

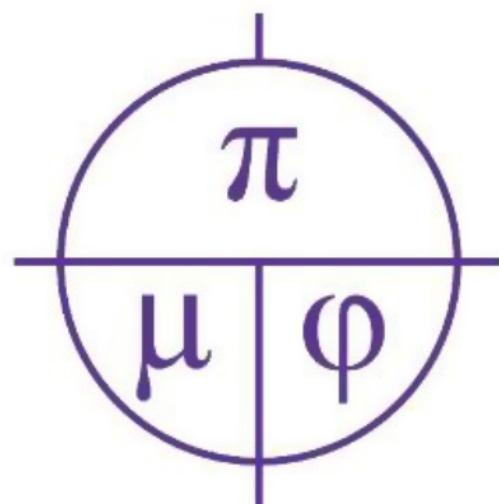


БелГУ  
Белгородский  
государственный  
национальный  
исследовательский  
университет

ISSN 2687-0959 (online)

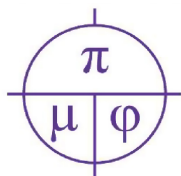
# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

## APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2024. Том 56, № 3





## Прикладная математика & Физика

2024. Том 56, № 3

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

### 1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

### 1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

### 1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

### УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

#### Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

**Ответственный секретарь:** О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

### ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;

Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;

Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;

Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;

Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;

Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;

Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;

Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;

Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 7,4

Дата выхода 30.09.2024.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

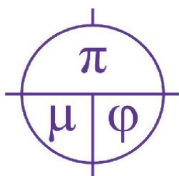
## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

<b>Ощепкова С. Н., Пенкин О. М., Царев С. Л.</b> Принцип Рэлея для стратифицированного лапласиана	175
<b>Серова И. Д.</b> О дифференциальном неравенстве для неявной управляемой системы	181
<b>Абдурагимов Г. Э.</b> О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка	193
<b>Уртаева А. А.</b> О нижней границе для минимального собственного значения оператора четвёртого порядка на графе	198

### ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

<b>Averin G. V., Shevtsova M. V., Zvyagintseva A. V.</b> Temporal Method of Presenting the Fundamentals of Classical Thermodynamics	208
<b>Малай Н. В., Сохань П. В., Шостак Ю. И.</b> Фотофорез умеренно крупной высоковязкой капли в режиме со скольжением с учетом термодиффузионных и стефановских эффектов	218
<b>Сафронов И. С., Ушаков А. И., Андрухова О. В.</b> Параметрические характеристики нано- и микропор, влияющие на их залечивание при селективной лазерной обработке	226
<b>Ушаков И. В.</b> Физика деформирования и разрушения кристалла исландского шпата при выделении энергии в объёме образца	234



# Applied Mathematics & Physics

2024. Volume 56, No 3

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

## 1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

## 1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

## 1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics (Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

## FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education  
"Belgorod National Research University".

## EDITORIAL BOARD:

**Chief Editor:** V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

### Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia, Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

**Executive Secretary:** O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev\_v@bsu.edu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 7,4

Date of publishing 30.09.2024.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

## CONTENTS

### MATHEMATICS

- Oshchepkova S. N., Penkin O. M., Tsarev S. L.***  
Rayleigh Principle for Stratified Laplacian 175
- Serova I. D.***  
About the Differential Inequality for Implicit Control System 181
- Abduragimov G. E.***  
On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for one Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation 193
- Urtaeva A. A.***  
On the Lower Bound for the Minimum Eigenvalue of a Fourth-Order Operator on a Graph 198

### PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

- Averin G. V., Shevtsova M. V., Zvyagintseva A. V.***  
Temporal Method of Presenting the Fundamentals of Classical Thermodynamics 208
- Malay N. V., Sokhan P. V., Shostak Yu. I.***  
Photophoresis of a Moderately Large High-Viscosity Droplet in a Sliding Mode, Taking into Account Thermodiffusion and Stephan Effects 218
- Safronov I. S., Ushakov A. I., Andrukhova O. V.***  
Parametric Characteristics of Nano- and Micropores Affecting Their Healing During Selective Laser Treatment 226
- Ushakov I. V.***  
Physics of Deformation and Destruction of Iceland Spar Crystal During the Release of Energy in the Sample Volume 234

## МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.95  
MSC 35J05  
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-175-180

### Принцип Рэля для стратифицированного лапласиана

Ощепкова С. Н.<sup>1</sup>, Пенкин О. М.<sup>2</sup>, Царев С. Л.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Воронежский государственный университет инженерных технологий,  
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, 19  
osonia@mail.ru

<sup>2</sup> Воронежский государственный университет,  
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1  
o.m.penkin@gmail.com, s@tzareff.ru

**Аннотация.** Устанавливается аналог принципа Рэля, утверждающего экстремальное свойство первого собственного значения лапласиана Дирихле, в ситуации, когда вместо обычного оператора Лапласа рассматривается лапласиан по стратифицированной мере. Ранее этот вопрос был решён для лапласиана на одномерном стратифицированном множестве (геометрическом графе). Позже П. А. Кулешовым был изучен также случай мягкого лапласиана на стратифицированном множестве. Здесь мы даём решение для произвольного стратифицированного лапласиана.

**Ключевые слова:** стратифицированное множество, лапласиан, задача Дирихле, принцип Рэля

**Для цитирования:** Ощепкова С. Н., Пенкин О. М., Царев С. Л. 2024. Принцип Рэля для стратифицированного лапласиана. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 175–180.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-175-180

Original Research

### Rayleigh Principle for Stratified Laplacian

Sofia N. Oshchepkova<sup>1</sup>, Oleg M. Penkin<sup>2</sup>, Sergey L. Tsarev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Voronezh State University of Engineering Technologies,  
19 Revolutsii av., Voronezh, 394036, Russia  
osonia@mail.ru

<sup>2</sup> Voronezh State University,  
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018, Russia  
o.m.penkin@gmail.com, s@tzareff.ru

**Abstract.** In this paper we give an exact analog of Rayleigh principle for laplacians on stratified sets. Our main result may be applied for an estimation of the first eigenvalue of stratified laplacian equipped with Dirichlet condition. Previous results on this subject were known for one dimensional stratified sets and for a specific laplacian, called soft laplacian, defined on multidimensional stratified sets. Meanwhile there is a variety of laplacians on stratified sets. Our results are valid for all stratified laplacians without any restrictions on the dimension.

**Keywords:** Stratified Set, Laplacian, Dirichlet Problem, Rayleigh Principle

**For citation:** Oshchepkova S. N., Penkin O. M., Tsarev S. L. 2024. Rayleigh Principle for Stratified Laplacian. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 175–180. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-175-180

#### 1. Описание основных понятий.

**1.1. Стратифицированное множество.** В определении понятия стратифицированного множества мы в целом следуем работе [1], но модифицируем первоначальное определение с учётом специфики рассматриваемых нами задач. Требуемую нами модификацию можно найти также в [2, 3, 4].

Множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  мы называем *стратифицированным*, если оно связно и является объединением конечного числа многообразий (страт)  $\sigma_{kj}$  (первый индекс означает размерность многообразия, а второй служит для автономной нумерации страт данной размерности), имеющих компактные замыкания и удовлетворяющих следующей паре условий:

- Пересечение замыканий  $\bar{\sigma}_{kj}, \bar{\sigma}_{ml}$  любых страт  $\sigma_{kj}, \sigma_{ml}$ , если оно непусто, является объединением страт.
- Граница  $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$  также является объединением страт.

Всюду далее страты считаются подмногообразиями в  $\mathbb{R}^n$ . Одно и то же множество  $\Omega$  можно стратифицировать многими способами. Во избежание недоразумений мы будем считать, что набор страт (обозначим его  $\mathcal{S}$ ) фиксирован. Более того, следует ещё задать способ «сборки»  $\Omega$  из элементов набора  $\mathcal{S}$  – отображение  $\varphi$ , отождествляющее некоторые граничные страты различных страт. Таким образом, под стратифицированным множеством следует понимать тройку  $\{\Omega, \mathcal{S}, \varphi\}$ . Тем не менее мы само  $\Omega$  намерены называть стратифицированным, не упоминая остальных элементов тройки.

Условия 1, 2 встречаются при определении клеточного комплекса. Помимо них накладываются ещё требования на отображение  $\varphi$ . Мы сформулируем это условие в виде геометрического требования к результату сборки – множеству  $\Omega$ , рассматриваемому как топологическое пространство с индуцированной из  $\mathbb{R}^n$  топологией. А именно, мы потребуем, чтобы для любой точки  $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega$  существовал шар  $B_r(X) \subset \mathbb{R}^n$  и диффеоморфизм  $\Phi : B_r(X) \rightarrow B_r(X)$  такие, что образ  $\Phi(B_r(X) \cap Z)$  части «кривой» звезды  $Z$ , состоящей из  $\sigma_{kj}$  и примыкающих к ней  $(k+1)$ -мерных страт, является объединением  $k$ -мерного шара (образа  $\sigma_{kj} \cap B_r(X)$ ) и опирающихся на него, как на диаметральную плоскость,  $(k+1)$ -мерных полушарий – образов  $\sigma_{k+1i} \cap B_r(X)$ , соответствующих всем  $(k+1)$ -мерным стратам, примыкающим к  $\sigma_{kj}$ ; мы говорим, что страта  $\sigma_{k+1i}$  примыкает к страте  $\sigma_{kj}$ , если последняя входит в границу первой. Следующий рисунок иллюстрирует процесс этого «выпрямления».

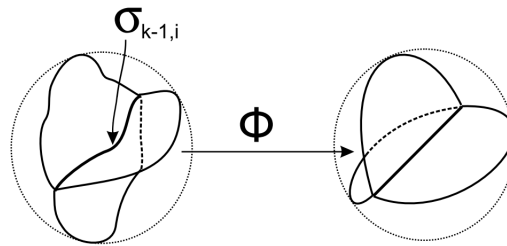


Рис. 1. Локальное выпрямление

Fig. 1. Local straightening

Всюду далее  $\Omega$  предполагается представленным в виде объединения  $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ , в котором  $\Omega_0$  – связное открытое подмножество  $\Omega$  (мы здесь пользуемся упомянутой выше индуцированной топологией), составленное из страт набора  $\mathcal{S}$  и удовлетворяющее равенству  $\bar{\Omega}_0 = \Omega$ . Множество  $\Omega_0$  является аналогом внутренности некоторой замкнутой области, а разность  $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$  – аналог границы; в топологии  $\Omega$  множество  $\partial\Omega_0$  действительно является топологической границей множества  $\Omega_0$ . Обсуждаемый далее стратифицированный лапласиан будет действовать на функции в пределах  $\Omega_0$ . Формально определение множества  $\Omega_0$  не исключает случая  $\Omega_0 = \Omega$  и, как следствие пустоты границы, но в настоящей работе мы будем предполагать, что  $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$ .

