальных условий (24) и уравнения (23). Здесь функции

$$P_0(x) = \varphi(x), \quad P_q(x) = \sum_{m=0}^{(q-2)/2} a^{2m} \frac{\partial^{q-2} f(x, t)}{\partial x^{2m} \partial t^{q-2-2m}} \Big|_{t=0} + a^q \varphi^{(q)}(x), \quad \text{если } q - \text{четное}, \quad q \geq 2,$$

$$P_1(x) = \psi(x), \quad P_q(x) = \sum_{m=0}^{(q-3)/2} a^{2m} \frac{\partial^{q-2} f(x, t)}{\partial x^{2m} \partial t^{q-2-2m}} \Big|_{t=0} + a^{q-1} \psi^{(q-1)}(x), \quad \text{если } q - \text{нечетное}, \quad q \geq 3,$$

$P_q'(\hat{d}_i)$ – значения первой производной по x от функций P_q при $x = \hat{d}_i$ и $\beta_i^{(l-j)}(0)$, $\gamma_i^{(l-j)}(0)$, $\mu_i^{(l)}(0)$ – значения соответственно производных по t порядков $l-j$ и l от функций β_i , γ_i , μ_i , $i = 1, 2$, при $t = 0$.

Ниже в теореме 3.1 мы укажем дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости и еще два дополнительных условия согласования на исходные данные φ , ψ , μ_1 , μ_2 , f для существования единственного и устойчивого классического решения характеристической смешанной задачи (23)–(25) на отрезке $[0, d]$ струны.

Методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны из [3] с помощью формулы гладкого решения и критерия корректности по Адамару предыдущей теоремы 2.1 статьи [4] доказывается следующая

Теорема 3.1. Пусть в характеристических граничных режимах (25) коэффициенты

$$\beta_i, \gamma_i \in C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}], d_k = (k-1)d/(2a), k = \overline{1, n},$$

$$a\alpha_i(t) = (-1)^{i+1}\beta_i(t), \gamma_i(t) \neq 0, t \in [0, d_{n+1}], i = 1, 2.$$

Характеристическая смешанная задача (23)–(25) в Q_n имеет единственное и устойчивое по φ , ψ , μ_1 , μ_2 , f классическое решение $u \in C^2(Q_n)$ тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (26),

$$F_{k,p}(x, t) \equiv \int_{d_k}^t f(|d - |d - x - (-1)^p a(t - \tau)||, \tau) d\tau \in C^{n-k+1}(G_k), p = 1, 2, k = \overline{1, n}, \quad (28)$$

$$\Phi_{k,i}(t) = \beta_i(t)\varphi''(\hat{d}_i - (-1)^i at_k), \Psi_{k-1,i}(t) = \beta_i(t)\psi'(\hat{d}_i - (-1)^i at_k),$$

$$\mathfrak{F}_{k-1,i}(t) = \beta_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{d_k}^t f(\hat{d}_i - (-1)^i a(t - \tau), \tau) d\tau \right) \in C^{n-k+1}[d_k, d_{k+1}], \quad (29)$$

$$i = 1, 2, \quad k = \overline{1, n},$$

условия согласования (27) и

$$\sum_{j=0}^n C_{n+1}^j \left\{ \beta_i^{(n-j+1)}(0) \left[aP_j'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1}P_{j+1}(\hat{d}_i) \right] + a\gamma_i^{(n-j+1)}(0)P_j(\hat{d}_i) \right\} + K_{n+1}(\hat{d}_i) +$$

$$+ a^2 \left\{ (-1)^{(i+1)n}(\Phi_{1,i})^{(n)}(0) - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s (-1)^{(i+1)(n+s)} a^s \beta_i^{(n-s)}(0) \varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i) \right\} +$$

$$+ a \left\{ (-1)^{(i+1)n}(\Psi_{0,i})^{(n)}(0) - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s (-1)^{(i+1)(n+s)} a^s \beta_i^{(n-s)}(0) \psi^{(s+1)}(\hat{d}_i) \right\} +$$

$$+ a\gamma_i(0)P_{n+1}(\hat{d}_i) = a\mu_i^{(n+1)}(0), i = 1, 2, \quad (30)$$

где $K_{n+1}(\hat{d}_i)$ – критериальные значения суммы старших частных производных порядка n в условии согласования (27) при $l = n+1$ от функции f соответственно при $x = 0$ и $x = d$, C_n^s – число сочетаний из n элементов по s элементов. Классическим решением $u \in C^2(Q_n)$ смешанной задачи (23)–(25) в Q_n является функция

$$u_{3k-2}(x, t) = \frac{\varphi_k(x + at_k) + \varphi_k(x - at_k)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at_k}^{x+at_k} \psi_k(v) dv +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{d_k}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, (x, t) \in \Delta_{3k-2}, \quad (31)$$

$$u_{3k-1}(x, t) = \frac{\varphi_k(x + at_k) - \varphi_k(at_k - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at_k-x}^{x+at_k} \psi_k(v) dv +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{d_k}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau +$$

$$+ \frac{1}{a\gamma_1(t-\frac{x}{a})} \left\{ a\mu_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) - a\beta_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) \varphi_k'(at_k - x) - \beta_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) \psi_k(at_k - x) - \right.$$

$$\left. - \beta_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) \int_{d_k}^{t-\frac{x}{a}} f(a(t-\tau) - x, \tau) d\tau \right\} - \frac{1}{a} \int_{d_k}^{t-\frac{x}{a}} \int_0^{a(t-\tau)-x} f(s, \tau) ds d\tau, (x, t) \in \Delta_{3k-1}, \quad (32)$$

$$u_{3k}(x, t) = \frac{\varphi_k(x - at_k) - \varphi_k(2d - x - at_k)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at_k}^{2d-x-at_k} \psi_k(v) dv +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2a} \int_{d_k}^t \int_{d-x-a(t-\tau)}^{d-x+a(t-\tau)} f(d-|s|, \tau) ds d\tau + \\
& + \frac{1}{a\gamma_2 \left(t - \frac{d-x}{a}\right)} \left\{ a\mu_2 \left(t - \frac{d-x}{a}\right) - a\beta_2 \left(t - \frac{d-x}{a}\right) \varphi'_k(2d-x-at_k) + \right. \\
& \quad \left. + \beta_2 \left(t - \frac{d-x}{a}\right) \psi_k(2d-x-at_k) + \right. \\
& \quad \left. + \beta_2 \left(t - \frac{d-x}{a}\right) \int_{d_k}^{t - \frac{d-x}{a}} f(2d-x-a(t-\tau), \tau) d\tau \right\} - \\
& - \frac{1}{a} \int_{d_k}^{t - \frac{d-x}{a}} \int_0^{a(t-\tau)-d+x} f(d-s, \tau) ds d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_{3k}, \quad k = \overline{1, n},
\end{aligned} \tag{33}$$

для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ Здесь u_{3k-s} – сужения решения $u \in C^2(Q_n)$ на треугольники Δ_{3k-s} , $s = 0, 1, 2$, локальное время $t_k = t - d_k$ и рекуррентные промежуточные начальные данные:

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= u_{3k-5+i}(x, t)|_{t=d_k}, \quad \psi_k(x) = \partial u_{3k-5+i}(x, t)/\partial t|_{t=d_k}, \quad x \in [(d/2)(i-1), (d/2)i], \\
i &= 1, 2, \quad k = \overline{2, n}, \quad \varphi_1(x) = \varphi(x), \quad \psi_1(x) = \psi(x), \quad x \in [0, d].
\end{aligned} \tag{34}$$

Доказательство. В условии (29) теоремы 3.1 правильно указана переменная $x = \hat{d}_i - (-1)^i at_k$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$, функций φ и ψ . Действительно, когда переменная $t \in [d_k, d_{k+1}]$, тогда при $i = 1$ переменная $x = at_k = a(t - d_k)$, $k = \overline{1, n}$, и $x \in [0, d/2]$. Когда переменная $t \in [d_k, d_{k+1}]$, тогда при $i = 2$ переменная $x = d - at_k = d - a(t - d_k)$, $k = \overline{1, n}$, и $x \in [d/2, d]$. В условиях (30) используется значение производной $dx/dt = (-1)^{i+1}a$, $i = 1, 2$.

Для более гладкого на «единицу» начального смещения $\varphi \in C^{n+2}[0, d]$, чем в (26), по формуле Лейбница производная порядка n от функции $\Phi_{1,i}(t)$ из (29) равна

$$\begin{aligned}
& ((-1)^{i+1}a)^n \beta_i(t) \varphi^{(n+2)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) = \\
& = (\Phi_{1,i})^{(n)}(t) - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s \beta_i^{(n-s)}(t) \varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) ((-1)^{i+1}a)^s, \\
& (\Phi_{1,i})^{(n)}(t) = [\beta_i(t) \varphi''(\hat{d}_i - (-1)^i at)]^{(n)} = \\
& = \sum_{s=0}^n C_n^s \beta_i^{(n-s)}(t) \varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) ((-1)^{i+1}a)^s, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Отсюда выводится представление

$$\begin{aligned}
& ((-1)^{i+1}a)^n \beta_i(t) \varphi^{(n+2)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) = (\Phi_{1,i})^{(n)}(t) - \\
& - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s \beta_i^{(n-s)}(t) \varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) ((-1)^{i+1}a)^s,
\end{aligned}$$

которое при $t = 0$ в силу (15) при $m = n + 1$ применяется нами в корректной записи условия согласования (30) для $\varphi \in C^{n+1}[0, d]$. С более гладкой на «единицу» начальной скоростью $\psi \in C^{n+1}[0, d]$ аналогичным образом вычисляется представление

$$\begin{aligned}
& ((-1)^{i+1}a)^n \beta_i(t) \psi^{(n+1)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) = \\
& = (\Psi_{0,i})^{(n)}(t) - \sum_{s=0}^{n-1} C_n^s \beta_i^{(n-s)}(t) \psi^{(s+1)}(\hat{d}_i - (-1)^i at) ((-1)^{i+1}a)^s,
\end{aligned}$$

которое при $t = 0$ ввиду (15) имеется в условии (30) для $\psi \in C^n[0, d]$ из (26).

Обоснуем утверждение теоремы 3.1 методом математической индукции.

1. На первом этапе доказательства теоремы 3.1 в G_1 методом математической индукции сначала находим формулы (31) и (32) при $k = 1$ единственного классического решения u_1 и u_2 соответственно с необходимыми и достаточными требованиями гладкости (26), (28), (29) при $n = k = 1$ и условиями согласования (27), (30) при $n = 1$, $i = 1$ из теоремы 3.1 путём сужения формул (19) и (20) на треугольники Δ_1 и Δ_2 вместе с необходимыми и достаточными требованиями гладкости (5), (16), (17), $\mu_1, \mu_2 \in C^2[0, d_2]$ и всеми условиями согласования (9), (18) из теоремы 2.1 при $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1$ и $\mu = \mu_1$.

Заметим, что требования гладкости (26), (28), (29) при $n = k = 1, i = 1$ из теоремы 3.1 обеспечивают дважды непрерывную дифференцируемость решения исходной задачи (23)–(25) в замкнутых

треугольниках Δ_1 и Δ_2 , а условия согласования (27), (30) при $n = 1$, $i = 1$ – на их общей стороне $\Delta_1 \cap \Delta_2$, принадлежащей характеристике $x = at$. В теореме 2.1 эта гладкость и согласованность исходных данных задачи необходима (обязательна). В работе [5] показано, что требование

$$\beta_1(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t f(a(t-\tau), \tau) d\tau \right) \in C^1[0, d_2] \quad (35)$$

из (29) при $n = k = 1$, $i = 1$ дает существование конечного следа $\beta_1(0)$ ($\partial f(0, 0)/\partial v_1$) произведения функции β_1 на производную по вектору $v_1 = \{a, 1\}$ от функции f при $x = 0$ и $t = 0$ в условии согласования (30) при $n = 1$, $i = 1$ (см. замечание 2.3).

Чтобы еще раз воспользоваться этой теоремой 2.1 в другой вспомогательной смешанной задаче для полуграниченной струны $] -\infty, d]$ при характеристической косою производной в граничном условии при $x = d$ мы уравнение (23), начальные условия (24) и характеристический граничный режим из (25) при $x = d$ невырожденной заменой переменных $x = d - \tilde{x}$, $t = \tilde{t}$ сводим к эквивалентной смешанной задаче:

$$\tilde{u}_{tt}(\tilde{x}, t) - a^2 u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t) = \tilde{f}(\tilde{x}, t), \quad (\tilde{x}, t) \in \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2, \quad (36)$$

$$\tilde{u}(\tilde{x}, 0) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}), \quad \tilde{u}_t(\tilde{x}, t)|_{t=0} = \tilde{\psi}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in [0, d], \quad (37)$$

$$[\alpha_2(t)\tilde{u}_t(\tilde{x}, t) - \beta_2(t)\tilde{u}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) + \gamma_2(t)\tilde{u}(\tilde{x}, t)]|_{\tilde{x}=0} = \mu_2(t), \quad t \in [0, d_2], \quad (38)$$

где $\tilde{u}(\tilde{x}, t) = u(d - \tilde{x}, t) = u(x, t)$, $\tilde{f}(\tilde{x}, t) = f(d - \tilde{x}, t) = f(x, t)$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(d - \tilde{x}) = \varphi(x)$ и $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(d - \tilde{x}) = \psi(x)$. Применяем формулы (19) и (20) из теоремы 2.1 при $f = \tilde{f}$, $\varphi = \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\psi}$, $\mu = \mu_2$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = -\beta_2$, ($a\alpha_2 \equiv -\beta_2$), $\gamma = \gamma_2$ и соответственно в треугольниках $\tilde{\Delta}_1 = \{(\tilde{x}, t) \in G_1 : \tilde{x} \geq at, \tilde{x} + at \leq d, \tilde{x} \in [0, d]\}$ и $\tilde{\Delta}_2 = \{(\tilde{x}, t) \in G_1 : \tilde{x} \leq at, \tilde{x} \in [0, d/2]\}$ для эквивалентной смешанной задачи (36)–(38) имеем решения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\tilde{x}, t) = & \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{x} + at) + \tilde{\varphi}(\tilde{x} - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{\tilde{x}-at}^{\tilde{x}+at} \tilde{\psi}(v) dv + \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{\tilde{x}-a(t-\tau)}^{\tilde{x}+a(t-\tau)} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(\tilde{x}, t) = & \frac{\tilde{\varphi}(\tilde{x} + at) - \tilde{\varphi}(at - \tilde{x})}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-\tilde{x}}^{\tilde{x}+at} \tilde{\psi}(v) dv + \\ & + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{\tilde{x}-a(t-\tau)}^{\tilde{x}+a(t-\tau)} \tilde{f}(|s|, \tau) ds d\tau + \\ & + \frac{1}{a\gamma_2(t - \frac{\tilde{x}}{a})} \left\{ a\mu_2 \left(t - \frac{\tilde{x}}{a} \right) + a\beta_2 \left(t - \frac{\tilde{x}}{a} \right) \tilde{\varphi}'(at - \tilde{x}) + \beta_2 \left(t - \frac{\tilde{x}}{a} \right) \tilde{\psi}(at - \tilde{x}) + \right. \\ & \left. + \beta_2 \left(t - \frac{\tilde{x}}{a} \right) \int_0^{t - \frac{\tilde{x}}{a}} \tilde{f}(a(t-\tau) - \tilde{x}, \tau) d\tau \right\} - \frac{1}{a} \int_0^{t - \frac{\tilde{x}}{a}} \int_0^{a(t-\tau) - \tilde{x}} \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно требованиям (5), (16), (17) теоремы 2.1 при $m = 2$, т.е. при $n = 1$ в теореме 3.1, так как $m = n + 1$, эти решения будут дважды непрерывно дифференцируемыми соответственно в $\tilde{\Delta}_1$ и $\tilde{\Delta}_2$ тогда и только тогда, когда для \tilde{u}_1 выполняется гладкость:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \in C^2[0, d], \quad \tilde{\psi} \in C^1[0, d], \quad \tilde{f} \in C(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2), \\ \int_0^t \tilde{f}(\tilde{x} + (-1)^p a(t-\tau), \tau) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2), \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (41)$$

и для \tilde{u}_2 гладкость:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} \in C^2[0, d], \quad \tilde{\psi} \in C^1[0, d], \quad \mu_2 \in C^2[0, d_2], \quad \tilde{f} \in C(\tilde{\Delta}_{1,2}), \\ \int_0^t \tilde{f}(|\tilde{x} + (-1)^p a(t-\tau)|, \tau) d\tau \in C^1(\tilde{\Delta}_{1,2}), \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\beta_2(t)\tilde{\varphi}''(at), \quad \beta_2(t)\tilde{\psi}'(at), \quad \beta_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \tilde{f}(a(t-\tau), \tau) d\tau \right) \in C^1(\tilde{\Delta}_{1,2}), \quad (43)$$

$$\tilde{\Delta}_{1,2} = \tilde{\Delta}_1 \cup \tilde{\Delta}_2.$$

В формулах единственного классического решения (39) в $\tilde{\Delta}_1$ и (40) в $\tilde{\Delta}_2$ смешанной задачи (36)–(38) и соответственно требованиях гладкости (41) и (42), (43) делаем обратную замену $\tilde{x} = d - x$, $\tilde{t} = t$, учитываем $\tilde{\varphi}'(\tilde{x}) = -\varphi'(x)$ и приходим к единственному классическому решению u_1 вида (31) при $k = 1$ в Δ_1 и u_3 вида (33) при $k = 1$ в Δ_3 с критериями гладкости (26), (28), (29) при $n = k = 1$, $i = 2$. Условия

согласования (9), (18) из теоремы 2.1 для смешанной задачи (36)–(38) после обратной замены $\tilde{x} = d - x$, $\tilde{t} = t$ переходят в условия согласования (27), (30) при $n = 1$, $i = 2$ из теоремы 3.1, которые нужны для дважды непрерывной дифференцируемости решения смешанной задачи (23)–(25) на общей стороне $\Delta_1 \cap \Delta_3$, принадлежащей характеристике $x + at = d$. Таким образом, формулы (31)–(33) при $k = 1$ единственного классического решения $u \in C^2(G_1)$ характеристической смешанной задачи (23)–(25) в G_1 справедливы вместе с критерием гладкости (26), (28), (29) при $n = k = 1$, $i = 1, 2$, и согласования (27), (30) при $n = 1$, $i = 1, 2$.

В условии согласования (30) при $n = 1$, $i = 2$ конечность произведения $\beta_2(0)f_{v_2}(d, 0)$ функции β_2 на производную по вектору $v_2 = \{a, -1\}$ от функции f при $x = d$ и $t = 0$ следует из требования

$$\beta_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t f(d - a(t - \tau), \tau) d\tau \right) \in C^1[0, d_2] \quad (44)$$

в (29) при $n = k = 1$ и $i = 2$ аналогично случаю $i = 1$ [5] (см. замечание 2.3).

Из формул (31)–(33) при $n = k = 1$ легко выводится непрерывная зависимость классического решения u в банаховом пространстве $C^2(G_1)$ с нормой

$$\|u\|_{C^2(G_1)} = \max_{(x,t) \in G_1} \sum_{0 \leq m+l \leq 2} \left| \partial^{m+l} u(x, t) / \partial x^m \partial t^l \right|$$

от соответствующих данных $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, f$ в декартовом произведении $\hat{C}^2[0, d] \times \hat{C}^1[0, d] \times \hat{C}(G_1) \times C^2[0, d_2]$ соответствующих банаховых пространств с нормами

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\hat{C}^2[0,d]} &= \max_{0 \leq x \leq d} (|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| + |\varphi''(x)|) + \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^2 \{ |(\Phi_{1,i})'(t)| + |\Phi_{1,i}(t)| \}, \\ \|\psi\|_{\hat{C}^1[0,d]} &= \max_{0 \leq x \leq d} (|\psi(x)| + |\psi'(x)|) + \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^2 \{ |(\Psi_{0,i})'(t)| + |\Psi_{0,i}(t)| \}, \\ \|\mu\|_{C^2[0,d_2]} &= \max_{0 \leq t \leq d_2} (|\mu(t)| + |\mu'(t)| + |\mu''(t)|), \\ \|f\|_{\hat{C}(G_1)} &= \max_{(x,t) \in G_1} \left(|f(x, t)| + \sum_{p=0}^1 \sum_{m+l=1}^1 \left| \partial^{m+l} F_{1,p}(x, t) / \partial x^m \partial t^l \right| \right) + \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=1}^2 \{ |(\mathfrak{F}_{0,i})'(t)| + |\mathfrak{F}_{0,i}(t)| \}. \end{aligned} \quad (45)$$

Классическое решение u на G_1 непрерывно в формулах (31) по φ, ψ, f , в (32) по φ, ψ, μ_1, f и в (33) по φ, ψ, μ_2, f при $n = k = 1$ в нормах (45).

2. По методу математической индукции сначала предполагается справедливость рекуррентных формул (31)–(33) и критерия корректности из требований гладкости (26), (28), (29) и условий согласования (27), (30) для существования единственного и устойчивого классического решения $u \in \hat{C}^2(Q_n)$ смешанной задачи (23)–(25) в Q_n такого, что $u \in C^{n+2-k}(G_k)$, $k = 1, n$. Затем метод математической индукции требует убедиться в том, что у смешанной задачи (23)–(25) в Q_{n+1} классическое решение $u \in \hat{C}^2(Q_{n+1})$ такое, что $u \in C^{n+3-k}(G_k)$, $k = 1, n+1$, единственно, устойчиво, выражается формулами (31)–(33) и имеет критерий корректности из требований гладкости (26), (28), (29) и условий согласования (27), (30) при $n+1$ вместо n .

Смешанная задача (23)–(25) в $G_{n+1} = [0, d] \times [d_{n+1}, d_{n+2}]$ с начальными условиями

$$u|_{t=d_{n+1}} = \varphi_{n+1}(x), \quad u_t|_{t=d_{n+1}} = \psi_{n+1}(x), \quad x \in [0, d],$$

заменой переменных $x = \hat{x}$, $t = \hat{t} + d_2$ сводится к эквивалентной смешанной задаче

$$\hat{u}_{tt}(x, \hat{t}) - a^2 \hat{u}_{xx}(x, \hat{t}) = \hat{f}(x, \hat{t}), \quad (x, \hat{t}) \in \hat{G}_n = [0, d] \times [d_n, d_{n+1}], \quad (46)$$

$$\hat{u}(x, \hat{t})|_{\hat{t}=0} = \varphi_{n+1}(x), \quad \hat{u}_t(x, \hat{t})|_{\hat{t}=0} = \psi_{n+1}(x), \quad x \in [0, d], \quad d > 0, \quad (47)$$

$$\left[\hat{\alpha}_i(\hat{t}) \hat{u}_i(x, \hat{t}) + \hat{\beta}_i(\hat{t}) \hat{u}_x(x, \hat{t}) + \hat{\gamma}_i(\hat{t}) \hat{u}(x, \hat{t}) \right] \Big|_{x=\hat{d}_i} = \hat{\mu}_i(\hat{t}), \quad \hat{t} \in [d_n, d_{n+1}], \quad i = 1, 2, \quad (48)$$

где функции $\hat{u}(x, \hat{t}) = u(x, \hat{t} + d_2) = u(x, t)$, $\hat{f}(x, \hat{t}) = f(x, \hat{t} + d_2) = f(x, t)$, $\hat{\mu}_i(\hat{t}) = \mu_i(\hat{t} + d_2) = \mu_i(t)$, $\hat{\alpha}_i(\hat{t}) = \alpha_i(\hat{t} + d_2) = \alpha_i(t)$, $\hat{\beta}_i(\hat{t}) = \beta_i(\hat{t} + d_2) = \beta_i(t)$, $a\hat{\alpha}_i \equiv (-1)^{i+1} \hat{\beta}_i$, $\hat{\gamma}_i(\hat{t}) = \gamma_i(\hat{t} + d_2) = \gamma_i(t)$, $i = 1, 2$. В силу предположения математической индукции смешанная задача (46)–(48) в \hat{G}_n имеет единственное и устойчивое классическое решение $\hat{u} \in C^2(\hat{G}_n)$, которое выражается формулами (31)–(33) при $k = n$ и начальными данными $\varphi_{n+1}, \psi_{n+1}$ вместо φ_n, ψ_n :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{3n-2}(x, \hat{t}) = & \frac{\varphi_{n+1}(x + a\hat{t}_n) + \varphi_{n+1}(x - a\hat{t}_n)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-a\hat{t}_n}^{x+a\hat{t}_n} \psi_{n+1}(v)dv + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{d_n}^{\hat{t}} \int_{x-a(\hat{t}-\tau')}^{x+a(\hat{t}-\tau')} \hat{f}(s, \tau') ds d\tau', \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_{3n-1}(x, \hat{t}) = & \frac{\varphi_{n+1}(x + a\hat{t}_n) - \varphi_{n+1}(a\hat{t}_n - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{a\hat{t}_n-x}^{x+a\hat{t}_n} \psi_{n+1}(v)dv + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{d_n}^{\hat{t}} \int_{x-a(\hat{t}-\tau')}^{x+a(\hat{t}-\tau')} \hat{f}(|s|, \tau') ds d\tau' + \\ & + \frac{1}{a\hat{y}_1(\hat{t} - \frac{x}{a})} \left\{ a\hat{\mu}_1 \left(\hat{t} - \frac{x}{a} \right) - a\hat{\beta}_1 \left(\hat{t} - \frac{x}{a} \right) \varphi'_{n+1}(a\hat{t}_n - x) - \hat{\beta}_1 \left(\hat{t} - \frac{x}{a} \right) \psi_{n+1}(a\hat{t}_n - x) - \right. \\ & \left. - \hat{\beta}_1 \left(\hat{t} - \frac{x}{a} \right) \int_{d_n}^{\hat{t} - \frac{x}{a}} \hat{f}(a(\hat{t} - \tau') - x, \tau') d\tau' \right\} - \frac{1}{a} \int_{d_n}^{\hat{t} - \frac{x}{a}} \int_0^{a(\hat{t}-\tau')-x} \hat{f}(s, \tau') ds d\tau', \end{aligned} \quad (50)$$

$$\hat{t}_n = \hat{t} - d_n,$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_{3n}(x, \hat{t}) = & \frac{\varphi_{n+1}(x - a\hat{t}_n) - \varphi_{n+1}(2d - x - a\hat{t}_n)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-a\hat{t}_n}^{2d-x-a\hat{t}_n} \psi_{n+1}(v)dv + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{d_n}^{\hat{t}} \int_{d-x-a(\hat{t}-\tau')}^{d-x+a(\hat{t}-\tau')} \hat{f}(d - |s|, \tau') ds d\tau' + \\ & + \frac{1}{a\hat{y}_2(\hat{t} - \frac{d-x}{a})} \left\{ a\hat{\mu}_2 \left(\hat{t} - \frac{d-x}{a} \right) - a\hat{\beta}_2 \left(\hat{t} - \frac{d-x}{a} \right) \varphi'_{n+1}(2d - x - a\hat{t}_n) + \right. \\ & \left. + \hat{\beta}_2 \left(\hat{t} - \frac{d-x}{a} \right) \psi_{n+1}(2d - x - a\hat{t}_n) + \right. \\ & \left. + \hat{\beta}_2 \left(\hat{t} - \frac{d-x}{a} \right) \int_{d_n}^{\hat{t} - \frac{d-x}{a}} \hat{f}(2d - x - a(\hat{t} - \tau'), \tau') d\tau' \right\} - \\ & - \frac{1}{a} \int_{d_n}^{\hat{t} - \frac{d-x}{a}} \int_0^{a(\hat{t}-\tau')-d+x} \hat{f}(d - s, \tau') ds d\tau'. \end{aligned} \quad (51)$$

Формулы (49)–(51) после замен $\hat{t} = t - d_2$ и $\tau = \tau' + d_2$ соответственно становятся формулами (31)–(33) при $k = n + 1$ формального решения смешанной задачи (23)–(25) в G_{n+1} . Функции (31)–(33) при $k = n + 1$ очевидно являются дважды непрерывно дифференцируемыми на G_{n+1} в силу дважды непрерывной дифференцируемости решения $\hat{u} \in C^2(\hat{G}_n)$ в прямоугольнике \hat{G}_n и гладкости новых начальных данных $\varphi_{n+1}(x) \in C^2[0, d]$, $\psi_{n+1}(x) \in C^1[0, d]$, так как в (34) они выражаются через единственное классическое решение $u \in C^2(Q_n)$ и его первую частную производную по t при $t = d_{n+1}$. По предположению математической индукции записывается соответствующий критерий корректности из теоремы 3.1 для существования единственного и устойчивого классического решения $\hat{u} \in C^2(\hat{G}_n)$ смешанной задачи (46)–(48) на \hat{G}_n в виде требований гладкости при $k = n$:

$$\varphi \in C^{n+1}[0, d], \quad \psi \in C^n[0, d], \quad \hat{f} \in C(\hat{G}_n), \quad \hat{\mu}_i \in C^2[d_n, d_{n+1}], \quad i = 1, 2, \quad (52)$$

$$F_{n,p}(x, \hat{t}) = \int_{d_n}^{\hat{t}} \hat{f}(|d - |d - x - (-1)^p a(\hat{t} - \tau)||, \tau) d\tau \in C^1(\hat{G}_n), \quad p = 1, 2, \quad (53)$$

$$\Phi_{n,i}(\hat{t}) = \hat{\beta}_i(\hat{t})\varphi''(\hat{d}_i - (-1)^i a\hat{t}_n), \quad \Psi_{n-1,i}(\hat{t}) = \hat{\beta}_i(\hat{t})\psi'(\hat{d}_i - (-1)^i a_n\hat{t}_n),$$

$$\mathfrak{F}_{n-1,i}(\hat{t}) = \hat{\beta}_i(\hat{t}) \left(\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \int_{d_n}^{\hat{t}} \hat{f}(\hat{d}_i - (-1)^i a(\hat{t} - \tau), \tau) d\tau \right) \in C^1[d_n, d_{n+1}], \quad i = 1, 2, \quad (54)$$

и условий согласования (27) и (30) при $n + 1$ вместо n

$$\sum_{j=0}^l C_l^j \left\{ \hat{\beta}_i^{(l-j)}(0) \left[aP_j'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} P_{j+1}(\hat{d}_i) \right] + a\hat{y}_i^{(l-j)}(0) P_j(\hat{d}_i) \right\} = a\hat{\mu}_i^{(l)}(0), \quad l = \overline{0, n+1}, \quad i = 1, 2, \quad (55)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n+1} C_{n+2}^j \left\{ \beta_i^{(n-j+2)}(0) \left[aP_j'(\hat{d}_i) + (-1)^{i+1} P_{j+1}(\hat{d}_i) \right] + a\gamma_i^{(n-j+2)}(0) P_j(\hat{d}_i) \right\} + K_{n+2}(\hat{d}_i) + \\
& + a^2 \left\{ (-1)^{(i+1)(n+1)} (\Phi_{1,i})^{(n+1)}(0) - \sum_{s=0}^n C_{n+1}^s (-1)^{(i+1)(n+1+s)} a^s \beta_i^{(n+1-s)}(0) \varphi^{(s+2)}(\hat{d}_i) \right\} + \\
& + a \left\{ (-1)^{(i+1)(n+1)} (\Psi_{0,i})^{(n+1)}(0) - \sum_{s=0}^n C_{n+1}^s (-1)^{(i+1)(n+1+s)} a^s \beta_i^{(n+1-s)}(0) \psi^{(s+1)}(\hat{d}_i) \right\} + \\
& + a\gamma_i(0) P_{n+2}(\hat{d}_i) = a\mu_i^{(n+2)}(0), \quad i = 1, 2, \tag{56}
\end{aligned}$$

В результате замен $\hat{t} = t - d_2$ и $\tau = \tau' + d_2$ требования гладкости (52)–(54) становятся соответственно требованиями (26), (28), (29) на G_{n+1} при $n + 1$ вместо n и $k = n + 1$, а условия согласования (55), (56) – условиями согласования (27), (30) на Q_{n+1} при $n + 1$ вместо n . Эти требования гладкости (26), (28), (29) обеспечивают гладкость единственного решения $u \in C^{n+3-k}(G_k)$, $k = 1, n + 1$, вида (31)–(33) при $k = n + 1$ смешанной задачи (23)–(25) в треугольниках Δ_{3n+1} , Δ_{3k+2} , Δ_{3n+3} . Условия согласования (27), (30) нужны для гладкости этого решения смешанной задачи (23)–(25) на общих сторонах-характеристиках $x = at_{n+1}$, $x + at_{n+1} = d$, $x \in [0, d]$, этих треугольников.