**1.2. Стратифицированная мера.** Каждая страта  $\sigma_{kj}$ , как подмногообразие пространства  $\mathbb{R}^n$ , наследует риманову метрику, а с ней и меру Лебега  $\mu_{kj}$ . Из этих мер мы сконструируем стратифицированную меру  $\mu$ , определяя её на измеримых подмножествах  $\omega \subset \Omega$  формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \mu_{kj}(\omega_{kj}),$$

где  $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$ . При этом множество  $\omega \subset \Omega$  назовём  $\mu$ -измеримым, если каждое пересечение  $\omega_{kj}$  измеримо в смысле  $k$ -мерной меры Лебега на  $\sigma_{kj}$ . Нетрудно заметить, что множество  $\mathcal{M}$  всех  $\mu$ -измеримых множеств является  $\sigma$ -алгеброй на  $\Omega$ . Измеримость функции  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  определяется стандартно:  $f$  является  $\mu$ -измеримой, если лебеговы множества  $L_f(c) = \{X \in \Omega : f(X) \leq c\}$  принадлежат  $\mathcal{M}$  при всех  $c \in \mathbb{R}$ . Нетрудно заметить, что интеграл Лебега  $\mu$ -измеримой функции по  $\mu$ -измеримому множеству  $\omega$  сводится к сумме

$$\int_{\omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \int_{\omega_{kj}} f d\mu.$$

В правой части равенства вместо  $d\mu$ , строго говоря, следовало бы писать  $d\mu_{kj}$ ; однако нам удобно опускать индексы, если только это не может вызвать недоразумений.

**1.3. Дивергенция и лапласиан.** Векторное поле  $\vec{F}$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  называется касательным к  $\Omega_0$ , если для любой страты  $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$  и любой точки  $X \in \sigma_{kj}$  вектор  $\vec{F}(X)$  принадлежит касательному, в обычном дифференциально-геометрическом смысле, пространству  $T_X \sigma_{kj}$ .

Обозначение  $\vec{C}^1(\Omega_0)$  применяется к пространству касательных векторных полей  $\vec{F}$  на  $\Omega_0$ , сужения  $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$  которых на каждую внутреннюю страту  $\sigma_{ki} \subset \Omega_0$  непрерывно дифференцируемы и имеют непрерывное продолжение в каждую точку любой примыкающей внутренней, т. е. лежащей в  $\Omega_0$ , страты на единицу

меньшей размерности. Непрерывность поля  $\vec{F}$  в целом на  $\Omega_0$  не предполагается. Последнее означает, что касательное векторное поле из  $\vec{C}^1(\Omega_0)$  является набором независимых полей класса  $C^1$  в количестве, равном количеству страт в  $\Omega_0$ .

Дивергенция касательного векторного поля  $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$  в точке  $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$  задаётся равенством

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i, \quad (1)$$

где суммирование проводится по всем  $(k + 1)$ -мерным стратам  $\sigma_{k+1i}$ , примыкающим к  $\sigma_{kj}$  (запись  $\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}$  под знаком суммы выражает факт этого примыкания). Символ  $\nabla_k$  в правой части обозначает оператор обычной  $k$ -мерной дивергенции, применённой к сужению  $\vec{F}$  на страту  $\sigma_{kj}$ ,  $\vec{v}_i$  — единичная внутренняя нормаль к  $\sigma_{kj}$  в точке  $X$ , направленная внутрь  $\sigma_{k+1i}$  по касательной к  $\sigma_{k+1i}$  (см. следующий рисунок), а  $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i)$  — предел  $\vec{F}(Y)$  при  $Y \in \sigma_{k+1i}$ , стремящемся к  $X$  изнутри страты  $\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}$  вдоль непрерывной кривой.

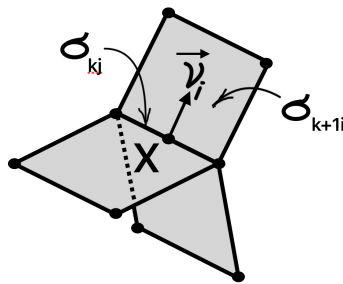


Рис. 2. К определению дивергенции  
Fig. 2. Toward the definition of divergence

Существование таких пределов можно потребовать и в случае, когда  $\sigma_{kj}$  — граничная страта, а  $\sigma_{k+1i}$  — внутренняя; множество векторных полей из  $\vec{C}^1(\Omega_0)$ , обладающих таким свойством обозначается  $\vec{C}^1(\Omega)$ . Сразу не видно, что определённая нами дивергенция является точным аналогом классической, но можно показать, что  $\nabla \cdot \vec{F}(X)$ , как и в обычной ситуации, является плотностью потока векторного поля в точке  $X$ , отнесённой к стратифицированной мере  $\mu$ , определённой в предыдущем пункте. Подробнее об этом см. [2].

Примером касательного векторного поля является градиент  $\nabla u$  скалярной функции  $u$ , сужение которой на каждую внутреннюю страту непрерывно дифференцируемо. В этом случае  $\nabla u$  представляет собой просто набор градиентов этих сужений. Если  $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$  (множество таких функций обозначим через  $C^2(\Omega_0)$ ), то оператор  $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$  естественно назвать стратифицированным лапласианом. Так определённый лапласиан часто называют «жестким». Можно также определить более общий аналог оператора Лапласа  $\nabla \cdot (p \nabla u)$ , где  $p$  — так называемая стратифицированная константа, которая на каждой страте тождественно равна либо единице, либо нулю. При этом всегда предполагается, что  $p \equiv 1$  на всех свободных стратах; страта  $\sigma_{kj}$  свободна, если она не примыкает ни к какой страте большей размерности (в этом случае она, очевидно, внутренняя,  $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ ). При этом, если на остальных стратах  $p \equiv 0$ , то соответствующий стратифицированный лапласиан называется мягким. В данной работе основной результат мы будем доказывать в предположении, что лапласиан является жестким ( $p \equiv 1$  на всех внутренних стратах), но наши рассуждения применимы ко всем стратифицированным лапласианам промежуточным между мягким и жестким. Функции класса  $C^2(\Omega_0)$ , удовлетворяющие уравнению  $\Delta u = 0$ , будем называть гармоническими.

**1.4. Интегральные тождества.** Здесь приводятся аналоги классических интегральных тождеств, играющих решающую роль в наших рассуждениях. Следующее утверждение является аналогом теоремы Гаусса — Остроградского или, как часто говорят, теоремы о дивергенции.

**Теорема 1 (о дивергенции).** Пусть  $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega)$ , тогда

$$\int_{\partial \Omega_0} (\vec{F})_v d\mu = - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{F} d\mu. \quad (2)$$

Здесь  $(\vec{F})_v$  — сумма, аналогичная второму слагаемому в определении дивергенции:

$$(\vec{F})_v(X) = \sum_{\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$



но суммирование теперь распространяется только на страты  $\sigma_{k+1i} \subset \Omega_0$ ; подчеркнём, что сейчас  $\sigma_{kj}$  – граничная страта, поэтому некоторые из примыкающих к ней страт  $\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}$  тоже могут оказаться граничными. Знак «минус» в формуле (2) связан с тем, что всюду мы пользуемся внутренними нормальными.

**Доказательство** этой теоремы имеется в книге [2]. Если мы положим в формуле (2)  $\vec{F} = v\nabla u$ , где  $u \in C^2(\Omega)$  (так мы будем обозначать множество таких функций  $u \in C^2(\Omega_0)$ , что  $\nabla u \in C^1(\Omega)$ ), а  $v \in C^1(\Omega_0) \cap C(\Omega)$ , то получим стратифицированный аналог первой формулы Грина:

$$\int_{\Omega_0} v \Delta u \, d\mu + \int_{\Omega_0} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mu = - \int_{\partial\Omega_0} v (\nabla u)_\nu \, d\mu. \quad (3)$$

**2. Принцип Рэля для лапласиана на стратифицированном множестве.** В этом разделе мы приводим основной результат работы, являющийся аналогом принципа Рэля, утверждающего, что первое собственное значение  $\lambda_0$  в задаче на собственные значения:

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (4)$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0 \quad (5)$$

удовлетворяет соотношению

$$\lambda_0 = \inf_{u \in U} \frac{\int_{\Omega_0} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega_0} u^2} \quad (6)$$

в предположении, что такое собственное значение существует и ему соответствует собственная функция, сохраняющая знак в области  $\Omega_0$ ; множество  $U$  состоит из функций класса  $C^1$ , обращающихся в нуль на границе. В данной работе мы примем эти условия в качестве требований, поскольку вопрос об их выполнимости в случае лапласиана на стратифицированном множестве весьма нетривиален. В конце статьи мы приведём некоторые комментарии на этот счёт.

Обозначим через  $C_0^1(\Omega)$  множество функций из  $C^1(\Omega)$ , обращающихся в нуль в некоторой окрестности границы  $\Omega_0$ ; эта окрестность своя для каждой функции. На этом множестве форма

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu$$

обладает всеми свойствами скалярного произведения. Пополнение пространства  $C_0^1(\Omega)$  по норме  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  является аналогом пространства Соболева и обозначается  $\mathring{H}_0^1(\Omega)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\lambda_0$  – первое собственное значение в задаче (4), (5), а соответствующая ему собственная функция  $u_0$  положительна в  $\Omega_0$ , тогда имеет место неравенство

$$\lambda_0 \leq \frac{\int_{\Omega_0} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega_0} u^2} \quad (7)$$

для всех функций  $u$  из класса  $\mathring{H}_0^1(\Omega)$ , не обращающихся тождественно в нуль.