Убедимся в дважды непрерывной дифференцируемости решения задачи (23)–(25) на общей стороне $t = d_{n+1}$ прямоугольников Q_n и G_{n+1} . Согласно построению рекуррентных начальных условий в (34) на их общей стороне $t = d_{n+1}$ верны равенства

$$\begin{aligned}
u_{3n-2}(x, t)|_{t=d_{n+1}} &= \varphi_{n+1}(x) = u_{3n-2+i}(x, t)|_{t=d_{n+1}}, \\
\partial_t u_{3n-2}(x, t)|_{t=d_{n+1}} &= \psi_{n+1}(x) = \partial_t u_{3n-2+i}(x, t)|_{t=d_{n+1}}
\end{aligned}$$

для $x \in [(d/2)(i-1), (d/2)i]$, $i = 1, 2$. Дифференцируя их соответствующее число раз по x и t и используя уравнение (23), находим следующие значения частных производных:

$$\begin{aligned}
(\partial u_{3n-2}(x, t)/\partial x)|_{t=d_{n+1}} &= \varphi'_{n+1}(x) = (\partial u_{3n-2+i}(x, t)/\partial x)|_{t=d_{n+1}}, \\
(\partial^2 u_{3n-2}(x, t)/\partial t \partial x)|_{t=d_{n+1}} &= \psi'_{n+1}(x) = (\partial^2 u_{3n-2+i}(x, t)/\partial t \partial x)|_{t=d_{n+1}}, \\
(\partial^2 u_{3n-2}(x, t)/\partial t^2)|_{t=d_{n+1}} &= f(x, d_{n+1}) + a^2 \varphi''_{n+1}(x) = (\partial^2 u_{3n-2+i}(x, t)/\partial t^2)|_{t=d_{n+1}}, \\
(\partial^2 u_{3n-2}(x, t)/\partial x^2)|_{t=d_{n+1}} &= \varphi''_{n+1}(x) = (\partial^2 u_{3n-2+i}(x, t)/\partial x^2)|_{t=d_{n+1}}, \\
x &\in [(d/2)(i-1), (d/2)i], \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Они указывают на дважды непрерывную дифференцируемость решений (31)–(33) на общей стороне $t = d_{n+1}$ этих прямоугольников Q_n и G_{n+1} . С помощью формул (31)–(33) нетрудно показать устойчивость классического решения u смешанной задачи (23)–(25) в банаховом пространстве $\hat{C}^2(Q_n)$ с нормой

$$\|u\|_{\hat{C}^2(Q_n)} = \sum_{k=1}^n \max_{(x,t) \in Q_k} \sum_{s+l \leq n+2-k} \left| \partial^{s+l} u(x, t) / \partial x^s \partial t^l \right| \tag{57}$$

по входным данным φ , ψ , μ_1, μ_2 , f в декартовом произведении $\hat{C}^{n+1}[0, d] \times \hat{C}^n[0, d] \times \hat{C}^2[0, d_{n+1}] \times \hat{C}^2(Q_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, банаховых пространств с нормами

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{\hat{C}^{n+1}[0, d]} &= \max_{0 \leq x \leq d} \sum_{s \leq n+1} |d^s \varphi(x) / dx^s| + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n \max_{d_k \leq t \leq d_{k+1}} \sum_{s \leq n-k} |d^s \Phi_{k,i}(t) / dt^s|, \\
\|\psi\|_{\hat{C}^n[0, d]} &= \max_{0 \leq x \leq d} \sum_{s \leq n} |d^s \psi(x) / dx^s| + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^n \max_{d_k \leq t \leq d_{k+1}} \sum_{s \leq n-k} |d^s \Psi_{k-1,i}(t) / dt^s|, \\
\|\mu\|_{\hat{C}^2[0, d_{n+1}]} &= \sum_{k=1}^n \max_{d_k \leq t \leq d_{k+1}} \sum_{l \leq n-k+2} \left| d^l \mu(t) / dt^l \right|, \tag{58} \\
\|f\|_{\hat{C}^2(Q_n)} &= \sum_{k=1}^n \max_{(x,t) \in G_k} \left(\sum_{s+l \leq n-k} \left| \frac{\partial^{s+l} f(x, t)}{\partial x^s \partial t^l} \right| + \sum_{p=0}^1 \sum_{s+l \leq n-k+1} \left| \frac{\partial^{s+l} F_{k,p}(x, t)}{\partial x^s \partial t^l} \right| \right) + \\
&+ \sum_{k=1}^n \max_{d_k \leq t \leq d_{k+1}} \sum_{i=1}^2 \sum_{l \leq n-k} \left| \frac{d^l \mathfrak{F}_{k-1,i}(t)}{dt^l} \right|.
\end{aligned}$$

Итак, теорема 3.1 верна при $n + 1$ вместо n . Доказательство теоремы 3.1 завершено.

Следствие 3.1. Если правая часть f уравнения (23) удовлетворяет (26) и зависит только от x или t , то теорема 3.1 верна без требований гладкости (28) на f .

Если f зависит только от x и $f \in C^{n-1}[0, d]$, т.е. $f \in C^{m-2}[0, d]$, так как $m = n + 1$, или только от t и $f \in C^{n-k}[d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, то гладкость (28) из теоремы 3.1 выполняется.

Замечание 3.1. Можно показать, что если правая часть f уравнения (23) зависит от x и t , то для смешанной задачи (23)–(25) указанная в интегральных требованиях (28) принадлежность интегралов $F_{k,p}(x, t)$ множествам $C^{n-k+1}(G_k)$ от функции f эквивалентна их принадлежности множествам $C^{(n-k+1,0)}(G_k)$ или $C^{(0,n-k+1)}(G_k)$, $k = \overline{1, n}$.

Это следует из очевидных тождеств [6, с. 51]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^t f(|x + (-1)^p a(t - \tau)|, \tau) d\tau \right) = \\ & = \frac{(-1)^p}{a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t f(|x + (-1)^p a(t - \tau)|, \tau) d\tau \right) - f(x, t) \right], \quad p = 1, 2, \end{aligned} \quad (59)$$

для интегральных требований (16) теоремы 2.1. Сначала эти тождества выводятся для более гладких функций $f \in C^m(G_\infty)$. Потом они распространяются предельным переходом по f в норме банахова пространства $\hat{C}^{m-2}(G^T)$ из (21) с правых частей $f \in C^m(G_\infty)$ на правые части $f \in C^{m-2}(G_\infty)$, удовлетворяющие условиям гладкости (16) и (17).

Замечание 3.2. [7] В теореме 3.1 для прямоугольников Q_n с нечётными индексами $n = 1, 3, 5, \dots$ (соответственно в теореме 2.1 для чётной $m = 2, 4, 6, \dots$ гладкости решений, так как $m = n + 1$) критериальные значения из условий согласования (30) равны

$$K_{n+1}(\hat{d}_i) \equiv \beta(0) \sum_{j=0}^n a^j f^{(j, n-j)}(\hat{d}_i, t) |_{t=0} = \sqrt{a^2 + 1} \beta(0) \frac{\partial}{\partial \vec{v}_i} \left(\sum_{s=0}^{(n-1)/2} a^{2s} f^{(2s, n-1-2s)}(\hat{d}_i, 0) \right), \quad i = 1, 2, \quad (60)$$

где символами $\partial(\sum)/\partial \vec{v}_i$ обозначены значения производной по векторам $\vec{v} = \{a, (-1)^{i+1}\}$, $i = 1, 2$, от указанной в (60) суммы частных производных порядка $n - 1$ (гладкости $m - 2$ в (22)) от функции f при $x = 0$, $x = d$ и $t = 0$ (см. требования гладкости (35), (44) для $n = 1$, $i = 1, 2$).

Замечание 3.3. В случае классических решений смешанных задач для уравнения в частных производных начальные условия и граничные режимы естественно понимать не в буквальном смысле, а в смысле непрерывных продолжений соответствующих дифференциальных выражений от классических решений уравнений внутри области на ее границу (см. определение 2.1). Например, для не характеристической смешанной задачи (23)–(25) под начальными условиями (24) понимаются пределы: $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = \varphi(x)$ по обычной норме банахова пространства $C^2[0, d]$ из (57) при $n = 1$ и $\lim_{t \rightarrow 0^+} u_t(x, t) = \psi(x)$ по обычной норме банахова пространства $C^1[0, d]$, где $u \in C^2(G_1)$, $G_1 = [0, d] \times [0, d_2]$ [5]. Если же они характеристические, то для начальных условий (24) эти пределы должны существовать по соответствующим первым двум нормам из (58). В характеристическом случае в зависимости от значения $t \in [d_k, d_{k+1}]$ граничный режим (25) при $x = 0$ означает существование предела

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\beta_1(t)u_t(x, t) + a\beta_1(t)u_x(x, t) + a\gamma_1(t)u(x, t)] = a\mu_1(t)$$

по обычной норме банахова пространства $C^{n-k+2}[d_k, d_{k+1}]$, $k = \overline{1, n}$, т.е. по предпоследней норме банахова пространства $\hat{C}^2[0, d_{n+1}]$ из (58).

Следствие 3.2. Теорема 3.1 при $|\alpha_i(t)| + |\beta_i(t)| \equiv 0$, $\gamma_i(t) \neq 0$, $t \in [0, d_{n+1}]$, $i = 1, 2$, даёт критерий корректности и формулу единственного и устойчивого классического решения $u \in C^2(Q_n)$ первой смешанной задачи для уравнения (23) на Q_n .

Действительно, когда в (25) коэффициенты $\alpha_i \equiv \beta_i \equiv 0$ и $\gamma \neq 0$, $t \in [0, d_{n+1}]$, тогда характеристическая смешанная задача (23)–(25) становится первой смешанной задачей на Q_n для ограниченной струны $[0, d]$ при граничных условиях первого рода

$$u(0, t) = \mu_1(t)/\gamma_1(t) = \vartheta_1(t), \quad u(d, t) = \mu_2(t)/\gamma_2(t) = \vartheta_2(t), \quad t \in [0, d_{n+1}]. \quad (61)$$

В теореме 3.1 каждый раз при последовательном переходе от прямоугольника G_{k+1} к прямоугольнику G_k гладкость (26), (28), (29) исходных данных для решения $u \in C^{n+2-k}(G_k)$, $k = \overline{1, n}$, характеристической смешанной задачи (23)–(25) возрастает на «единицу», начиная с минимальной при $k = n$ на G_n . В первой смешанной задаче без косых производных этот рост гладкости исходных данных φ , ψ , f , ϑ_1 , ϑ_2 при переходе от прямоугольников G_{k+1} к прямоугольникам G_k исчезает вместе с требованиями гладкости (29), так как коэффициенты $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0$ и $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0$.

Из теоремы 3.1 при $k = n$, $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0$ и $\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv 0$ получаем следующую глобальную теорему корректности первой смешанной задачи для классических решений простейшего уравнения колебаний струны из [6, с. 78–79].

Теорема 3.2. [6] *Первая смешанная задача (23), (24), (61) в Q_n имеет единственное и устойчивое по $\varphi, \psi, \vartheta_1, \vartheta_2, f$ классическое решение $u \in C^2(Q_n)$ тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости*

$$\varphi \in C^2[0, d], \psi \in C^1[0, d], f \in C(Q_n), \vartheta_i \in C^2[0, d_{n+1}], i = 1, 2, \\ \int_{d_k}^t f(|d - |d - x - (-1)^p a(t - \tau)||, \tau) d\tau \in C^1(G_k), p = 1, 2, k = \overline{1, n},$$

и условия согласования

$$\varphi(\hat{d}_i) = \vartheta_i(0), \psi(\hat{d}_i) = \vartheta'_i(0), a^2 \varphi''(\hat{d}_i) + f(\hat{d}_i, 0) = \vartheta''_i(0), i = 1, 2.$$

Классическим решением $u \in C^2(Q_n)$ первой смешанной задачи в Q_n является функция

$$u_{3k-2}(x, t) = \frac{\varphi_k(x + at_k) + \varphi_k(x - at_k)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at_k}^{x+at_k} \psi_k(v) dv + \frac{1}{2a} \int_{d_k}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau, (x, t) \in \Delta_{3k-2}, \\ u_{3k-1}(x, t) = \frac{\varphi_k(x + at_k) - \varphi_k(at_k - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at_k-x}^{x+at_k} \psi_k(v) dv + \frac{1}{2a} \int_{d_k}^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|, \tau) ds d\tau + \vartheta_1 \left(t - \frac{x}{a} \right) - \\ - \frac{1}{a} \int_{d_k}^{t-x/a} \int_0^{a(t-\tau)-x} f(s, \tau) ds d\tau, (x, t) \in \Delta_{3k-1}, \\ u_{3k}(x, t) = \frac{\varphi_k(x - at_k) - \varphi_k(2d - x - at_k)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at_k}^{2d-x-at_k} \psi_k(v) dv + \frac{1}{2a} \int_{d_k}^t \int_{d-x-a(t-\tau)}^{d-x+a(t-\tau)} f(d - |s|, \tau) ds d\tau + \\ + \vartheta_2 \left(t - \frac{d-x}{a} \right) - \frac{1}{a} \int_{d_k}^{t-\frac{d-x}{a}} \int_0^{a(t-\tau)-d+x} f(d - s, \tau) ds d\tau, (x, t) \in \Delta_{3k}, k = \overline{1, n}, n = 1, 2, \dots$$

Здесь u_{3k-l} – сужения решения $u \in C^2(Q_n)$ на треугольники Δ_{3k-l} , $l = 0, 1, 2$, локальное время $t_k = t - d_k$ и рекуррентные промежуточные начальные данные из (34).

4. Заключение. В данной работе получен критерий корректности по Адамару характеристической смешанной задачи (23)–(25) на прямоугольниках Q_n , $n = 1, 2, \dots$, для ограниченной струны $[0, d]$ в виде необходимых и достаточных требований гладкости (26), (28), (29) и условий согласования (27), (30) характеристических граничных условий (25) с начальными условиями (24) и уравнением (23) колебаний струны. Полученный критерий корректности обеспечивает существование, единственность и устойчивость по исходным данным $\varphi, \psi, \mu_1, \mu_2, f$ в нормах (57), (58) ее классического решения $u \in C^2(Q_n)$, т. е. дважды непрерывно дифференцируемого на прямоугольниках Q_n , которое более гладкое $u \in C^{n+2-k}(G_k)$ на прямоугольниках G_k , $k = 1, n - 1$, благодаря характеристичности граничных режимов. Явные рекуррентные формулы классического решения этой смешанной задачи такие же, как и в предыдущей работе авторов [7]. Вывод условий согласования (30) использует новое понятие критериальных значений суммы производных порядка n от правой части f уравнения на концах струны. Эти результаты установлены методом вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, который не требует каких-либо явных и также периодических продолжений входных данных смешанных задач.

Список литературы

1. Барановская О.Н., Юрчук Н.И. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косою производной в краевом условии. *Дифференциальные уравнения*. 2009;45(8):1188–1191.
2. Шлапакова Т.С., Юрчук Н.И. Смешанная задача для уравнения колебания ограниченной струны с зависящей от времени производной в краевом условии, направленной по характеристике. *Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1*. 2013;2:84–90.
3. Ломовцев Ф.Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны. *Материалы Международной математической конференции: "Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям"* (7–10 декабря 2015 г.) Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2015;2:74–75.
4. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Гладкие решения смешанной задачи для простейшего уравнения колебаний полуограниченной струны при характеристической первой косою производной на конце. *Вестник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта*. 2023;3(120):20–36.
5. Ломовцев Ф.Е. Необходимые и достаточные условия вынужденных колебаний полуограниченной струны с первой характеристической косою производной в нестационарном граничном условии. *Вестні НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук*. 2016;1:21–27.

6. Новиков Е.Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными. [диссертация]. Минск: БГУ; 2017. 258 с.
7. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах. *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне.* 2019;9(2):56–75.
8. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Достаточные условия корректности смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны с зависящими от времени характеристическими первыми косыми производными на концах. *Материалы Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям: "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019"* (14–17 мая 2019 г.) Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2019;2:27–29.
9. Ломовцев Ф.Е., Точко Т.С. Гладкие решения начально-граничной задачи для уравнения колебаний полуграниченной струны при характеристической первой кривой производной. *Материалы Международной конференции: "Воронежская зимняя математическая школа"* (28 января – 2 февраля 2021 г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ; 2021;195–198.
10. Точко Т.С., Ломовцев Ф.Е. Гладкие решения смешанной задачи для уравнения колебаний струны при характеристической первой кривой производной на полупрямой. *Материалы Международной конференции: "Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXIII»"* (3–9 мая 2022 г.) Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2022;237–239.
11. Точко Т.С., Юрчук Н.И., Ломовцев Ф.Е. О необходимых условиях корректности краевой задачи для уравнения колебания ограниченной струны с зависящими от времени характеристическими первыми косыми производными на концах. *Материалы Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям: "ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ–2019"* (15–18 мая 2018 г.) Минск: Институт математики НАН Беларуси. 2018;2:36–38.
12. Mokrousov S. Mixed problems for the string vibration equation with nonlocal conditions of the general form at the right endpoint and with an inhomogeneous condition at the left endpoint. *Differential equations.* 2017;53(4):509–515.
13. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка. *Математические заметки.* 2022;111(4):540–550.
14. Хромов А.П., Корнев В.В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения. *Труды Института математики и механики. УрО РАН.* 2021;27(4):215–238.
15. Ломов И.С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения в случае существенно несамосопряженного оператора. *Материалы Международной конференции: "Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXXIII»"* (3–9 мая 2020г.) Воронеж: АНО «Наука-Юнипресс»: 2020;124–126.
16. Ломовцев Ф.Е. Метод корректировки пробных решений общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2017;3:38–52.

References

1. Baranovskaya ON., Yurchuk NI. A mixed problem for the string vibration equation with time-dependent oblique derivative in a boundary condition. *Differential Equations.* 2009;45(8):1188–1191. (In Russian)
2. Shlapakova TS., Yurchuk NI. Mixed problem for the vibration equation of a bounded string with time-dependent oblique derivative in the boundary condition, directed by characteristics. *Bulletin of the Belarusian State University. Ser. I.* 2013;2:84–90. (In Russian)
3. Lomovtsev FE. The method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string. *Proceedings of the International mathematical conference: "Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsialnym uravneniyam"* (7–10 dekabrya 2015) Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus: 2015;74–75. (In Russian)
4. Lomovtsev FE., Tochko TS. Smooth solutions to the mixed problem for the simplest oscillation equation of a semi-bounded string with the characteristic first oblique derivative at the end. *Vesnik Vicebskaga dzjarzhawnaga wniwersitjeta.* 2023;3(120):20–36. (In Russian)
5. Lomovtsev FE. Necessary and sufficient conditions for forced vibrations of a semi-bounded string with the first characteristic oblique derivative in the non-stationary boundary condition. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and mathematics series.* 2016;1:21–27. (In Russian)
6. Novikov EN. Mixed problems for the forced oscillation equation of a bounded string under non-stationary boundary conditions with first and second oblique derivatives [dissertation]. Minsk: Belarusian State University. 2017. 258 p. (In Russian)
7. Lomovtsev FE., Tochko TS. Mixed problem for the inhomogeneous oscillation equation of a bounded string for characteristic non-stationary first oblique derivatives at the ends. *Vesnik Grodzenskaga dzjarzhawnaga wniwersitjeta imja Janki Kupaly. Seriya 2. Matjematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naja tjechnika i kiravanne.* 2019;9(2):56–75. (In Russian)
8. Lomovtsev FE., Tochko TS. Sufficient correctness conditions to a mixed problem for the oscillation equation of a bounded string with time-dependent characteristic first oblique derivatives at the ends. *Proceedings of the International mathematical conference: "XIX Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya po differentsial'nym uravneniyam (Erugin'skie chteniya–2019)"* (14–17 maya 2019) Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus: 2019;27–29. (In Russian)

9. Lomovtsev FE., Tochko TS. Smooth solutions to the initial-boundary problem for the vibration equation of a semi-bounded string with the characteristic first oblique derivative. *Proceedings of the International conference: "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola"* (28 yanvarya – 2 fevralya 2021) Voronezh: Voronezh State University Publishing House: 2021;195–198. (In Russian)
10. Tochko TS., Lomovtsev FE. Smooth solutions to the mixed problem for the string oscillation equation with the characteristic first oblique derivative on the half-line. *Proceedings of the International mathematical conference: XXXV Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskije chteniya – XXXIII»* (3-9 maya 2022) Voronezh, State University Publishing House: 2022;237–239. (In Russian)
11. Tochko TS., Yurchuk NI., Lomovtsev FE. On necessary conditions for the correctness of a boundary value problem for the oscillation equation of a bounded string with time-dependent characteristic first oblique derivatives at the ends. *Proceedings of the International mathematical conference: "XVIII Mezhduna- rodnaya nauchnaya konferentsiya po differentsial'nym uravneniyam (Eruginskie chteniya–2018)"* (15–18 maya 2018) Minsk: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus: 2018;36–38. (In Russian)
12. Mokrousov S. Mixed problems for the string vibration equation with nonlocal conditions of the general form at the right endpoint and with an inhomogeneous condition at the left endpoint. *Differential equations*. 2017;53(4):509–515.
13. Kozhanov AI., Dyuzheva AV. Integral analogue of the first initial-boundary value problem for second-order hyperbolic and parabolic equations. *Mathematical Notes*. 2022;111(4): 562–570. (In Russian)
14. Khromov AP, Kornev VV. Divergent series in Fourier method for the wave equation. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*. 2021;27(4):215–238. (In Russian) DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238.
15. Lomov IS. The generalized d'Alembert formula for the telegraph equation in the case of an essentially non-self-adjoint operator. *Proceedings of the International mathematical conference: "Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya: Materialy mezhdunarodnoi konferentsii"* (3-9 maya 2020) Voronezh: Voronezh State University Publishing House: 2020;124–126. (In Russian)
16. Lomovtsev FE. Correction method of test solutions to the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2017;3:38–52. (In Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.01.2024

Поступила после рецензирования 11.03.2024

Принята к публикации 18.03.2024

Received January 29, 2024

Revised March 11, 2024

Accepted March 18, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ломовцев Фёдор Егорович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

Точко (Шлапакова) Татьяна Сергеевна – аспирантка кафедры математической кибернетики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Fedor E. Lomovtsev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Belarusian State University, Minsk, Belarus

Tatyana S. Tochko – Postgraduate Student of the Department of Mathematical Cybernetics, Belarusian State University, Minsk, Belarus

[К содержанию](#)

Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа

Масаева О. Х. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной)

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
olesya.masaeva@yandex.ru

Аннотация. В работе исследуется краевая задача с данными на всей границе для уравнения в частных производных второго порядка в положительном квадранте. Рассматриваемое уравнение содержит дробную производную Римана – Лиувилля по переменной y и обращается в уравнение Лапласа в случае, если порядок дробного дифференцирования устремляется к двум. Доказано существование регулярного решения задачи, приведены интегральное представление и асимптотические свойства для решения. Доказана теорема единственности решения задачи в классе функций, которые имеют непрерывные частные производные первого порядка по x и порядка $\beta - 1$ по y , и дробный интеграл порядка $2 - \beta$, исчезающий на бесконечности.

Ключевые слова: уравнение в частных производных дробного порядка, четверть плоскости, уравнение Лапласа, функция типа Миттаг – Леффлера, функция типа Райта, производная Римана – Лиувилля

Благодарности: Работа выполнена в рамках гос. задания Минобрнауки РФ (проект № FECS-2020-0001).

Для цитирования: Масаева О. Х. 2024. Задача Дирихле в четверти плоскости для обобщенного уравнения Лапласа. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 114–123. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-114-123

Original Research

Dirichlet Problem in a Quarter Plane for the Generalized Laplace Equation

Olesya Kh. Masaeva 

(Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina)

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS,
89A Shortanov St., Nalchik, 360000, Russia
olesya.masaeva@yandex.ru

Abstract. For a second-order partial differential equation we investigate a boundary value problem with data on the entire boundary in the positive quadrant. The considered equation contains the Riemann-Liouville fractional derivative with respect to the variable y and becomes the Laplace equation if the order of fractional derivative is tend to two. For the solution are given the integral representation and asymptotic properties. The existence of the regular solution is proven. The uniqueness theorem is proven in the class of functions that have continuous partial derivatives of first order with respect to x and order $\beta - 1$ with respect to y and a fractional integral of order $2 - \beta$ wich vanish at infinity.

Keywords: Fractional Partial Differential Equation, Quarter Plane, Laplace Equation, Mittag – Leffler Type Function, Wright Type Function, Riemann – Liouville Derivative

Acknowledgements: The work is supported within the framework of the state assignments of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No FECS-2020-0001).

For citation: Masaeva O. Kh. 2024. Dirichlet Problem in a Quarter Plane for the Generalized Laplace Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 114–123. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-114-123

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + D_{0y}^{\beta} u = 0, \quad (1)$$

где $1 < \beta < 2$, $D_{0y}^{\beta} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} D_{0y}^{\beta-2} u(x, y)$ – дробная производная порядка β в смысле Римана – Лиувилля,

$$D_{0y}^{\beta-2} u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^y (y-s)^{1-\beta} u(x, s) ds \quad [1],[2].$$

Уравнение (1) при $\beta = 2$, как следует из определения операторов дробного дифференцирования Римана – Лиувилля, обращается в уравнение Лапласа.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка находят эффективные приложения в математическом моделировании многих процессов в различных областях науки (см. [1, 3, 4] и др.). В работе [4], посвященной разработке модели устойчивого развития региона, отмечается, что в ряде случаев задача поиска производственной функции может быть сведена к решению обобщенного уравнения Лапласа дробного порядка. В работе [5] аналогичное уравнение с регуляризованной дробной производной (Герасимова – Капуто) называется уравнением стационарной супердиффузии.

В работе [6] приводится аналог интеграла Шварца для системы Коши – Римана дробного порядка. В работе [8] изучено уравнение вида $u_{xx} + D_{0y}^\alpha D_{0y}^\beta u = 0$, где α и β из промежутка $(0, 1)$. В случае, когда $\alpha = \beta$, краевые задачи с данными на всей границе для полуплоскости исследовались в работах [9] и [10].

В работах [11] и [12] исследовались уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна [13].

В данной работе мы приведем в явном виде решение задачи Дирихле в положительном квадранте для уравнения (1), докажем теоремы о существовании и единственности решения.

2. Постановка задачи и основные результаты. Регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $y^{2-\beta}u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, D_{0y}^\beta u \in C(\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области Ω .

Задача Дирихле. Найти регулярное решение уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \tag{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-2} u(x, y) = \tau(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{3}$$

где $\tau(x)$ – заданная функция на положительной полуоси $(0, \infty)$, $\tau(0) = 0$.

Теорема 1. Пусть $\tau(x) \in C(0, \infty)$ и ограничена на полуоси $(0, \infty)$. Тогда регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2) и (3), имеет вид:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \tau(t)G(x, y, t)dt, \tag{4}$$

где

$$G(x, y, t) = \frac{y^{\beta-1} \sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s} \right] s^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta, \beta} \left(-y^\beta s^2 \right) ds, \tag{5}$$

$E_{\rho, \mu}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + \mu)}$ – функция типа Миттаг – Леффлера [14].

Прежде чем доказать теорему 1, сформулируем леммы, которые мы будем использовать для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Пусть

$$g(x, y) = \frac{y^{\beta-1} \sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_0^\infty e^{-xs} s^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta, \beta} \left(-y^\beta s^2 \right) ds. \tag{6}$$

Если $x \geq 0, y > 0$, то

$$|g(x, y)| \leq C \frac{y^{\beta-1}}{x^{\frac{\beta}{2}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}}, \tag{7}$$

где C – постоянная.

Доказательство. Положим $x = 0$ в формуле (6)

$$g(0, y) = \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} y^{\beta-1} \int_0^\infty s^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta, \beta} \left(-y^\beta s^2 \right) ds. \tag{8}$$

По формуле 9.42 из работы [15]:

$$\int_0^\infty t^{\delta-1} E_{\xi, \eta}(-\lambda t^\xi) dt = \lambda^{-\frac{\delta}{\xi}} \frac{\Gamma(\frac{\delta}{\xi}) \Gamma(1 - \frac{\delta}{\xi})}{\xi \Gamma(\eta - \frac{\xi \delta}{\xi})}, \tag{9}$$

где $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}, \xi \in (0, 2), \varepsilon > 0, \delta \in (0, \varepsilon)$, если $\eta \neq \xi$ и $\delta \in (0, 2\varepsilon)$, если $\eta = \xi$, из (8) имеем

$$g(0, y) = \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} y^{\frac{\beta}{2}-2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)} = \frac{y^{\frac{\beta}{2}-2} \sin \frac{\pi}{\beta}}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \cos \frac{\pi}{\beta}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{\beta}}{2\Gamma\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)} y^{\frac{\beta}{2}-2}, \tag{10}$$

где $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{\beta}}{2\Gamma(\frac{\beta}{2}-1)} > 0$ для любого $\beta \in (1, 2)$.

Теперь в интеграле (6) сделаем замену $xs = z$. Тогда

$$g(x, y) = \frac{y^{\beta-1} \sin \frac{\pi}{\beta}}{x^{\frac{\beta}{2}+1} \pi} \int_0^{\infty} z^{\frac{\beta}{2}} E_{\beta, \beta} \left(-\frac{y^{\beta} z^2}{x^2} \right) e^{-z} dz. \quad (11)$$

При больших значениях x

$$\int_0^{\infty} E_{\beta, \beta} \left(-\frac{y^{\beta} z^2}{x^2} \right) z^{\frac{\beta}{2}} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\frac{\beta}{2} + 1)}{\Gamma(\beta)}.$$

Тогда из (11) имеем

$$g(x, y) = O\left(\frac{y^{\beta-1}}{x^{\frac{\beta}{2}+1}}\right), \quad x \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Таким образом, из формул (10) и (12) заключаем справедливость оценки (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть

$$\frac{2}{\beta} - 1 < \mu < \frac{2}{\beta} + 3. \quad (13)$$

$$g_x''(x, y) = \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} y^{\beta-1} \int_0^{\infty} e^{-xs} s^{\frac{2}{\beta}+2} E_{\beta, \beta}(-y^{\beta} s^2) ds. \quad (14)$$

Если $x \geq 0, y > 0$, то

$$|g_x''(x, y)| \leq C_1 \frac{y^{\beta-1}}{x^{\frac{2}{\beta}+3} + x^{\mu} y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}}, \quad (15)$$

где C_1 – постоянная.

Доказательство. Сделаем замену $s = \sqrt{z} y^{-\frac{\beta}{2}}$,

$$g_x''(x, y) = \frac{y^{-\frac{\beta}{2}-2} \sin \frac{\pi}{\beta}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{y^{\beta/2}} \sqrt{z}} z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} E_{\beta, \beta}(-z) dz. \quad (16)$$

Домножим и разделим подынтегральное выражение на функцию $x^{\mu} y^{-\frac{\beta\mu}{2}} z^{\frac{\mu}{2}}$

$$g_x''(x, y) = y^{-\beta/2-2} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{y^{\beta/2}} \sqrt{z} \right)^{\mu} \left(\frac{x}{y^{\beta/2}} \sqrt{z} \right)^{-\mu} e^{-\frac{x}{y^{\beta/2}} \sqrt{z}} z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}} E_{\beta, \beta}(-z) dz.$$

Принимая во внимание, что функция $t^{\mu} e^{-t}$ достигает своего максимального значения в точке $t = \mu$, из последнего выражения получим

$$|g_x''(x, y)| \leq \frac{\mu^{\mu} y^{\frac{\beta}{2}(\mu-1)-2}}{e^{\mu} x^{\mu}} \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{2}} |E_{\beta, \beta}(-z)| dz. \quad (17)$$

Отметим, что $\int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\beta}-\frac{\mu}{2}} |E_{\beta, \beta}(-z)| dz < \infty$, если выполнено условие (13). Таким образом, для $x \rightarrow 0$ мы можем написать

$$|g_x''(x, y)| \leq C_2 \frac{y^{\frac{\beta}{2}\mu-\frac{\beta}{2}-2}}{x^{\mu}}, \quad (18)$$

C_2 – положительная постоянная.

После замены $z = sy^{\beta}/x^2$ у нас интеграл (16) принимает вид

$$g_x''(x, y) = \frac{y^{\beta-1}}{x^{3+2/\beta}} \int_0^{\infty} s^{1/2+1/\beta} e^{-\sqrt{s}} E_{\beta, \beta}(-sy^{\beta} x^{-2}) ds.$$

Следовательно, при $x \rightarrow \infty$

$$g_x''(x, y) = O\left(\frac{y^{\beta-1}}{x^{3+\frac{2}{\beta}}}\right). \quad (19)$$

Таким образом, формулы (18) и (19) доказывают справедливость оценки (15). Лемма 2 доказана.
Доказательство теоремы 1. Покажем сначала равномерную сходимость интеграла (4). Так как

$$\frac{y^{\beta-1}}{(x+t)^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}} \leq \frac{y^{\beta-1}}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}},$$

применяя лемму 1, если $|x-t| \geq 0, y > 0$, получаем оценку

$$|G(x, y, t)| \leq |g(|x-t|, y)| + |g(x+t, y)| \leq C_3 \frac{y^{\beta-1}}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}}, \quad (20)$$

Тогда, если $\sup_{0 < x < \infty} |\tau(x)| < C_4$, получим

$$|u(x, y)| \leq C_4 y^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{|\tau(t)| dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}} < C_5 y^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}},$$

где C_5 – постоянная. Тогда

$$\begin{aligned} |u(x, y)| &\leq C_5 y^{\beta-1} \left(\int_0^x + \int_x^{\infty} \right) \frac{dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}} = \\ &= C_5 y^{\beta-1} \int_0^x \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}} + C_5 y^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}} \leq 2C_5 y^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}}. \end{aligned}$$

Интеграл справа можно вычислить [16, стр. 237, 2.2.3(5)]

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z^{\frac{2}{\beta}+1} + y^{\frac{\beta}{2}+1}} = y^{-1} \Gamma\left(\frac{2+2\beta}{2+\beta}\right) \Gamma\left(\frac{2}{2+\beta}\right).$$

Итак, $|u(x, y)| \leq C_6 y^{\beta-2}$, C_6 – положительная постоянная.

Далее найдем дробную производную порядка β от функции u и сравним со второй производной по переменной x , т. е. с функцией u_{xx} . Применяя в формуле (4) оператор D_{0y}^{β} под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned} D_{0y}^{\beta} u &= \int_0^{\infty} \tau(t) D_{0y}^{\beta} G(x, y, t) dt, \\ D_{0y}^{\beta} G(x, y, t) &= \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s}) s^{\frac{2}{\beta}} D_{0y}^{\beta} y^{\beta-1} E_{\beta, \beta}(-s^2 y^{\beta}) ds. \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя формулу дробного дифференцирования функции типа Миттаг – Леффлера [2, с. 15], затем формулу $E_{\rho, \mu}(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + z E_{\rho, \rho+\mu}(z)$, имеем

$$D_{0y}^{\beta} G(x, y, t) = -\frac{y^{\beta-1} \sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_0^{\infty} (e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s}) s^{\frac{2}{\beta}+2} E_{\beta, \beta}(-s^2 y^{\beta}) ds = -G_{xx}(x, y, t). \quad (22)$$

Т. е.

$$D_{0y}^{\beta} u(x, y) + u_{xx}(x, y) = 0. \quad (23)$$

С учетом леммы 2:

$$\begin{aligned} |u_{xx}(x, y)| &\leq \int_0^{\infty} |\tau(t)| |G_{xx}(x, y, t)| dt \leq C_1 y^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{|\tau(t)| dt}{|x-t|^{3+\frac{2}{\beta}} + y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1} |x-t|^{\mu}} \leq \\ &\leq C_7 y^{\beta-1} \left(\int_0^x + \int_x^{\infty} \right) \frac{dt}{|x-t|^{3+\frac{2}{\beta}} + y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1} |x-t|^{\mu}} = \end{aligned}$$

$$= C_7 y^{\beta-1} \int_0^x \frac{dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1} z^\mu + z^{\frac{2}{\beta}+3}} + C_7 y^{\beta-1} \int_0^\infty \frac{dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1} z^\mu + z^{\frac{2}{\beta}+3}} \leq 2C_7 y^{\beta-1} \int_0^\infty \frac{z^{-\mu} dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1} + z^{\frac{2}{\beta}+3-\mu}}. \quad (24)$$

Вычислим интеграл (24), сделаем замену переменной $z^{3+\frac{2}{\beta}-\mu} = s$, μ выберем так, чтобы $\frac{2}{\beta} - 1 < \mu < 1$. Тогда (см. [16, стр. 239, 2.2.4(25)])

$$y^{\beta-1} \int_0^\infty \frac{z^{-\mu} dz}{y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1} + z^{\frac{2}{\beta}+3-\mu}} = \frac{\beta y^{\beta-1}}{(3-\mu)\beta + 2} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{(1-\mu)\beta}{(3-\mu)\beta+2}-1}}{z + y^{(3-\mu)\frac{\beta}{2}+1}} dz = \frac{\pi \beta y^{-2}}{[(3-\mu)\beta + 2] \sin \frac{(1-\mu)\beta}{(3-\mu)\beta+2} \pi},$$

$\sin \frac{(1-\mu)\beta}{(3-\mu)\beta+2} \pi > 0$. Следовательно, $|u_{xx}(x, y)| \leq C_8 y^{-2}$, C_8 – постоянная.

Таким образом, интегралы, полученные двукратным дифференцированием по x и дробным дифференцированием по y под знаком интеграла функции (4), сходятся равномерно вблизи каждой точки $(x, y) \in \Omega$.

Проверим выполнимость краевых условий. Прямой подстановкой (4) в (2) можно убедиться, что выполняется краевое условие (2). Удовлетворяя условию (3) функцию (4), имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^\infty \tau(t) D_{0y}^{\beta-2} G dt = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^\infty \right) \tau(t) D_{0y}^{\beta-2} G dt,$$

где

$$D_{0y}^{\beta-2} G(x, y, t) = \frac{y \sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_0^\infty \left(e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s} \right) s^{2/\beta} E_{\beta,2}(-y^\beta s^2) ds.$$

Сделаем замену $|x-t|s = z$, $ds = \frac{dz}{|x-t|}$, отсюда получим

$$D_{0y}^{\beta-2} G = \frac{y \sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi |x-t|^{\frac{2}{\beta}}} \int_0^\infty \left(e^{-z} - e^{-\frac{(x+t)}{|x-t|} z} \right) z^{2/\beta} E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2 y^\beta}{|x-t|^2} \right) dz. \quad (25)$$

Рассмотрим сначала $\int_0^{x-\varepsilon}$. Сделаем замену $|x-t| = y^{\beta/2} h$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{x-\varepsilon} \tau(t) D_{0y}^{\beta-2} G dt = \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}^{x y^{-\frac{\beta}{2}}} \tau(x - y^{\frac{\beta}{2}} h) h^{-\frac{2}{\beta}-1} \int_0^\infty \left(e^{-z} - e^{-\left(2xy^{-\frac{\beta}{2}}/h-1\right)z} \right) z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2}(-z^2 h^{-2}) dz dh = 0.$$

Теперь рассмотрим интеграл от $x + \varepsilon$ до ∞ .

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x+\varepsilon}^\infty \tau(t) D_{0y}^{\beta-2} G dt &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_{\varepsilon y^{-\frac{\beta}{2}}}^\infty \frac{\tau(x + y^{\frac{\beta}{2}} h)}{h^{\frac{2}{\beta}+1}} \times \\ &\times \int_0^\infty \left(e^{-z} - e^{-\left(2xy^{-\frac{\beta}{2}} h^{-1}+1\right)z} \right) z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2}(-z^2 h^{-2}) dz dh = 0. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \tau(t) D_{0y}^{\beta-2} G dt = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [\tau(t) - \tau(x)] D_{0y}^{\beta-2} G(x, y, t) dt + \tau(x) \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} D_{0y}^{\beta-2} G(x, y, t) dt = I_1 + I_2.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [\tau(t) - \tau(x)] D_{0y}^{\beta-2} G(x, y, t) dt = \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{\beta} y}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{\tau(t) - \tau(x)}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}} \int_0^\infty \left(e^{-z} - e^{-\frac{(x+t)}{|x-t|} z} \right) z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2 y^\beta}{|x-t|^2} \right) dz. \end{aligned}$$

Делая замену $x - t = y^{\frac{\beta}{2}} h$, будем иметь

$$I_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_{-ey^{-\frac{\beta}{2}}}^{\epsilon y^{\frac{\beta}{2}}} \frac{\tau(x - y^{\frac{\beta}{2}} h) - \tau(x)}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}} \int_0^{\infty} \left(e^{-z} - e^{-\left(\frac{2xy}{|h|} - 1\right)z} \right) z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2}{h^2} \right) dz dh = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{y \rightarrow 0} \tau(x) \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} D_{0y}^{\beta-2} G(x, y, t) dt = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{\beta} \tau(x)}{\pi} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \frac{dt}{|x-t|^{\frac{2}{\beta}+1}} \int_0^{\infty} \left(e^{-z} - e^{-\frac{x+t}{|x-t|}z} \right) z^{\frac{2}{\beta}} y E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2 y^{\beta}}{|x-t|^2} \right) dz = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{\beta} \tau(x)}{\pi} \int_{-ey^{-\frac{\beta}{2}}}^{\epsilon y^{\frac{\beta}{2}}} \frac{dt}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}} \int_0^{\infty} \left(e^{-z} - e^{-\left(\frac{2xy}{|h|} - 1\right)z} \right) z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2}{h^2} \right) dz = \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{\beta} \tau(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2}{h^2} \right) dz = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{\beta} \tau(x)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dh}{|h|^{\frac{2}{\beta}+1}} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} \left(-\frac{z^2}{h^2} \right) dz = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{\beta} \tau(x)}{\pi} \int_0^{\infty} dh \int_0^{\infty} e^{-sh} s^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} (-s^2) ds. \end{aligned} \tag{26}$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле (26), будем иметь (см. формулу (9))

$$\int_0^{\infty} dh \int_0^{\infty} e^{-sh} s^{\frac{2}{\beta}} E_{\beta,2} (-s^2) ds = \int_0^{\infty} s^{\frac{2}{\beta}-1} E_{\beta,2} (-s^2) ds = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta})\Gamma(1 - \frac{1}{\beta})}{2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{\beta}}.$$

Отсюда и формулы (26) следует выполнимость условия (3). Таким образом, с учетом (23) заключаем, что функция $u(x, y)$, определенная формулой (4), является регулярным решением задачи (1)-(3).

Замечание 1. При $\beta = 2$ задача (2), (3) переходит в задачу Дирихле

$$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < \infty, \tag{27}$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{28}$$

для уравнения Лапласа в положительном квадранте, а формула (4) – в решение этой задачи.

Действительно, из формулы (5) при $\beta = 2$ имеем

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s} \right) \sin y s ds.$$

Или

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y}{(x-t)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+t)^2 + y^2} \right] = \frac{4xyt}{\pi [(x-t)^2 + y^2][(x+t)^2 + y^2]}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (4) получаем

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi} xy \int_0^{\infty} \frac{\tau(t) t dt}{[(x-t)^2 + y^2][(x+t)^2 + y^2]}. \tag{29}$$

Формула (29) представляет собой решение задачи (27), (28) для уравнения Лапласа [17, с. 428] в области Ω .

Замечание 2. Как следует из доказательства теоремы 1, можно допустить существование конечного числа разрывов первого рода у функции $\tau(x)$ и требовать в этом случае выполнения условия (3) только лишь в точках непрерывности функции $\tau(x)$.

3. Пример. Приведем следующий пример. По формуле (4) получим в первом квадранте функцию, удовлетворяющую уравнению (1), равную нулю при $x = 0$, имеющую дробный интеграл $D_{0y}^{\beta-2}u$, равный 1 на отрезке (a_1, a_2) положительной полуоси и 0 на остальной части этой полуоси:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{y^{\beta-1} \sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} \int_0^\infty E_{\beta, \beta}(-y^\beta s^2) s^{\frac{2}{\beta}} \int_{a_1}^{a_2} \left(e^{-|x-t|s} - e^{-(x+t)s} \right) dt ds = \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{\pi} y^{\beta-1} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^\infty E_{\beta, \beta}(-y^\beta s^2) s^{\frac{2}{\beta}-1} \left(e^{-(x-a_k)s} + e^{-(x+a_k)s} \right) ds, \end{aligned} \quad (30)$$

будем считать, что $x > a_2$.

Далее воспользуемся интегральным представлением функции типа Миттаг – Леффлера [14, с. 127]:

$$E_{\beta, \beta}(-y^\beta s^2) = \frac{\beta^{-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(r, \omega)} \frac{e^{\xi^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{1}{\beta}-1}}}{\xi + y^\beta s^2} d\xi, \quad (31)$$

где $\gamma(\varepsilon, \omega)$ – контур Ханкеля: $\gamma(\varepsilon, \omega) = \{\xi : |\xi| = r, |\arg \xi| \leq \omega\} \cup \{\xi : |\xi| \geq r, \arg \xi = \pm\omega\}$, $\frac{\pi\beta}{2} < \omega \leq \pi$. Подставляя формулу (31) в интеграл (30) и изменяя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{2\beta\pi^2 i} y^{\beta-2} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_{\gamma(r, \omega)} e^{\xi^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2}{\beta}-2}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2} \left(e^{-(x-a_k)\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-(x+a_k)\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s} \right) ds d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Обозначим через

$$v(x, y) = \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{2\beta\pi^2 i} y^{\beta-2} \int_{\gamma(r, \omega)} e^{\xi^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2}{\beta}-2}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2} e^{-x\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s} ds. \quad (33)$$

Вычислим внутренний интеграл в (33). Известно [18, стр. 337, 7], что

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2} e^{-x\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s} ds = \\ &= \frac{\pi}{\sin 2\pi/\beta} \left[\cos \left(\frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}} + \pi/\beta \right) + \frac{x^{2-\frac{2}{\beta}} \xi^{1-\frac{1}{\beta}}}{y^{\beta-1}} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{\Gamma(2m - \frac{2}{\beta} + 3)} \frac{x^{2m} \xi^m}{y^{\beta m}} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Так как $\cos \left(\frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}} + \pi/\beta \right) = \cos \frac{\pi}{\beta} \cos \frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}} - \sin \frac{\pi}{\beta} \sin \frac{x\sqrt{\xi}}{y^{\beta/2}}$, $\cos z = E_{2,1}(-z^2)$, $\sin z = zE_{2,2}(-z^2)$, то из (34)

$$\begin{aligned} \text{получаем } \int_0^\infty \frac{s^{\frac{2}{\beta}-1}}{1+s^2} e^{-x\sqrt{\xi}y^{-\beta/2}s} ds &= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{\beta}} E_{2,1} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \xi \right) - \frac{\pi x \sqrt{\xi}}{2 \cos \frac{\pi}{\beta} y^{\beta/2}} E_{2,2} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \xi \right) + \\ &+ \frac{\pi}{\sin \frac{2}{\beta} \pi} \frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}}{y^{\beta-1}} \xi^{1-\frac{1}{\beta}} E_{2,3-\frac{2}{\beta}} \left(-x^2 y^{-\beta} \xi \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{\sin \frac{\pi}{\beta}}{2\beta\pi^2 i} y^{\beta-2} \int_{\gamma(r, \omega)} e^{\xi^{\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2}{\beta}-2}} \left[\frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{\beta}} E_{2,1} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \xi \right) - \frac{\pi x \sqrt{\xi}}{2 \cos \frac{\pi}{\beta} y^{\beta/2}} E_{2,2} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \xi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{\sin \frac{2}{\beta} \pi} \frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}}{y^{\beta-1}} \xi^{1-\frac{1}{\beta}} E_{2,3-\frac{2}{\beta}} \left(-x^2 y^{-\beta} \xi \right) \right] d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью замены $\xi^{1/\beta} = p$ придем к выражению

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \left[y^{\beta-2} e_{2,\beta}^{1,\beta-1} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{\beta} x y^{\frac{\beta}{2}-2} e_{2,\beta}^{2,\frac{\beta}{2}-1} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \right) + \right.$$

$$+ \frac{x^{2-\frac{2}{\beta}}}{y \cos \frac{\pi}{\beta}} e_{2,\beta}^{3-\frac{2}{\beta},0} \left(-\frac{x^2}{y^\beta} \right) \Big], \tag{35}$$

где $e_{\alpha,\theta}^{\mu,\delta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\delta\pi)} e^t t^{-\delta} E_{\alpha,\mu}(zt^\theta) dt$ – функция типа Райта [2, с. 22]. Как и выше, через $\gamma(\varepsilon, \delta\pi)$ обозначен контур Ханкеля, $\frac{1}{2} < \delta \leq 1, 1 - \delta\theta > \frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, согласно формуле (32) имеем $u(x, y) = \sum_{k=1}^2 (-1)^k [v(x - a_k, y) + v(x + a_k, y)]$, где $v(x, y)$ имеет вид (35).

4. Единственность решения. Справедлива

Теорема 2. Пусть $y^{2-\beta}u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $u_x(x, y), D_{0y}^{\beta-1}u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ и выполнены условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} D_{0y}^{\beta-2}u(x, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \infty, \tag{36}$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} D_{0y}^{\beta-2}u(x, y) = 0, \quad 0 \leq x \leq \infty. \tag{37}$$

Тогда задача (1)–(3) имеет не более одного решения.

Доказательство. Мы покажем, что при условиях теоремы однородная задача (1)–(3) имеет только тривиальное решение. Домножим уравнение (1) на функцию $D_{0y}^{\beta-2}u$ и представим в следующем виде:

$$D_{0y}^{\beta-2}u \cdot Lu \equiv \left(D_{0y}^{\beta-2}u u_x \right)_x - D_{0y}^{\beta-2}u_x u_x + D_{0y}^{\beta-2}u D_{0y}^{\beta}u.$$

Дальнейшие вычисления дают тождество

$$D_{0y}^{\beta-2}u \cdot Lu \equiv \left(D_{0y}^{\beta-2}u \cdot u_x \right)_x + \left(D_{0y}^{\beta-2}u D_{0y}^{\beta-1}u \right)_y - D_{0y}^{\beta-2}u_x u_x - \left(D_{0y}^{\beta-1}u \right)^2.$$

Интегрируя полученное тождество по области $\{(x, y) : \varepsilon < x < a, \delta < y < b\} \subset \Omega$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^a \int_{\delta}^b Lu D_{0y}^{\beta-2}u dx dy &= \int_{\delta}^b \left[D_{0y}^{\beta-2}u(a, y) u_x(a, y) - D_{0y}^{\beta-2}u(\varepsilon, y) u_x(\varepsilon, y) \right] dy + \\ &+ \int_{\varepsilon}^a \left[D_{0y}^{\beta-2}u D_{0y}^{\beta-1}u \Big|_{y=b} - D_{0y}^{\beta-2}u D_{0y}^{\beta-1}u \Big|_{y=\delta} \right] dx - \int_{\varepsilon}^a \int_{\delta}^b \left[D_{0y}^{\beta-2}u_x u_x + \left(D_{0y}^{\beta-1}u \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ получаем

$$\int_0^b D_{0y}^{\beta-2}u(a, y) u_x(a, y) dy + \int_0^a D_{0y}^{\beta-2}u D_{0y}^{\beta-1}u \Big|_{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \left[u_x D_{0y}^{\beta-2}u_x + \left(D_{0y}^{\beta-1}u \right)^2 \right] dx dy = 0. \tag{38}$$

Устремляя a и b к ∞ с учетом условий (36), (37) теоремы будем иметь

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b \left[u_x D_{0y}^{\beta-2}u_x + \left(D_{0y}^{\beta-1}u \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Известно, что оператор дробного интегрирования является положительным [19],

$$\int_0^a f(x) D_{0x}^{\alpha} f(x) dx \geq 0, \quad \alpha < 0,$$

$\int_0^a f(x) D_{0x}^{\alpha} f(x) dx = 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) = 0$. Поэтому из интеграла (38) следует, что u_x и $D_{0y}^{\beta-1}u = 0$. Тогда имеем $u = g(y)$, $g(y) = \frac{y^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)}$. Но $D_{0y}^{\beta-2}g(y) = D_{0y}^{\beta-2} \frac{y^{\beta-2}}{\Gamma(\beta-1)} = 1$, что противоречит краевому условию $\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\beta-2}u = 0$. Следовательно, так как $y^{2-\beta}u \in C(\bar{\Omega})$, получаем $u \equiv 0$ всюду в области Ω . Теорема 2 доказана.

Заключение. В работе рассмотрена задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Римана – Лиувилля. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения рассматриваемой задачи.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит; 2003. 272 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука; 2005. 199 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок; 2008. 512 с.
4. Нахушев А.М. О математических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием. Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2007;9(1):128–137.
5. Dzhafarov R., Vasylyeva N. Bounadary value problems covered by superdiffusion in the right angle: Existence and Regularity. *Journal of Mathematics*. 2018. Article ID 5395124; 29 p.
6. Псху А.В. Аналог формулы Шварца для системы Коши – Римана дробного порядка. *Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XIII "Современные методы в теории краевых задач"*. Воронеж; 2002. с. 127.
7. Мамчуев М.О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик: Издательство Кабардино-Балкарского научного центра РАН; 2013. 200 с.
8. Масаева О.Х. Решение краевой задачи для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022;40(3):53–63.
9. Масаева О.Х. Задача Неймана для обобщенного уравнения Лапласа. *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2018;23(3):83–90.
10. Масаева О.Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с дробной производной. *Челябинский физико-математический журнал*. 2017;2(3):312–322.
11. Богатырева Ф.Т. Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашяна – Нерсесяна. Доклады Адыгской(Черкесской) Международной академии наук. 2015;17(2):17-24.
12. Богатырева Ф.Т. О представлении решения уравнения диффузии с операторами Джрбашяна – Нерсесяна *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022;40(3):16-27.
13. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка *Изв. АН АрмССР*. 1968;3(1):3-28.
14. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука; 1966. 672 с.
15. Pskhu A.V. The Stankovich Integral Transform and Its Applications. Chapter 9. In book "Special functions and analysis of differential equations". New York. Chapman and Hall/CRC. 2020. 370.
16. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. В. 3т. Т.1. Элементарные функции. - 2-е изд. исправ.- М.: Физматлит; 2002. 632 с.
17. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит; 2001. 576 с.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз; 1963. 1108 с.
19. Нахушев А.М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа. *Дифференциальные уравнения*. 1998;34(1):101-109.

References

1. Nakhushhev AM. Drobnoye ischisleniye i ego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow: Fizmatlit Publ.; 2003. 272 p.
2. Pskhu AV. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow: Nauka Publ., 2005. 199 p.
3. Uchaikin VV. Metod drobnykh proizvodnykh [Method of fractional derivatives]. Ulyanovsk: Artichoke Publ.; 2008. 512 p.
4. Nakhushhev AM. O matematicheskikh i informatsionnykh technologiyakh modelirovaniya i upravleniya regional'nyy razvitiyem [On mathematical and information technologies for modeling and managing regional development]. *Adyge Int. Sci. J*. 2007;9(1):128-137.
5. Dzhafarov R., Vasylyeva N. Bounadary value problems covered by superdiffusion in the right angle: Existence and Regularity. *Journal of Mathematics*. 2018. Article ID 5395124; 29 p.
6. Pskhu AV. Analog formuly Shvartsa dlya systemy Koshi-Rimana drobnogo poryadka [An analogue of the Schwartz formula for the Cauchy-Riemann system of fractional order] *Sovremennyye metody v teorii granichnykh zadach [Modern methods in the theory of boundary value problems]: proceedings of the Voronezh Spring Mathematical Schools «Pontryagin Readings - XIII»*. Voronezh; 2002. P. 127.
7. Mamchuev MO. Kraevye zadachi dlya uravneniy i system uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka [Boundary value problems for equations and systems of partial differential equations of fractional order] *Nalchik: Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS Publ.*; 2013. 200 p.

8. Masaeva OKh. Reshenie kraevoy zadachi dly obobschenogo uravneniya Laplasy s drobnoy proizvodnoy [Solution of the boundary problem for the generalized Laplace equation with a fractional derivative]. *Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.* 2022;40(3):53-63.
9. Masaeva OKh. Zadacha Neymana dlya obobschenogo uravneniya Laplasy [Neumann problem for the generalized Laplace equation] *Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.* 2018;23(3):83-90.
10. Masaeva OKh. Zadacha Dirikhle dlya obobschenogo uravneniya Laplasy s drobnoy proizvodnoy [The Dirichlet problem for the generalized Laplace equation with fractional derivative] *Chelyabinskii fiziko-matematicheskii zhurnal [Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal]*. 2017;2(3):312-322.
11. Bogatyreva FT. Kraevaya zadacha dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka s operatorom Dzhrbashyana-Nersesyana [Boundary value problem for a first order partial differential equation with the Dzhrbashyan-Nersesyan operator] *Adyge Int. Sci. J.* 2015; 17(2):17-24.
12. Bogatyreva FT. O predstavlenii resheniya uravneniya diffuzii s operatorami Dzhrbashyana-Nersesyana [On representation of solution of the diffusion equation with Dzhrbashyan-Nersesyan operators]. *Vestn. KRAUNTS. Fiz.-Mat. Nauki.* 2022; 40(3):16-27.
13. Dzhrbashyan MM, Nersesyan AB. Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlya differentsialnykh uravneniy drobnogo poryadka *Изв. АН АрмССР.* 1968;3(1):3-28.
14. Dzhrbashyan MM. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti [Integral transformations and representations of functions in the complex domain]. Moscow: Nauka Publ.; 1966. 672 p.
15. Pskhu AV. The Stankovich Integral Transform and Its Applications. Chapter 9. In book "Special functions and analysis of differential equations". New York. Chapman and Hall/CRC; 2020. 370 p.
16. Prudnikov AP., Brychkov YuA., Marichev OI. Integraly i ryady. Elementarnye funktsii [Integrals and series. Elementary functions]. V. 1. Moscow: Fizmatlit Publ; 2002. 632 p.
17. Polyanin AD, Zaitsev VF. Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. M.: Fizmatlit; 2001. 576 p.
18. Gradshteyn IS, Ryzhik IM. Tablitsi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series and products]. M.: Fizmatgiz; 1963. 1108 p.
19. Nakhushev AM. On the positivity of continuous and discrete differentiation and integration operators that are very important in fractional calculus and in the theory of equations of mixed type. *Differential Equations.* 1998; 34(1):103-112.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.02.2024

Поступила после рецензирования 01.04.2024

Принята к публикации 06.04.2024

Received February 17, 2024

Revised April 1, 2024

Accepted April 6, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Масаева Олеся Хажисмеловна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела Дробное исчисление, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Olesya Kh. Masaeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of RAS, Nalchik, Russia

[К содержанию](#)

О повышенной суммируемости решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом

Чечкина А. Г. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. А. Алхутovým)

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова,

Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1

Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН,

Россия, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112

chekchina@gmail.com

Аннотация. В работе рассмотрена задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами в ограниченной липшицевой области. Рассмотрен вопрос об однозначной разрешимости этой задачи при условии, что коэффициенты при производных первого порядка принадлежат классу Лебега. Разобраны случаи различной размерности пространства. Доказана повышенная суммируемость градиента решения, т. е. получены неравенства Боярского – Мейерса.

Ключевые слова: повышенная суммируемость градиента решения, неравенство Боярского – Мейерса, краевая задача Дирихле

Для цитирования: Чечкина А. Г. 2024. О повышенной суммируемости решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 124–135.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-124-135

Original Research

On Increased Summability of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift

Alexandra G. Chechkina 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. A. Alkhutov)

M. V. Lomonosov Moscow State University,

Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991, Russia

Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center

of the Russian Academy of Sciences,

112 Chernyshevskogo St., Ufa, 450008, Russia

chekchina@gmail.com

Abstract. This paper is devoted to study of the Dirichlet problem in bounded Lipschitz domain for linear second order equation with drift (lower terms). Assuming that the coefficients of the first-order derivatives belong to the Lebesgue class, we prove Theorem of existence and uniqueness of solutions to this problem, i.e. we show the unique solvability of this problem. Cases of different dimensions of space are analyzed. We also prove the Boyarsky–Meyers inequality, i.e. we prove higher integrability of the gradient of solutions to the Dirichlet problem in bounded Lipschitz domain for the Laplacian with lower order terms. The proof of main theorems is based on obtaining the inverse Hölder inequality for the gradient of the solution to the Dirichlet problem with subsequent application of the generalized Hering lemma. The Boyarsky – Meyers inequalities are useful for homogenization theory and in asymptotic methods.

Keywords: Higher Integrability of the Solution Gradient, Boyarsky – Meyers Inequality, Dirichlet Boundary Value Problem

For citation: Chechkina A. G. 2024. On Increased Summability of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 124–135. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-124-135

1. Введение. Для многих задач математической физики требуется повышенная суммируемость градиента решения. Впервые этот вопрос был исследован в работе [1], в которой был рассмотрен вопрос о повышенной суммируемости задачи Дирихле для линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами в плоской ограниченной области. Позже в

многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [2]. После этой работы оценки повышенной суммируемости градиента решений общепринято называть оценками типа Мейерса, хотя справедливее было бы их называть оценками Боярского – Мейерса. Оценка Боярского – Мейерса решения задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения p -Лапласа с переменным показателем p , обладающим логарифмическим модулем непрерывности, впервые получена в [3]. Позже в работах [4] и [5] этот результат был усилен и распространен на системы эллиптических уравнений с переменным показателем суммируемости. Отметим, что в статье [3] стимулом изучения оценок Мейерса явилась задача о термисторе, дающей совместное описание потенциала электрического поля и температуры (см. [3], [6] и [7]). Такого же рода системы возникают и в гидромеханике квазиньютоновых жидкостей.

Такого рода оценки важны в теории усреднения задач с быстрой сменой краевых условий, они позволяют улучшить скорость сходимости допредельных решений к решению усредненной задачи (см. аналогичную задачу для оператора без сноса [8], в области, перфорированной вдоль границы, в [9], а также [10], [11] и [12]). Аналогичные оценки для для p -Лапласиана получены в [13].

Введем соболевское пространство функций $W_2^1(D)$, как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в ограниченной области D функций по норме

$$\|v\|_{W_2^1(D)} = \left(\int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса. Настоящая работа посвящена оценкам решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами вида

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \quad f = (f_1, \dots, f_n), f_j \in L_2(D), u \in W_2^1(D), \quad (1)$$

заданного в ограниченной липшицевой области $D \in \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Здесь вектор-функция $b = (b_1, \dots, b_n)$ такова, что либо

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p = n, \text{ если } n > 2, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

либо

$$b_j(x) \in L_p(D), \quad p > 2, \text{ если } n = 2, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Под решением задачи (1) понимается функция $u \in W_2^1(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi dx = \int_D (f \cdot \nabla \varphi) dx \quad (4)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(D)$.

Сформулируем основные утверждения.

Теорема 1. Если $n > 2$, выполнено условие (2) и $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^n$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(n, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx, \quad (5)$$

где C зависит только от δ_0 , размерности пространства n , области D и $\|b\|_{L_n(D)}$.

Теорема 2. Если $n = 2$, выполнено условие (3), $f \in (L_{2+\delta_0}(D))^2$, где $\delta_0 > 0$, то существуют положительные постоянные $\delta(p, \delta_0) < \delta_0$ и C такие, что для решения задачи Дирихле для уравнения (1) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leq C \int_D |f|^{2+\delta} dx, \quad (6)$$

где C зависит только от δ_0 а также от области D и $\|b\|_{L_p(D)}$.

Замечание 1. Теорема остаётся в силе, если вместо оператора Лапласа рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка вида

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u).$$

Здесь $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha^{-1}|\xi|^2 \text{ для почти всех } x \in D \text{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

При этом константа C в (5) или в (6) будет дополнительно зависеть от постоянных эллиптичности матрицы A .

При $n > 2$ будем пользоваться следующим представлением младших коэффициентов $b \in (L_n(D))^n$ рассматриваемого уравнения

$$b = \check{b} + \widehat{b}, \quad \check{b} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{b} \in (L_n(D))^n, \quad \|\widehat{b}\|_{L_n(D)} \leq \theta \quad (8)$$

с достаточно малой постоянной $\theta \in (0, 1)$, которая определяется в дальнейших рассуждениях.

2. Однозначная разрешимость поставленной задачи. В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле в произвольной ограниченной области доказывается для уравнения вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) + b(x) \cdot \nabla u = \operatorname{div}f, \quad f = (f_1, \dots, f_n), f_j \in L_2(D), u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D), \quad (9)$$

где $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, то есть $a_{ij} = a_{ji}$, удовлетворяющая (1), а b удовлетворяет (2) или (3). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Если выполнены условия (2) либо (3) и (1), то задача (1) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ и для ее решения справедлива оценка

$$\|\nabla u\|_{L_2(D)} \leq C\|f\|_{L_2(D)} \quad (10)$$

с постоянной C , зависящей только от коэффициентов оператора \mathcal{L} , области D и размерности пространства n .

Доказательство основано на вспомогательных утверждениях, которые устанавливаются ниже. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором \mathcal{L} , имеющую вид

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_D a\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_D (b \cdot \nabla u)v \, dx \quad (11)$$

и определенную на функциях $u, v \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. Следующую лемму докажем при $n > 2$. Случай $n = 2$ рассматривается аналогично с небольшими изменениями.

Лемма 1. Если коэффициенты оператора \mathcal{L} из (9) удовлетворяют условиям (2) и (1), то

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \frac{\alpha}{2} \int_D |\nabla u|^2 \, dx - C(\alpha, b, n) \int_D u^2 \, dx. \quad (12)$$

Доказательство. В силу условия (1) имеем

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \alpha \int_D |\nabla u|^2 \, dx - \left| \int_D (b \cdot \nabla u)u \, dx \right|. \quad (13)$$

Оценим второе слагаемое в правой части тождества (11). Из (8) имеем

$$\int_D (b \cdot \nabla u)u \, dx = \int_D (\check{b} \cdot \nabla u)u \, dx + \int_D (\widehat{b} \cdot \nabla u)u \, dx. \quad (14)$$

Для первого интеграла из правой части в (14) имеем

$$\left| \int_D (\check{b} \cdot \nabla u)u \, dx \right| \leq C \|\check{b}\|_{L_\infty(D)} \int_D |\nabla u| |u| \, dx$$

и из неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ найдем

$$\left| \int_D (\check{b} \cdot \nabla u)u \, dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 \, dx + C(\varepsilon) \|\check{b}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 \, dx. \quad (15)$$

Второй интеграл в правой части (14) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\left| \int_D (\widehat{b} \cdot \nabla u) u \, dx \right| \leq \| \widehat{b} \|_{L_n(D)} \left(\int_D |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (16)$$

По неравенству Соболева

$$\left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C(n) \left(\int_D |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Отсюда и из (16) с учетом (8) получим

$$\left| \int_D (\widehat{b} \cdot \nabla u) u \, dx \right| \leq C(n) \theta \int_D |\nabla u|^2 \, dx. \quad (18)$$

Из (15) и (18) найдем

$$\left| \int_D (b \cdot \nabla u) u \, dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 \, dx + C(\varepsilon) \| \check{b} \|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 \, dx + C(n) \theta \int_D |\nabla u|^2 \, dx. \quad (19)$$

В итоге, после соответствующего выбора ε и θ из (13) и (19) приходим к оценке (12). Лемма доказана.

Следующую лемму также докажем для простоты изложения при $n > 2$. При $n = 2$ доказательство проводится аналогично.

Лемма 2. Если коэффициенты оператора \mathcal{L} из (9) удовлетворяют условиям (2) и (1), то для фиксированного $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ отображение $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$, где форма $\mathcal{L}(u, v)$ определена в (11), является ограниченным линейным функционалом на $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ и справедлива оценка

$$|\mathcal{L}(u, v)| \leq C(\alpha, b, n) \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)}. \quad (20)$$

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1) имеем

$$\left| \int_D a \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right| \leq \alpha^{-1} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)}. \quad (21)$$

Второе слагаемое формы (11) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\left| \int_D (b \cdot \nabla u) v \, dx \right| \leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \left(\int_D |b|^n \, dx \right)^{2/n} \left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (22)$$

По теореме вложения Соболева (17), где $u = v$, из (21), (22) приходим к (20). Лемма доказана.

Докажем теперь принцип максимума для решений однородной задачи (9). Функция $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ называется субрешением однородной задачи (9) в области D , если

$$\int_D a \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx \leq 0 \quad (23)$$

для любой неотрицательной функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. Аналогично определяется суперрешение $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ в области D , для которого выполнено неравенство

$$\int_D a \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx \geq 0$$

для всех неотрицательных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Следующее утверждение при $n > 2$ можно найти, например, в [14] (теорема 3.1) (см. также [15]).