**Доказательство.** В нашем доказательстве мы следуем идее, изложенной в [5]. Прежде всего, заметим, что в силу плотности  $C_0^1(\Omega)$  в  $\mathring{H}_0^1(\Omega)$ , достаточно доказать, что неравенство (7) выполняется на множестве функций из  $C_0^1(\Omega)$ . Любую такую функцию можно представить в виде  $u = qu_0$ , где  $q$  непрерывна на  $\Omega$ , а  $u_0$  – упомянутая собственная функция. Имеем:

$$\int_{\Omega_0} (|\nabla u|^2 - \lambda_0 u^2) \, d\mu = \int_{\Omega_0} (|\nabla(qu_0)|^2 - \lambda_0 u_0 q^2 u_0) \, d\mu.$$

Последний интеграл, с учётом уравнения (4), преобразуется к виду

$$\int_{\Omega_0} u_0^2 |\nabla q|^2 \, d\mu + \int_{\Omega_0} q^2 u_0 \Delta u_0 \, d\mu + \int_{\Omega_0} (q^2 |\nabla u_0|^2 + 2qu_0 \nabla q \cdot \nabla u_0) \, d\mu. \quad (8)$$

Последний интеграл преобразуем к виду

$$\int_{\Omega_0} \nabla u_0 (q^2 \nabla u_0 + 2qu_0 \nabla q) \, d\mu = \int_{\Omega_0} \nabla u_0 (q^2 \nabla u_0 + u_0 \nabla q^2) \, d\mu = \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla (q^2 u_0) \, d\mu.$$

С учётом этого, сумма (8) оказывается равной

$$\int_{\Omega_0} u_0^2 |\nabla q|^2 d\mu + \int_{\Omega_0} q^2 u_0 \Delta u_0 d\mu + \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla (q^2 u_0) d\mu.$$

Сумма последних двух слагаемых в силу формулы (3), в которой следует положить  $v = q^2 u_0$ ,  $u = u_0$ , преобразуются к виду

$$\int_{\Omega_0} q^2 u_0 \Delta u_0 d\mu + \int_{\Omega_0} \nabla u_0 \cdot \nabla (q^2 u_0) d\mu = - \int_{\partial\Omega_0} q^2 u_0 (\nabla u_0)_\nu d\mu.$$

Заметим, что в силу условия (5) последний интеграл равен нулю. Тем самым все наши выкладки мы можем резюмировать следующим равенством

$$\int_{\Omega_0} (|\nabla u|^2 - \lambda_0 u^2) d\mu = \int_{\Omega_0} u_0^2 |\nabla q|^2 d\mu, \quad (9)$$

откуда следует требуемое неравенство (7). ■

**Замечание 1.** Из доказанного нами утверждения следует, что при сделанных предположениях о существовании положительной собственной функции, отвечающей положительному собственному значению  $\lambda_0$ , выполняется неравенство Пуанкаре

$$\int_{\Omega} u^2 d\mu \leq C \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 d\mu.$$

Вопрос о неравенстве Пуанкаре (а также Соболева) на стратифицированном множестве хорошо изучен (см., например, [3, 4, 6]). Это неравенство выполняется лишь при условии так называемой прочности стратифицированного множества. Простейший тип подобного условия состоит в том, что каждую страту из  $\Omega_0$  можно соединить связанной цепочкой страт из  $\Omega_0$  с некоторой граничной стратой так, что размерности соседних страт цепочки отличаются на единицу. Поэтому условие существования положительной собственной функции, отвечающей положительному собственному значению, накладывает ограничения на геометрическое устройство стратифицированного множества. По-видимому, упомянутой нами прочности достаточно для существования собственного значения и собственной функции с нужными нам свойствами, но пока нам это не удалось строго обосновать.

**Замечание 2.** Можно показать, что при условии прочности стратифицированного множества собственная функция  $u \in \dot{H}_0^1(\Omega)$ , а потому в приведенных выше выкладках в качестве  $u$  можно взять  $u_0$ , соответствующее  $q$  тогда будет равно единице. Тогда из (9) получится, что

$$\lambda_0 = \frac{\int_{\Omega_0} |\nabla u_0|^2}{\int_{\Omega_0} u_0^2}.$$

Вкупе с неравенством (7) это приводит к классической формулировке принципа Рэля (6). Именно в такой, традиционной форме, принцип Рэля в случае одномерных стратифицированных множеств (геометрических графах) был получен в работе [6].

#### Список литературы

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2005. 272 с.
3. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве. *Алгебра и анализ*. 2018;30(5):149-158. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1573>
4. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Неравенство Пуанкаре и  $p$ -связность стратифицированного множества. *Сибирский математический журнал*. 2018;59(6):1291-1302. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.606>
5. Поля Г., Сегè Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: ГИФМЛ; 1962. 336 с.
6. Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincaré's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. 2003;55:195-213.

7. Диаб А.Т., Кулешов П.А., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе. *Математические заметки*. 2014;96(6):885–895. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10268>

### References

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Pokornyi YV., Penkin OM., Pryadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272 p. (In Russian).
3. Dairbekov NS., Penkin OM., Sarybekova LO. An analog of the Sobolev inequality on a stratified set. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019;30:869–875. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1573>
4. Dairbekov NS., Penkin OM., Sarybekova LO. The Poincaré inequality and p -connectedness of a stratified set *Siberian Mathematical Journal*. 2018;59(6):1024-1033. DOI: <https://doi.org/10.1134/S003744661806006X>
5. Pólya G., Szegő G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton: Princeton univ. press; 1951. xvii+279 p. (Pólya G, Szegő G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* Moscow: GIFML; 1962. 336 p.)
6. Gavrilov A., Nicaise S., Penkin O. Poincaré's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. 2003;55:195-213.
7. Diab AT., Kuleshov PA., Penkin OM. Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph. *Mathematical Notes*. 2014;96(6):948–956. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434614110327>

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.06.2024

Received June 18, 2024

Поступила после рецензирования 30.07.2024

Revised July 30, 2024

Принята к публикации 02.08.2024

Accepted August 02, 2024

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Ощепкова Софья Николаевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

**Пенкин Олег Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

**Царев Сергей Львович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Sofia N. Oshchepkova** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Chair of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

**Oleg M. Penkin** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor, Professor of the Chair of Mathematical Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

**Sergey L. Tsarev** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Chair of Mathematical Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

## О дифференциальном неравенстве для неявной управляемой системы

Серова И. Д. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии О. М. Пенкиным)

Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина,  
Россия, 392036, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33  
[Irinka\\_36@mail.ru](mailto:Irinka_36@mail.ru)

**Аннотация.** В статье исследуется неявная дифференциальная управляемая система, описываемая не разрешенными относительно производной дифференциальными уравнениями первого порядка. Получены условия существования и оценки решений в виде теорем о дифференциальных неравенствах типа теоремы Чаплыгина. Используются методы теории многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах и ранее полученные автором результаты о неявных дифференциальных включениях. В первой части работы приводится утверждение о разрешимости в частично упорядоченном пространстве операторного включения, порождаемого многозначным отображением двух аргументов, по одному из которых оно накрывающее, а по другому — антитонное. Утверждение имеет вид теоремы сравнения с решением соответствующего операторного неравенства. Во второй части работы рассматривается краевая задача для системы неявных дифференциальных включений. Приводятся условия разрешимости (в классе абсолютно непрерывных функций), оценки решений, условия существования решения с наименьшей производной. В третьей основной части с использованием приведенных во второй части результатов исследуется двухточечная краевая задача для неявной дифференциальной управляемой системы. Траектория предполагается абсолютно непрерывной, управление — измеримым. Получены условия разрешимости, оценки решений, условия существования решения с наименьшим управлением и с траекторией, имеющей наименьшую производную.

**Ключевые слова:** управляемая система, неявное дифференциальное уравнение, краевая задача, существование и оценки решений, дифференциальное включение

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 24-21-00272, <https://rscf.ru/project/24-21-00272/>

**Для цитирования:** Серова И. Д. 2024. О дифференциальном неравенстве для неявной управляемой системы. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 181–192. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-181-192

Original Research

## About the Differential Inequality for Implicit Control System

Irina D. Serova 

(Article submitted by a member of the editorial board O. M. Penkin)

Derzhavin Tambov State University,  
33 International St., Tambov, 392036, Russia  
[Irinka\\_36@mail.ru](mailto:Irinka_36@mail.ru)

**Abstract.** In this article we study an implicit differential control system described by first order differential equations not solved with respect to the derivative. Existence conditions and solution estimates in the form of theorems on differential inequalities of Chaplygin's theorem type are obtained. Methods of the theory of multivalued mappings in partially ordered spaces and results on implicit differential inclusions obtained earlier by the author are used. In the first part of the paper we give a statement on the solvability in a partially ordered space of an operator inclusion generated by a multivalued mapping of two arguments, one of which is covering and the other — antitone. The statement has the form of a comparison theorem with the solution of the corresponding operator inequality. In the second part of the paper we consider a boundary value problem for a system of implicit differential inclusions. Solvability conditions (in the class of absolutely continuous functions), estimates of solutions, and conditions for the existence of a solution with the smallest derivative are given. In the third main part, using the results given in the second part, a two-point boundary value problem for an implicit differential control system is investigated. The trajectory is assumed to be absolutely continuous, the control — measurable. Solvability conditions, solution estimates, existence conditions of the solution with the smallest control and with the trajectory having the smallest derivative are obtained.

**Keywords:** Control System, Implicit Differential Equation, Boundary Value Problem, Existence and Estimates of Solutions, Differential Inclusion

**Acknowledgements:** The work is supported by the Russian Science Foundation on (project no. 24-21-00272, <https://rscf.ru/project/24-21-00272/>)

**For citation:** Serova I. D. 2024. About the Differential Inequality for Implicit Control System. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 181–192. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-181-192

**1. Введение.** Неявные, то есть не разрешенные относительно старшей производной, уравнения широко используются в различных разделах математики и в приложениях. В частности, такими уравнениями описывается динамика некоторых неголономных механических систем (см. [1]), электрических колебательных контуров (см. [2, с. 145, 148.]), электромагнитных полей в холодной анизотропной плазме (см. [3]), процессов термодинамики и других. Для исследования неявных дифференциальных уравнений при наличии параметров (в частности, управлений) можно использовать основанный на лемме Филиппова об измеримом выборе (см. п. 1.5.2. [4]) метод подстановки в уравнение множества возможных параметров, сводящий уравнение к включению. Возможность применения такого подхода открывают результаты о существовании, оценках и свойствах решений неявных дифференциальных включений, полученные в недавних работах [5, 6, 7].

В статье исследуется краевая задача для неявной дифференциальной управляемой системы, описываемая не разрешенными относительно производной дифференциальными уравнениями первого порядка. С использованием леммы Филиппова об измеримом выборе построена ассоциированная система неявных дифференциальных включений, для которой исследуется соответствующая краевая задача. Такой подход позволил в настоящей статье получить условия существования и оценки решений исходной управляемой системы в виде теорем о дифференциальных неравенствах типа теоремы Чаплыгина [8].

Отметим, что распространению и обобщению теоремы Чаплыгина на системы дифференциальных и интегральных уравнений, функционально-дифференциальных уравнений начиная с 50-х годов XX века посвящены многочисленные публикации (см., например, монографию [9]). Однако для неявных уравнений, включений и управляемых систем подобные результаты пока фрагментарны (отметим статьи [10, 18, 20]).