Лемма 3. Если выполнены условия (2) (или (3)) и (1), функция $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ является субрешением в области D , то

$$\operatorname{ess\,sup}_D u \leq 0. \quad (24)$$

Если же $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ является суперрешением в области D , то

$$\operatorname{ess\,inf}_D u \geq 0. \quad (25)$$

Доказательство. Сначала покажем (24). Доказательство проводим от противного. Предположим, что $\operatorname{ess\,sup}_D u > 0$. Тогда существует такое число k , что $0 < k < \operatorname{ess\,sup}_D u$. Рассмотрим функцию

$v = \max(u - k, 0) = (u - k)^+$, которая принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ и неотрицательна. В силу (23) имеем

$$\int_D a \nabla v \cdot \nabla v \, dx \leq \int_D (b \cdot \nabla v) v \, dx.$$

Перепишем эту оценку в виде

$$\int_{D \cap \{u > k\}} a \nabla u \cdot \nabla u \, dx \leq \int_{D \cap \{u > k\}} (b \cdot \nabla u) v \, dx. \quad (26)$$

Сначала предположим, что $n > 2$. Пользуясь в правой части (26) условием эллиптичности (1) и применяя неравенство Гёльдера в правой части, получим

$$\alpha \int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leq \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |b|^n \, dx \right)^{1/n} \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (27)$$

Поскольку $v \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$, по теореме вложения Соболева

$$\left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C \left(\int_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} = C \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

и из (27) будем иметь

$$\alpha \int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leq C \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |b|^n \, dx \right)^{1/n} \int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx. \quad (28)$$

Если $M = \operatorname{ess\,sup}_D u = \infty$, то первый множитель в правой части (28) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, что приводит к противоречию.

Если же $M < \infty$, то $\nabla u = 0$ почти всюду на множестве $D \cap \{u = M\}$ и оценка (28) приобретает вид

$$\alpha \leq C \left(\int_{M_k} |b|^n \, dx \right)^{1/n},$$

где

$$M_k = \{x \in D : k < u(x) < M\}, \quad \nabla u(x) \neq 0\}.$$

Ясно, что n -мерная мера Лебега множества M_k стремится к нулю при $k \rightarrow M$, в силу чего

$$\left(\int_{M_k} |b|^n \, dx \right)^{1/n} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow M,$$

и мы вновь приходим к противоречию, что и доказывает (24).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $n = 2$. Исходя из (26), пользуясь условием эллиптичности и применяя в правой части (26) неравенство Гёльдера с другими показателями, придем к оценке

$$\alpha \int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \leq \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |b|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_D |v|^{\frac{2p}{p-2}} \, dx \right)^{\frac{p-2}{2p}}, \quad (29)$$

где $p > 2$. При $n = 2$ по теореме вложения Соболева

$$\left(\int_D |v|^{\frac{2p}{p-2}} \, dx \right)^{\frac{p-2}{2p}} \leq C \left(\int_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2} = C \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

и из (29) приходим к оценке

$$\alpha \int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 dx \leq C \left(\int_{D \cap \{u > k\}} |b|^p dx \right)^{1/p} \int_{D \cap \{u > k\}} |\nabla u|^2 dx. \quad (30)$$

Дальнейшие рассуждения, основанные на (30), ничем не отличаются от приведенных выше в случае $n > 2$, что вновь влечет (24).

Оценка (25) доказывается аналогично. Нужно только заметить, что если функция u является суперрешением уравнения, то эта же функция со знаком минус будет субрешением. Лемма доказана.

Следствие 1. При выполнении условий (2) либо (3) и (1) задача Дирихле (9) имеет единственное решение.
Доказательство теоремы 3. Определим для $\sigma > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma u$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (12) леммы следует, что соответствующая оператору \mathcal{L}_σ форма

$$\mathcal{L}_\sigma(u, u) = \int_D a \nabla u \cdot \nabla u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) u dx + \sigma \int_D u^2 dx$$

при достаточно большом $\sigma = \sigma_0(\alpha, b, n, p)$ будет коэрцитивной, то есть

$$\mathcal{L}_\sigma(u, u) \geq \alpha/2 \int_D |\nabla u|^2 dx.$$

Отметим, что при таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u, v) = \int_D a \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v dx + \sigma_0 \int_D uv dx \quad (31)$$

является ограниченной. Это следует из оценки (20), примененной к первым двум слагаемым в правой части (31) и оценки

$$\int_D uv dx \leq \|u\|_{L_2(D)} \|v\|_{L_2(D)} \leq C \|u\|_{W_2^1(D)} \|v\|_{W_2^1(D)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса. Таким образом, оператор \mathcal{L}_{σ_0} является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = W_2^1(D)$.

Пусть H^{-1} – сопряженное пространство к H . Определим оператор $\mathfrak{F}_u : H \rightarrow H^{-1}$ равенством

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_u v = \int_D uv dx, \quad v \in H. \quad (32)$$

Покажем, что отображение \mathfrak{F}_u является компактным. Для этого заметим, что отображение \mathfrak{F}_u можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{F}_u = \mathfrak{F}_1 \circ \mathfrak{F}_2. \quad (33)$$

Здесь $\mathfrak{F}_2 : H \rightarrow L_2(D)$ – естественное вложение. По теореме о компактности вложения Кондрашова – Соболева [17, Теорема 7.22] оператор \mathfrak{F}_2 является компактным, а отображение $\mathfrak{F}_1 : L_2(D) \rightarrow H^{-1}$ определено формулами (32) и (33). Из того, что оператор \mathfrak{F}_1 непрерывен и оператор \mathfrak{F}_2 компактен, следует компактность оператора \mathfrak{F} .

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l – функционал в пространстве H^{-1} , сопряженном к $H = W_2^1(D)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0} u + \sigma_0 \mathfrak{F}_u u = l$. По лемме Лакса – Мильграма (см. [16]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^{-1} на H . Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{F}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \quad (34)$$

Отображение $T = -\sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{F}_u$ в силу компактности \mathfrak{F} также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, теорема 5.3 [17, § 5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (34), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Теперь однозначная разрешимость задачи Зарембы (1) вытекает из следствия к лемме.

Перейдем к доказательству оценки (10). Для этого определим формально сопряженный для \mathcal{L} оператор \mathcal{L}^* формулой

$$\mathcal{L}^* u := \operatorname{div}(a(x) \nabla u) - \operatorname{div}(b(x) u).$$

Поскольку для соответствующих билинейных форм $\mathcal{L}^*(u, v) = \mathcal{L}(v, u)$ при $u, v \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$, оператор \mathcal{L}^* сопряжен оператору \mathcal{L} в гильбертовом пространстве H . Заменяя в предыдущем рассуждении \mathcal{L} на \mathcal{L}^* , мы видим, что уравнение $\mathcal{L}_\sigma u = l$ эквивалентно уравнению

$$u + (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{S}u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}l$$

и сопряженный оператор T^* компактного отображения $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{S}$ (см. (32)) дается формулой

$$T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma)(\mathcal{L}_{\sigma_0}^*)^{-1}\mathfrak{S}.$$

Используя теперь теорему о сжимающих отображениях в банаховом пространстве (см., например, теорема 5.1 [17, §5.1]), мы приходим к следующему утверждению, аналогичному теореме 8.6 из §8.2 монографии [17].

Лемма 4. Если выполнены условия (2) и (1), то существует не более чем счетное дискретное множество $\Sigma \in (-\infty, 0)$ такое, что если $\sigma \notin \Sigma$, то задачи Дирихле для уравнений $\mathcal{L}_\sigma u = l$ и $\mathcal{L}_\sigma^* u = l$ однозначно разрешимы в $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ для произвольного линейного функционала l в пространстве, сопряженном к $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Для доказательства оценки (10) рассмотрим оператор $G_\sigma : H^* \rightarrow H$, определяемый равенством $G_\sigma = \mathcal{L}_\sigma^{-1}$ при $\sigma \notin \Sigma$. Этот оператор естественно назвать оператором Грина задачи Дирихле (9). Используя альтернативу Фредгольма (см., например, теорему 5.3 из [17, §5.3]), заключаем, что этот оператор является ограниченным, и, следовательно, справедлива оценка (10). Теорема 3 доказана.

3. Доказательство основных результатов. Доказательство обеих теорем основано на получении обратного неравенства Гёльдера для градиента решения задачи Дирихле (1) с последующим применением обобщённой леммы Геринга.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $Q_R^{x_0}$ открытый куб с центром в точке x_0 и рёбрами длиной $2R$, где $R \leq 1$, которые параллельны координатным осям. Ниже полагается

$$\int_{Q_R^{x_0}} f dx = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \int_{Q_R^{x_0}} f dx,$$

где $|E|$ обозначает n -мерную меру множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Продолжим функцию u нулём вне области D . Сначала рассмотрим случай, когда $Q_{3R/2}^{x_0} \subset D$ и выберем в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi = (u - \lambda)\eta^2$, где

$$\lambda = \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} u, dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(Q_{3R/2}^{x_0})$ такова, что $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ в $Q_R^{x_0}$ и $|\nabla \eta| \leq CR^{-1}$. Тогда (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx &= \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx - 2 \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta(u - \lambda)\nabla u \cdot \nabla \eta dx + \\ &+ 2 \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} f(u - \lambda)\eta \cdot \nabla \eta dx + \int_{Q_{3R/2}^{x_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части тождества (35), имея в виду, что $n > 2$. Из представления младших коэффициентов (8) вытекает, что

$$\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx = \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\check{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\widehat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx. \quad (36)$$

Для первого интеграла из правой части в (36) имеем

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\check{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq R \|\check{b}\|_{L_\infty(D)} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u| \left| \frac{u - \lambda}{R} \right| \eta^2 dx.$$

Поскольку $R \leq 1$ и $0 \leq \eta \leq 1$, то, пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon > 0$, найдем

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\check{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{b}\|_{L_\infty(D)}^2 R^{-2} \int_{Q_{2R}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \quad (37)$$

Второй интеграл в правой части (36) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\widehat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \\ & \leq R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\widehat{b}|^2 \eta^2 \left(\frac{u - \lambda}{R} \right)^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq R \|\widehat{b}\|_{L_n(D)} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \left| \frac{(u - \lambda)\eta}{R} \right|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \end{aligned} \quad (38)$$

По неравенству Соболева

$$\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \left| \frac{(u - \lambda)\eta}{R} \right|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C(n) \left(\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dy \right)^{1/2} + \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx \right)^{1/2} \right). \quad (39)$$

Поскольку $R \leq 1$, то из (38), (39) и представления (8) найдем

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\widehat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq C(n)\theta \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \left(\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx \right)^{1/2} \right),$$

в силу чего

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\widehat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dy \right| \leq C(n)\theta \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + C(n)\theta \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда по неравенству Коши получим

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\widehat{b} \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq C(n)\theta \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 |\nabla \eta|^2 dx \right). \quad (40)$$

В итоге, из оценок (37) и (40) в силу (36) с учетом выбора срезающей функции η будем иметь

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq (\varepsilon + C(n)\theta) \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + (C(\varepsilon) \|\check{k}\|_{L^\infty(D)}^2 + C(n)\theta)R^{-2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \quad (41)$$

Оценим теперь оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (35). Для второго слагаемого получаем

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta(u - \lambda)\nabla u \cdot \nabla \eta dx \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dy + \frac{C(\varepsilon)}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \quad (42)$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} f(u - \lambda)\eta \cdot \nabla \eta dx \right| \leq \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx + \frac{C}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx. \quad (43)$$

Для четвертого слагаемого выводим

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + C(\varepsilon) \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx. \quad (44)$$

В результате, пользуясь (35), учитывая последние оценки (41)-(44), после соответствующего выбора ε и σ придем к неравенству

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(n, b) \left(\frac{1}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx \right). \quad (45)$$

Далее, из неравенства Пуанкаре – Соболева

$$\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx \right)^{1/2} \leq C(n)R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q}, \quad q = \frac{2n}{n+2}$$

и из (45) найдем

$$\left(\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq C(n, b) \left(\left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right)^{1/2} \right). \quad (46)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $Q_{3R/2}^{y_0} \cap \tilde{F}_{R_0} \neq \emptyset$. Выбирая в интегральном тождестве (4) пробную функцию $\varphi = u\eta^2$ с той же срезающей функцией η , получим

$$\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx = \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} b \cdot \nabla u u \eta^2 dx - 2 \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta u \nabla u \cdot \nabla \eta dx - 2 \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} f u \eta \cdot \nabla \eta dx - \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \eta^2 f \cdot \nabla u dx. \quad (47)$$

Все интегралы в правой части (47) оцениваются точно так же, как и выше вплоть до (45). В результате приходим к оценке (45), в которой $\lambda = 0$. Перепишем эту оценку в виде

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(n, b) \left(\frac{1}{R^2} \int_{Q_{2R}^{y_0}} u^2 dx + \int_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right). \quad (48)$$

Далее заметим, что поскольку $Q_{3R/2}^{x_0} \cap \partial D \neq \emptyset$ и область D липшицева, то $|\mathbb{R}^n \setminus D| \cap \overline{Q_{2R}^{x_0}} \geq c(D)R^n$ для достаточно малого R . Поэтому по неравенству Соболева

$$\left(\int_{Q_{2R}^{x_0}} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(n, D) R \left(\int_{Q_{2R}^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (49)$$

Откуда вновь приходим к оценке (46). Ясно, что оценка (46) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D . Таким образом, оценка (46) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Из (46) оценки, справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q_R^{y_0}$, и обобщённой леммы Геринга (см. [18], [19], а также [20, гл. VII]) вытекает, что в предположении $f \in L_{2+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, имеет место оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{2+\delta}(D)} \leq C(n, b, \delta_0, D) (\|\nabla u\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_{2+\delta}(D)}). \quad (50)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (50) с помощью оценки (10) теоремы 3. Теорема доказана.
Доказательство теоремы 2. Схема рассуждений остается такой же, как и в доказательстве теоремы 1. Поэтому приведем отличительные особенности плоского случая. Отличие состоит только в другом способе оценки первого интеграла в правой части интегральных равенств (35) и (47). Сначала предположим, что $Q_{3R/2}^{y_0} \subset K_{R_0} \setminus \tilde{F}_{R_0}$. Первый интеграл в правой части (35) оценивается по неравенству Гёльдера, в силу которого

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \\ & \leq R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |b|^2 \eta^2 \left(\frac{u - \lambda}{R} \right)^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ & \leq R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |b|^p \eta^p dx \right)^{2/p} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \left| \frac{u - \lambda}{R} \right|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}}. \end{aligned} \quad (51)$$

Далее, по неравенству Пуанкаре – Соболева

$$\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \left| \frac{u - \lambda}{R} \right|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}} \leq C(p) \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{1/q_1}, \quad (52)$$

где $q_1 = \frac{p}{p-1}$. Из (52) и (51), учитывая, что $0 \leq \eta \leq 1$, найдем

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq C(p)R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \|b\|_{L_p(Q_{3R/2}^{y_0})}^2 \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{1/q_1}.$$

По неравенству Коши с $\varepsilon > 0$

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)(u - \lambda)\eta^2 dx \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + \frac{C(p)}{4\varepsilon} R^2 \|b\|_{L_p(Q_{3R/2}^{y_0})}^4 \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{2/q_1}. \quad (53)$$

Оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (35) оцениваются точно так же, как и в (42)–(44). В результате, поскольку $R \leq 1$, то, пользуясь (35), учитывая последние оценки после соответствующего выбора ε , приходим к неравенству

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(b, p) \left(\frac{1}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx + \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{2/q_1} \right). \quad (54)$$

В силу неравенства Пуанкаре – Соболева

$$\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (u - \lambda)^2 dx \right)^{1/2} \leq C(p)R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{1/q_1}, \quad q_1 = \frac{p}{p-1},$$

и из (54) найдем

$$\left(\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \leq C(b, p) \left(\left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} + \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right)^{1/2} \right). \quad (55)$$

Если $Q_{3R/2}^{y_0} \cap \tilde{F}_{R_0} \neq \emptyset$, то первый интеграл в правой части (47) оценивается по неравенству Гёльдера точно так же, как в (51). В результате будем иметь

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)u\eta^2 dx \right| \leq \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx \right)^{1/2} \|b\|_{L_p(Q_{3R/2}^{y_0})}^2 \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |u|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}}.$$

Отсюда и по неравенству Коши с $\varepsilon > 0$ выводим

$$\left| \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (b \cdot \nabla u)u\eta^2 dx \right| \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^2 \eta^2 dx + \frac{C(p, b)}{4\varepsilon} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |u|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p}}. \quad (56)$$

Оставшиеся интегралы в правой части (47) оцениваются так же, как и в случае $n > 2$. В результате, пользуясь (56), после соответствующего выбора ε приходим к оценке

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(b, p) \left(\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |u|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p}} + \frac{1}{R^2} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} u^2 dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |f|^2 dx \right).$$

Поскольку $R \leq 1$, то, применяя неравенство Гёльдера ко второму интегралу в правой части данного неравенства, получим

$$\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^2 dx \leq C(b, p) \left(R^{\frac{4-2p}{p}} \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |u|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{p}} + \int_{Q_{2R}^{y_0}} |f|^2 dx \right). \quad (57)$$

Далее заметим, что поскольку $Q_{3R/2}^{x_0} \cap \partial D \neq \emptyset$ и область D липшицева, то $|(R^n \setminus D) \cap \bar{Q}_{2R}^{x_0}| \geq c(D)R^2$ для достаточно малого R . Первый интеграл в правой части (57) по неравенству Соболева оценивается следующим образом:

$$\left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |u|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}} \leq C(p)R \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Отсюда вновь приходим к оценке (55). Ясно, что оценка (55) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D . Таким образом, оценка (55) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Дальнейшие рассуждения, основанные на использовании упоминавшейся ранее леммы Геринга, ничем не отличаются от приведенных выше. Из (55) и обобщенной леммы Геринга приходим к оценке (50), в которой постоянные C и δ дополнительно зависят от p . Оцениваем первое слагаемое в правой части (50) с помощью оценки (10) теоремы 3. Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. *Математический сборник*. 1957;43(85)4:451–503
2. Meyers N.G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série*. 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics*. 1997;5(1):105–116.
4. Acerbi E., Mingione G. Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacian system. *J. Reine Angew. Math.* 2005;584:117–148.
5. Diening L., Schwarzacher S. Global gradient estimates for the $p(\cdot)$ -Laplacian. *Nonlinear Anal.* 2014;106:70–85.
6. Cimatti G., Prodi G. Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor. *Ann. Mat. Pura Appl* 1988;63:227–236.
7. Howison S.D., Rodrigues J.F., Shillor M. Stationary solutions to the thermistor problem. *Journal Math. Anal. Appl.* 1993;174:573–588.
8. Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона. *Доклады РАН*. 2021;497(2):3–6.
9. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics* 2021;9(23):Art number 3015.
10. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Meyer's Estimate of Solutions to Zarembo Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *CR Mécanique*. 2021;349(2):299–304.
11. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A., Maz'ya V.G. On the Bojarski – Meyers Estimate of a Solution to the Zarembo Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2022;245(2):1197–1211.
12. Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Оценка Боярского – Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера. *Проблемы математического анализа*. 2022;119:107–116.
13. Чечкина А.Г. О задаче Зарембы для p -эллиптического уравнения. *Математический сборник*. 2023;214(9):144–160.
14. Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Лемма о нормальной производной и вокруг неё. *УМН* 2022;77(2):3–68.
15. Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 1965;15(1):189–257.
16. Lax P.D., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. Ann. Math. Studies. vol. 33. Princeton: Princeton University Press; 1954. p. 167–190.
17. Гилбарг Д., Трудингер Н.С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Москва: Наука; 1989.
18. Gehring F.W. The L_p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. *Acta Math.* 1973;130:265–277.
19. Giaquinta M., Modica G. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *Journ. für die reine und angewandte Math.* 1979;311/312:145–169.
20. Skrypnik I.V. Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Translations of Math. Monographs. Vol.139. Providence: AMS; 1994.

References

1. Boyarskii B.V. Generalized solutions of a system of differential equations of first order and of elliptic type with discontinuous coefficients. (Russian) *Mat. Sb. N.S.* 43(85), 1957, P. 451–503. MR0106324
2. Meyers N.G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e série*. 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics*. 1997;5(1):105–116.
4. Acerbi E., Mingione G. Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacian system. *J. Reine Angew. Math.* 2005;584:117–148.
5. Diening L., Schwarzacher S. Global gradient estimates for the $p(\cdot)$ -Laplacian. *Nonlinear Anal.* 2014;106:70–85.
6. Cimatti G., Prodi G. Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor. *Ann. Mat. Pura Appl* 1988;63:227–236.
7. Howison S.D., Rodrigues J.F., Shillor M. Stationary solutions to the thermistor problem. *Journal Math. Anal. Appl.* 1993;174:573–588.

8. Alkhutov YuA., Chechkin GA. Increased Integrability of the Gradient of the Solution to the Zaremba Problem for the Poisson Equation. *Russian Academy of Sciences. Doklady Mathematics*. 2021;103(2):69–71. (Translated from Доклады РАН 2021;497(2):3–6)
9. Chechkin GA. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics* 2021;9(23):Art number 3015.
10. Alkhutov YuA., Chechkin GA. The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *CR Mécanique*. 2021;349(2):299–304.
11. Alkhutov YuA., Chechkin GA., Maz'ya VG. On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 2022;245(2):1197–1211.
12. Chechkin GA., Chechkina TP. The Boyarsky–Meyers Estimate for Divergent Elliptic Operators of the Second Order. Two Spacial Examples. *Journal of Mathematical Sciences, New York, Springer*. 2022;268(4):523–534.
13. Chechkina AG. On the Zaremba Problem for the p -Elliptic Equation. *Sb. Math.* 2023;214(9):1321–1336.
14. Apushkinskaya DE., Nazarov AI. The Normal Derivative Lemma and Surrounding Issues. *Russian Math. Surveys*. 2022;77(2):189–249.
15. Stampacchia G. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 1965;15(1):189–257.
16. Lax PD., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. *Ann. Math. Studies*. vol. 33. Princeton: Princeton University Press; 1954. p. 167–190.
17. Gilbarg D., Trudinger NS. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo: Springer–Verlag; 1983.
18. Gehring FW. The L_p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping. *Acta Math.* 1973;130:265–277.
19. Giaquinta M., Modica G. Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems. *Journ. für die reine und angewandte Math.* 1979;311/312:145–169.
20. Skrypnik IV. Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Translations of Math. Monographs. Vol.139. Providence: AMS; 1994.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.02.2024

Received February 17, 2024

Поступила после рецензирования 01.04.2024

Revised April 1, 2024

Принята к публикации 08.04.2024

Accepted April 8, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Чечкина Александра Григорьевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа, Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Институт математики с компьютерным центром – подразделение Уфимского федерального исследовательского центра РАН, г. Уфа, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexandra G. Chechkina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Institute of Mathematics with a Computer Center – a division of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 537.8
MSC 78A40
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-136-145

Индикация расходимости пучка ультрарелятивистских электронов по дифрагированному переходному излучению

Блажевич С. В.¹, Бронникова М. В.¹, Носков А. В.²

¹ Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

² Московский технический университет связи и информатики,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а
blazh@bsu.edu.ru, mvb12@mail.ru, a.v.noskov@mtuci.ru

Аннотация. Рассматривается дифрагированное переходное излучение (ДПИ), возбуждаемое пучком ультрарелятивистских электронов, проходящих через тонкую монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ. Получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ для случая, когда путь электронов в мишени значительно меньше, чем длина экстинкции рентгеновских фотонов в кристалле. Проведенные численные расчеты выхода фотонов ДПИ в направлении рассеяния Брэгга для различных значений телесного угла регистрации показывают значительное влияние расходимости электронного пучка на выход фотонов. Делается заключение о возможности использования выхода ДПИ, имитированного в заданный телесный угол, для индикации расходимости электронного пучка. Результаты расчетов показывают, что предлагаемая в настоящей работе формула может быть базой для развития метода измерения расходимости пучка релятивистских электронов ультравысокой энергии на основе углового распределения ДПИ.

Ключевые слова: релятивистские электроны, дифрагированное переходное излучение, индикация расходимости электронного пучка

Для цитирования: Блажевич С. В., Бронникова М. В., Носков А. В. 2024. Индикация расходимости пучка ультрарелятивистских электронов по дифрагированному переходному излучению. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 136–145.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-136-145

Original Research

Indication of the Divergence of a Beam of Ultrarelativistic Electrons by a Diffracted Transition Radiation

Sergei V. Blazhevich¹, Marina V. Bronnikova¹, Anton V. Noskov²

¹ Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia

² Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8a Aviamotornaya St., Moscow, 111024, Russia
blazh@bsu.edu.ru, mvb12@mail.ru, a.v.noskov@mtuci.ru

Abstract. The diffracted transition radiation (DTR) produced by a beam of relativistic electrons traversing a thin single-crystal plate in the Laue scattering geometry is considered. We have obtained the expression describing the angular density of the DTR for the case when the path length of the electron in the target is far less than the extinction length of X-rays in the crystal. It is shown that in this case the considered DTR process has the explicit kinematic character. The numerical calculations of the yield of DTR photons in the direction of Bragg scattering performed for various values of the registration solid angle show a significant influence of the electron beam divergence on the photon yield. We have arrived at a conclusion that the measured photon output of DTR radiation emitted in a given solid angle can be used for indication of the electron beam divergence. The model calculations of the electron beam divergence parameters on the base of “measured” yield of DTR photons traversing through a slit collimator are carried out. The results of the calculation show that the proposed in this work formula can be successfully used as a base for the development of methods for measuring the divergence of beams of relativistic ultrahigh-energy electrons based on DTR angular distribution.

Keywords: Relativistic Electrons, Diffracted Transition Radiation, Indication of Electron Beam Divergence

For citation: Blazhevich S. V., Bronnikova M. V., Noskov A. V. 2024. Indication of the Divergence of a Beam of Ultrarelativistic Electrons by a Diffracted Transition Radiation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 136–145. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-136-145

1. Введение. При проведении фундаментальных и прикладных экспериментальных исследований на пучках электронов высокой энергии исследователи сталкиваются с проблемой недостаточности информации о параметрах используемых пучков. Поперечные размеры и расходимость являются основными параметрами пучка. Главную проблему физиков, имеющих дело с пучками электронов в области энергий 100-1000 МэВ, представляют измерения поперечных размеров пучка, поскольку расходимость пучков на современных ускорителях, имеющих поперечные размеры порядка или больше, чем 10 микрон, составляет незначительную (порядка 0.001 мрад) величину.

В настоящее время в стадии разработки находятся два новых электрон-позитронных коллайдера [1, 2]. В этих установках электроны и позитроны будут разгоняться до энергии 250 ГэВ в пучках с очень малыми поперечными размерами (5-100 нм), и измерение расходимости пучка станет главной проблемой. Решение этой проблемы позволит более точно интерпретировать экспериментальные данные как в фундаментальных, так и прикладных исследованиях. Недавно в работах [3, 4] была экспериментально исследована возможность использования для диагностики поперечных размеров пучков релятивистских электронов параметрического рентгеновского излучения (ПРИ). Влияние расходимости пучка электронов на ПРИ в кристалле было экспериментально исследовано в Томске и Токио [5] для электронов с энергией 600 МэВ и 800 МэВ соответственно. Исследователи показали, что ориентационная зависимость PXR, генерируемого релятивистскими электронами в кристалле, чувствительна к расходимости пучка и предложили использовать PXR в качестве простого средства определения угловой расходимости пучков заряженных частиц высокой энергии. В [6] авторы предложили использовать параметрическое рентгеновское излучение, генерируемое в тонких кристаллах, для получения оперативной информации о положении и размерах электронного пучка.

PXR в направлении брэгговского рассеяния сопровождается дифрагированным переходным излучением (ДПИ) [7]-[10], генерируемым на передней границе кристаллической мишени. В [11] разработана динамическая теория когерентного рентгеновского излучения, возбуждаемого расходящимся пучком релятивистских электронов, пересекающих монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ, для общего случая асимметричного отражения электронного поля относительно поверхности мишени.

Выражения для угловой плотности когерентного излучения, полученные в [11], показывают, что фотоны ДПИ, испускаемые пучками электронов с энергиями, превышающими несколько сотен МэВ, имеют значительно более узкое угловое распределение, чем фотоны ПРИ, в результате чего угловая плотность ДПИ становится более чувствительной к расходимости пучка. При дальнейшем увеличении энергии релятивистского электрона угловое распределение фотонов ДПИ, генерируемых им, становится более узким, в то время как ширина углового распределения фотонов ПРИ достигает насыщения и перестает изменяться. При этом максимум угловой плотности ПРИ располагается далеко за пределами угловой области ДПИ, в которой его интенсивность становится во много раз ниже интенсивности ДПИ. Таким образом, при увеличении энергии электронов ДПИ становится единственным подходящим средством для индикации параметров пучков электронов с релятивистским фактором $\gamma > 2000$. Для этой цели важно определить наиболее подходящие характеристики его углового распределения ДПИ. В частности, можно ожидать, что использование интегральных характеристик DTR значительно упростит процесс индикации. В настоящей статье мы демонстрируем возможность использовать для этой цели выход фотонов ДПИ, измеренный в заданном телесном угле (выход коллимированного ДПИ). Дифрагированное переходное излучение релятивистских электронов в монокристаллической мишени исследуется в геометрии рассеяния Лауэ. Рассмотрен случай очень тонкой мишени, когда многократное рассеяние электронов на атомах мишени незначительно. Это важный случай, поскольку он соответствует условиям измерения с очень небольшими искажениями в измеряемых параметрах. Для случая, когда длина пути электрона в мишени существенно меньше длины экстинкции, получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ. Это выражение имеет выраженный кинематический характер.

Следует отметить, что ранее ДПИ при таких малых толщинах мишени никем не рассматривалось. Традиционно ДПИ рассматривалось только для случая, когда длина пути электрона намного превышает длину экстинкции, т. е., когда волны ДПИ в монокристалле подвергаются динамической дифракции [7]-[11]. В этой связи формулы, использованные в [7]-[11], естественно, являются динамическими.

В настоящей статье мы исследуем возможность использования интегрального выхода фотонов коллимированного ДПИ, испускаемого пучком ультрарелятивистских электронов, проходящих через очень тонкую монокристаллическую мишень, для анализа расходимости пучка. Мы предполагаем, что вклад PXR в когерентное излучение в этих условиях пренебрежимо мал, поэтому не будем его рассматривать.

2. Геометрия радиационного процесса. Рассмотрим пучок релятивистских электронов, пересекающих кристаллическую пластину (Рис. 1). Взаимодействие каждого электрона в пучке с мишенью рассматривается как независимое, следовательно, спектрально-угловая плотность излучения, генерируемого электронным пучком, может быть получена путем усреднения выражения для спектрально-угловой плотности излучения, генерируемого отдельным электроном в пучке, по всем его возможным траекториям в мишени.

Для этой цели в выражение для спектрально-угловой плотности ДПИ [11] введена угловая переменная ψ , связывающая вектор скорости электрона (в единицах скорости света в свободном пространстве) с единичным вектором \mathbf{e}_1 оси электронного пучка. Также введена угловая переменная θ_0 , связывающая единичный вектор в направлении \mathbf{n} падающего псевдофотона кулоновского электронного поля с вектором \mathbf{e}_1 , и угловая переменная, связывающая единичный вектор в направлении \mathbf{n}_g дифракции фотонов с единичным вектором \mathbf{e}_1 (которые определяются соотношениями Брэгга: $\mathbf{e}_1 \theta_0 = 0$ и $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B$). Эти соотношения для случая ультррелятивистских электронов и малых значений угловых переменных, описывающих угловые распределения электронов и фотонов, имеют следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \psi, & \mathbf{e}_1 \psi &= 0 \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, & \mathbf{e}_1 \theta_0 &= 0, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \theta, & \mathbf{e}_2 \theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}$ Лоренц-фактор частицы, θ_B – угол рассеяния Брэгга. Угловые переменные раскладываются по компонентам параллельной и перпендикулярной к плоскости Рис. 1:

$$\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}, \quad \theta_0 = \theta_{0\parallel} + \theta_{0\perp}, \quad \psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}.$$

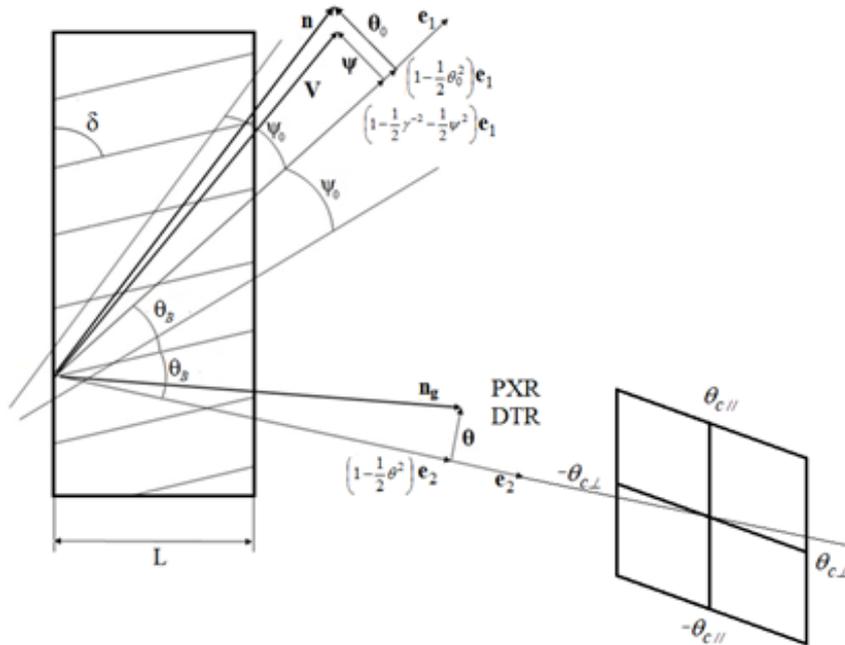


Рис. 1. Геометрия процесса излучения. Телесный угол регистрации фотонов ДПИ $\Delta\Omega = 4\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}$, где $\theta_{c\parallel}$ и $\theta_{c\perp}$ – угловые поперечные пределы коллиматора относительно центра коллиматора, расположенного на оси \mathbf{e}_2 (см. пределы интегрирования в формуле (11))

Fig. 1. Geometry of the radiation process. Solid angle of registration of DPI photons $\Delta\Omega = 4\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}$, where $\theta_{c\parallel}$ and $\theta_{c\perp}$ – angular transverse limits of the collimator relative to the center of the collimator located on the \mathbf{e}_2 axis (see integration limits in formula (11))

3. Спектрально-угловая плотность ДПИ в тонкой монокристаллической пластинке. Мы будем использовать формулу, полученную в работе [11], описывающую спектрально-угловую плотность ДПИ, возбуждаемого релятивистским электроном в монокристалле произвольной толщины L :

$$\omega \frac{d^2 N_{DTR}^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Omega^{(s)^2} \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \right)^2 R_{DTR}^{(s)} \quad (2)$$

где

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi(\omega)^2 + \varepsilon} \left[\exp(-2b^{(s)} p^{(s)} \Delta^{(1)}) + \exp(-2b^{(s)} p^{(s)} \Delta^{(2)}) - 2 \exp(-b^{(s)} p^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}) \cdot \cos \left(\frac{2b^{(s)} \sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (2b)$$

Здесь использованы обозначения $\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}$, $\Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}$,

$$\Delta^{(2)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} + \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}} + \frac{k^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}, \Delta^{(1)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}} - \frac{k^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}, \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)},$$

$$p^{(s)} = \frac{\chi_0''}{|\chi_g' C^{(s)}|}, b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{ext}^{(s)}}, v^{(s)} = \frac{\chi_g' C^{(s)}}{\chi_0'}, k^{(s)} = \frac{\chi_g'' C^{(s)}}{\chi_0''}, \xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2v^s},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{2 \sin^2 \theta_B}{V^2 |\chi_g' C^{(s)}|} \left(\frac{\omega(1 - \theta_{\parallel} \cot \theta_B)}{\omega_B} - 1 \right), C^{(1)} = 1, C^{(2)} = \cos 2\theta_B, d\Omega \equiv d\theta_{\parallel} \cdot d\theta_{\perp}, \quad (3)$$

$\chi_g = \chi_g' + i\chi_g''$ коэффициент Фурье-разложения диэлектрической восприимчивости кристалла в ряд по векторам обратной решетки \mathbf{g} , $\chi_0 = \chi_0' + i\chi_0''$ средняя диэлектрическая восприимчивость.

Мы используем систему единиц Хэвисайда – Лоренца.

Выражение (2) описывает спектрально-угловую плотность ДПИ релятивистского электрона, пересекающего монокристаллическую пластинку, и учитывает угловое отклонение вектора скорости электрона (угол $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$) от оси пучка электронов \mathbf{e}_1 . При $s = 1$ выражения (2) описывает волны σ -поляризованные, а при $s = 2$ π -поляризованные. Это выражение было получено в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции для общего случая асимметричного отражения волн излучения. Асимметрия отражения для фиксированного угла рассеяния Брэгга определяется углом между отражающей системой параллельных атомных плоскостей кристалла и поверхностью мишени (угол δ).

Параметр ε определяет степень асимметрии отражения кулоновского поля электрона относительно поверхности мишени. Отметим, что угол падения электрона на поверхность мишени $(\delta - \theta_B)$ уменьшается при увеличении параметра ε .

Параметр $b^{(s)}$ равен половине пути электрона в мишени $L_e = \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}$, выраженного в длинах экстинкции $L_{ext}^{(s)} = \frac{1}{\omega |\chi_g' C^{(s)}|}$.

Мы будем рассматривать излучение, возбуждаемое пучком релятивистских электронов в тонкой непоглощающей монокристаллической пластинке, т. е. при условии, когда наибольшая длина пути дифрагированного фотона в пластинке $L_f = \frac{L}{\sin(\delta + \theta_B)}$ будет намного короче длины поглощения рентгеновских волн в кристалле $L_{abs} = \frac{1}{\omega \chi_0''}$:

$$2 \frac{b^{(s)} p^{(s)}}{\varepsilon} = \frac{l_f}{L_{abs}} \ll 1. \quad (4)$$

Легко показать, что в этом случае выражение (2b) может быть приведено к виду

$$R_{DTR}^{(s)} = \frac{4\varepsilon^2}{\xi^{(s)^2 + \varepsilon} \varepsilon} \sin^2 \left(b^{(s)} \frac{\sqrt{\xi^{(s)^2 + \varepsilon}}}{\varepsilon} \right). \quad (5)$$

Можно отметить, что параметр $b^{(s)}$ может принимать значения $b^{(s)} \gg 1$ даже тогда, когда удовлетворено неравенство (4).

Чтобы получить угловую плотность ДПИ, мы проводим интегрирование выражения (2) по частоте ω , используя соотношение $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{|\chi_g' C^{(s)}|}{2 \sin^2 \theta_B} d\xi^{(s)}$, которое следует из выражения для функции $\xi^{(s)}(\omega)$ в (3). При этом угловая плотность ДПИ примет следующий вид:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{|\chi_g' C^{(s)}| \Omega^{(s)^2}}{\sin^2 \theta_B} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} - \frac{1}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0'} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{DTR}^{(s)} d\xi^{(s)}. \quad (6)$$

Для случая очень тонкой мишени мы полагаем, что $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$. В выражении (6) интеграл спектральной функции $R_{DTR}^{(s)}$, представленной в форме (5), может быть аппроксимирован с использованием формулы $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ к виду $\int_{-\infty}^{\infty} R_{DTR}^{(s)} d\chi^{(s)}(\omega) \approx 4\pi\varepsilon b^{(s)}$. В этом случае формула для угловой плотности ДПИ (6) примет следующий вид:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_0'^2 \chi_g'^2 C^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \times \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2)^2 (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 - \chi_0')^2} \varepsilon \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (7)$$

Если релятивистские электроны имеют очень высокую энергию $\left(\gamma \gg \frac{1}{\sqrt{|\chi_0'|}}\right)$ и модуль угла отклонения электрона в пучке $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$ меньше или порядка характерного значения угла, соответствующего максимуму в распределении ДПИ (γ^{-1}), то будет выполняться условие $\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 \ll -\chi_0'$ и выражение (7) примет следующий вид:

$$\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_B \chi_0'^2 \chi_g'^2 C^{(s)^2}}{4\pi \sin^2 \theta_B} \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2)^2} \varepsilon \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}. \quad (8)$$

Пропорциональная зависимость угловой плотности от толщины монокристаллической мишени L в формуле (8), описывающей угловую плотность ДТР, генерируемого электроном высокой энергии в тонкой монокристаллической мишени, указывает на ее кинематический характер. Условие $b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}$ означает, что длина пути электрона значительно меньше длины экстинкции рентгеновских волн в кристалле, что исключает перекачку падающих и дифрагированных волн друг в друга. В этом случае ДТР формируется, в основном, когда электрон приближается к границе мишени в вакууме. При этом электроны в среде вблизи границы приводятся в колебательное движение и испускают электромагнитные волны, которые конструктивно складываются в направлении рассеяния Брэгга. В этих условиях динамическое отражение волн TR от системы параллельных атомных плоскостей кристалла отсутствует.

4. Влияние расходимости пучка электронов на выход ДПИ. Поскольку ДТР электронов при сверхвысоких энергиях имеет узкое угловое распределение, целесообразно рассмотреть возможность использования зависимости нормированного на один электрон выхода фотонов ДПИ в заданном телесном угле вблизи направления рассеяния Брэгга от начальной расходимости электронного пучка. Для этого мы усредним выражения для числа испущенных фотонов по возможным прямолинейным траекториям электрона в пучке. В качестве примера мы усредняем ДПИ, возбуждаемое электронным пучком с гауссовым угловым распределением

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi\psi_0^2} e^{-\frac{\psi^2}{\psi_0^2}}, \quad (9)$$

где параметр ψ_0 будем называть расходимостью пучка излучающих электронов (см. Рис. 1) Угол ψ_0 определяет конус, ограничивающий часть электронного пучка, вне которой плотность потока электронов спадает больше, чем в e раз по сравнению с плотностью на оси пучка.

В качестве основного для числа $\langle N_{DTR} \rangle$ фотонов ДПИ, излучаемых в телесный угол $(\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp})$, будем использовать выражение

$$\langle N_{DTR} \rangle = \frac{1}{\pi\psi_0^2} \int_{-\theta_{c\parallel}}^{\theta_{c\parallel}} \int_{-\theta_{c\perp}}^{\theta_{c\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \cdot e^{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \quad (10)$$

Это выражение содержит суммирование угловой плотности ДТР по двум проекциям поляризации фотонов, интегрирование по всем углам излучения фотонов и усреднение по угловому распределению (9) электронов в пучке. Основываясь на выражении (8) для угловой плотности ДПИ, мы получим соответствующее выражение для числа $\langle N_{DTR} \rangle$ фотонов ДПИ, излучаемых пучком ультрарелятивистских электронов в заданный телесный угол вблизи направления рассеяния Брэгга из тонкой монокристаллической мишени:

$$\langle N_{DTR} \rangle_{b^{(s)} \ll \sqrt{\varepsilon}} = \frac{e^2 \omega_B \chi_g'^2}{4\pi \sin^2 \theta_B} \frac{\varepsilon L}{\sin(\delta - \theta_B)} \frac{1}{\pi\psi_0^2} \times \int_{-\theta_{c\parallel}}^{\theta_{c\parallel}} \int_{-\theta_{c\perp}}^{\theta_{c\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 \cos^2 2\theta_B}{\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2} e^{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \quad (11)$$

Кривые на Рис. 2, построенные по формуле (11) (кружки) с использованием выражения (8) для угловой плотности DTR и по формуле (10) (сплошные кривые) с использованием угловой плотности в виде (6), демонстрируют зависимость приведенного к одному падающему электрону среднего числа фотонов DTR в направлении Брэгга (ось e_2), испускаемых в прямоугольный коллиimator с углами коллимации $2\theta_{c\perp}$ и $2\theta_{c\parallel}$ от расходимости ψ_0 пучка электронов, падающих на кристалл, (см. на Рис. 1). Кривые построены для различных значений телесного угла регистрации при условии $\theta_{c\perp} = \theta_{c\parallel}$. Расчеты выполнены для тонкой алмазной мишени C (111).

Расхождение между сплошными и представленными точками кривыми отражает нарушение условия $\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 \ll -\chi'_0$ при использовании (11) в диапазоне углов $\theta_{c\perp} = \theta_{c\parallel} > 3/\gamma$.

Из Рис. 2 видно, что общий выход ДПИ практически не зависит от расходимости пучка при достаточно большом угле коллимации. Оптимальная коллимация должна обеспечивать максимальную зависимость выхода ДПИ от расходимости. На Рис. 3 представлены некоторые кривые из Рис. 2 в более удобном масштабе.

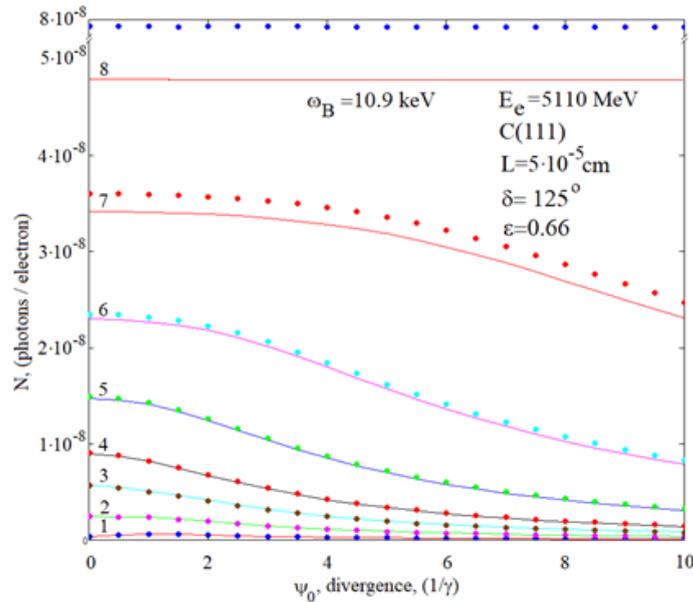


Рис. 2. Зависимость выхода фотонов ДПИ $N_p h$ от расходимости пучка электронов ψ_0 , рассчитанная по точной формуле (10) с использованием угловой плотности в виде (6) (сплошная линия) и по формуле (11) (жирные точки).

Лоренц-фактор электрона $\gamma = 10^4$. Телесный угол регистрации

$$\Delta\Omega = 4(\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}); \theta_{c\parallel} = \theta_{c\perp} = 0.5\gamma^{-1}(1), 1\gamma^{-1}(2), 1.5\gamma^{-1}(3), 2\gamma^{-1}(4), 3\gamma^{-1}(5), 5\gamma^{-1}(6), 10\gamma^{-1}(7), 100\gamma^{-1}(8)$$

Fig. 2. Dependence of the DPI photon yield $N_p h$ on the electron beam divergence ψ_0 calculated using the exact formula (10) using the angular density in the form (6) (solid line) and formula (11) (thick dots). The Lorentz factor of the electron is $\gamma = 10^4$.

Solid registration angle

$$\Delta\Omega = 4(\theta_{c\parallel} \cdot \theta_{c\perp}); \theta_{c\parallel} = \theta_{c\perp} = 0.5\gamma^{-1}(1), 1\gamma^{-1}(2), 1.5\gamma^{-1}(3), 2\gamma^{-1}(4), 3\gamma^{-1}(5), 5\gamma^{-1}(6), 10\gamma^{-1}(7), 100\gamma^{-1}(8)$$

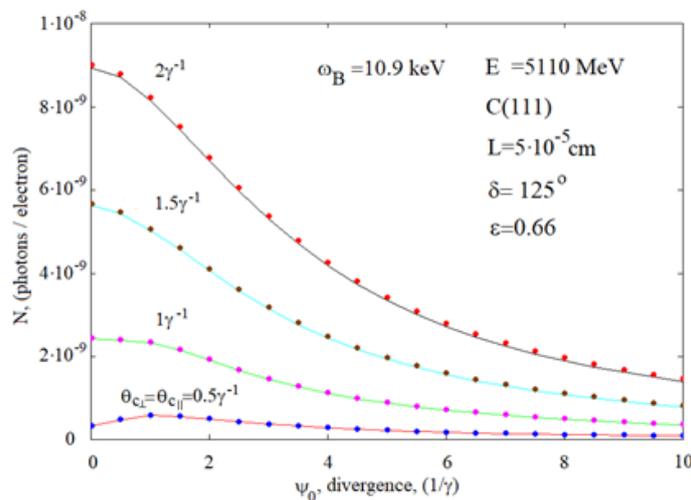


Рис. 3. То же, что на Рис. 2, но в другом масштабе

Fig. 3. The same as in Fig. 2, but on a different scale

Угловые распределения угловой плотности ДПИ при различных значениях расходимости $\psi_0 = \sqrt{\psi_{0\perp}^2 + \psi_{0\parallel}^2}$ для случая $\psi_{0\perp} = \psi_{0\parallel}$ показаны на Рис. 4.

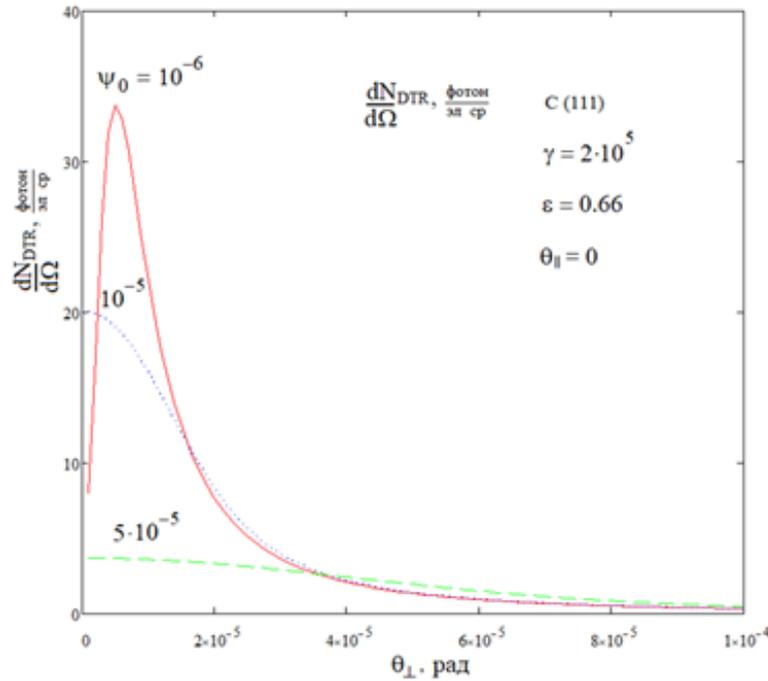


Рис. 4. Угловая плотность распределения ДПИ для различных значений расходимости электронного пучка
Fig. 4. Angular density of DPI distribution for different values of electron beam divergence

Таким образом, можно сделать вывод, что выход фотонов ДПИ, испускаемых электронным пучком сверхвысокой энергии из тонкой монокристаллической мишени в заданный телесный угол, можно использовать для индикации расходимости такого пучка. Для индикации двухпараметрических угловых распределений, когда $\psi_{0\parallel} \neq \psi_{0\perp}$, следует использовать разные углы коллимации $\theta_{c\parallel} \neq \theta_{c\perp}$ и двумерную гауссову функцию для усреднения угловой плотности ДПИ:

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi\psi_{0\perp}\psi_{0\parallel}} e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)}. \quad (12)$$

Чтобы получить однозначное решение этой задачи, необходимо провести по меньшей мере два независимых измерения выхода фотона DTR, например, с использованием двух щелевых коллиматоров, расположенных перпендикулярно друг другу.

В этом случае необходимо провести два расчета выхода фотонов для индикации параметров расходимости $\psi_{0\perp}$ и $\psi_{0\parallel}$:

$$\begin{aligned} \langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\perp} &= \frac{1}{\pi\psi_{0\perp}\psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta_{c\perp}}^{\theta_{c\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \\ \langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\parallel} &= \frac{1}{\pi\psi_{0\perp}\psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta_{c\parallel}}^{\theta_{c\parallel}} \sum_{s=1}^2 \left(\frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \right) \times \\ &\quad \times e^{-\frac{\psi_{\perp}^2 + \psi_{\parallel}^2}{\psi_0^2}} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}. \end{aligned} \quad (13)$$

Целевая функция может быть построена в форме

$$F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) = \left(\langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\perp} - N_{DTR}^{measured}_{c\perp} \right)^2 + \left(\langle N_{DTR}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) \rangle_{c\parallel} - N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} \right)^2. \quad (14)$$

Параметры расходимости электронного пучка $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$ будут определяться из условия минимума целевой функции $F(\psi_{0\perp}^*, \psi_{0\parallel}^*) = \text{Min}(F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}))$, используя один из существующих методов минимизации двумерной функции.

Характерная ширина углового распределения ДПИ, генерируемого одним электроном равна $\Delta\theta_{DTR} = \frac{1}{\gamma}$, где γ – это релятивистский фактор излучающего электрона.

Чтобы реализовать разрешение определения расходимости пучка, близкое к оптимальному, угловая ширина щелевого коллиматора должна быть выбрана порядка $\theta_{c\perp} = \theta_{c\parallel} \approx \frac{1}{\gamma}$ для $\psi_{0\perp} \approx \psi_{0\parallel} \leq \frac{1}{\gamma}$, либо порядка $\theta_{c\perp} \approx \psi_{0\perp}$ для $\psi_{0\perp} > \frac{1}{\gamma}$ и $\theta_{c\parallel} \approx \psi_{0\parallel}$ для $\psi_{0\parallel} > \frac{1}{\gamma}$.

Точность решения задачи зависит от статистической ошибки $\Delta N_{ph}^{measure} \approx t \sqrt{N_{ph}^{measure}}$ в измерении числа фотонов $N_{ph}^{measure}$, где коэффициент t определяет доверительные интервалы (мы будем использовать $t = 3$, соответствующее вероятности 99.73 %) Например, если мы потребуем, чтобы точность (относительная ошибка) составляла $\delta_N \leq 0.01$, тогда число зарегистрированных фотонов должно быть $N_{ph}^{measure} \geq \frac{t^2}{\delta_N^2} = \frac{9}{0.0001} = 9 \cdot 10^4$, что представляет вполне реальную величину для разрабатываемого ускорителя ИС, где предполагается использовать в одном цикле ускорения $2.6 \cdot 10^{13}$ электронов. Действительно, как это видно из Рис. 2, для рассматриваемой мишени число фотонов ДПИ, генерируемых одним электроном, будет порядка $1 \cdot 10^{-8}$ и соответствующее число фотонов $2.6 \cdot 10^{13} \cdot 10^{-8} = 2.6 \cdot 10^5$, генерируемых электронным пучком, будет достаточным для проведения измерения выхода фотонов ДПИ с требуемой точностью.

Интенсивность DTR может быть увеличена путем увеличения толщины кристаллической мишени в пределах диапазона, удовлетворяющего требуемым условиям минимального влияния процесса измерения на измеряемые параметры электронного пучка, а также путем увеличения параметра асимметрии ε (см. (11)).

Другими параметрами, которые будут использоваться в качестве экспериментальных данных, содержащих некоторые ошибки, являются углы фотонного коллиматора $\theta_{c\perp}, \theta_{c\parallel}$. Таким образом, точность определения расходимости электронного пучка можно выразить в терминах точности параметров $\theta_{c\perp}, \theta_{c\parallel}$ и $N_{measured}^{ph}$. Мы предполагаем, что ошибки в вычислениях отсутствуют. Погрешности абсолютных разностей между вычисленными и измеренными числами фотонов в первом и втором слагаемых целевой функции (14) могут быть соответственно выражены как:

$$\Delta N_{c\parallel}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) = \Delta N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} + \frac{1}{\pi \cdot \psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \cdot e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} \cdot 2 \cdot \Delta\theta_{c\parallel}, \quad (15a)$$

$$\Delta N_{c\perp}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}) = \Delta N_{DTR}^{measured}_{c\perp} + \frac{1}{\pi \cdot \psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^2 \frac{dN_{DTR}^{(s)}}{d\Omega}(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel}, \theta_{\perp}, \theta_{\parallel}) \cdot e^{-\left(\frac{\psi_{\perp}^2}{\psi_{0\perp}^2} + \frac{\psi_{\parallel}^2}{\psi_{0\parallel}^2}\right)} d\psi_{\perp} d\psi_{\parallel} d\theta_{\perp} \cdot 2 \cdot \Delta\theta_{c\perp}, \quad (15b)$$

где второе слагаемое в правой части каждого из этих выражений представляет вклад ошибок, связанных с параметром $\theta_{c\parallel}$ или $\theta_{c\perp}$.

Погрешности вычисленных параметров расходимости $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$ будут оцениваться как разность между результатами решения задачи минимизации функции (14) для измеренных чисел фотонов $N_{DTR}^{measured}_{c\perp}, N_{DTR}^{measured}_{c\parallel}$ и для чисел $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} + \Delta N_{c\perp}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel}, N_{DTR}^{measured}_{c\parallel}) + \Delta N_{c\parallel}(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel})$.

Наши оценки показали, что относительные ошибки параметров $\theta_{c\perp}, \theta_{c\parallel}$ и $N_{ph}^{measured}$ приводят к относительным ошибкам того же порядка в вычисленных параметрах $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$.

В табл. 1 представлены результаты расчета параметров расходимости электронного пучка в процессе минимизации целевой функции (14) методом Хука – Дживса (Hooke – Jeeves Method).

Вид целевой функции (14), используемой для моделирования процесса индикации параметров расходимости электронного пучка, показан на Рис. 5, где виден ярко выраженный минимум, соответствующий искомым значениям параметров расходимости.

Для тех же условий, что и в Таблице 1, кроме параметра $N_{DTR}^{measured}_{c\perp}$, значение которого было увеличено на 1 %, мы получили значения для параметров $\psi_{0\perp}^* = \frac{1.0144531}{\gamma}$, то есть на 1.4 % больше, чем в Таблице 1 ($\psi_{0\perp} = \frac{1.000195}{\gamma}$), а для параметра $\psi_{0\parallel}^* = 1.97109$, то есть на 1.4 % меньше, чем в таблице 1 ($\psi_{0\parallel} = \frac{1.999219}{\gamma}$).

5. Заключение. Исследуется дифрагированное переходное излучение, испускаемое пучком релятивистских электронов, пересекающих тонкую монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ. Получено выражение, описывающее среднее число фотонов DTR, испускаемых расходящимся пучком релятивистских электронов сверхвысоких энергий в тонкой монокристаллической пластине в пределах заданного телесного угла в направлении рассеяния Брэгга. Проведены численные расчеты, демонстрирующие зависимость выхода фотонов коллимированного ДПИ от расходимости пучка.

Таблица 1
Table 1

Значения параметров расходимости $\psi_{0\perp}$ и $\psi_{0\parallel}$, вычисленные в процессе их приближения к «экспериментальному» значению: $(\psi_{0\perp})^{(exp)} = \frac{1}{\gamma}$ и $(\psi_{0\parallel})^{(exp)} = \frac{2}{\gamma}$ по компьютерной программе поиска минимума целевой функции методом минимизации Хука – Дживса.

$\psi_{0\perp}^{(0)} \frac{\psi_{0\perp}^{(0)}=0.1}{\gamma}$ начальные значения параметров, $\Delta\psi_{0\perp}^{(0)} = \Delta\psi_{0\parallel}^{(0)} = 0.2/\gamma$ стартовое приращение параметров, $(\max(\Delta\psi_{0\perp}, \Delta\psi_{0\parallel}) \geq \varepsilon\varepsilon)$, $\varepsilon\varepsilon = 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)$ – требуемая точность приближения.

Целевая функция $F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel})$

The values of the divergence parameters $\psi_{0\perp}$ and $\psi_{0\parallel}$, calculated in the process of their approach to the «experimental» value: $(\psi_{0\perp})^{(exp)} = \frac{1}{\gamma}$ and $(\psi_{0\parallel})^{(exp)} = \frac{2}{\gamma}$ using a computer program for finding the minimum target functions using the Hook – Jeeves minimization method.

$\psi_{0\perp}^{(0)} \frac{\psi_{0\perp}^{(0)}=0.1}{\gamma}$ initial parameter values, $\Delta\psi_{0\perp}^{(0)} = \Delta\psi_{0\parallel}^{(0)} = 0.2/\gamma$ starting parameter increment, $(\max(\Delta\psi_{0\perp}, \Delta\psi_{0\parallel}) \geq \varepsilon\varepsilon)$, $\varepsilon\varepsilon = 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)$ – required approximation accuracy.

Objective function $F(\psi_{0\perp}, \psi_{0\parallel})$

| | | | | |
|---|------------------------------------|--|--|--|
| «Экспериментальные» значения параметров расходимости электронного пучка: $\psi_{0\perp}^{(exp)} = 5 \cdot 10^{-6} \text{radian} = \frac{1}{\gamma}$ $\psi_{0\parallel}^{(exp)} = 1 \cdot 10^{-5} = \frac{2}{\gamma}$ $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} = 6.942 \cdot 10^{-9}$ $N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} = 9.932 \cdot 10^{-9}$ $\gamma = 2 \cdot 10^5$ релятивистский фактор электрона. Мишень – монокристалл алмаза C(111) толщиной $L_t = 5 \cdot 10^{-5} \text{cm}$ | | | | |
| Calculated values | | | | |
| Iteration number (i) | $\gamma \cdot \psi_{0\perp}^{(i)}$ | $\gamma \cdot \psi_{0\parallel}^{(i)}$ | $\gamma \cdot \Delta\psi_{0\perp}^{(i)}$ | $\gamma \cdot \Delta\psi_{0\parallel}^{(i)}$ |
| 0 | 0.1 | 0.1 | 0.4 | 0.4 |
| 5 | 0.9 | 1.7 | 0.1 | 0.05 |
| 10 | 1.05 | 1.875 | $6.25 \cdot 10^{-3}$ | 0.0125 |
| 15 | 1.00625 | 1.975 | $3.125 \cdot 10^{-3}$ | $6.25 \cdot 10^{-3}$ |
| 20 | 1.0015625 | 1.996875 | $3.9063 \cdot 10^{-4}$ | $1.5625 \cdot 10^{-3}$ |
| 25 | 1.0001953 | 1.9992187 | $9.7656 \cdot 10^{-5}$ | $1.953125 \cdot 10^{-4}$ |

Для определения параметров расходимости электронного пучка с угловым распределением, описываемым двумерным нормальным распределением с различными значениями дисперсий по координатам, мы использовали выражения для выхода фотонов DTR в целевые коллиматоры, расположенные перпендикулярно друг другу. Построена целевая функция для расчета параметров расходимости электронного пучка и выражения для оценки погрешности определения параметров расходимости пучка.

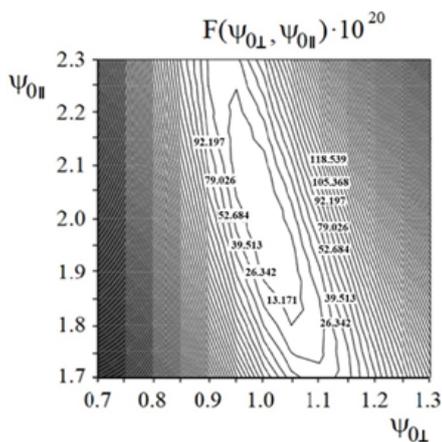


Рис. 5. Целевая функция (14) для определения параметров расходимости $\psi_{0\perp}^*$ и $\psi_{0\parallel}^*$ по «измеренным» числам фотонов ДПИ $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} = 6.942 \cdot 10^{-9}$ и $N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} = 9.932 \cdot 10^{-9}$ (которые были предварительно вычислены по формулам (13) для $\psi_{0\perp} = \frac{1}{\gamma}$ и $\psi_{0\parallel} = \frac{2}{\gamma}$). Параметры $\psi_{0\perp}$ и $\psi_{0\parallel}$ выражены в единицах $(1/\gamma)$ radians. Значение целевой функции в минимуме $F(1/\gamma, 2/\gamma) = 0$

Fig. 5. Objective function (14) for determining the divergence parameters $\psi_{0\perp}^*$ and $\psi_{0\parallel}^*$ from the «measured» numbers of DTR photons $N_{DTR}^{measured}_{c\perp} = 6.942 \cdot 10^{-9}$ and $N_{DTR}^{measured}_{c\parallel} = 9.932 \cdot 10^{-9}$ (which were previously calculated using the formulas (13) for $\psi_{0\perp} = \frac{1}{\gamma}$ and $\psi_{0\parallel} = \frac{2}{\gamma}$). The parameters $\psi_{0\perp}$ and $\psi_{0\parallel}$ are expressed in units of $(1/\gamma)$ radians. The value of the objective function at the minimum is $F(1/\gamma, 2/\gamma) = 0$

Проведены модельные расчеты параметров расходимости электронного пучка на основе «измеренного» выхода фотонов DTR, проходящих через щелевые коллиматоры. Показана эффективность алгоритма оценки параметров расходимости пучка на основе метода минимизации Гука – Дживса.

Полученные выражения могут быть успешно использованы в качестве основы для разработки методов измерения расходимости пучков релятивистских электронов сверхвысоких энергий на основе углового распределения DTR.

References

1. Baer, Howard T., Barklow et al. The international linear collider. *Technical design report. Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY)*. 2013; 2: physics. arXiv preprint arXiv:1306.6352.
2. CLIC collaboration et al. A multi-TeV linear collider based on CLIC technology: CLIC Conceptual Design Report. *CERN, Geneva, Switzerland, Rep. CERN-2012-007*. 2012.
3. Takabayashi Y. Parametric X-ray radiation as a beam size monitor. *Physics Letters A*. 2012;376(35):2408-2412.
4. Takabayashi Y., Sumitani K. New method for measuring beam profiles using a parametric X-ray pinhole camera. *Physics Letters A*. 2013;377(38):2577–2580.
5. Kalinin BN., Potylitsin AP., Verzilov VA. et al. Possible application of PXR to the beam-divergence measurements. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 1994;350(3):601–604.
6. Gogolev A., Potylitsyn A., Kube G. A possibility of transverse beam size diagnostics using parametric X-ray radiation. *Journal of Physics: Conference Series 357 012018*. 2012;357:P 012018.
7. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x rays. *Physical Review A*. 1989;40(8):4322–4329.
8. Baryshevsky VG. Parametric X-ray radiation at a small angle near the velocity direction of the relativistic particle. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1997;122(1):13-18.
9. Artru X. Parametric X-rays and diffracted transition radiation in perfect and mosaic crystals. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 1998;145(1–2):1–7.
10. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric X-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246(1–2):148–150.
11. Blazhevich SV., Grazhdankin GA., Zagorodnyuk RA., Noskov AV. Influence of ultrarelativistic electron beam divergence on spectral–angular characteristics of coherent X-radiation generated in a single-crystal target. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2015;355:170–174.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.12.2023

Received December 27, 2023

Поступила после рецензирования 09.02.2024

Revised February 09, 2024

Принята к публикации 12.02.2024

Accepted February 12, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Блажевич Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Бронникова Марина Владимировна – старший преподаватель кафедры информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Носков Антон Валерьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergei V. Blazhevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Marina V. Bronnikova – Senior Lecturer of the Department of Computer Science, Natural Sciences and Teaching Methods, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Anton V. Noskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Анализ микроструктуры и свойств разнородных СТП-соединений термоупрочняемых алюминиевых сплавов

Зуйко И. С. , Малофеев С. С. , Михайлов М. Г. , Калинин А. А. 
(Статья представлена членом редакционной коллегии А. Н. Беляковым)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
zuiko_ivan@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматривается дифрагированное переходное излучение (ДПИ), возбуждаемое пучком ультрарелятивистских электронов, проходящих через тонкую монокристаллическую пластину в геометрии рассеяния Лауэ. Получено выражение, описывающее угловую плотность ДПИ для случая, когда путь электронов в мишени значительно меньше, чем длина экстинкции рентгеновских фотонов в кристалле. Проведенные численные расчеты выхода фотонов ДПИ в направлении рассеяния Брэгга для различных значений телесного угла регистрации показывают значительное влияние расходимости электронного пучка на выход фотонов. Делается заключение о возможности использования выхода ДПИ, имитированного в заданный телесный угол, для индикации расходимости электронного пучка. Результаты расчетов показывают, что предлагаемая в настоящей работе формула может быть базой для развития метода измерения расходимости пучка релятивистских электронов ультравысокой энергии на основе углового распределения ДПИ.