**2. Операторное включение в частично упорядоченном пространстве.** Напомним определения используемых ниже простейших понятий теории частично упорядоченных пространств.

Обозначим  $X \doteq (X, \leq)$  — частично упорядоченное пространство. Множество  $S \subset X$  называют *цепью*, если для любых его двух элементов  $v, w \in S$  выполнено  $v \leq w$  или  $w \leq v$ .

Элемент  $\tilde{v}$  множества  $X_0 \subset X$  называют *минимальным* в  $X_0$ , если для любого  $v \in X_0, v \neq \tilde{v}$ , выполнено  $v \not\leq \tilde{v}$ . Элемент  $\tilde{v} \in X_0$  называют *наименьшим* в этом множестве, если для любого  $v \in X_0, v \neq \tilde{v}$ , выполнено  $\tilde{v} < v$ . Аналогично определяются максимальный и наибольший элементы множества  $X_0 \subset X$ .

Если во множестве  $X_0 \subset X$  существует такой элемент  $w \in X$ , что  $w \leq x$  при любом  $x \in X_0$ , то это множество называют *ограниченным снизу*, а элемент  $w$  — его нижней границей. Нижнюю границу  $\tilde{w}$  множества  $X_0$  называют *инфимумом*, если  $\tilde{w} \geq w$  для любой его нижней границы  $w$ . Аналогично определяются понятия ограниченного сверху множества, его верхней границы, супремума. Частично упорядоченное пространство называется *нижней полурешеткой*, если его любое двухэлементное множество имеет инфимум, и *верхней полурешеткой*, если любое двухэлементное множество имеет супремум. Пространство, являющееся и нижней, и верхней полурешеткой, называют *решеткой*.

Пусть заданы частично упорядоченные пространства  $X \doteq (X, \leq)$  и  $Y \doteq (Y, \leq)$ . Для элементов  $v, w \in X$  и множества  $X_0 \subset X$  обозначим

$$O_X(w) \doteq \{x \in X : x \leq w\}, \quad O_X(X_0) \doteq \bigcup_{w \in X_0} O_X(w), \quad [v, w]_X \doteq \{x \in X : v \leq x \leq w\}.$$

Рассмотрим многозначное отображение  $F : X \rightrightarrows Y$ , то есть отображение, сопоставляющее каждому элементу  $x \in X$  непустое множество  $F(x) \subset Y$ .

Напомним, что отображение  $F : X \rightrightarrows Y$  называют *антитонным (изотонным)* на множестве  $X_0 \subset X$ , если для любых  $v, w \in X_0$  таких, что  $w \leq v$ , и для любого  $y \in F(v)$  существует  $z \in F(w)$ , удовлетворяющий неравенству  $z \geq y$  (соответственно,  $z \leq y$ ). Антитонное (изотонное) на всем  $X$  отображение называют *антитонным (изотонным)*.

**Определение 1.1 [13].** Отображение  $F : X \rightrightarrows Y$  будем называть *упорядоченно накрывающим множеством*  $Y_0 \subset Y$ , если для любого  $v \in X$  выполнено

$$O_Y(F(v)) \cap Y_0 \subset F(O_X(v)). \quad (1)$$

Заметим, что если  $Y_0$  — одноэлементное множество,  $Y_0 = \{y\}$ , то включение (1) равносильно импликации

$$\forall v \in X \quad y \in O_Y(F(v)) \Rightarrow y \in F(O_X(v)).$$

При заданном  $\hat{y} \in Y$  рассмотрим включение

$$\hat{y} \in F(x) \quad (2)$$

относительно неизвестного  $x \in X$ . Будем предполагать, что  $F : X \rightrightarrows Y$  представимо в виде

$$F(x) = \Phi(x, x), \quad \forall x \in X,$$

где отображение  $\Phi : X^2 \rightrightarrows Y$  по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому – антитонности. По отображению  $\Phi : X^2 \rightrightarrows Y$ , элементу  $\widehat{y} \in Y$  и произвольному множеству  $X_0 \subset X$  определим множество  $\mathcal{S}(\Phi, X_0, \widehat{y})$  всех цепей  $S \subset X_0$  таких, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \forall x \in S \quad \exists y \in \Phi(x, x) \quad y \geq \widehat{y}, \\ \forall x, u \in S \quad x < u \quad \Rightarrow \quad \exists \xi \in [x, u] \quad \widehat{y} \in \Phi(\xi, u). \end{aligned}$$

**Теорема 2.1** (см. [14, теорема 1.2]). Пусть существуют  $u_0 \in X$  и  $y_0 \in \Phi(u_0, u_0)$  такие, что  $y_0 \geq \widehat{y}$ , и выполнены условия:

- (А) при любом  $x \in O_X(u_0)$  отображение  $\Phi(\cdot, x) : X \rightrightarrows Y$  упорядоченно накрывает множество  $\{\widehat{y}\}$ ;
- (В) при любом  $x \in O_X(u_0)$  отображение  $\Phi(x, \cdot) : X \rightrightarrows Y$  является антитонным на множестве  $[x, u_0]_X$ ;
- (С) любая бесконечная цепь  $S \in \mathcal{S}(\Phi, O_X(u_0), \widehat{y})$  ограничена снизу, и для некоторой ее нижней границы  $\omega \in X$  существует  $z \in \Phi(\omega, \omega)$ , удовлетворяющий неравенству  $z \geq \widehat{y}$ .

Тогда включение (2) имеет решение, среди решений существует минимальный элемент, который принадлежит множеству  $O_X(u_0)$ .

Из приведенной теоремы выводятся достаточные условия существования наименьшего элемента в множестве решений включения (2).

**Следствие 2.1.** Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и для любых  $x, v \in O_X(u_0)$  выполнено:

- (D) если  $\widehat{y} \in F(x)$  и  $\widehat{y} \in F(v)$ , то существуют  $\omega \in X$ ,  $y \in F(\omega)$  такие, что  $\omega \leq x$ ,  $\omega \leq v$  и  $y \geq \widehat{y}$ .

Тогда в множестве решений включения (2) существует наименьший элемент, и он принадлежит  $O_X(u_0)$ .

**Доказательство.** Покажем, что минимальный в множестве решений включения (2) элемент  $\omega \in O_X(u_0)$  (существование которого устанавливает теорема 2.1) является наименьшим. Предположим, что это не верно, и найдется еще одно решение  $u$  такое, что  $u \not\leq \omega$ . Согласно предположению (D) существует  $z \in X$ , такой что  $z \leq u$ ,  $z \leq \omega$  и существует  $y \in F(z)$  такой, что  $y \geq \widehat{y}$ . Если  $z = \omega$ , то  $\omega \leq x$ , а это не верно, следовательно  $z \neq \omega$ , то есть  $z < \omega$ . Согласно теореме 2.1 в множестве  $O_X(z) \subset O_X(u_0)$  существует решение  $\xi$  включения (2) и  $\xi \leq z < \omega$ , а это противоречит тому, что  $\omega$  минимальное решение.

**3. Существование и оценка решений краевой задачи для дифференциального включения.** Обозначим через  $W^n$  пространство измеримых (по Лебегу) функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с «естественным» по координатным порядком.

Напомним, что множество  $U \subset W^n$  называют *интегрально ограниченным снизу*, если существует такое  $C \in \mathbb{R}$ , что для любой функции  $u \in U$  справедливо неравенство  $\int_a^b u(t) dt \geq C$ .

Для обозначения действия многозначного отображения, имеющего компактные в  $\mathbb{R}^m$  значения, вместо символа  $\rightrightarrows \mathbb{R}^m$  далее будем писать  $\rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ , а в случае компактных связных значений будем писать  $\rightarrow K^C(\mathbb{R}^m)$ .

По аналогии с «обычной» функцией, многозначное отображение  $G : \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  назовем *непрерывным справа в точке*  $x_0 \in \mathbb{R}$  (см. [15]), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  выполнено  $H_{\mathbb{R}^m}(G(x_0), G(x)) < \varepsilon$ . Здесь символом  $H_{\mathbb{R}^m}$  обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Аналогично определяется свойство непрерывности слева многозначного отображения  $G : \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ .

Пусть заданы многозначные отображения  $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ ,  $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  и диагональная  $n \times n$  матрица  $\lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Рассмотрим дифференциальное включение

$$G(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a, b], \quad (3)$$

при дополнительном ограничении на искомую функцию

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(t) - \lambda x(t) \in B(t), \quad t \in [a, b]. \quad (4)$$

Обозначим  $L^n \subset W^n$  – пространство суммируемых функций  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с по координатным порядком,  $AC^n$  – пространство таких абсолютно непрерывных функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\dot{x} \in L^n$ . Заметим, что для любой функции  $x \in AC^n$  включения  $\dot{x} \in L^n$  и  $\mathcal{L}x \in L^n$  равносильны. Определим подмножество  $L(B)$  пространства  $L^n$ , содержащее все суммируемые сечения многозначного отображения  $B : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ , и подмножество  $AC_{\mathcal{L}}(B)$  пространства  $AC^n$  таких абсолютно непрерывных функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , что  $\mathcal{L}x \in L(B)$ .

Решением системы включений (3),(4) будем называть всякую функцию  $x \in AC_{\mathcal{L}}(B)$ , удовлетворяющую включению (3) при п. в.  $t \in [a, b]$ .

Пусть заданы две диагональные  $n \times n$  матрицы  $\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\beta = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  такие, что

$$\alpha_i > 0, \quad \beta_i < 0, \quad \lambda_i \neq \ln \left( -\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Для заданного вектора  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим краевую задачу для системы (3),(4) с условием

$$\alpha x(a) + \beta x(b) = \gamma. \quad (6)$$

Будем обозначать множество ее решений через  $\mathcal{R}$ .

Для рассматриваемого отображения со значениями  $G(t, x, v, w)$  сделаем замену переменных

$$v = z + \lambda x, \quad w = y + \lambda x. \quad (7)$$

Тем самым по заданному отображению  $G$  определим отображение  $G^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ ,

$$G^\lambda(t, x, z, y) = G(t, x, z + \lambda x, y + \lambda x). \quad (8)$$

Будем предполагать, что многозначные отображения  $G^\lambda$  и  $B$  удовлетворяют следующим условиям:

- при любых  $x, z, y \in \mathbb{R}^n$  отображение  $G^\lambda(\cdot, x, z, y) : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  измеримо;
- при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $y \in \mathbb{R}^n$  отображение  $G^\lambda(t, \cdot, \cdot, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  непрерывно справа по каждому скалярному аргументу  $x_1, \dots, x_n$  и  $z_1, \dots, z_n$ ;
- при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, z \in \mathbb{R}^n$  отображение  $G^\lambda(t, x, z, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  непрерывно;
- множество измеримых сечений многозначного отображения  $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  не пусто и интегрально ограничено снизу.