Ключевые слова: релятивистские электроны, дифрагированное переходное излучение, индикация расходимости электронного пучка

Благодарности: Работа выполнена при поддержке внутривузовского гранта НИУ «БелГУ» «Молодые лидеры в науке» в рамках проекта «Наука XXI века» программы Приоритет-2030.

Для цитирования: Зуйко И. С., Малофеев С. С., Михайлов М. Г., Калинин А. А. 2024. Анализ микроструктуры и свойств разнородных СТП-соединений термоупрочняемых алюминиевых сплавов. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 146–152. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-146-152

Original Research

Analysis of the Microstructure and Properties of Dissimilar FSW Joints of Heat-treatable Aluminium Alloys

Ivan S. Zuiko , Sergey S. Malopheyev , Mikhail G. Mikhaylov , Alexandr A. Kalinenko 
(Article submitted by a member of the editorial board A. N. Belyakov)

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia
zuiko_ivan@bsu.edu.ru

Abstract. The diffracted transition radiation (DTR) produced by a beam of relativistic electrons traversing a thin single-crystal plate in the Laue scattering geometry is considered. We have obtained the expression describing the angular density of the DTR for the case when the path length of the electron in the target is far less than the extinction length of X-rays in the crystal. It is shown that in this case the considered DTR process has the explicit kinematic character. The numerical calculations of the yield of DTR photons in the direction of Bragg scattering performed for various values of the registration solid angle show a significant influence of the electron beam divergence on the photon yield. We have arrived at a conclusion that the measured photon output of DTR radiation emitted in a given solid angle can be used for indication of the electron beam divergence. The model calculations of the electron beam divergence parameters on the base of “measured” yield of DTR photons traversing through a slit collimator are carried out. The results of the calculation show that the proposed in this work formula can be successfully used as a base for the development of methods for measuring the divergence of beams of relativistic ultrahigh-energy electrons based on DTR angular distribution.

Keywords: Relativistic Electrons, Diffracted Transition Radiation, Indication of Electron Beam Divergence

Acknowledgements: This work was supported by intra-university “BelSU” grant “Young leaders in science” as part of the project “Science of the 21st century” of the program “Priority-2030”.

For citation: Zuiko I. S., Malopheyev S. S., Mikhaylov M. G., Kalinenko A. A. 2024. Analysis of the Microstructure and Properties of Dissimilar FSW Joints of Heat-treatable Aluminium Alloys. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 146–152. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-146-152

1. Введение. Алюминиевые термически упрочняемые сплавы обладают низкой плотностью при высокой и средней прочности (жесткости), хорошей коррозионной стойкостью. Всё это позволяет использовать их как материалы в транспортной (в частности, авиационной) промышленности. При этом зачастую возникает необходимость создавать неразъемные конструкции из материалов различных систем легирования. Однако их низкая свариваемость традиционными методами (аргонно-дуговым или электронно-лучевым) вызывает ограничения. Поэтому относительно новый метод – сварка трением с перемешиванием (СТП) рассматривается как перспективный [1]–[4].

Избежать деградации механических свойств при СТП удаётся за счёт особенностей самого метода – материал остаётся в твёрдом виде, то есть не переводится в расплав. При этом свариваемые материалы подвергаются большим пластическим деформациям при повышенных (порядка 250-400°C в зависимости от режима) температурах и относительно высоких скоростях [5].

Принимая во внимание важное практическое значение СТП, неудивительно, что всё больше учёных исследуют формирование микроструктуры при разнородном соединении. Например, пар из сплавов Al-Cu-Mg и Al-Mg-Si [6]–[13]. В этих работах были сделаны следующие важные заключения:

1. Несмотря на все условия, сплавы различных серий не перемешиваются на 100 %, даже в зоне перемешивания. Между материалами формируется чёткая граница.
2. Ограниченная диффузия атомов наблюдается на границе.
3. Повышение температуры (путем повышения скорости вращения и снижения скорости подачи) или количество проходов может улучшить смешивание материалов.

Необходимо отметить, что бездефектная микроструктура разнородных термически упрочняемых алюминиевых сплавов возможна только в относительно узком диапазоне обработки, которое как правило лежит в диапазоне высоких тепловложений [8]–[11]. В частности, качественные сварные швы обычно получаются при скорости вращения инструмента ≥ 1000 об/мин и скорости перемещения инструмента ≤ 150 мм/мин [14]–[15]. Учитывая сложнейший характер пластического течения материалов при разнородном СТП, особое значение имеет конструкция сварочного инструмента. Считается, что увеличение контактной площади поверхности пина инструмента должно увеличивать объем захватываемого материала за один оборот инструмента и, таким образом, способствовать лучшему перемешиванию материала. Именно этот принцип лежит в основе пина в форме Трифлют [1, 2]. Таким образом, оптимизация дизайна сварочного инструмента представляет собой комплексную научно-практическую задачу, требующую внимания. В этом контексте перспективной идеей выглядит применение технологии аддитивного производства для изготовления СТП-инструментов. Учитывая практически неограниченную свободу в форме инструмента, которая обычно свойственна аддитивному производству, эта технология позволяет изготавливать инструмент любой геометрии. Таким образом, целью данной работы было оптимизировать СТП-соединение разнородных алюминиевых сплавов за счёт применения современной технологии 3D-печати.

2. Материалы и методика эксперимента. В качестве материалов использовали сплав AA2519 (Al-5,64 Cu-0,33 Mn-0,23 Mg-0,15 Zr-0,11 Ti-0,09 V-0,08 Fe-0,08 Zn-0,04 Sn-0,01 Si, весовых %) и AA6061 (Al-0,88 Mg-0,66 Si-0,72 Fe-0,26 Cu-0,12 Mn-0,12 Cr-0,09 Zn, весовых %). Оба сплава были получены методом полунепрерывного литья в НИУ «БелГУ». Сплав AA6061 гомогенизировали при 380°C – 1 час, а затем подвергали экструзии при этой же температуре с обжатием по сечению 75 %.

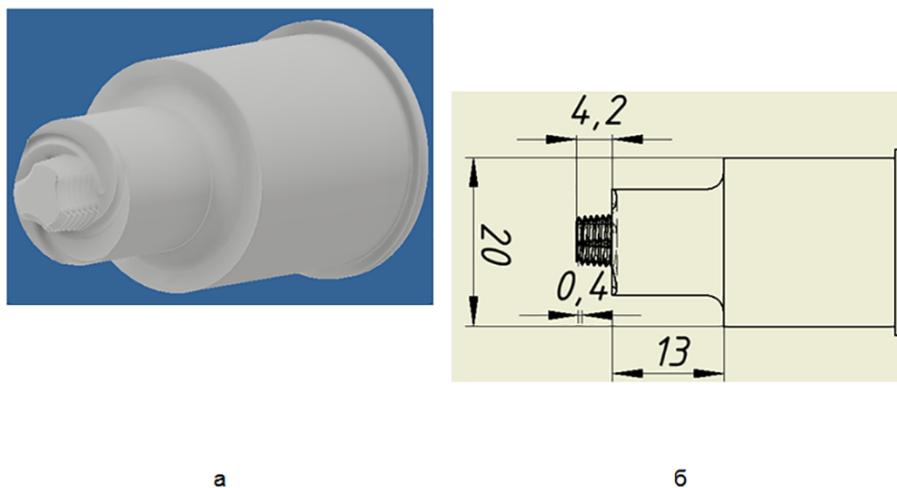


Рис. 1. Трёхмерная модель и принципиальные размеры 3D-инструмента, использованного в работе: а – модель, б – принципиальные размеры
 Fig. 1. Sample Three-dimensional model and principal dimensions of the AM-tool used in the work: a – model, б – principal dimensions size

Сплав AA2519 гомогенизировали при 510° в течении 24 часов и охлаждении с печью, затем ковали и прокатывали в горячую ($T=425^\circ$) до истинной степени деформации 2.0 и 1.4, соответственно. Далее из экструдированных заготовок и плит вырезали пластины толщиной 3 мм, которые закаливали с 525°С в холодную воду.

Листы алюминиевых сплавов были сварены встык вдоль направления прокатки/экструзии на СТП-машине фирмы AccurStir 1004. Для этого использовали два различных инструмента. Первый – стандартный [16], а второй – сложной геометрии, напечатанный на 3D-принтере из порошка мартенситной стали 17-4PH, т. е. произведен по аддитивной технологии спекания порошка лазером [17]–[18]. Модель и чертёж инструмента представлен на Рисунке 1. Конструкция имела плоские плечики с канавками в форме спирали Архимеда, а пин в форме Трифлют. Для сравнения эффективности сварных инструментов принципиальные размеры были сохранены.

Листы двух сплавов были сварены встык вдоль направления прокатки на СТП-машине AccurStir 1004. После тщательного анализа литературы скорость вращения была выбрана максимально доступной для использованной установки СТП – 1100 об/мин. С другой стороны, для снижения тепловыделения и для исследования возможных преимуществ 3D-инструмента, скорость подачи была 380 мм/мин. Угол наклона инструмента относительно нормали к поверхности свариваемых пластин составлял 2,5°. Этот режим не входит в рекомендуемый диапазон сварки сплавов AA6061 и AA2519. Термический цикл СТП измерялся посредством термопар К-типа (хромель-алюмель).

Для исследования микроструктуры, перпендикулярно направлению сварки были вырезаны образцы, содержащие все зоны, которые появляются в результате СТП. Далее образцы были отшлифованы, а затем отполированы в течении 24 часов на виброполировальной машине с применением коллоидной суспензии OP-S с размером частиц 0,04 мкм. Вытравливание границ зёрен в подготовленных сварных соединениях осуществляли реактивом Келлера (0,5HF-1,8HCl-2,7HNO₃-95H₂O (в об. %)). Анализ микроструктуры проводили на оптическом микроскопе Olympus GX-71. Со всеми остальными деталями эксперимента можно ознакомиться в работах [19]–[21].

3. Результаты и их обсуждение. На Рисунке 2 представлены фотографии полученных сварных соединений после применения обычного и аддитивного инструмента.



Рис. 2. Внешний вид полученных сварных соединений: а – стандартным инструментом, б – аддитивным
Fig. 2. Typical appearance of dissimilar welds (top view) produced using: a – ordinary tool and b – AM tool size

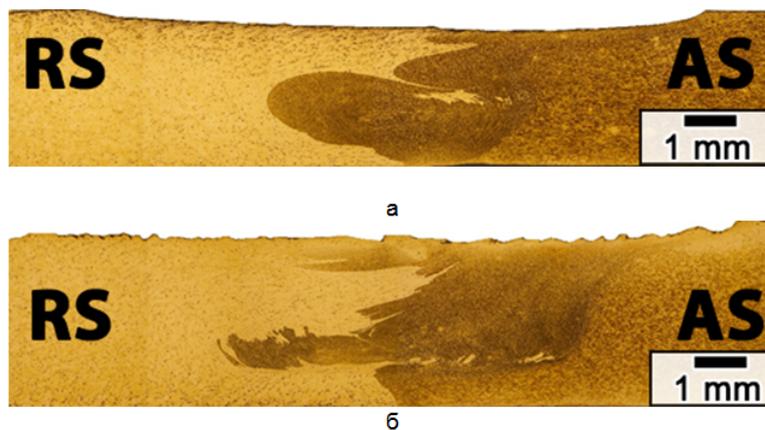


Рис. 3. Микроструктура сварных швов в поперечном направлении: а - полученных стандартным инструментом, б – аддитивным. RS и AS – сторона отвода и сторона набегания, соответственно

Fig. 3. Three-dimensional model and principal dimensions of the 3D-tool used in the work: a – model, b – principal dimensions. RS and AS are retreating side and advancing side, respectively

Тщательный визуальный осмотр не выявил объемных дефектов в обоих случаях. Однако сварные швы, выполненные 3D-инструментом, имели более шероховатую поверхность. Вероятно, это связано с

более развитой поверхностью плечиков, которая не была идеальной для эффективного и плавного отвода материала.

Металлографические снимки сечений сварных швов, полученных традиционным и аддитивным инструментом, представлены на Рисунке 3. Как и ожидалось, использование обычного инструмента приводит к заметному снижению толщины шва. Этот эффект СТП-соединений хорошо известен [7, 9] и обычно связывается с выбросом части свариваемого материала из зоны перемешивания. При этом, как видно из Рисунка 3, аддитивный инструмент позволил существенно уменьшить этот дефект. Так же было отмечено, что свариваемые материалы не были равномерно перемешаны в зоне перемешивания, поскольку между ними видна чёткая граница раздела. Этот факт согласуется с уже ранее проведёнными исследованиями в этой области [9, 15], согласно которым диффузия атомов через разнородную границу раздела затруднена.

В этом контексте важно подчеркнуть, что применение аддитивного инструмента привело к существенному усложнению профиля границы раздела (см. рис. 3а и 3б).

Этот результат, по-видимому, отражает сложный характер течения материалов и качественно согласуется с уменьшением прижимного усилия, наблюдаемого во время сварки. Таким образом, был сделан вывод, что по сравнению со стандартным, аддитивный инструмент улучшил механическое перемешивание свариваемых материалов во время СТП.

Для исследования эффективности дизайна аддитивного инструмента были измерены термические циклы сварки, которые представлены на Рисунке 4.

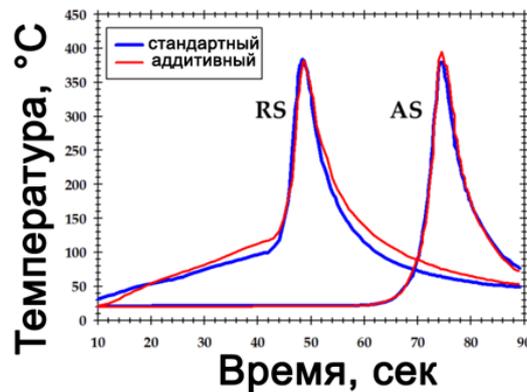


Рис. 4. Измеренный термический цикл СТП. RS и AS – сторона отвода и сторона набегания, соответственно
Fig. 4. The weld thermal cycle. RS and AS are retreating side and advancing side, respectively

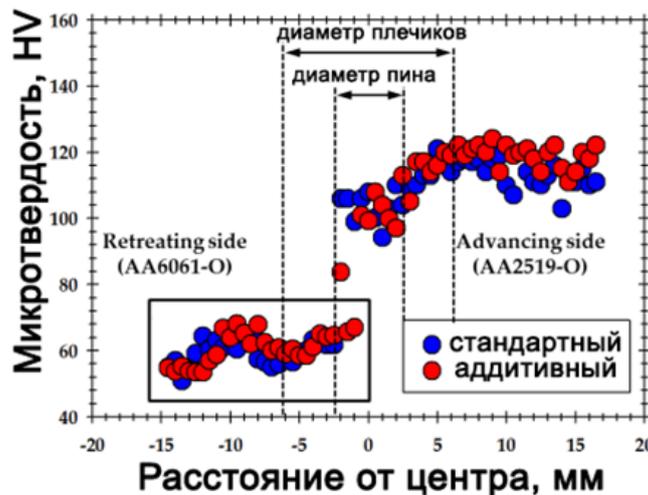


Рис. 5. Профили микротвердости, измеренные по центру шва, полученные двумя различными инструментами
Fig. 5. Typical microhardness profiles measured across mid-thickness of dissimilar welds.

К сожалению, разницы в пиковых температурах процесса и профилях зафиксировать не удалось. Это может свидетельствовать о том, что предложенный дизайн инструмента практически не оказал влияния на тепловыделение в процессе СТП. Особенно учитывая развитую поверхность (Рис. 1) использованного в работе пина. Вероятно, это означает, что тепла, генерируемого пином, было мало, а главным его источником были плечики инструмента. Интересно отметить, что замена сплавов местами (с AS на RS)

не оказывает существенного влияния на максимально достигаемую температуру, но существенно влияет на скорость нагрева. Механизм этого остаётся непонятным.

Для оценки изменения механических свойств разнородных сварных швов по центру толщины измеряли профили микротвёрдости. Полученные результаты показаны на Рисунке 5. Для наглядности на рисунке также указаны основные размеры инструмента.

Отчётливого эффекта от применяемого сварочного инструмента на профили микротвёрдости не обнаружено. Этот факт можно связать со сходством формирующейся микроструктуры (Рис. 3). Так же это подтверждается и практически идентичными термическими циклами (Рис. 4). Во всех случаях обнаруживается резкое изменение микротвёрдости вблизи центра зоны перемешивания, при переходе от более мягкого AA6061 к более твёрдому AA2519. К сожалению, это означает, что свариваемые материалы практически не перемешивались друг с другом в процессе СТП.

В дальнейшем для устранения выявленного недостатка планируется разработать более сложный дизайн инструмента, изменить режим сварки, применить искусственное охлаждение и, возможно, прибегнуть к подкладкам из меди или стали.

4. Заключение. Эта работа была предпринята для оценки возможности создания аддитивно изготовленного СТП-инструмента для соединения разнородных сплавов AA2519 и AA6061. Инструмент был изготовлен из мартенситной стали 17-4 PH с использованием метода селективного лазерного плавления. Конструкция включала в себя плечики в виде спирали Архимеда и пин в форме Трифлют.

Основные выводы по работе могут быть следующие:

1. Применение аддитивного инструмента устранило уменьшение толщины сварного шва.
2. Применение пина с развитой поверхностью улучшило механическое перемешивание, однако эффекта на свойства зарегистрировать не удалось.
3. Термический цикл во время СТП определяется в большей степени дизайном плечиков, а не пина.
4. Для создания высокоэффективных сварных конструкций из разнородных термоупрочняемых алюминиевых сплавов необходимы дальнейшие экспериментальные работы по дизайну СТП-инструментов.

Список литературы

1. Threadgill PL, Leonard AJ, Shercliff HR, Withers PJ. Friction stir welding of aluminum alloys. *International Materials Reviews*. 2009;54:49–93.
2. Mishra RS, Ma ZY. Friction stir welding and processing. *Materials Science and Engineering R: Reports*. 2005;50(1-2):1–78.
3. Meng X, Huang Y, Cao J, Shen J, dos Santos JF. Recent progress on control strategies for inherent issues in friction stir welding. *Progress in Materials Science*. 2021;115:100706.
4. Heidarzadeh A, Mironov S, Kaibyshev R, Cam G, Simar A, Gerlich A, Khodabakhshi F, Mostafaei A, Field DP, Robson JD, Deschamps A, Withers PJ. Friction stir welding/processing of metals and alloys: A comprehensive review on microstructural evolution. *Progress in Materials Science*. 2020;117:100752.
5. Mishin V, Shishov I, Kalinenko A, Vysotskii I, Zuiko I, Malopheyev S, Mironov S, Kaibyshev R. Numerical Simulation of the Thermo-Mechanical Behavior of 6061 Aluminum Alloy during Friction-Stir Welding. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 2022;6:68.
6. Cavaliere P, Nobile R, Panella FW, Squillace A. Mechanical and Microstructural Behavior of 2024-7075 Aluminium Alloy Sheets Joined by Friction Stir Welding. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2006; 46:588-594
7. Li Y, Murr LE, McClure JC. Solid State Flow Visualization in the Friction Stir Welding of 2024 Al to 6061 Al. *Scripta Materialia*. 1999;40:1041-1046.
8. Scialpi A, Giorgi M, Filippis LAC, Nobile R, Panella FW. Mechanical Analysis of Ultra-Thin Friction Stir Welding Joined Sheets with Dissimilar and Similar Materials. *Materials & Design*, 2008. 29:928-936.
9. Moradi MM, Aval HJ, Jamaati R, Amirkhanlou S, Ji S. Microstructure and Texture Evolution of Friction Stir Welded Dissimilar Aluminum Alloys: AA2024 and AA6061, *Journal of Manufacturing Processes*. 2018;32:1-10
10. Jonckheere V, Meestr B, Denquin A, Simar A. Torque, Temperature and Hardening Precipitation Evolution in Dissimilar Friction Stir Welds between 6061-T6 and 2014-T6 Aluminum Alloys. *Journal of Materials Processing Technology*. 2013;213:826-837.
11. Moradi MM, Aval HJ, Jamaati R, Amirkhanlou S, Ji S. Effect of SiC Nanoparticles on the Microstructure and Texture of Friction Stir Welded AA2024/AA6061. *Materials Characterization*. 2019;152:169-179.
12. Paidar M, Vignesh RV, Khorram A, Ojo OO, Rasoulpouraghdam A, Pustokhina I. Dissimilar Modified Friction Stir Clinching of AA2024-AA6061 Aluminum Alloys: Effects of Materials Positioning. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020;9:6037-6047.
13. Jandaghi MR, Pouraliakbar H, Saboori A, Hong SI, Pavese M. Comparative Insight into the Interfacial Phase Evolutions during Solution Treatment of Dissimilar Friction Stir Welded AA2198-AA7475 and AA2198-AA6013 Aluminum Sheets. *Materials*. 2021;14:1290.
14. Ramamurthy M, Balasubramanian P, Senthilkumar N, Anbuhezhiyan G. Influence of Process Parameters on the Microstructure and Mechanical Properties of Friction Stir Welds of AA2014 and AA6063 Aluminium Alloys using Response Surface Methodology. *Materials Research Express*. 2022;9:026528.

15. Varunraj S, Ruban M. Investigation of the Microstructure and Mechanical Properties of AA6063 and AA7075 Dissimilar Aluminium Alloys by Friction Stir Welding Process. *Materials Today: Proceedings*. 2022;68:1654-1657.
16. Газизов МР, Зуйко ИС, Малофеев СС. EBSD-анализ микроструктуры Al-Cu-Mg сплава, подвергнутого сварке трением с перемешиванием. *Прикладная математика & Физика*. 2022;54(4):261-265.
17. Vysotskiy I, Malopheyev S, Zuiko I, Mironov S, Kaibyshev R. Crystallographic aspects of 17–4 PH martensitic steel produced by laser-powder bed fusion. *Materials Characterization*. 2022;192:112405.
18. Vysotskiy I, Malopheyev S, Zuiko I, Mironov S, Kaibyshev R. Microstructure Distribution in 17-4 PH Martensitic Steel Produced by Selective Laser Melting. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2022;53:4143-4147.
19. Zuiko IS, Malopheyev S, Mironov S, Betsofen S, Kaibyshev R. On the Heterogeneous Distribution of Secondary Precipitates in Friction-Stir-Welded 2519 Aluminium Alloy. *Metals*. 2022;12(4):671.
20. Zuiko IS, Mironov S, Betsofen S, Kaibyshev R. Suppression of abnormal grain growth in friction-stir welded Al–Cu–Mg alloy by lowering of welding temperature. *Scripta Materialia*. 2021;196:113765.
21. Zuiko IS, Malopheyev S, Mironov S, Kaibyshev R. Dissimilar friction stir welding of AA2519 and AA5182. *Materials*. 2022; 16(7): 8776.

References

1. Threadgill PL, Leonard AJ, Shercliff HR, Withers PJ. Friction stir welding of aluminum alloys. *International Materials Reviews*. 2009;54:49–93.
2. Mishra RS, Ma ZY. Friction stir welding and processing. *Materials Science and Engineering R: Reports*. 2005;50(1-2):1–78.
3. Meng X, Huang Y, Cao J, Shen J, dos Santos JF. Recent progress on control strategies for inherent issues in friction stir welding. *Progress in Materials Science*. 2021;115:100706.
4. Heidarzadeh A, Mironov S, Kaibyshev R, Cam G, Simar A, Gerlich A, Khodabakhshi F, Mostafaei A, Field DP, Robson JD, Deschamps A, Withers PJ. Friction stir welding/processing of metals and alloys: A comprehensive review on microstructural evolution. *Progress in Materials Science*. 2020;117:100752.
5. Mishin V, Shishov I, Kalinenko A, Vysotskii I, Zuiko I, Malopheyev S, Mironov S, Kaibyshev R. Numerical Simulation of the Thermo-Mechanical Behavior of 6061 Aluminum Alloy during Friction-Stir Welding. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*. 2022;6:68.
6. Cavaliere P, Nobile R, Panella FW, Squillace A. Mechanical and Microstructural Behavior of 2024-7075 Aluminium Alloy Sheets Joined by Friction Stir Welding. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2006; 46:588-594
7. Li Y, Murr LE, McClure JC. Solid State Flow Visualization in the Friction Stir Welding of 2024 Al to 6061 Al. *Scripta Materialia*. 1999;40:1041-1046.
8. Scialpi A, Giorgi M, Filippis LAC, Nobile R, Panella FW. Mechanical Analysis of Ultra-Thin Friction Stir Welding Joined Sheets with Dissimilar and Similar Materials. *Materials & Design*, 2008. 29:928-936.
9. Moradi MM, Aval HJ, Jamaati R, Amirkhanlou S, Ji S. Microstructure and Texture Evolution of Friction Stir Welded Dissimilar Aluminum Alloys: AA2024 and AA6061, *Journal of Manufacturing Processes*. 2018;32:1-10
10. Jonckheere V, Meestr B, Denquin A, Simar A. Torque, Temperature and Hardening Precipitation Evolution in Dissimilar Friction Stir Welds between 6061-T6 and 2014-T6 Aluminum Alloys. *Journal of Materials Processing Technology*. 2013;213:826-837.
11. Moradi MM, Aval HJ, Jamaati R, Amirkhanlou S, Ji S. Effect of SiC Nanoparticles on the Microstructure and Texture of Friction Stir Welded AA2024/AA6061. *Materials Characterization*. 2019;152:169-179.
12. Paidar M, Vignesh RV, Khorram A, Ojo OO, Rasoulpouraghdam A, Pustokhina I. Dissimilar Modified Friction Stir Clinching of AA2024-AA6061 Aluminum Alloys: Effects of Materials Positioning. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020;9:6037-6047.
13. Jandaghi MR, Pouraliakbar H, Saboori A, Hong SI, Pavese M. Comparative Insight into the Interfacial Phase Evolutions during Solution Treatment of Dissimilar Friction Stir Welded AA2198-AA7475 and AA2198-AA6013 Aluminum Sheets. *Materials*. 2021;14:1290.
14. Ramamurthy M, Balasubramanian P, Senthilkumar N, Anbucheziyan G. Influence of Process Parameters on the Microstructure and Mechanical Properties of Friction Stir Welds of AA2014 and AA6063 Aluminium Alloys using Response Surface Methodology. *Materials Research Express*. 2022;9:026528.
15. Varunraj S, Ruban M. Investigation of the Microstructure and Mechanical Properties of AA6063 and AA7075 Dissimilar Aluminium Alloys by Friction Stir Welding Process. *Materials Today: Proceedings*. 2022;68:1654-1657.
16. Gazizov MR, Zuiko IS, Malopheyev SS. EBSD-investigation of Al-Cu-Mg alloy microstructure subjected to friction-stir welding. *Applied Mathematics & Physics*. 2022;54(4):261-265. (in Russian)
17. Vysotskiy I, Malopheyev S, Zuiko I, Mironov S, Kaibyshev R. Crystallographic aspects of 17–4 PH martensitic steel produced by laser-powder bed fusion. *Materials Characterization*. 2022;192:112405.
18. Vysotskiy I, Malopheyev S, Zuiko I, Mironov S, Kaibyshev R. Microstructure Distribution in 17-4 PH Martensitic Steel Produced by Selective Laser Melting. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2022;53:4143-4147.

19. Zuiko IS, Malopheyev S, Mironov S, Betsofen S, Kaibyshev R. On the Heterogeneous Distribution of Secondary Precipitates in Friction-Stir-Welded 2519 Aluminium Alloy. *Metals*. 2022;12(4):671.
20. Zuiko IS, Mironov S, Betsofen S, Kaibyshev R. Suppression of abnormal grain growth in friction-stir welded Al–Cu–Mg alloy by lowering of welding temperature. *Scripta Materialia*. 2021;196:113765.
21. Zuiko IS, Malopheyev S, Mironov S, Kaibyshev R. Dissimilar friction stir welding of AA2519 and AA5182. *Materials*. 2022; 16(7): 8776.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.12.2023

Received December 20, 2023

Поступила после рецензирования 03.02.2024

Revised February 3, 2024

Принята к публикации 06.02.2024

Accepted February 6, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Зуйко Иван Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Лаборатории механических свойств наноструктурных и жаропрочных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Малофеев Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник Лаборатории механических свойств наноструктурных и жаропрочных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Михайлов Михаил Георгиевич – лаборант-исследователь Лаборатории механических свойств наноструктурных и жаропрочных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Калиненко Александр Андреевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Лаборатории механических свойств наноструктурных и жаропрочных материалов, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan S. Zuiko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of Laboratory of Mechanical Properties of Nanoscale Materials and Superalloys, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Sergey S. Malopheyev – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher of Laboratory of Mechanical Properties of Nanoscale Materials and Superalloys, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Mikhail G. Mikhailov – Research Assistant of Laboratory of Mechanical Properties of Nanoscale Materials and Superalloys, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexandr A. Kalinenko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher of Laboratory of Mechanical Properties of Nanoscale Materials and Superalloys, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Исследование локально-неравновесного процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода

Пашин А. В. , Крюков Ю. А. , Михеева Г. В. , Кудинов И. В. , Амиров Т. Ф. , Пименов А. А. 
(Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малаем)

Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
galinn21@list.ru

Аннотация. Предложен метод идентификации источника теплоты, возникающего в скин-слое реактора генерации водорода, заполненного жидким металлом, при его индукционном нагреве. Благодаря использованию предложенного метода возможно при известной толщине скин-слоя найти мощность возникающего в нем источника теплоты, при которой обеспечивается нагрев метана до заданной температуры пиролиза и время выхода на стационарное состояние. Метод основан на использовании уравнения теплового баланса и локально-неравновесной математической модели, что позволяет учесть релаксационные свойства материалов. В результате многовариантных численных расчётов определена мощность внутреннего источника теплоты, необходимая для достижения рабочей средой реактора (жидким металлом) температуры пиролиза. Разработанная программа позволяет выполнять моделирование процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода.

Ключевые слова: пиролиз метана, скин-слой, нелокальная модель теплообмена, коэффициент релаксации, идентификация источника теплоты, численное решение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FSSE-2024-0014) в рамках государственного задания Самарского государственного технического университета.

Для цитирования: Пашин А. В., Крюков Ю. А., Михеева Г. В., Кудинов И. В., Амиров Т. Ф., Пименов А. А. 2024. Исследование локально-неравновесного процесса индукционного нагрева металла в реакторе генерации водорода. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 153–162. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-153-162

Original Research

Study of the Locally Nonequilibrium Process of Induction Heating of Metal in a Hydrogen Generation Reactor

Alexey V. Pashin , Yuriy A. Kryukov , Galina V. Mikheeva ,
Igor V. Kudinov , Timur F. Amirov , Andrey A. Pimenov 
(Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay)

Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia
galinn21@list.ru

Abstract. A method is proposed for identifying the heat source that arises in the skin layer of a hydrogen generation reactor filled with liquid metal during its induction heating. Thanks to the use of the proposed method, it is possible, with a known thickness of the skin layer, to find the power of the heat source arising in it, which ensures heating of methane to a given pyrolysis temperature and the time to reach a steady state. The method is based on the use of the heat balance equation and a locally nonequilibrium mathematical model, which makes it possible to take into account the relaxation properties of materials. As a result of multivariate numerical calculations, the power of the internal heat source required for the reactor working medium (liquid metal) to reach the pyrolysis temperature was determined. The developed program makes it possible to simulate the process of induction heating of metal in a hydrogen generation reactor.

Keywords: Methane Pyrolysis, Skin Layer, Nonlocal Heat Transfer Model, Relaxation Coefficient, Heat Source Identification, Numerical Solution

Acknowledgements: The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. FSSE-2024-0014) as part of the state task of the Samara State Technical University.

For citation: Pashin A. V., Kryukov Yu. A., Mikheeva G. V., Kudinov I. V., Amirov T. F., Pimenov A. A. 2024. Study of the Locally Nonequilibrium Process of Induction Heating of Metal in a Hydrogen Generation Reactor. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 153–162. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-153-162

1. Введение. Пиролиз метана используется для получения водорода и наночастиц углерода (нанотрубки, фуллерены, карбин и др.). Преимущество данного способа получения водорода по сравнению с другими (электролиз воды, паровая конверсия метана, газификация угля) состоит в том, что он не сопровождается выбросами в атмосферу углекислых газов [1, 2, 3]. Одним из перспективных и наиболее исследуемых в последнее время способов пиролиза метана является его нагрев в реакторах путем пропускания через слой расплавленного металла (олово, свинец, алюминий и др.). Температура нагрева, в зависимости от эффективности применяемых катализаторов, может превышать 1000 °С. Среди различных способов нагрева используют нагрев электромагнитным полем, получаемым с помощью индуктора [4, 5]. Известно, что при таком способе нагрева внутри различных материалов (в том числе и неэлектропроводных) возникают источники теплоты. В случае электропроводных сред (металлы) электромагнитное поле проникает лишь на глубину весьма малой толщины скин-слоя, в котором и происходит наведение источников теплоты. Теоретическое определение их мощности весьма затруднительно, так как связано с решением уравнений электромагнитного поля. В настоящей работе предлагается метод их определения, основанный на выполнении теплового баланса, в котором при заданной толщине скин-слоя находится такая мощность возникающего в нем источника теплоты, при которой обеспечивается нагрев метана до заданной температуры пиролиза с учетом потерь теплоты в окружающую среду через слой тепловой изоляции и с уходящим метаном.

2. Физическая модель объекта исследования. Установки, используемые при пиролизе метана, представляют многослойные плоские или цилиндрические конструкции (рис. 1), включающие следующие элементы и рабочие среды: расплавленный металл 1; кварцевый или керамический стакан 2; слой тепловой изоляции 3; трубка для подачи метана 4; индуктор 5; метан в виде пузырьков, проходящих через слой расплавленного металла 6; трубка отвода водорода 7.