Отметим, что для многозначного отображения  $G^\lambda$  не предполагается выполнение условий Каратеодори. Тем не менее приведенные условия обеспечивают его суперпозиционную измеримость (см. [15, теорема 2.1]).

При произвольных  $q = (q_1, \dots, q_n) \in L^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу

$$\mathcal{L}x = q, \quad \alpha x(a) + \beta x(b) = c. \quad (9)$$

В силу неравенств (5) эта задача при любых  $q \in L^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  имеет единственное решение  $x = (x_1, \dots, x_n) \in AC^n$ , определяемое формулой

$$x = W(q, c),$$

где отображение  $W : L^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow AC^n$  – это интегральный оператор

$$W(q, c) = (W_1(q_1, c_1), \dots, W_n(q_n, c_n)), \quad (10)$$

компоненты которого определяются соотношениями

$$(W_i(q_i, c_i))(t) = X_i(t)c_i + \int_a^b \mathcal{W}_i(t, s)q_i(s)ds, \quad t \in [a, b], \quad (11)$$

$$X_i(t) = \frac{e^{\lambda_i t}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda_i b}}, \quad \mathcal{W}_i(t, s) = \begin{cases} \frac{\alpha_i e^{\lambda_i(t-s)}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda_i b}}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ \frac{-\beta_i e^{\lambda_i(t-s+1)}}{\alpha_i + \beta_i e^{\lambda_i b}}, & a \leq t < s \leq b, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Обозначим

$$D(t) \doteq \{(W(q, \gamma))(t) : q \in W(B)\} \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in [a, b],$$

$$\Omega \doteq \{(t, x, z, y) : t \in [a, b], x \in D(t), z \in B(t), y \in B(t)\}$$

и определим сужение  $G_\Omega^\lambda : \Omega \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  многозначного отображения  $G^\lambda$  на множество  $\Omega$ .

**Теорема 3.1** (см. [7, теорема 2.1]). Пусть задана функция  $\eta_0 \in AC_L(B)$  такая, что

$$G(t, \eta_0(t), \eta_0(t), \eta_0(t)) \cap \mathbb{R}_+^m \neq \emptyset, \quad t \in [a, b], \quad (13)$$

$$\alpha \eta_0(a) + \beta \eta_0(b) \geq \gamma. \quad (14)$$

Пусть также выполнены следующие условия:

- (А) при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x \in D(t)$ ,  $z \in B(t)$  отображение  $G_\Omega^\lambda(t, x, z, \cdot) : B(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  упорядоченно накрывает множество  $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$ ;
- (В) для п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , при  $i = \overline{1, n}$  таких, что  $\lambda_i > \ln(-\frac{\alpha_i}{\beta_i})$ , отображение  $G^\lambda(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, z, y) : \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  изотонно, а при  $i = \overline{1, n}$  таких, что  $\lambda_i < \ln(-\frac{\alpha_i}{\beta_i})$ , отображение  $G^\lambda(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, z, y) : \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  антитонно;
- (С) при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$  отображение  $G^\lambda(t, x, \cdot, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  антитонно.

Тогда задача (3),(4),(6) разрешима, то есть множество  $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$  ее решений не пусто, а в множестве  $\mathcal{LR} \subset L(B)$  существует минимальный элемент  $\mathcal{L}x$ ,  $x \in \mathcal{R}$ , и для него при п. в.  $t \in [a, b]$  выполнено  $(\mathcal{L}x)(t) \leq (\mathcal{L}\eta_0)(t)$ .

**Замечание 3.1.** Утверждение теоремы 3.1, очевидно, остается верным, если в условии (5) заменить знаки неравенства на противоположные, то есть

$$\alpha_i < 0, \quad \beta_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

При этом в условии (14) в неравенстве для краевого условия также необходимо заменить знак, то есть

$$\alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \leq \gamma.$$

Действительно, при таких предположениях, для эквивалентного краевого условия  $-\alpha x(a) - \beta x(b) = -\gamma$  будут выполнены предположения теоремы 3.1.

Приведем дополнительные условия к условиям теоремы 3.1, при выполнении которых для краевой задачи (3),(4),(6) во множестве  $\mathcal{LR}$  существует не только минимальный, но и наименьший элемент.

Будем предполагать, что  $m = n$  и каждая  $i$ -я компонента  $G_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , многозначного отображения  $G$  может быть записана в виде

$$G_i(t, x, v, w_i), \quad \text{где } G_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R})$$

( $G_i$  не зависит от переменных  $w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$ ). В этом случае включение (3) представляет собой систему

$$G_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) \ni 0, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

**Следствие 3.1.** Пусть для задачи (15),(4),(6) выполнены предположения теоремы 3.1, а множество  $B(t) \subset \mathbb{R}^n$  при п. в.  $t \in [a, b]$  является нижней полурешеткой. Тогда во множестве  $\mathcal{LR} \subset L(B)$  существует наименьший элемент.

**Доказательство.** Из теоремы 3.1 следует, что в множестве  $\mathcal{LR} \subset L(B)$  существует минимальный элемент  $\mathcal{L}x$ ,  $x \in \mathcal{R}$ . Докажем, что этот элемент будет наименьшим в  $\mathcal{LR}$ .

Предположим, что это не верно, а значит существует также решение  $\underline{x} \in \mathcal{R}$  такое, что функция  $\mathcal{L}\underline{x}$  не сравнима с  $\mathcal{L}x$ . Определим измеримую функцию  $z = (z_1, \dots, z_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  с компонентами

$$z_i(t) = \min \{ \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t), \dot{\underline{x}}_i(t) - \lambda_i \underline{x}_i(t) \}, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}.$$

Так как при п. в.  $t \in [a, b]$  выполнено  $z(t) = \min \{ (\mathcal{L}x)(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t) \}$ , где  $(\mathcal{L}x)(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t) \in B(t)$ , а множество  $B(t) \subset \mathbb{R}^n$  является нижней полурешеткой, то  $z(t) \in B(t)$ . Очевидно, функция  $z$  суммируема, следовательно,  $z \in L(B)$ . Определим функцию  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in AC(B)$  соотношением  $\zeta \doteq W(z, \gamma)$ , где отображение  $W : L^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow AC^n$  задано выше формулами (10),(11),(12).

Для любого  $i = \overline{1, n}$  определим множества

$$E_i = \{ t \in [a, b] : z_i(t) = \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t) \}, \quad \underline{E}_i = [a, b] \setminus E_i.$$

Вследствие этого определения  $z_i(t) = \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t)$  при п. в.  $t \in \underline{E}_i$ . При п. в.  $t \in E_i$  выполнено  $G_i^\lambda(t, \zeta(t), z(t), z_i(t)) = G_i^\lambda(t, \zeta(t), z(t), \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t))$ . А поскольку на  $[a, b]$  имеет место включение  $0 \in G_i^\lambda(t, x(t), (\mathcal{L}x)(t), \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t))$ , то в силу антитонности отображения  $G_i^\lambda(t, \cdot, \cdot, \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t))$  при п. в.  $t \in E_i \subset [a, b]$  существует  $y \geq 0$  такой, что выполнено  $y \in G_i^\lambda(t, \zeta(t), z(t), \dot{x}_i(t) - \lambda_i x_i(t)) = G_i^\lambda(t, \zeta(t), z(t), z_i(t))$ .

Аналогично доказывается, что при п. в.  $t \in \underline{E}_i$  существует  $y \geq 0$ , удовлетворяющий включению  $y \in G_i(t, \zeta(t), z(t), \dot{\underline{x}}_i(t) - \lambda_i \underline{x}_i(t)) = G_i(t, \zeta(t), z(t), z_i(t)) = G_i(t, \zeta(t), (\mathcal{L}\zeta)(t), \dot{\zeta}_i(t) - \lambda_i \zeta_i(t))$ . Таким образом, при любом  $i$  почти всюду на  $[a, b]$  имеет место  $G_i(t, \zeta(t), (\mathcal{L}\zeta)(t), \dot{\zeta}_i(t) - \lambda_i \zeta_i(t)) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$ . Итак,  $G(t, \zeta(t), (\mathcal{L}\zeta)(t), (\mathcal{L}\zeta)(t)) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$ ,  $t \in [a, b]$ . Из этого соотношения согласно теореме 3.1 следует существование решения  $\zeta$  краевой задачи (15),(4),(6) такого, что  $\mathcal{L}\zeta \leq z < \mathcal{L}x$ . Но это неравенство противоречит тому, что  $\mathcal{L}x$  является минимальным элементом в множестве  $\mathcal{LR}$ .

Следствие доказано.

Для задачи Коши близкое утверждение о существовании решения с наименьшей производной получено в [16, теорема 3].

Сформулируем утверждение, в котором условие (A) теоремы 3.1 заменим на легче проверяемое, при этом, как и в следствии 3.1, будет гарантировано существование во множестве  $\mathcal{LR}$  наименьшего элемента.

Пусть снова  $m = n$ . Будем предполагать, что компонентами функции  $G$  являются функции  $G_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K^C(\mathbb{R})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , (имеющие значениями связные компактные множества в  $\mathbb{R}$ , то есть конечные отрезки). Соответственно (3) — это система (15).



Для рассматриваемого здесь отображения  $G$  отображение  $G^\lambda$ , определяемое соотношением (8), будет иметь компонентами функции

$$\begin{aligned} G_i^\lambda &: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K^C(\mathbb{R}), \\ G_i^\lambda(t, x, z, y_i) &= G_i(t, x, z + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, пусть заданы функции  $\omega_0, \eta_0 \in AC^n$  такие, что  $\mathcal{L}\omega_0 \leq \mathcal{L}\eta_0$ . Зададим многозначное отображение  $B : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$  формулой

$$B(t) \doteq [(\mathcal{L}\omega_0)(t), (\mathcal{L}\eta_0)(t)]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a, b]. \quad (17)$$

Сформулируем условия разрешимости рассматриваемой краевой задачи с ограничением (4), задаваемым многозначным отображением (17).

**Следствие 3.2.** Пусть для многозначной функции  $G^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K^C(\mathbb{R}^n)$  с компонентами (16) выполнены условия (B), (C) теоремы 3.1, а для функций  $\eta_0, \omega_0 \in AC^n$  выполнено

$$\begin{aligned} \alpha\omega_0(a) + \beta\omega_0(b) &\leq \gamma \leq \alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b), \quad \mathcal{L}\omega_0 \leq \mathcal{L}\eta_0, \\ G(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t)) \cap \mathbb{R}_+^n &\neq \emptyset \text{ при п. в. } t \in [a, b], \\ -G(t, \omega_0(t), \dot{\omega}_0(t), \dot{\omega}_0(t)) \cap \mathbb{R}_+^n &\neq \emptyset \text{ при п. в. } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Тогда задача (15),(4),(6) разрешима, то есть множество  $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$  ее решений не пусто, а в множестве  $\mathcal{LR} \subset L(B)$  существует наименьший элемент.