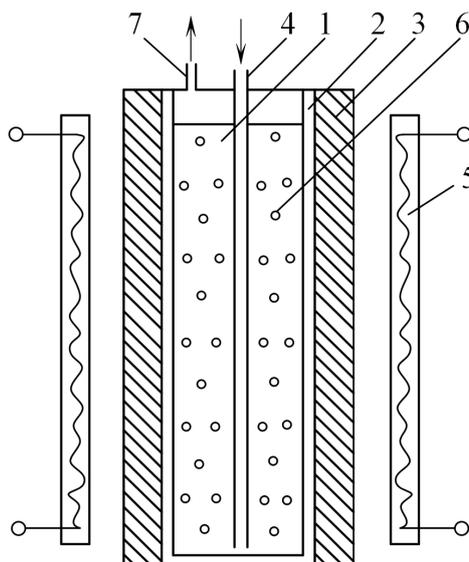


Рис. 1. Схема установки для пиролиза метана
Fig. 1. Installation diagram for methane pyrolysis

Нагрев металла 1, его расплавление и доведение до температуры пиролиза происходит только за счет источников теплоты, инициируемых индуктором 5 в скин-слое металла, прилегающим к внутренней поверхности кварцевого стакана 2. Применительно к данной конструкции необходимо определить температурное состояние расплавленного металла при его прогреве до температуры пиролиза метана.

3. Математическая постановка задачи. В связи с тем, что индукционный источник, как известно, действует в приповерхностном слое металла, а его теплопроводность несоизмеримо выше теплопроводности изоляции, будем рассматривать плоскую одномерную задачу теплопроводности.

3.1. Классическая локально-равновесная математическая модель. Уравнение теплопроводности для нагреваемого металла, включает один источник и два стока теплоты

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + W(x) - \omega - q_1(T), \quad (1)$$

где T – температура, K ; x – координата, m ; t – время, s ; C – теплоёмкость, $Dж/(кг \cdot K)$; ρ – плотность $кг/м^3$; λ – коэффициент теплопроводности, $Вт/(м \cdot K)$; $W(x) = Q_0 \exp(-x/\mu)$ – мощность источников теплоты в пределах толщины скин-слоя, $Вт/м^3$; Q_0 – мощность источника теплоты при $x = 0$, $Вт/м^3$; μ – толщина скин-слоя, m ; ω – сток теплоты, передаваемой метану (ввиду малой величины

и для удобства расчётов принят const), Vm/m^3 ; $q_1(T) = q_0[1 + \sigma(T - T_0)]$ – основные потери теплоты с поверхности соленоида индуктора и с охлаждающей жидкостью, циркулирующей в его внутреннем контуре, Vm/m^3 ; q_0 – сток теплоты в окружающую среду при $T = T_0$ ($T_0 > T_{cp}$), Vm/m^3 ; T_0 – начальная температура, K; T_{cp} – температура окружающей среды, K; σ – коэффициент потерь теплоты, $1/K$.

Очевидно, что при $T > T_0$ потери теплоты в окружающую среду возрастают с увеличением температуры. Количество теплоты ω , передаваемой нагреваемому метану, определялось с учётом его расхода.

Начальное и граничные условия к уравнению 1 имеют вид

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где δ – толщина слоя олова, м.

Ввиду того, что в уравнении (1) учтены все источники и стоки теплоты, то есть учитывается полный тепловой баланс установки, то граничные условия должны быть условиями тепловой изоляции вида (3).

Путем численного решения задачи (1 – 3) при известных стоках теплоты ω и $q_1(T)$ можно найти такую мощность источника теплоты $W(x)$ в скин-слое, при которой будет обеспечена наперёд заданная температура металла, достаточная для пиролиза метана. Следует, однако, отметить, что уравнение (1) является параболическим уравнением теплопроводности, которое, как известно, описывает бесконечную скорость распространения теплоты. Такая модель неадекватно описывает высокоинтенсивные быстропротекающие процессы, время изменения которых сопоставимо с временами релаксации, а также любые другие процессы при малых и сверхмалых значениях времени [6, 7].

3.2. Локально-неравновесная математическая модель, основанная на теории двухфазного запаздывания. Так как процесс наведения источников теплоты в скин-слое и процесс теплообмена в металле будут высокоинтенсивными и быстропротекающими, то возникает необходимость учёта релаксационных свойств материалов (пространственно-временной нелокальности) [6, 7, 8, 9]. Как известно, классические модели процессов переноса тепла, массы, импульса и проч. основаны на параболических дифференциальных уравнениях, в которых не учитываются релаксационные свойства материалов [10, 11, 12]. Вывод этих уравнений базируется на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды, согласно которым в любом малом элементе среды, сопоставимом с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (электронов, ионов, фононов и др.), наблюдается состояние локального равновесия, несмотря на то, что в системе в целом имеют место градиенты потенциалов исследуемых величин. Такое допущение возможно лишь в случае, когда скорость нарушения равновесия, обусловленного краевыми условиями, намного меньше скорости достижения локального равновесия. Поэтому модели, в основе которых лежит принцип локального равновесия, приводят к бесконечным скоростям распространения искомых функций. И, в частности, бесконечная скорость распространения теплоты, описываемая параболическим уравнением теплопроводности, связана с тем, что при его выводе используется классическая формула закона Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

в которой тепловой поток q и градиент температуры $\partial T/\partial x$ не разделены во времени. Поэтому любое изменение $\partial T/\partial x$ приводит к мгновенному изменению q . Так как в любых реальных физических процессах не могут реализовываться мгновенные изменения каких-либо параметров, то, следовательно, уравнения, выведенные с использованием соотношения (4), будут адекватны этим процессам лишь в определенном диапазоне изменения пространственно-временных переменных. С целью учёта скоростей изменения теплового потока и градиента температуры запишем формулу (4) в виде [6, 7]

$$q + \tau_r \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \right], \quad (5)$$

где τ_r – феноменологический коэффициент (время свободного пробега микрочастиц – носителей тепловой энергии), с.

Уравнение (5) получается путем разложения закона Фурье (4) в бесконечный ряд Тейлора по степеням τ и ограничением первыми слагаемыми разложения, что позволяет учесть конечную скорость распространения теплоты.

Выражая q из (5) и подставляя в уравнение теплового баланса

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + W(x) - \omega - q_0[1 + \sigma(T - T_0)], \quad (6)$$

находим

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \tau_r \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) + \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right] + W(x) - \omega - q_0 [1 + \sigma(T - T_0)]. \quad (7)$$

Выражая $\partial q/\partial x$ из (6) и подставляя в (7), получаем

$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r C\rho \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right] + W(x) - \omega - q_0 [1 + \sigma(T - T_0)] - \sigma \tau_r q_0 \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (8)$$

Соотношение (8) представляет уравнение, выведенное с учётом пространственно-временной нелокальности (двухфазного запаздывания).

Начальные и граничные условия к уравнению (8) будут

$$T(x, 0) = T_0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial T(\delta, t)}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T}{T_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_r = \frac{a\tau_r}{\delta^2}; \quad \alpha = \frac{Q_0\delta^2}{T_0\lambda}; \quad \beta = \frac{\delta}{\mu}; \quad \gamma = \frac{\delta^2}{T_0\lambda} [\omega + q_0(1 - \sigma)]; \quad \chi = \frac{\sigma q_0\delta^2}{\lambda}, \quad (13)$$

где Θ, ξ, Fo – соответственно, безразмерные температура, координата, время; $\alpha, \beta, \gamma, \chi$ – безразмерные комплексы.

Задача (8) – (12) с учетом принятых обозначений (13) будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_r \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} + \alpha e^{-\beta \xi} - \gamma - \chi \left[\text{Fo}_r \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \Theta \right] \quad (14)$$

$$(\text{Fo} > 0, 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0. \quad (18)$$

4. Численный метод решения. Для решения задачи (14) – (18) использовался метод конечных разностей [13].

По направлению Fo узлы распределены равномерно с шагом h_t . Ввиду того, что источник сосредоточен в узкой пространственной области слева (ближе к краю $\xi = 0$), на единичном пространственном отрезке необходимо построить неравномерную сетку (рис. 2).

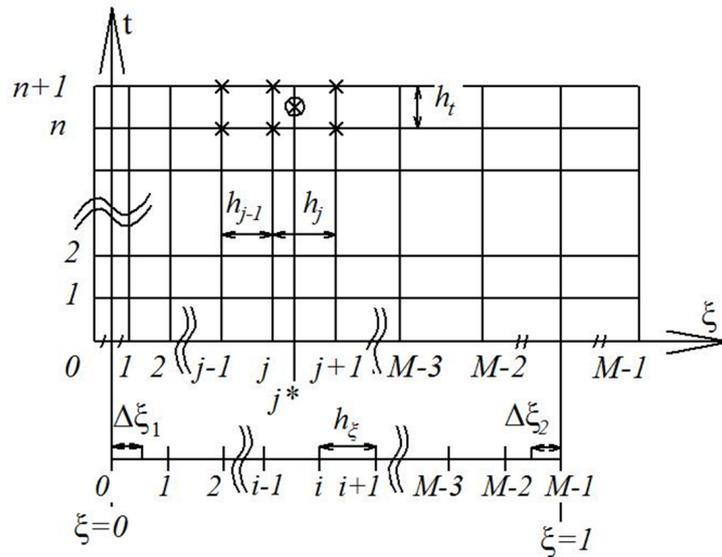


Рис. 2. Конечно-разностная сетка и шаблон для аппроксимации
 Fig. 2. Finite-difference mesh and template for approximation

Для упрощения аппроксимации граничных условий второго рода (17), (18) неравномерную по пространству сетку необходимо предусмотреть такой, чтобы координаты $\xi = 0$ и $\xi = 1$ лежали в середине первого и последнего шагов сетки (в середине между узлами $j = 0, j = 1$ и $j = M - 2, j = M - 1$) соответственно. Изменение размера шагов сетки подчиним экспоненциальному закону.

В принятых условиях неравномерная сетка строится следующим образом. Рассмотрим функцию $e^{a\xi}$, заданную на единичном отрезке $\xi \in [0, 1]$ с тем же количеством равномерно расположенных узлов $i = 0, 1, \dots, M - 2, M - 1$ (крайние узлы расположены в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ соответственно). Тогда шаг равномерной сетки будет $h_\xi = 1/M - 1$.

Выберем на отрезке $[0, h_\xi]$ равновесную точку (площади под графиком функции $e^{a\xi}$ слева и справа от точки на выбранном отрезке равны), которую обозначим $\Delta\xi_1$:

$$\int_0^{\Delta\xi_1} e^{a\xi} d\xi = \int_{\Delta\xi_1}^{h_\xi} e^{a\xi} d\xi \quad (19)$$

Проинтегрировав (19) и разрешая получившееся равенство относительно $\Delta\xi_1$, получим:

$$\Delta\xi_1 = \ln\left(\frac{e^{ah_\xi} + 1}{2}\right)^{1/a}, \quad (20)$$

Аналогично определим на отрезке $[1 - h_\xi, 1]$ равновесную точку $\Delta\xi_2$:

$$\Delta\xi_2 = \ln\left(\frac{2}{e^{ah_\xi} + 1}\right)^{1/a} \quad (21)$$

Определим нормирующий интеграл:

$$S = \int_{\Delta\xi_1}^{1-\Delta\xi_2} e^{a\xi} d\xi = \frac{e^{a(1-\Delta\xi_2)} - e^{a\Delta\xi_1}}{a}. \quad (22)$$

Найдём интеграл на каждом отрезке $[i - 1, i]$:

$$S_i = \int_{h_\xi(i-1)}^{h_\xi i} e^{a\xi} d\xi = \frac{e^{ah_\xi i} - e^{ah_\xi(i-1)}}{a}, \quad i = 1, 2, \dots, M - 1 \quad (23)$$

Определяя последовательно значения выражений (20), (23), найдём координату нулевого и первого узлов неравномерной сетки:

$$-\xi_0 = \xi_1 = \frac{S_1}{S} = h_0. \quad (24)$$

Далее по простой зависимости определяются оставшиеся координаты узлов неравномерной сетки:

$$\xi_j = \xi_{j-1} + h_{j-1}, \quad h_{j-1} = \frac{S_j}{S}, \quad j = 2, \dots, M - 1 \quad (25)$$

Отметим, что построенная по формулам (20) – (25) экспоненциальная монотонно возрастающая сетка отвечает естественному требованию о стремлении максимального шага сетки к нулю при безграничном росте числа её узлов, поскольку в (23) $S_i \rightarrow 0$ при $h_\xi \rightarrow 0$ ($M \rightarrow \infty$).

На предложенной сетке локальная аппроксимация слагаемых в левой части уравнения (14) в точке (n, ξ_{j^*}) , $\xi_{j^*} = (\xi_{j-1} + \xi_j + \xi_{j+1})/3$, будет иметь вид (обозначения сеточных и непрерывных функций совпадают)

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Fo_r \frac{\partial^2 \theta}{\partial Fo^2} \approx \frac{\theta_{j^*}^{n+1} - \theta_{j^*}^{n-1}}{2h_t} + Fo_r \frac{\theta_{j^*}^{n+1} - 2\theta_{j^*}^n + \theta_{j^*}^{n-1}}{h_t^2}. \quad (26)$$

При неравномерных шагах локальная аппроксимация второй частной производной в точке $(n+1, \xi_{j^*})$ с порядком $O(h_j^2)$ получается по формуле

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \approx \frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \left[\frac{\theta_{j+1}^{n+1} - \theta_j^{n+1}}{h_j} - \frac{\theta_j^{n+1} - \theta_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right]. \quad (27)$$

Значение функции θ_{j^*} на произвольном временном слое будет определяться следующим выражением:

$$\theta_{j^*} = \theta_j + D_h(\theta_{j+1} - \theta_{j-1}); D_h = \frac{e^{ah_\xi} - 1}{3(e^{ah_\xi} + 1)}. \quad (28)$$

Аппроксимация смешанной частной производной в точке (n, ξ_{j^*}) записывается следующим образом

$$\frac{\partial^3 \theta}{\partial Fo \partial \xi^2} \approx \frac{1}{2h_t} \left(\frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \left[\frac{\theta_{j+1}^{n+1} - \theta_j^{n+1}}{h_j} - \frac{\theta_j^{n+1} - \theta_{j-1}^{n+1}}{h_{j-1}} \right] - \frac{2}{(h_j + h_{j-1})} \left[\frac{\theta_{j+1}^{n-1} - \theta_j^{n-1}}{h_j} - \frac{\theta_j^{n-1} - \theta_{j-1}^{n-1}}{h_{j-1}} \right] \right). \quad (29)$$

Поскольку в выражениях (26) – (29) используются только три узла для аппроксимации неизвестных функций на $n+1$ временном слое, то задачу для отыскания неизвестной функции можно свести к системе уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

Локальная аппроксимация граничных условий симметрии (17), (18) с порядком $O(h_j^2)$ записывается в виде

$$\theta_0^{n+1} = \theta_1^{n+1}; \theta_M^{n+1} = \theta_{M-1}^{n+1}; (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (30)$$

Начальные условия (15), (16) аппроксимируются следующим образом

$$\theta_j^0 = 1; \theta_j^1 = \theta_j^0; j = 0 \dots M. \quad (31)$$

Отметим, что условия (30) имеют предельно простой вид в силу особенности симметричного расположения граничных узлов введенной сетки относительно координат $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Предложенная схема локально аппроксимирует дифференциальную задачу (14) – (18) с первым порядком точности по временной координате и со вторым, по пространственной. По описанному выше методу построен алгоритм и составлена программа в Visual Studio C++. Программа отлажена, практическая сходимость полученного решения контролировалась апостериорно на последовательности сгущающихся сеток. Результаты, представленные в работе, получены при $M = 1001$, $h_t = 10^{-3}$, $a = 7$.

Были заданы следующие исходные данные для проведения вычислительных экспериментов: $\beta = 27.5$; $\gamma = 0.057$; $\chi = 0.02$.

5. Обсуждение результатов. Полученные расчётные результаты позволяют определить количество тепловой энергии, генерируемой индукционным нагревателем для обеспечения стационарного режима в реакционной зоне водородного реактора. На рис. 3 приведены зависимости температуры на границе расчетной области от времени для трёх значений безразмерного источника теплоты α . Из анализа рис. 4 – 6 следует, что постоянный по времени тепловой источник, действующий в небольшой окрестности левой границы, создает в процессе прогрева слоя металла (до момента достижения стационарного режима теплообмена) перепад температуры по его ширине, составляющий 25°C ($\Theta = 0.06$) и сохраняющийся до наступления стационарного состояния. В стационарном режиме работы, который достигается при $Fo \approx 300$ ($t = 3\text{ч}$), температура в слое олова для всех трёх численно определенных безразмерных мощностей индукционного источника теплоты устанавливается практически одинаковой по толщине и равной $\Theta = 2$ ($T = 800\text{K}$) при $\alpha = 2.7$, $\Theta = 2.5$ при $\alpha = 3$ и $\Theta = 3$ при $\alpha = 3.3$, что объясняется высокой теплопроводностью слоя олова. В стационарном режиме количество теплоты, инициируемое в скин-слое,

сравнивается с суммой двух теплот – затрачиваемой на нагрев метана и поступающей в виде потерь в окружающую среду. Таким путем идентифицирована мощность источника теплоты расплавленного металла в скин-слое.

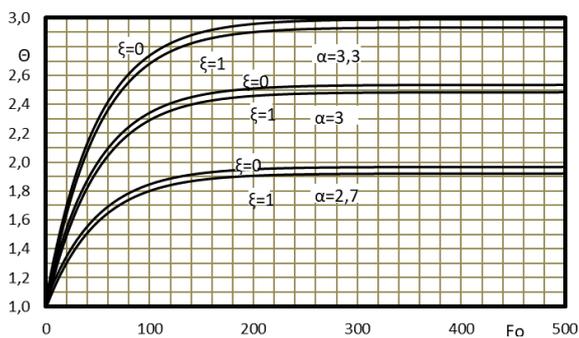


Рис. 3. Зависимость температуры от времени на границах расчётной области при разной величине безразмерного источника α . $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 3. Dependence of temperature on time at the boundaries of the computational domain for different sizes of the dimensionless source α . $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

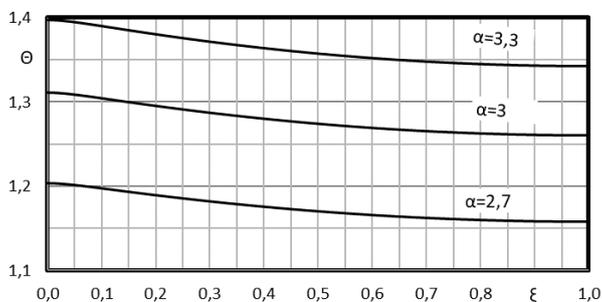


Рис. 4. Профиль температуры при разных α . $Fo = 10$; $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 4. Temperature profile at different α . $Fo = 10$; $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

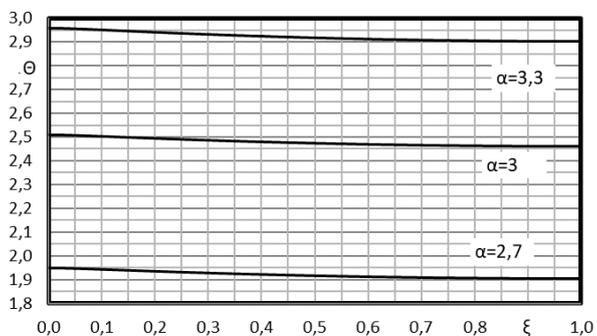


Рис. 5. Профиль температуры при разных α . $Fo = 200$; $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 5. Temperature profile at different α . $Fo = 200$; $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

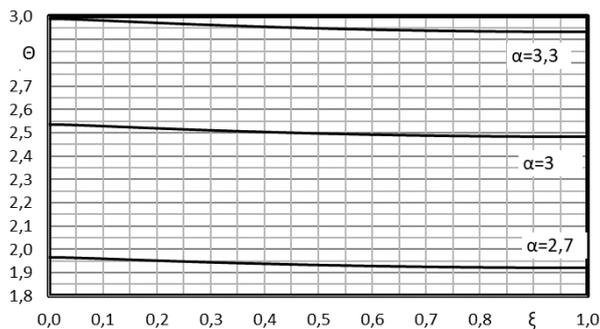


Рис. 6. Профиль температуры при разных α . $Fo = 500$; $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Fig. 6. Temperature profile at different α . $Fo = 500$; $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$

Для поддержания стационарного режима работы водородного реактора при $T = 800\text{ K} - 4.2 \cdot 10^7\text{ Вт/м}^3$, при $T = 1000\text{ K}$ необходимо $4.7 \cdot 10^7\text{ Вт/м}^3$ и при $T = 1200\text{ K}$ требуется $5.2 \cdot 10^7\text{ Вт/м}^3$ мощности объемного источника, создаваемого электромагнитным полем индукционной печи.

Проведено исследование зависимости температурного состояния жидкого металла от величины безразмерного коэффициента релаксации Fo_r . Так, при очень малых его значениях ($Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$, рис. 3 – 6) температурное состояние металла может быть описано с помощью классического параболического уравнения, не учитывающего релаксационные эффекты и приводящего к точно таким же расчётным результатам. Однако, если рассматривать жидкости с большими коэффициентами релаксации (например, интерметаллические соединения [14]) или с меньшими толщинами слоя, то наблюдаются следующие особенности процесса теплообмена. Температурные кривые приобретают изгиб в начальные моменты времени (рис. 7, 8), что связано с учётом конечной скорости распространения теплоты и указывает на инерционность принятия тепловой энергии от электромагнитного источника. То есть теплота принимается не мгновенно, а в течение определенного промежутка времени, зависящего от релаксационных свойств среды. Второй особенностью процесса теплообмена является увеличение времени выхода на стационарное состояние. Например, при $Fo_r = 2.37 \cdot 10^{-9}$ (рис. 2 – 6) время выхода на стационарное состояние составило $Fo_{ст} = 300$, при $Fo_r = 23.68$ (рис. 7) стационарное состояние было достигнуто при $Fo_{ст} = 400$, а при $Fo_r = 71$ (рис. 8) потребовалось время $Fo_{ст} = 500$.

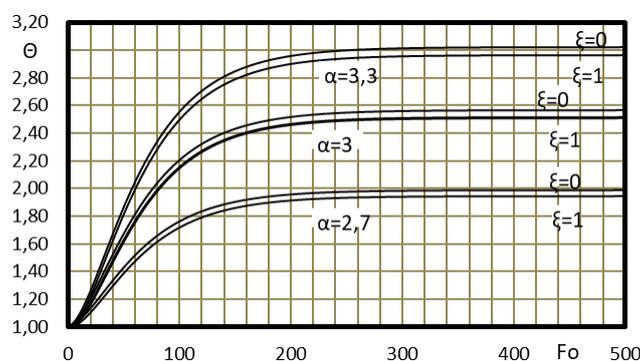


Рис. 7. Зависимость температуры от времени на границах расчётной области при разной величине безразмерного источника α . $Fo_r = 23.68$

Fig. 7. Dependence of temperature on time at the boundaries of the computational domain for different sizes of the dimensionless source α . $Fo_r = 23.68$

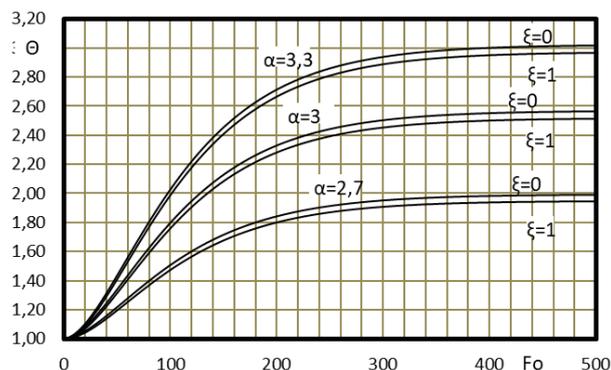


Рис. 8. Зависимость температуры от времени на границах расчётной области. $Fo_r = 71$

Fig. 8. Dependence of temperature on time at the boundaries of the computational domain. $Fo_r = 71$

Заключение

1. Используя предложенную в настоящей работе математическую модель теплообмена в реакторе пиролиза метана, выполнена идентификация источника теплоты, возникающего в скин-слое металла при его индукционном нагреве. Модель включает нелокальное уравнение теплопроводности, содержащее три источника теплоты, первый из которых учитывает мощность внутреннего источника, инициируемого индуктором в скин-слое; второй – количество теплоты, затрачиваемое на нагрев метана; третий – потери теплоты в окружающую среду через слой тепловой изоляции. Мощность первого источника, при известных втором и третьем, определялась из итеративного решения краевой задачи таким образом, чтобы в установившемся состоянии температура расплавленного олова находилась в пределах заданной величины, достаточной для проведения пиролиза метана.

2. По предложенному методу построен алгоритм и составлена программа в пакете Visual Studio C++. В результате многовариантных численных расчётов показано, что для выхода на стационарный режим

нагрева реактора, мощность внутреннего источника теплоты, инициируемого в скин-слое, при заданных количествах теплот, затрачиваемых на нагрев металла и на потери в окружающую среду, должна быть равной $4.2 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$ для 800 К, $4.7 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$ для 1000 К и $5.2 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$ для 1200 К.

3. Разработанная компьютерная программа для моделирования процессов нагрева металла в реакторах генерации водорода позволяет произвести предварительную оценку температурного состояния рабочей среды (жидкого металла), определить оптимальные режимы нагрева и поддержания необходимой температуры, тем самым сократить затраты материальных и энергетических ресурсов при проведении экспериментальных работ.

4. Учет релаксационных свойств среды позволяет исследовать инерционность процесса теплообмена в задачах нагрева жидких металлов и их сплавов в начальные моменты времени. В отличие от классического параболического уравнения теплопроводности, рассмотренное в работе локально-неравновесное уравнение позволяет определить промежуток времени, необходимый для принятия тепловой энергии от электромагнитного источника теплоты. Показано, что время выхода на стационарное состояние, в случае учета коэффициентов релаксации среды, увеличивается.

Список литературы

1. Баранов Н.Н. Нетрадиционные источники и методы преобразования энергии. М.: Издательский дом МЭИ, 2012. 383 с.
2. Фортвов В.Е., Попель О.С. Энергетика в современном мире. М.: Издательский дом «Интеллект». 2011. 168 с.
3. Ячиков И.М., Миронова Г.А., Петин С.Н. Математическое моделирование теплового состояния расплава в реакторе с кипящим слоем. *Приложение математики в экономических и технических исследованиях*. 2007;1:170–176.
4. Подольцев А.Д., Кучерявая И.М. Мультифизическое моделирование процессов индукционного нагрева и плавления проводящих заготовок с концентратором магнитного потока. *Электронное моделирование*. 2015;37(4):97–107.
5. Письменный А.С., Баглай В.М., Письменный А.А., Рымар С.В. Интенсификация потоков расплавленного металла в жидкой ванне при индукционном нагреве. *Вакуумно-индукционная плавка*. 2010;(2):34–39.
6. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. *Инженерно-физический журнал*. 1965;9(3):287–304.
7. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук*. 1997;167(10):1096–1106.
8. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» Институт компьютерных исследований, 2006.
9. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. *Успехи физических наук*. 1991;161(3):5–29.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. 1967. М.: Высшая школа. 600 с.
11. Власов В.В., Раутиан Н.А. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*. 2011;(28):75–113.
12. Rossikhin Yu.A., Shitikov V.V. The hyperbolic model with a small parameter for studying the process of impact of a thermoelastic rod against a heated rigid barrier. *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(41):2037–2050.
13. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
14. Ghazanfarian J., Shomali Z., Abbassi A. Macro- to nanoscale heat and mass transfer: the lagging behavior. *International Journal of Thermophysics*. 2015;36:1416–1467.

References

1. Baranov NN. Unconventional sources and methods of energy conversion. Moscow: MPEI Publishing House; 2012. 383 p. (In Russian)
2. Fortov VE., Popel OS. Energy in the modern world. Moscow: Publishing house «Intellect». 2011. 168 p. (In Russian)
3. Yachikov IM., Mironova GA., Petin SN. Mathematical modeling of the thermal state of the melt in a fluidized bed reactor *Application of mathematics in economic and technical research*. 2007;(1):170–176. (In Russian)
4. Podoltsev AD., Kucheryavaya IM. Multiphysics modeling of the processes of induction heating and melting of conductive workpieces with a magnetic flux concentrator *Electronic modeling*. 2015;37(4):97–107. (In Russian)
5. Pismenny AS., Baglay VM., Pismenny AA., Rymar SV. Intensification of molten metal flows in a liquid bath during induction heating *Vacuum-induction melting*. 2010;(2):34–39. (in Russian)
6. Lykov AV. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the study of heat and mass transfer *Engineering and Physical Journal*. 1965;9(3):287–304. (In Russian)
7. Sobolev SL. Local non-equilibrium transport models *Physics-Uspeski*. 1997;40:1043–1053. (in Russian)

8. Zhou D., Casas-Basques X., Lebon J. Extended irreversible thermodynamics. Moscow – Izhevsk: Research Center «Regular and Chaotic Dynamics» Institute of Computer Research, 2006. (In Russian)
9. Sobolev S.L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium *Soviet Physics Uspekhi*. 1991;34(3):217–229. (in Russian)
10. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. Moscow: Higher school; 1967. 600 p. (In Russian)
11. Vlasov V.V., Rautian N.A. Well-defined solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations *Journal of Mathematical Sciences*. 2011;179:390–414.
12. Rossikhin Yu.A., Shitikov V.V. The hyperbolic model with a small parameter for studying the process of impact of a thermoelastic rod against a heated rigid barrier *Applied Mathematical Sciences*. 2016;10(41):2037–2050.
13. Kalitkin N.N. Numerical methods. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
14. Ghazanfarian J., Shomali Z., Abbasi A. Macro- to nanoscale heat and mass transfer: the lagging behavior *International Journal of Thermophysics*. 2015;36:1416–1467.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 05.03.2024

Received March 5, 2024

Поступила после рецензирования 20.04.2024

Revised April 20, 2024

Принята к публикации 26.04.2024

Accepted April 26, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Пашин Алексей Владимирович – старший преподаватель кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Крюков Юрий Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий инженер кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Михеева Галина Вениаминовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Кудинов Игорь Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Амиров Тимур Фархадович – ассистент кафедры газопереработки, водородных и специальных технологий, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

Пименов Андрей Александрович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры газопереработки, водородных и специальных технологий, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexey V. Pashin – Senior Lecturer, Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

Yuriy A. Kryukov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lead Engineer at the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

Galina V. Mikheeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

Igor V. Kudinov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

Timur F. Amirov – Assistant at the Department of Gas Processing, Hydrogen and Special Technologies, Samara State Technical University, Samara, Russia

Andrey A. Pimenov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Gas Processing, Hydrogen and Special Technologies, Samara State Technical University, Samara, Russia

[К содержанию](#)

Формирование полос макролокализованной деформации вблизи концентраторов напряжения в алюминий-магниевом сплаве

Шибков А. А. , Федоров В. А. , Золотов А. Е. , Кочегаров С. С. , Шибков Е. А. , Желтова В. М. 
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина,
Россия, 443100, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
shibkovaleks@mail.ru

Аннотация. Спонтанная автолокализация деформации в деформируемых металлах и сплавах представляет негативное явление, которое ухудшает их эксплуатационные физико-химические, прочностные, антикоррозионные свойства и может вызвать внезапное разрушение. Особенно эта проблема важна для высокотехнологичных алюминиевых сплавов, в которых наблюдаются полосы локализованной деформации Чернова – Людерса и полосы Портевена – Ле Шателье. В работе методом высокоскоростной видеосъемки и компьютерной обработки цифровых изображений исследуется динамика и морфология деформационных полос, инициированных концентраторами напряжения различной природы в алюминий-магниевом сплаве, деформируемом в условиях одноосного растяжения. Установлено, что даже коррозионные пятна, мелкие царапины и отпечатки индентора способны инициировать зарождение и распространение в объеме материала полос макролокализованной деформации, взаимодействие которых вызывает развитие магистральной трещины.

Ключевые слова: эффект Портевена – Ле Шателье, концентратор напряжения, полоса деформации

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-79-01119) на оборудовании Центра коллективного пользования ТГУ им. Г. Р. Державина.

Для цитирования: Шибков А. А., Федоров В. А., Золотов А. Е., Кочегаров С. С., Шибков Е. А., Желтова В. М. 2024. Формирование полос макролокализованной деформации вблизи концентраторов напряжения в алюминий-магниевом сплаве. *Прикладная математика & Физика*, 56(2): 163–170. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-163-170

Original Research

Formation of Macrolocalized Deformation Bands Near Stress Concentrators in an Aluminum-Magnesium Alloy

Alexander A. Shibkov , Victor A. Fedorov , Alexander E. Zolotov ,
Sergey S. Kochegarov , Eugene A. Shibkov , Valeria M. Zheltova 
Derzhavin Tambov State University,
33 Internatsional'naya St., Tambov, 443100, Russia
shibkovaleks@mail.ru

Abstract. Spontaneous self-localization of deformation in deformable metals and alloys is a negative phenomenon that worsens their operational physicochemical, strength, and anti-corrosion properties and can cause sudden destruction. This problem is especially important for high-tech aluminum alloys, in which localized Chernov–Luders deformation bands and Portevin – Le Chatelier bands are observed. In this work, using high-speed video recording and computer processing of digital images, we study the dynamics and morphology of deformation bands initiated by stress concentrators of various natures in an aluminum-magnesium alloy deformed under uniaxial tension conditions. It has been established that even corrosion pits, small scratches and indenter imprints are capable of initiating the nucleation and propagation of macrolocalized deformation bands into the material volume, the interaction of which causes the development of a main crack.

Keywords: Methane Portevin – Le Chatelier Effect, Stress Concentrator, Deformation Band

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-79-01119) with the use of equipment of the Center of Collective Use of Tambov State University.

For citation: Shibkov A. A., Fedorov V. A., Zolotov A. E., Kochegarov S. S., Shibkov E. A., Zheltova V. M. 2024. Formation of Macrolocalized Deformation Bands Near Stress Concentrators in an Aluminum-Magnesium Alloy. *Applied Mathematics & Physics*, 56(2): 163–170. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-2-163-170

1. Введение. Пластическая деформация кристаллических материалов протекает неоднородно и неравномерно на различных масштабных уровнях от атомного до макроуровня. Классификация полос макролокализованной деформации включает полосы Чернова – Людерса, полосы Портевена – Ле Шателье (ПЛШ), вызывающие прерывистую (скачкообразную) деформацию металлов и макрополосы в структуре шейки перед разрывом образца [1, 2]. Многие промышленные алюминиевые сплавы, используемые в автопроме, авиакосмической отрасли и химическом машиностроении, проявляют эффект ПЛШ в определенном температурно-скоростном диапазоне. Конструкции и изделия из таких сплавов рассчитывают на основе теории упругости, вместе с тем в условиях эксплуатации они подвергаются различного рода внешним импульсным воздействиям (ударам, столкновениям с частицами вулканического облака и т. д.), способным инициировать зарождение полос макролокализованной деформации. Их выявление и мониторинг представляет трудную проблему, учитывая, что это объемные повреждения, пронизывающие все сечение обшивки аппарата толщиной несколько миллиметров, оставляя след на поверхности в виде шейки глубиной порядка десятка микрон. Полосы макролокализованной деформации ухудшают антикоррозионные свойства алюминиевых сплавов и могут вызвать внезапное развитие магистральной трещины, которая всегда распространяется по деформационной полосе. В настоящей работе экспериментально исследуется роль концентраторов напряжения в зарождении и росте деформационных полос Портевена – Ле Шателье.

2. Материал и методика. Материалом исследования служил промышленный алюминий-магниевого сплава АМг6 (Al-6.15%Mg-0.65%Mn-0.25%Si-0.2%Fe-0.1%Cu, wt.%). Образцы в форме двухсторонних лопаток с размером рабочей части $6 \times 3 \times 0.5$ мм вырезали из холоднокатаного листа, отжигали в течение 1 часа при температуре 450°C и закаливали на воздухе. Средний размер зерна после термообработки составлял около 10 мкм. Образцы растягивали со скоростью $\dot{\epsilon}_0 = 3 \times 10^{-3} \text{c}^{-1}$ в испытательной машине Instron 3344 при комнатной температуре и со скоростью приложенного напряжения $\dot{\sigma}_0 = 0.2 \text{МПа/с}$ в «мягкой» деформационной машине, описанной в [3]. В качестве концентраторов напряжения использовали частичный пропилен, цилиндрические отверстия, трещину, царапину, отпечаток индентора и коррозионное пятно. Для оптического мониторинга деформационных полос использовали скоростную видеосъемку со скоростями от 500 до 20000 кадр/с с помощью цифровой видеокамеры FasTCAM Mini (Photron) в косом освещении поверхности деформируемого образца. Данные видеосъемки обрабатывали с помощью компьютерной программы вычитания последовательных цифровых изображений деформационных полос по методике, описанной в [4].

3. Результаты и обсуждение. Многочисленные экспериментальные исследования деформационных полос ПЛШ в плоских образцах показывают, что в отсутствие концентраторов напряжения эти полосы представляют собой шейки двух типов: полосы 1-типа, пересекающие узкую грань в направлении, составляющем угол φ ($55 - 60$) к оси растяжения, т. е. близким к направлению максимальных касательных напряжений (для изотропного пластически деформируемого материала $\varphi = \arctg \sqrt{2} = 54.44^\circ$ [5]), и под прямым углом – широкую (фронтальную) грань, и полосы 2-типа, которые пересекают под углом φ к оси растяжения фронтальную грань, а под прямым углом – узкую грань [6].

В первой серии экспериментов исследовали *in situ* динамику и морфологию деформационных полос, генерируемых концентратором в виде центрального пропила глубиной 1 мм и шириной 0.7 мм, произведенного, как и другие концентраторы перед отжигом образца. На рис. 1 представлены типичные картины формирования полос ПЛШ при приложенном напряжении $\sigma_0 = 170 \text{МПа}$, превышающем условный предел текучести сплава АМг6 $\sigma_{0.2} = 160 \text{МПа}$.

Первая полоса деформации обычно зарождается от источника на поверхности пропила и растет почти под прямым углом к оси растяжения, т. е. представляет полосу 1-типа. Средняя скорость ее вершины составляет около 2 м/с. После прорастания полосы через все поперечное сечение начинается стадия расширения полосы, а угол ее наклона к оси растяжения падает почти до 70° , т. е. она трансформируется в полосу 2-типа. Активная стадия расширения полосы сопровождается скачком разгрузки системы машина-образец амплитудой около $\Delta\sigma \approx 5 \text{МПа}$. Последующие полосы зарождаются на границе первичной полосы, а полосы третьего поколения – на границах вторичных полос и т. д. Разрушение происходит по одной из полос в области узкого сечения образца, связанного с пропилом.

Динамика макрополос на стадии предразрушения и образования шейки подробно исследована в работах томской школы физиков-прочнистов для сплавов, не демонстрирующих скачкообразную деформацию [7, 8, 9]. Роль макрополос пластической деформации в ходе дальнейшего роста магистральной трещины ранее не исследовалась.

В условиях растяжения образца вершина магистральной трещины является концентратором напряжений. Для полуэллиптической трещины длиной l и радиусом кривизны вершины r коэффициент концентрации напряжений, как известно, равен $k = 1 + 2\sqrt{l/r}$ [10]. Как и в случае пропила, трещина может быть источником деформационных полос, которые формируют макроскопическую пластическую зону вблизи вершины трещины помимо двухлепестковой (мезоскопической) пластической зоны в форме «бабочки» [11]. Это подтверждается видеосъемкой со скоростью 20000 кадр/с процесса развития

магистральной трещины и сопутствующих полос деформации (Рис. 2), из которой следует, что вершина трещины движется скачками, периодически испуская деформационные полосы.

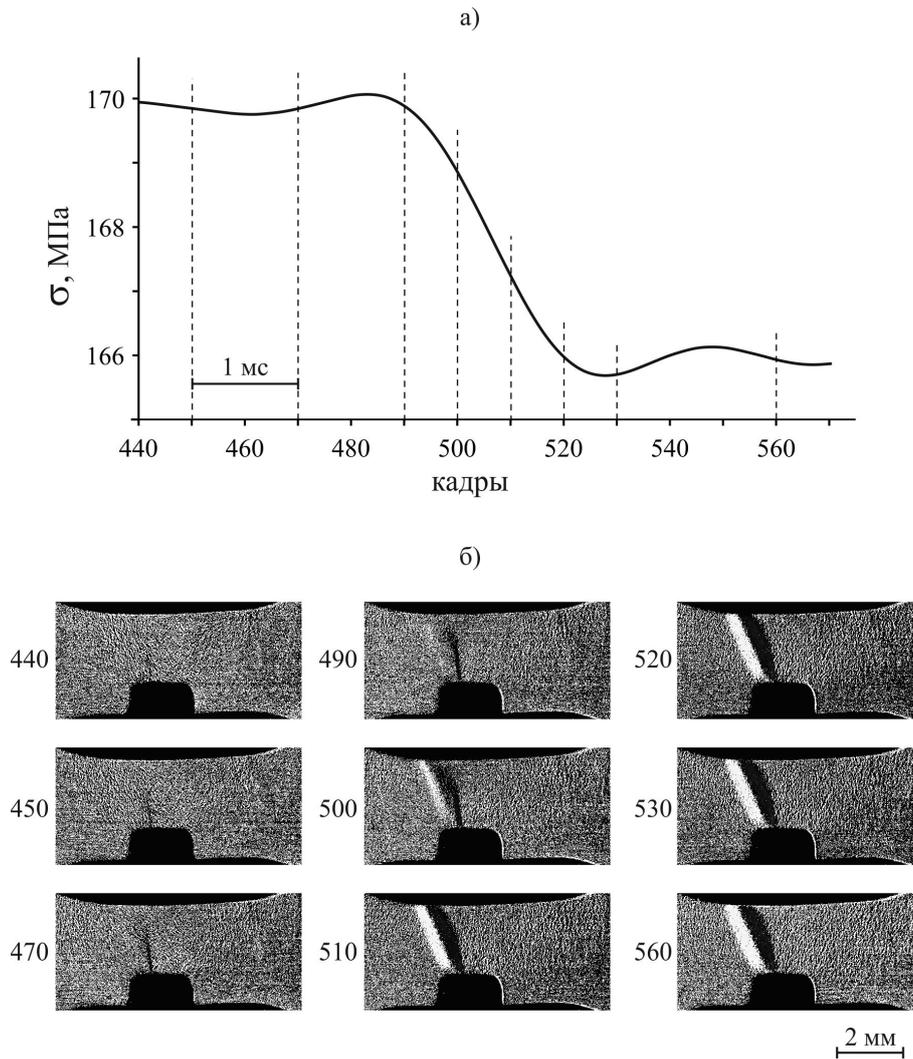


Рис. 1. Скачок разгрузки (а), вызванный процессом зарождения и развития полосы деформации, представленным фрагментом видеопленки (б). Скорость съемки 20000 кадр/с. $\sigma_0 = 170$ МПа.

Числа – номера кадров. Интервал между кадрами 50 мкс

Fig. 1. Stress drop (a), caused by the process of nucleation and development of a deformation band, represented by a fragment of the video film (b). Shooting speed 20000 fps. $\sigma_0 = 170$ МПа.

Numbers are frame numbers. The interval between frames is 50 мкс

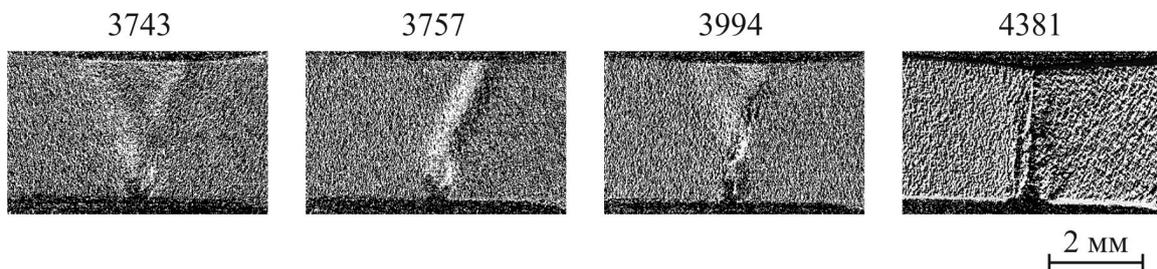


Рис. 2. Фрагмент видеопленки роста магистральной трещины, демонстрирующий генерацию деформационных макрополос в момент остановок вершины трещины. Скорость видеосъемки 20000 кадр/с. Числа – номера кадров

Fig. 2. Fragment of a video film of the growth of a main crack, demonstrating the generation of deformation macrobands at the moment the crack tip stops. Video shooting speed 20000 fps. Numbers are frame numbers

Перед торможением вершина испускает пару сопряженных полос, образующих V-образную структуру с углом 60° между полосами (Рис. 2, кадры 3743 и 3994). Естественно предположить, что трещина тормозится за счет «сваливания» дислокаций полос в вершину трещины и ее затуплению. Вместе с тем в области пересечения полос в сопряженных направлениях максимальных касательных напряжений создаются условия для зарождения микротрещин по механизму Коттрелла [12], а также по механизмам

Зинера – Стро [11, 13] и Гилмана – Рожанского [11] в результате взаимодействия плоского скопления с границей зерна и вскрытия заторможенного скопления, соответственно. Эти механизмы дополняют микроскопические механизмы разрушения вязких материалов, обусловленных образованием пор вблизи включений второй фазы [14, 15], в частности, частиц Al_3Mg_2 в алюминий-магниевом сплаве АМг6 [16]. Рост и слияние этих микротрещин в области пересечения полос подготавливает скачкообразное подрастание трещины. Процесс повторяется, вызывая скачкообразный рост магистральной трещины. Обычно длина скачка соизмерима с шириной полосы (0.5–1 мм), что дает нижнюю оценку скорости трещины в скачке $\sim 10 - 20$ м/с, которая ограничена временным разрешением видеокамеры $\Delta t = 50$ мкс.

Таким образом, вязкая трещина движется скачками на разных масштабных уровнях: макроскопическом, между испусканием вершиной очередной пары сопряженных макрополос, мезоскопическом, за счет слияния микротрещин в области пересечения макрополос и микроскопическом, за счет поглощения деформационных микропор вблизи включений.

Описанная картина «эстафетного» чередования процессов разрушения и пластической релаксации качественно согласуется с результатами работы [17], в которой исследовалась *in situ* в колонне растрового электронного микроскопа совместно с методом акустической эмиссии динамика скачкообразного роста магистральной трещины в модельном материале (эпоксидной смоле) на микро и мезоскопическом структурном уровне. По мнению авторов [17], формирование магистральной трещины определяется динамическим соотношением между освобождаемой энергией в дискретном акте структурной перестройки и диссипативными свойствами ближайшего окружения или системы в целом. Из результатов настоящей работы следует, что и для материала, демонстрирующего скачкообразную деформацию и полособразование на макроуровне процессы локализации пластической деформации и разрушения оказываются взаимообусловленными, поддерживающими друг друга в многоуровневой иерархической структуре разрушающегося материала от микро до макроуровня.

На локализацию деформационных полос может существенно влиять наличие коррозионных пятен на поверхности деформируемого алюминиевого сплава. Для моделирования взаимодействия полос с коррозионным повреждением перед механическими испытаниями на поверхность образца АМг6 наносили каплю 50%-го водного раствора гидроксида натрия. Концентрированная щелочная среда разрушает защитную пленку оксида Al_2O_3 и ускоряет коррозию алюминиевой матрицы в соответствии с реакцией $Al + NaOH + H_2O \rightarrow NaAlO_2 + (3/2)H_2$ [18]. В результате на поверхности сплава образуется одиночный пит – коррозионное пятно диаметром около 1 мм и глубиной от 10 до 50 мкм в зависимости от времени травления (Рис. 3). Затем образцы растягивали с заданной скоростью роста напряжения ($\dot{\sigma}_0 = 0.2$ МПа/с) и исследовали динамику деформационных полос на фронте скачков деформации.

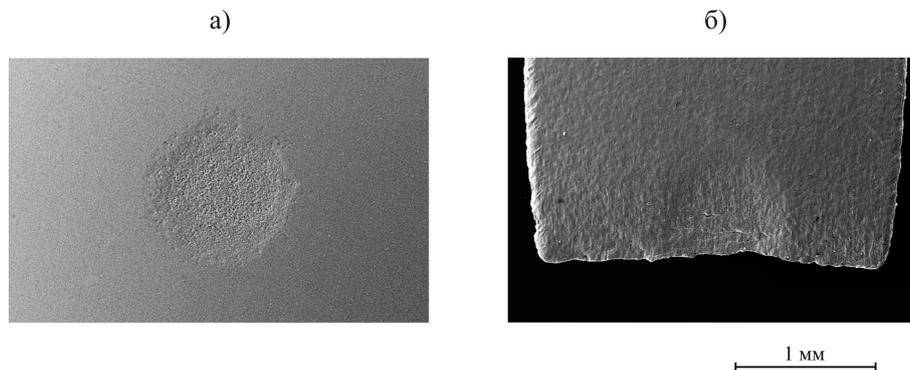


Рис. 3. Микрофотографии коррозионного пятна, полученные с помощью сканирующей электронной микроскопии: а – исходного, до деформирования; б – после разрушения

Fig. 3. Microphotographs of a corrosion pit obtained using scanning electron microscopy: a – initial, before deformation; b – after destruction

Основные особенности взаимодействия полос с одиночным питом на фронте последнего скачка с разрывом представлены на рис. 4. Первая деформационная полоса зарождается в области пита. На ее границах формируются вторичные сопряженные полосы, образующие крестообразную структуру (кадры 160, 310). Магистральная трещина зарождается в области пересечения этих полос и распространяется в центральной части пита.

Для исследования статистического пространственного распределения деформационных полос на поверхности образца с коррозионным пятном строилась гистограмма полос $n(x_i) = \Delta N(x_i)/N$, где $\Delta N(x_i)$ – количество границ полос, пересекающих сечение с координатой x_i ($i = 1, 2, \dots, 50$ – номер сечения), а N – общее количество границ полос.

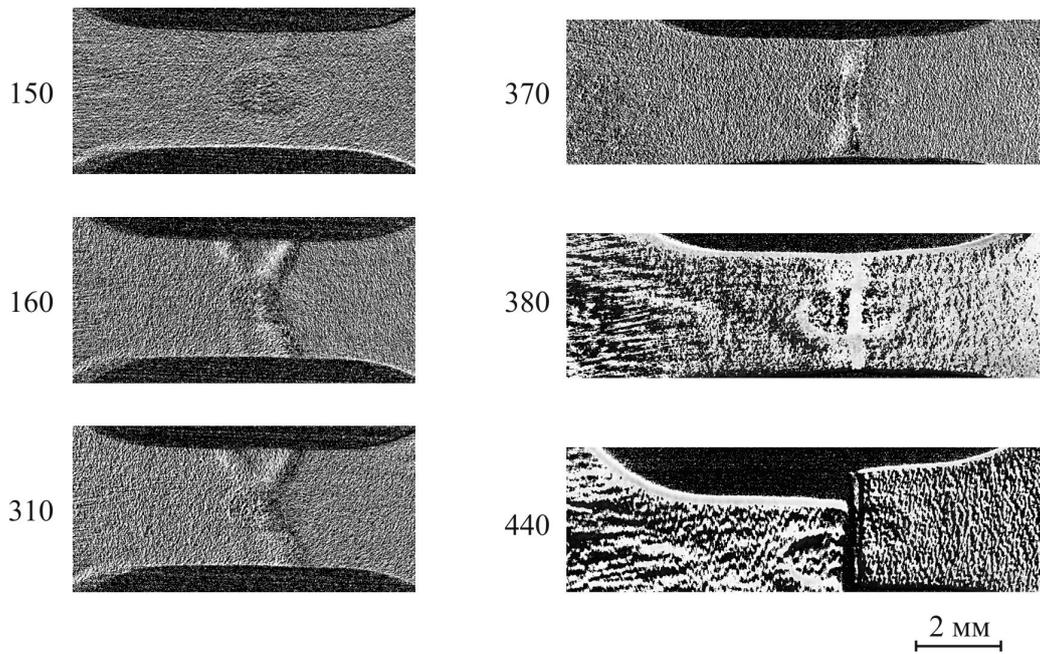


Рис. 4. Картина деформационных полос в образце с коррозионным пятном за 15 мс до разрушения. Скорость видеосъемки 20000 кадр/с
 Fig. 4. Picture of deformation bands in a sample with a corrosion pit 15 ms before failure. Video shooting speed 20000 fps

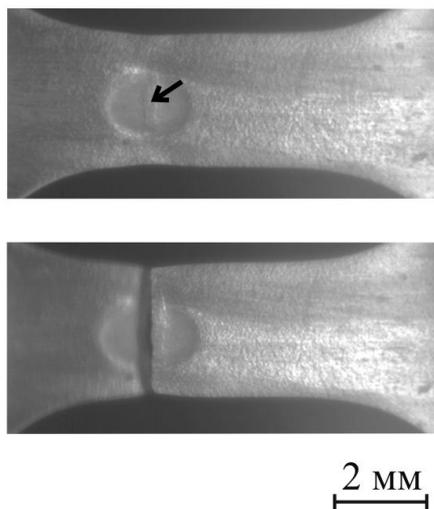
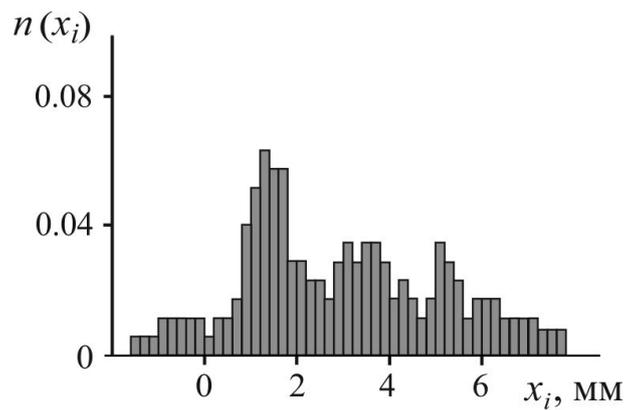


Рис. 5. Гистограмма полос на последнем скачке деформации. На фотографиях представлены кадры видеопленки за 10 мс до макроразрушения (верхние фото) и после разрыва образца (нижние фото). Стрелкой показана полоса деформации на дне коррозионного пита, по которой пройдет магистральная трещина
 Fig. 5. Histogram of bands at the last deformation jump. The photographs show video frames 10 ms before macrofracture (top photos) and after sample rupture (bottom photos). The arrow shows the deformation band at the bottom of the corrosion pit, along which the main crack will pass

Из гистограммы полос последнего скачка с разрывом образца следует, что полосы локализируются вблизи сечения, через которое пройдет магистральная трещина, находящееся в области коррозионного пита (рис. 5). Таким образом, локальная коррозия, как установлено, увеличивает вероятность формирования сопряженных деформационных полос, взаимодействие которых вызывает зарождение и развитие магистральной трещины.

На рис. 6 показаны примеры локализации деформационных полос вблизи одного (а) и двух небольших (б) отверстий в образцах, деформируемых одноосным растяжением. Во втором случае (б) разветвленная структура полос отражает более сложное поле упруго-пластической деформации, чем в случае с одним отверстием. Как видно, неоднородная пластическая деформация локализуется в основном в области отверстий, сокращая эффективную длину рабочей части образца. Для моделирования влияния мелких царапин и эрозии поверхности ударами абразивных частиц на зарождение деформационных полос ПЛШ на боковую поверхность плоского образца наносили: а) царапину глубиной около 30 мкм, составляющей ~ 1% ширины образца; б) отпечаток индентора Виккерса глубиной 30 мкм (диаметр отпечатка $d = 200$ мкм). Высокоскоростные исследования показали, что данных концентраторов достаточно для зарождения и распространения деформационных полос. В первом случае царапина генерирует сначала полосу 2-го типа, затем сопряженную ей полосу, взаимодействия которых приводит к развитию магистральной трещины (рис. 7). В результате удара индентора со скоростью 1 м/с формируется крестообразная структура сопряженных полос деформации; по одной из них затем растет магистральная трещина (Рис. 8).

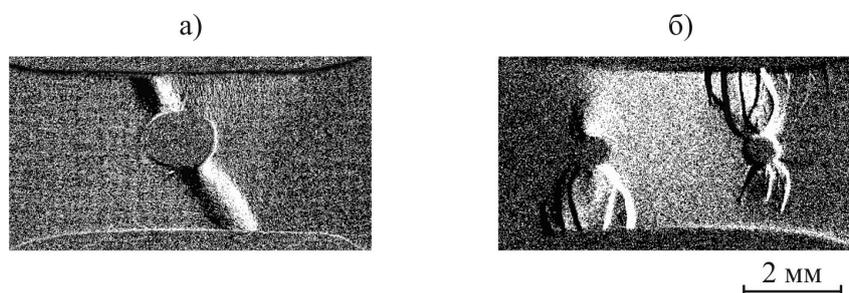


Рис. 6. Картины деформационных полос в образцах сплава АМг6 с одним отверстием диаметром 0.8 мм (а) и двумя отверстиями диаметром 0.4 мм (б)

Fig. 6. Pictures of deformation bands in a samples of the АМг6 alloy with one hole with a diameter of 0.8 mm (a) and two holes with a diameter of 0.4 mm (b)

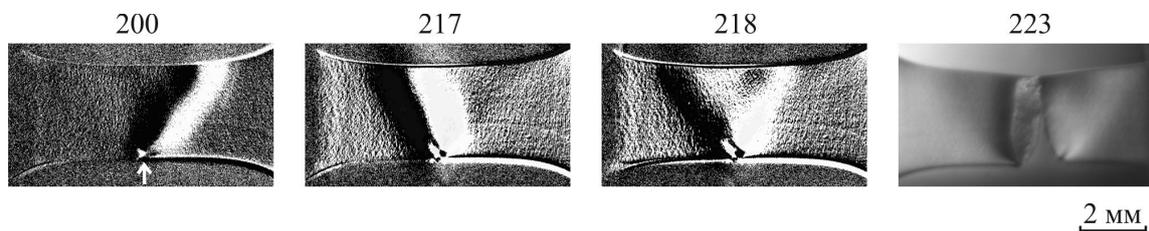


Рис. 7. Эволюция деформационных полос от бокового надреза (помечен стрелкой) на последнем скачке деформации с разрывом. Скорость съемки 500 кадр/с

Fig. 7. Evolution of deformation bands from the side cut (marked with a arrow) at the last deformation jump with discontinuity. Shooting speed 500 fps

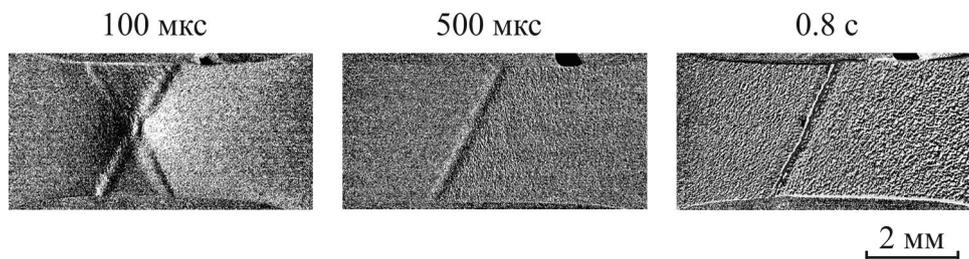


Рис. 8. Результаты компьютерной обработки данных видеосъемки от момента $t_1 = 100$ мс после удара индентора до разрушения образца по полосе деформации при $t_2 = 0.8$ с

Fig. 8. Results of computer processing of video recording data from the moment $t_1 = 100$ ms after the indenter impact to the destruction of the sample along the deformation band at $t_2 = 0.8$ s

4. Заключение. Методом высокоскоростной видеосъемки исследовали динамику формирования пространственно-временных структур полос локализованной пластической деформации на поверхности деформируемого образца алюминий-магниевого сплава АМг6 с концентраторами напряжения

различной природы: частичный пропил, трещина, отверстие, царапина, коррозионное пятно и отпечаток индентора. Установлено, что алюминиевый сплав, демонстрирующий эффект Портевена – Ле Шателье, очень чувствителен к геометрическим концентраторам напряжения различной формы и размеров вплоть до царапин, коррозионных пятен и отпечатков от удара мелких абразивных частиц, которые инициируют зарождение и распространение через все поперечное сечение образца полос макроскопической деформации, взаимодействие которых может вызвать внезапное разрушение сплава.

Список литературы

1. Kubin L.P., Fressengeas C., Ananthakrishna G. Collective behaviour of dislocations in plasticity. *Dislocat. Solids*, 2002;11:101. DOI.org/10.1016/S1572-4859(02)80008-0
2. Yilmaz A.J. The Portevin-Le Chatelier effect: a review of experimental findings. *Sci. Technol. Adv. Mater.* 2011;12:063001(16 pp). DOI.10.1088/1468-6996/12/6/063001
3. Shibkov A.A., Gasanov M.F., Zheltov M.A., Zolotov A.E., Ivolgin V.I. Intermittent plasticity associated with the spatio-temporal dynamics of deformation bands during creep tests in an AlMg polycrystal. *Int. J. Plast.* 2016;86:37-55. DOI.org/10.1016/j.jiplas.2016.07.014
4. Шибков А.А., Золотов А.Е. Нелинейная динамика пространственно-временных структур макролокализованной деформации. *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2009;90(5):412-417.
5. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат;1976. 280 с.
6. Криштал М.М. Взаимосвязь неустойчивости и неоднородности пластической деформации. Диссертация доктора физ.-мат. наук: 01.04.07. Тольятти. Тольяттинский государственный университет. 2002. 331 с.
7. Панин В.Е., Деревягина Л.С., Дерюгин Е.Е. и др. Закономерности стадии предразрушения в физической мезомеханике. *Физическая мезомеханика*. 2003;6(6):97-106.
8. Панин В.Е., Гриняев Ю.В. Физическая мезомеханика – новая парадигма на стыке механики деформируемого твердого тела. *Физическая мезомеханика*. 2003;6(4):9-36.
9. Деревягина Л.С., Панин В.Е., Гордиенко А.И. Самоорганизация пластических сдвигов в макрополосах локализованной деформации в шейке высокопрочных поликристаллов и ее роль в разрушении материала при одноосном растяжении. *Физическая мезомеханика*. 2007;10(4):59-72.
10. Партон В.З. Механика разрушения. М., ЛКИ; 2010. 240 с.
11. Владимиров В.И. Физическая природа разрушения металлов. М., Металлургия; 1984. 280 с.
12. Cottrell A.H. Theory of brittle fracture in steel and similar metals. *Trans. Met. Soc. AIME*.1958;38(2):192-203.
13. Stroh A.N. The formation of cracks as a result of plastic flow. *Proc.Roy.Soc. A*,1954;223:404-414. DOI.org/10. 1098/rspa.1954.0124
14. Halim H., Wilkinson D.S., Niewczas M. The Portevin-Le Chatelier (PLC) effect and shear band formation in an AA5754 alloy. *Acta Mater.*2007;55:4151-4160. DOI:10.1016/j.actamat.2007.03.007
15. Tomason P.F. Ductile fracture of metals. Pergamon Press., Oxford; 1990. 327 p.
16. Колачев Б.А., Елагин В.И., Ливанов В.А. Металловедение и термическая обработка цветных металлов и сплавов. М., МИСиС; 2001. 416 с.
17. Лексовский А.М., Баскин Б.Л. Некоторые аспекты зарождения и развития трещин микро- и мезомасштаба и квазихрупкое разрушение однородных материалов. *Физика твердого тела*, 2011;53(6):1157.
18. Бык М.В. Об участии гидроксидных ионов в анодном растворении металлов в водных растворах электролитов. *Защита металлов*, 2004;40(3):321-324.

References

1. Kubin L.P., Fressengeas C., Ananthakrishna G. Collective behaviour of dislocations in plasticity. *Dislocat. Solids*,2002;11:101. DOI.org/10.1016/S1572-4859(02)80008-0
2. Yilmaz A.J. The Portevin-Le Chatelier effect: a review of experimental findings. *Sci. Technol. Adv. Mater.* 2011;12:063001(16 pp).DOI.10.1088/1468-6996/12/6/063001
3. Shibkov A.A., Gasanov M.F., Zheltov M.A., Zolotov A.E., Ivolgin V.I. Intermittent plasticity associated with the spatio-temporal dynamics of deformation bands during creep tests in an AlMg polycrystal. *Int. J. Plast.*2016;86:37-55. DOI.org/10.1016/j.jiplas.2016.07.014
4. Shibkov A.A., Zolotov A.E. Nonlinear Dynamics of the Spatio-Temporal Pattern of a Macroscopically Localized Deformation. *JETP Letters*.2009;90(5):370-375 (in Russian). DOI.org/10.1134/S0021364009170123
5. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford (1950).
6. Krishtal M.M. Relationship between instability and heterogeneity of plastic deformation. Dissertation of the doctor in physics and mathematics. Sciences: 04/01/07. Tolyatti. Tolyatti State University.2002. 331 p.
7. Panin V.E., Derevyagina L.S., Deryugin E.E. et al. Regularities of the pre-fracture stage in physical mesomechanics. *Phys. Mesomech.*2003;6(6):97-106 (in Russian).

8. Panin VE., Grinyaev YuV. Physical mesomechanics is a new paradigm at the intersection of the mechanics of a deformable solid. *Phys. mesomech.*2003;6(4):9-36 (in Russian).
9. Derevyagina LS., Panin VE., Gordienko AI. Self-organization of plastic shears in macrobands of localized deformation in the neck of high-strength polycrystals and its role in the destruction of the material under uniaxial tension. *Phys. mesomech.*2007;10(4):59-72. (in Russian).
10. Parton VZ. Mechanics of destruction. M.:LKI;2010.240 p. (in Russian).
11. Vladimirov VI. Physical nature of metal destruction. M.:Metallurgy;1984.280 p. (in Russian).
12. Cottrell AH. Theory of brittle fracture in steel and similar metals. *Trans. Met.Soc.AIME.*1958;38(2):192-203.
13. Stroh AN. The formation of cracks as a result of plastic flow. *Proc. Roy. Soc. A.*1954;223:404-414.DOI.org/10.1098/rspa.1954.0124
14. Halim H., Wilkinson DS., Niewczas M. The Portevin-Le Chatelier (PLC) effect and shear band formation in an AA5754 alloy. *Acta Mater.*2007;55:4151-4160.DOI:10.1016/j.actamat.2007.03.007
15. Tomason PF. Ductile fracture of metals. Pergamon Press. Oxford.1990.327 p.
16. Kolachev BA., Elagin VI., Livanov VA. Metallurgy and heat treatment of non-ferrous metals and alloys. M.:MISiS;2001.416 p. (in Russian).
17. Leksovsky AM., Baskin BL. Some aspects of the initiation and development of micro- and mesoscale cracks and quasi-brittle fracture of homogeneous materials.*PSS.*2011;53(6):1157 (in Russian).
18. Byk MV. On the participation of hydroxide ions in the anodic dissolution of metals in aqueous solutions of electrolytes. *Metal protection*2004;40(3):321-324. (in Russian).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 11.03.2024

Received March 11, 2024

Поступила после рецензирования 22.04.2024

Revised April 22, 2024

Принята к публикации 29.04.2024

Accepted April 29, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Шибков Александр Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

Федоров Виктор Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

Золотов Александр Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

Кочегаров Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

Шибков Евгений Александрович – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

Желтова Валерия Михайловна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander A. Shibkov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

Victor A. Fedorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

Alexander E. Zolotov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

Sergey S. Kochegarov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Physics, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

Eugene A. Shibkov – Postgraduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

Valeria M. Zheltova – Postgraduate student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

[К содержанию](#)