**Доказательство.** Доказательство этого утверждения прямо следует из следствия 3.1. Надо лишь показать, что для отображения  $G_\Omega^\lambda$  выполнено условие (A) теоремы 3.1.

Обозначим через  $B_i, i = \overline{1, n}$ , компоненты многозначного отображения  $B : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ , то есть  $B_i : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}), B_i(t) \doteq [\omega_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), \eta_{0i}(t) - \lambda_i \eta_{0i}(t)], t \in [a, b]$ . Для каждого  $i$  определим множество  $T_i \subset [a, b]$  таких  $t \in [a, b]$ , что при любых  $x \in \mathbb{R}^n, z \in B(t)$  отображение  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \cdot) : B_i(t) \rightarrow K^C(\mathbb{R})$  непрерывно и выполнено  $-\infty < \mathcal{L}\omega_0(t), \mathcal{L}\eta_0(t) < +\infty$ . Мера этого множества равна  $b - a$ , и при всех  $t \in T_i$  множество  $B_i(t)$  есть конечный отрезок. Проверим выполнение условия (A) теоремы 3.1. Пусть для произвольного  $i = \overline{1, n}$ , при некотором  $t \in T_i$  существуют такие  $x \in \mathbb{R}^n, z \in B(t)$ , что  $i$ -ая компонента отображения  $G_\Omega^\lambda(t, x, z, \cdot)$ , то есть отображение  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \cdot) : B_i(t) \rightarrow K^C(\mathbb{R})$  не является упорядоченно накрывающим множество  $\{0\} \subset \mathbb{R}$ . Тогда существует такое  $\underline{y} \in \mathbb{R}$ , что множество  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \underline{y})$  содержит некоторое положительное число, а при любом значении  $\underline{y} \in [\omega_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), \underline{y}]$  ноль не принадлежит множеству  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \underline{y})$ . Покажем, что существует такое  $\delta > 0$ , что при любом  $\underline{y} \in [\omega_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), \underline{y}]$  выполнено

$$G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \underline{y}) \cap (-\delta, \delta) = \emptyset. \quad (18)$$

В противном случае существует последовательность  $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset [\omega_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), \underline{y}]$  такая, что при любом  $k$  найдется  $\zeta_k \in G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, y_k), |\zeta_k| < 2^{-k}$ . Последовательность  $\{y_k\}_{k=1}^\infty$  компактна, поэтому содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $\bar{y} \in [\omega_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), \underline{y}]$ . Вследствие непрерывности отображения  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \cdot)$  в точке  $\bar{y}$  будет выполнено включение  $0 \in G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \bar{y})$ , которое противоречит принятым предположениям.

Из (18) в силу связности значений  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \underline{y})$  следует, что отрезок  $E \doteq [\omega_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), \underline{y}]$  является объединением двух множеств

$$E_+ \doteq \{y \in U : G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, y) \subset [\delta, +\infty)\}, \quad E_- \doteq \{y \in U : G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, y) \subset (-\infty, -\delta]\}.$$

Оба эти множества должны быть замкнутыми, так как отображение  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \cdot)$  непрерывно. Однако это невозможно вследствие связности отрезка  $E \cap U$ . Итак, доказано, что при любом  $t \in T_i$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $z \in B(t)$  отображение  $G_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \cdot) : B_i(t) \rightarrow K^C(\mathbb{R})$  упорядоченно накрывает множество  $\{0\} \subset \mathbb{R}$ . А так как мера множества  $T_i$  равна  $b - a$ , условие (A) действительно выполнено.

Остается заметить, что определяемое равенством (17) множество  $B(t) \subset \mathbb{R}^n$  при п. в.  $t \in [a, b]$  является нижней полурешеткой. Тогда из следствия 3.1 следует существование решения задачи (15),(4),(6) с наименьшей производной.

Следствие доказано.

**4. Краевая задача для управляемой системы.** Применим приведенные выше в пункте 3 результаты к исследованию краевой задачи для управляемой системы неявных дифференциальных уравнений.

Пусть заданы функция  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  и многозначное отображение  $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, v \in \mathbb{R}^n$  функция  $g(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывна;

- при любом  $u \in \mathbb{R}^m$  функция  $g(\cdot, \cdot, \cdot, u) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  суперпозиционно измерима (то есть для любых измеримых функций  $x(\cdot), v(\cdot)$  функция  $g(\cdot, x(\cdot), v(\cdot), u)$  измерима);
  - многозначное отображение  $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  суперпозиционно измеримо.
- Рассмотрим на  $[a, b]$  управляемую систему

$$g(t, x, \dot{x}, u) = 0 \quad (19)$$

с обратной связью

$$u(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (20)$$

Решением системы (19),(20) будем называть пару функций, удовлетворяющих при п. в.  $t \in [a, b]$  обоим соотношениям (19),(20), из которых первая, называемая *траекторией* — это абсолютно непрерывная функция  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , а вторая, называемая *управлением* — измеримая функция  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Определим дифференциальное включение, ассоциированное с управляемой системой (19),(20). Зададим многозначное отображение  $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$  формулой

$$G(t, x, v) \doteq g(t, x, v, U(t, x, v)), \quad (t, x, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что из непрерывности функции  $g(t, x, v, \cdot)$  и компактности множества  $U(t, x, v)$  следует, что отображение  $G$  имеет компактные значения. Кроме того, легко проверить, что  $G$  суперпозиционно измеримо. Рассмотрим включение

$$0 \in G(t, x, \dot{x}), \quad t \in [a, b]. \quad (21)$$

Приведем утверждение, позволяющее «переходить» от рассматриваемой здесь «неявной» управляемой системы (19),(20) к дифференциальному включению (21).

**Лемма 4.1** (см. [16, лемма 1]). *Управляемая система (19),(20) равносильна включению (21), то есть если пара  $(x, u) \in AC^n \times W^m$  — решение управляемой системы (19),(20), то  $x \in AC^n$  является решением включения (21), и обратно, если  $x \in AC^n$  — решение включения (21), то существует функция  $u \in W^m$  такая, что пара  $(x, u)$  является решением системы (19),(20).*

Приведенное утверждение аналогично известной теореме о равносильности управляемой дифференциальной системы, разрешенной относительно производной, соответствующему дифференциальному включению (см, например [4, теорема 3.4.1]).

Теперь применим лемму 4.1 к исследованию существования решений краевой задачи для управляемой системы. Для удобства формулировок систему (19),(20) запишем в несколько ином виде.

Пусть заданы функция  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ , многозначные отображения  $U : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  и  $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ , вектор  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ . Пусть также заданы диагональные  $n \times n$  матрицы  $\alpha \doteq \text{diag}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\beta \doteq \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ ,  $\lambda \doteq \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  такие, что выполнены соотношения (5). Рассмотрим краевую задачу для управляемой системы

$$g(t, x, \dot{x}, \dot{x}, u) = 0, \quad t \in [a, b], \quad (22)$$

с обратной связью (20) при краевом условии (6) и дополнительном ограничении (4). Множество решений этой задачи обозначим через  $\text{Sol}_g^U(B)$ . Согласно определению решения управляемой системы  $\text{Sol}_g^U(B) \subset AC(B) \times W^m$ . Будем рассматривать также множество  $\mathcal{L}\text{Sol}_g^U(B) \subset L(B) \times W^m$  пар  $(\mathcal{L}x, u)$  таких, что  $(x, u) \in \text{Sol}_g^U(B)$ . Определим операторы проектирования  $\pi_1 : AC(B) \times W^m \rightarrow AC(B)$  и  $\pi_2 : AC(B) \times W^m \rightarrow W^m$  соотношениями

$$\forall \vartheta = (x, u) \in AC(B) \times W^m \quad \pi_1 \vartheta = x, \quad \pi_2 \vartheta = u.$$

Для порождающих рассматриваемую управляемую систему отображений

$$\begin{aligned} [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (t, x, v, w, u) &\mapsto g(t, x, v, w, u) \in \mathbb{R}^k, \\ [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (t, x, v) &\mapsto U(t, x, v) \in K(\mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

сделаем замену переменных (7). Тем самым определим функцию  $g^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  и многозначное отображение  $U^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  соотношениями

$$g^\lambda(t, x, z, y, u) = g(t, x, z + \lambda x, y + \lambda x, u), \quad U^\lambda(t, x, z) = U(t, x, z + \lambda x). \quad (23)$$

Будем предполагать, что функция  $g^\lambda$  и многозначные отображения  $U^\lambda, B$  удовлетворяют следующим условиям:

- при любых  $x, z, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  функция  $g^\lambda(\cdot, x, z, y, u) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  измерима;
- при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  функция  $g^\lambda(t, \cdot, \cdot, y, u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывна справа по каждому скалярному аргументу  $x_1, \dots, x_n$  и  $z_1, \dots, z_n$ ;

- при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  функция  $g^\lambda(t, x, z, \cdot, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывна;
- при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, z, y \in \mathbb{R}^n$  функция  $g^\lambda(t, x, z, y, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывна;
- при любых  $x, z \in \mathbb{R}^n$  отображение  $U^\lambda(\cdot, x, z) : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  измеримо;
- при п. в.  $t \in [a, b]$  отображение  $U^\lambda(t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  непрерывно справа по каждой компоненте  $x_1, \dots, x_n$  и  $z_1, \dots, z_n$  векторных аргументов  $x, z \in \mathbb{R}^n$ ;
- множество измеримых сечений многозначного отображения  $B : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  не пусто и интегрально ограничено снизу.

В силу принятых здесь предположений, согласно [15, теорема 2.1], функция  $g^\lambda$  и многозначное отображение  $U^\lambda$  являются суперпозиционно измеримыми (несмотря на то, что они не удовлетворяют условиям Каратеодори).

При произвольных  $q = (q_1, \dots, q_n) \in L^n$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  рассмотрим вспомогательную линейную краевую задачу (9). В силу условия (5) эта задача при любых  $q \in L^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  имеет единственное решение  $x = (x_1, \dots, x_n) \in AC^n$ , определяемое формулой  $x = W(q, c)$ , где интегральный оператор  $W : L^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow AC^n$  определяется соотношениями (10),(11),(12).

Для каждого  $t \in [a, b]$  определим множества

$$D(t) \doteq \{(W(q, \gamma))(t) : q \in W(B)\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{U}^\lambda(t) \doteq U^\lambda(t, D(t), B(t)) \subset \mathbb{R}^m.$$

Далее определим множества

$$\Omega \doteq \{(t, x, z, y, u) : t \in [a, b], x \in D(t), z \in B(t), y \in B(t), u \in \mathcal{U}^\lambda(t)\},$$

$$\Theta \doteq \{(t, x, z) : t \in [a, b], x \in D(t), z \in B(t)\}$$

и зададим сужение  $g_\Omega^\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  функции  $g^\lambda$  на множество  $\Omega$  и сужение  $U_\Theta^\lambda : \Theta \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  многозначного отображения  $U^\lambda$  на множество  $\Theta$ .

**Теорема 4.1.** Пусть заданы функции  $\eta_0 \in AC_{\mathcal{L}}(B)$  и  $u_0 \in W^m$  такие, что  $u_0(t) \in U(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , и справедливы неравенства

$$g(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), u_0(t)) \geq 0 \text{ при п. в. } t \in [a, b], \quad \alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \geq \gamma. \quad (24)$$

Пусть далее выполнены следующие условия:

- (А) при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x \in D(t)$ ,  $z \in B(t)$ ,  $u \in \mathcal{U}^\lambda(t)$  функция  $g_\Omega^\lambda(t, x, z, \cdot, u) : B(t) \rightarrow \mathbb{R}^k$  упорядоченно накрывает множество  $\{0\} \subset \mathbb{R}^k$ ;
- (В) при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $z, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  для всех  $i = \overline{1, n}$  таких, что  $\lambda_i > \ln(-\frac{\alpha_i}{\beta_i})$ , функция  $g^\lambda(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, z, y, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  возрастает, а для  $i = \overline{1, n}$  таких, что  $\lambda_i < \ln(-\frac{\alpha_i}{\beta_i})$ , функция  $g^\lambda(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, z, y, u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$  убывает;
- (С) при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  функция  $g^\lambda(t, x, \cdot, y, u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  убывает;
- (D) при п. в.  $t \in [a, b]$  отображение  $U_\Theta^\lambda(t, \cdot, \cdot) : D(t) \times B(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  изотонно.

Тогда для управляемой системы (22) с обратной связью (20) и ограничением (4) существует решение  $(x, u)$  краевой задачи с условием (6) такое, что  $\mathcal{L}x \leq \mathcal{L}\eta_0$  и  $u \leq u_0$ . Более того, в множестве  $\mathcal{L}\text{Sol}_g^U(B)$  существует пара  $(\mathcal{L}x, \underline{u})$  такая, что  $\mathcal{L}x$  — минимальный элемент в  $\pi_1(\mathcal{L}\text{Sol}_g^U(B))$  и выполнено  $\mathcal{L}x \leq \mathcal{L}\eta_0$  и  $\underline{u} \leq u_0$ .

**Доказательство.** Определим многозначное отображение  $G : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^k$  при  $(t, x, v, w) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  формулой

$$G(t, x, v, w) \doteq g(t, x, v, w, U(t, x, v)). \quad (25)$$

Рассмотрим включение

$$G(t, x, \dot{x}, \dot{x}) \ni 0, \quad t \in [a, b]. \quad (26)$$

В силу леммы 4.1 управляемая система (22),(20) равносильна включению (26), то есть если пара  $(x, u) \in AC^n \times W^m$  — решение управляемой системы (22),(20), то  $x \in AC^n$  является решением включения (26), и наоборот, если  $x \in AC^n$  — решение включения (26), то существует функция  $u \in W^m$  такая, что пара  $(x, u)$  является решением системы (22),(20).

Обозначим множество решений включения (26) при ограничении (4) с краевым условием (6) через  $\mathcal{R}$ , соответственно, обозначим  $\mathcal{LR} \doteq \{\mathcal{L}x, x \in \mathcal{R}\}$ . Согласно (4) выполнено  $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$ .

Для рассматриваемого отображения со значениями  $G(t, x, v, w)$  сделаем замену переменных (7), тем самым по заданному отображению  $G$  определим отображение  $G^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^k)$ ,

$$G^\lambda(t, x, z, y) = G(t, x, z + \lambda x, y + \lambda x).$$

Заметим, что

$$G^\lambda(t, x, z, y) = g^\lambda(t, x, z, y, U^\lambda(t, x, z)). \quad (27)$$

Для дифференциального включения (26) при ограничении (4) с краевым условием (6) выполнены все предположения теоремы 3.1 (то есть отображения  $B, G$  и, соответственно,  $G^\lambda$  удовлетворяют условиям

(А)–(С) этой теоремы и неравенствам (13),(14). Следовательно, множество  $\mathcal{R} \subset AC_{\mathcal{L}}(B)$  решений краевой задачи (26),(4),(6) не пусто, а в множестве  $\mathcal{LR} \subset L(B)$  существует минимальный элемент  $\underline{x}$ , и для него выполнено  $\mathcal{L}\underline{x} \leq \mathcal{L}\eta_0$ . Поэтому, множество  $\text{Sol}_{\mathfrak{g}}^U(B)$  решений управляемой системы (22),(20) при условиях (6),(4) не пусто и существует пара  $(\underline{x}, u) \in \text{Sol}_{\mathfrak{g}}^U(B)$  такая, что  $\mathcal{L}\underline{x}$  – минимальный элемент в  $\pi_1(\mathcal{LSol}_{\mathfrak{g}}^U(B))$  и выполнено  $\mathcal{L}\underline{x} \leq \mathcal{L}\eta_0$ .

Управление, соответствующее траектории  $\underline{x}$ , удовлетворяет включению  $u(t) \in U(t, \underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t))$  при п. в.  $t \in [a, b]$ . Вследствие изотонности отображения  $U_{\mathfrak{g}}^{\lambda}(t, \cdot, \cdot) : D(t) \times B(t) \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  при п. в.  $t \in [a, b]$  множество  $\underline{U}(t) = U^{\lambda}(t, \underline{x}(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t)) \cap O_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$  не пусто, соответствующее многозначное отображение  $\underline{U} : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  является пересечением измеримых отображений, поэтому само измеримо. Для любого измеримого сечения  $\underline{u}$  отображения  $\underline{U}$  пара  $(\underline{x}, \underline{u})$  – решение рассматриваемой задачи управления и, очевидно,  $\underline{u} \leq u_0$ .

Теорема доказана.

**Замечание 4.1.** Утверждение теоремы 4.1, очевидно, остается верным, если в условии (5) заменить знаки неравенства на противоположные, то есть  $\alpha_i < 0, \beta_i > 0, i = \overline{1, n}$ . При этом в условии (24) в неравенстве для краевого условия также необходимо заменить знак, то есть  $\alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b) \leq \gamma$ . Действительно, при таких предположениях для эквивалентного краевого условия  $-\alpha x(a) - \beta x(b) = -\gamma$  будут выполнены предположения теоремы 4.1.

Получим дополнительные условия к условиям теоремы 4.1, которые обеспечат существование наименьшей траектории и наименьшего допустимого управления.

Пусть  $k = n$ . Будем предполагать, что каждая  $i$ -я компонента  $\mathfrak{g}_i, i = \overline{1, n}$ , функции  $\mathfrak{g}$  может быть записана в виде

$$\mathfrak{g}_i(t, x, v, w_i, u), \text{ где } \mathfrak{g}_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

( $\mathfrak{g}_i$  не зависит от переменных  $w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$ ). В этом случае уравнение (22) представляет собой систему

$$\mathfrak{g}_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i, u) = 0, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}. \quad (28)$$

**Следствие 4.1.** Пусть для системы (28),(20),(6),(4) выполнены предположения теоремы 4.1, а множество  $B(t) \subset \mathbb{R}^n$  при п. в.  $t \in [a, b]$  является нижней полурешеткой. Тогда существует траектория  $\underline{x} \in AC_{\mathcal{L}}(B)$  такая, что  $\mathcal{L}\underline{x}$  – наименьший элемент в  $\pi_1(\mathcal{LSol}_{\mathfrak{g}}^U(B))$ . Если кроме перечисленных условий при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, v \in \mathbb{R}^n$  множество  $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m$  является нижней полурешеткой, то в множестве  $\mathcal{LSol}_{\mathfrak{g}}^U(B)$  существует наименьший элемент, то есть такая пара  $(\mathcal{L}\underline{x}, \underline{u})$ , что ее первая компонента  $\mathcal{L}\underline{x}$  – это наименьший элемент в множестве  $\pi_1(\mathcal{LSol}_{\mathfrak{g}}^U(B))$ , а вторая компонента  $\underline{u}$  – наименьший элемент в  $\pi_2(\mathcal{LSol}_{\mathfrak{g}}^U(B))$ .

**Доказательство.** Дифференциальное включение (26), равносильное рассматриваемой управляемой системе, порождается многозначным отображением (25), компоненты которого здесь могут быть представлены в виде

$$\mathbf{G}_i(t, x, v, w_i) \doteq \mathfrak{g}_i(t, x, v, w_i, U(t, x, v)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Итак, включение (26) в рассматриваемом случае – это система

$$\mathbf{G}_i(t, x, v, w_i) \ni 0, \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}.$$

Краевая задача для этого включения с условиями (6),(4) удовлетворяет предположениям теоремы 4.1. А так как еще и  $B(t) \subset \mathbb{R}^n$  при п. в.  $t$  является нижней полурешеткой, то согласно следствию 3.1, в множестве  $\mathcal{R}$  решений этой краевой задачи (то есть траекторий управляемой системы) имеется функция  $\underline{x} \in AC_{\mathcal{L}}(B)$  такая, что  $\mathcal{L}\underline{x}$  – наименьший элемент в  $\mathcal{LR}$ .

Пусть теперь в дополнение к рассмотренным условиям при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x, v \in \mathbb{R}^n$  множество  $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m$  является нижней полурешеткой. Определим многозначное отображение  $\underline{U} : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$ ,  $\underline{U}(t) \doteq U(t, \underline{x}(t), (\mathcal{L}\underline{x})(t)) \cap O_{\mathbb{R}^m}(u_0(t))$ . Это отображение измеримо. Докажем, что в множестве его измеримых сечений имеется наименьший элемент.

Для  $j = \overline{1, m}$  определим оператор проектирования  $Pr_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Pr_j(u_1, \dots, u_j, \dots, u_m) \doteq u_j$ . Положим  $\underline{U}_j(t) \doteq Pr_j(\underline{U}(t)) = \{u_j = Pr_j u, u \in \underline{U}(t)\}, t \in [a, b]$ . В компактном непустом множестве  $\underline{U}_j(t)$  имеется наименьший элемент  $\underline{u}_j(t)$ . Так как значение  $u_{0j}(t) - \underline{u}_j(t)$  есть расстояние по Хаусдорфу между множествами  $\{u_{0j}(t)\}$  и  $\underline{U}_j(t)$ , то согласно [4, Следствие 1.5.9] функция  $u_{0j}(\cdot) - \underline{u}_j(\cdot)$  измерима. Поэтому функция  $\underline{u}_j(\cdot)$  также измерима. Так как при п. в.  $t \in [a, b]$  множество  $\underline{U}(t)$  является нижней решеткой, то  $\underline{u}(t) = (\underline{u}_j(t))_{j=\overline{1, m}} \in \underline{U}(t), t \in [a, b]$ . Итак, функция  $\underline{u}(\cdot)$  является наименьшей среди измеримых сечений отображения  $\underline{U}(\cdot)$ . Доказано, что в множестве измеримых управлений, соответствующих траектории  $\underline{x}(\cdot)$ , существует наименьшее управление.

Для произвольной траектории  $x$  выполнены неравенства  $\mathcal{L}\underline{x} \leq \mathcal{L}x$  и  $\underline{x} \leq x$ . Поэтому, вследствие изотонности отображения  $U(t, \cdot, \cdot)$ , для любого измеримого сечения  $u$  многозначного отображения  $U(\cdot, x(\cdot), (\mathcal{L}x)(\cdot))$  существует измеримое сечение  $u_*$  многозначного отображения  $U(\cdot, \underline{x}(\cdot), (\mathcal{L}\underline{x})(\cdot))$  такое,

что  $u_* \leq u$ . А так как  $\underline{u} \leq u_*$ , получаем неравенство  $\underline{u} \leq u$ . Таким образом, пара  $(\underline{\mathcal{L}x}, \underline{u})$  является наименьшей в множестве  $\text{DSol}_g^U(B)$ .

Следствие доказано.

Сформулируем утверждение, в котором условие (A) теоремы 4.1 заменим на легче проверяемое, при этом будет гарантировано существование решения  $(x, u)$  краевой задачи для неявной управляемой системы такого, что пара  $(\underline{\mathcal{L}x}, \underline{u})$  будет наименьшей в множестве  $\text{LSol}_g^U(B)$ .

Пусть  $k = n$ . Снова будем предполагать, что компонентами функции  $g$  являются функции

$$g_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Соответственно (22) — это система (28).

Для рассматриваемой здесь функции  $g$  функция  $g^\lambda$ , определяемая первым из соотношений (23), будет иметь компонентами функции

$$\begin{aligned} g_i^\lambda &: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \\ g_i^\lambda(t, x, z, y_i, u) &= g_i(t, x, z + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i, u), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее, пусть заданы функции  $\omega_0, \eta_0 \in AC^n$  такие, что  $\mathcal{L}\omega_0 \leq \mathcal{L}\eta_0$ . Зададим многозначное отображение  $B : [a, b] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$  формулой

$$B(t) \doteq [(\mathcal{L}\omega_0)(t), (\mathcal{L}\eta_0)(t)]_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in [a, b]. \quad (30)$$

**Следствие 4.2.** Пусть для функции  $g^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  с компонентами (29) и многозначного отображения  $U^\lambda : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow K(\mathbb{R}^m)$  выполнены условия (B)–(D) теоремы 4.1. Пусть заданы функции  $\eta_0, \omega_0 \in AC^n$  и  $\bar{u}_0, \underline{u}_0 \in W^m$  такие, что

$$\bar{u}_0(t) \in U(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t)), \quad \underline{u}_0(t) \in U(t, \omega_0(t), \dot{\omega}_0(t)) \quad \text{при п. в. } t \in [a, b]$$

и выполнены неравенства

$$g(t, \eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\eta}_0(t), \bar{u}_0(t)) \geq 0, \quad g(t, \omega_0(t), \dot{\omega}_0(t), \dot{\omega}_0(t), \underline{u}_0(t)) \leq 0 \quad \text{при п. в. } t \in [a, b], \quad (31)$$

и

$$\alpha\omega_0(a) + \beta\omega_0(b) \leq \gamma \leq \alpha\eta_0(a) + \beta\eta_0(b), \quad \mathcal{L}\omega_0 \leq \mathcal{L}\eta_0.$$

Тогда существует решение  $(x, u)$  краевой задачи с условием (6) для управляемой системы (28) с обратной связью (20) и ограничением (4),(30). Кроме того, существует траектория  $\underline{x} \in AC_{\mathcal{L}}(B)$  такая, что  $\underline{\mathcal{L}x}$  — наименьший элемент в  $\pi_1(\text{LSol}_g^U(B))$ . Если кроме перечисленных условий при п. в.  $t \in [a, b]$  и любых  $x \in D(t)$ ,  $v \in B(t)$  множество  $U(t, x, v) \subset \mathbb{R}^m$  является нижней полурешеткой, то в множестве  $\text{LSol}_g^U(B)$  существует наименьший элемент, то есть такая пара  $(\underline{\mathcal{L}x}, \underline{u})$ , что ее первая компонента  $\underline{\mathcal{L}x}$  — это наименьший элемент в множестве  $\pi_1(\text{LSol}_g^U(B))$ , а вторая компонента  $\underline{u}$  — наименьший элемент в  $\pi_2(\text{LSol}_g^U(B))$ .

**Доказательство.** Покажем, что справедливо условие (A) теоремы 4.1. Пусть при фиксированных  $t, x, z, u$  для некоторого  $y = (y_1, \dots, y_n) \in [(\mathcal{L}\omega_0)(t), (\mathcal{L}\eta_0)(t)]_{\mathbb{R}^n}$  при всех  $i = \overline{1, n}$  выполнено  $g_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, y_i, u) \geq 0$ . А так как в силу (31) имеет место еще и неравенство

$$g_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \dot{\omega}_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), u) \leq 0,$$

то в силу непрерывности функции  $g_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \cdot, u)$ , найдется такое  $\zeta_i \in [\dot{\omega}_{0i}(t) - \lambda_i \omega_{0i}(t), y]$ , что  $g_{\Omega_i}^\lambda(t, x, z, \zeta_i, u) = 0$ . Соответственно, для  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  имеем  $g_{\Omega}^\lambda(t, x, z, \zeta, u) = 0$ , и таким образом, условие (A) теоремы 4.1 выполнено.

Определяемое равенством (30) множество  $B(t) \subset \mathbb{R}^n$  при п. в.  $t \in [a, b]$  является нижней полурешеткой. Итак, доказано, что выполнены все условия следствия 4.1. Таким образом, справедливость доказываемого утверждения прямо вытекает из следствия 4.1. Следствие доказано.

**5. Заключение.** Основными результатами работы являются условия существования и оценки решений двухточечной краевой задачи для системы неявных дифференциальных включений и для неявной дифференциальной управляемой системы. Полученные утверждения имеют вид теорем, аналогичных классической теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Также показано, что в условиях доказанных утверждений в множествах решений рассматриваемых задач существуют минимальные элементы, и получены дополнительные условия существования наименьших решений.

## Список литературы

1. Закалюкин И.В. Управляемость механических систем вблизи подмножества вырождения неголономных связей. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2010;6:23–31.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы; 1959. 916 с.
3. Пилия А.Д., Федоров В.И. Особенности поля электромагнитной волны в холодной анизотропной плазме с двумерной неоднородностью *ЖЭТФ*. 1971;60(1):389–399.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. стереотип. – М.: ЛИБРОКОМ; 2016. 224 с.
5. Жуковская Т.В., Серова И.Д. Оценка решения неявного дифференциального включения второго порядка. *Современные методы теории функций и смежные проблемы : Материалы Международной конференции. Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж, 27 января – 01 февраля 2023 года*. 2023;149–151.
6. Гельман Б.Д. О локальных решениях вырожденных дифференциальных включений. *Функциональный анализ и его приложения*. 2012;46(1):79–83.
7. Серова И.Д. Исследование краевой задачи для дифференциального включения. *Вестник российских университетов. Математика*. 2023;28(144):395–405.
8. Чаплыгин С.А. Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1950. 106 с.
9. Walter W. Differential and Integral Inequalities. *Springer Verlag. Berlin*. 1970;710–713.
10. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(12):1610–1627.
11. Бенараб С., Жуковская З.Т., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления. *Дифференциальные уравнения*. 2020;56(11):1471–1482.
12. Бенараб С. О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. *Вестник российских университетов. Математика*. 2021;26(135):225–233.
13. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*. 2015;179(1):13–33.
14. Burlakov E.O., Serova I.D., Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes. *Advances in Systems Science and Applications*. 2022;22(1):176–191.
15. Серова И.Д. Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори. *Вестник российских университетов. Математика*. 2021;26(135):305–314.
16. Жуковский Е.С., Серова И.Д. О задаче управления для системы неявных дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 2023;59(9): 1283–1296.

## References

1. Zakalyukin IV. Upravlyaemost' mekhanicheskikh sistem vblizi podmnozhestva vyrozhdeniya negolonomnykh svyazei [Controllability of mechanical systems near the degeneracy subset of nonholonomic couplings]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*. 2010;6:23–31.
2. Andronov AA., Vitt AA., Khaikin SE. Teoriya kolebaniy [Vibration theory]. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury; 1959. 916 p.
3. Piliya AD., Fedorov VI. Osobennosti polya elektromagnitnoi volny v kholodnoi anizotropnoi plazme s dvumernoi neodnorodnost'yu [Peculiarities of electromagnetic wave field in cold anisotropic plasma with two-dimensional inhomogeneity] *ZhETF*. 1971;60(1):389–399.
4. Borisovich YuG., Gel'man BD., Myshkis AD., Obukhovskii VV. Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazhenii i differentsial'nykh vklucheni. [Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions] Izd. stereotip. – M.: LIBROKOM; 2016. 224 p.
5. Zhukovskaya TV., Serova ID. Otsenka resheniya neyavnogo differentsial'nogo vklucheniya vtorogo poryadka [Solution evaluation of the implicit second-order differential inclusion]. *Sovremennye metody teorii funktsii i smezhnye problemy : Materialy Mezhdunarodnoi konferentsii. Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola, Voronezh, 27 yanvarya – 01 fevralya 2023 goda*. 2023;149–151.
6. Gel'man BD. On local solutions of degenerate differential inclusions. *Functional analysis and its applications*. 2012;46(1):66–68. (In Russian)
7. Serova ID. Study of the boundary value problem for a differential inclusion. *Russian Universities Reports. Mathematics*. 2023;28(144):395–405. (In Russian)
8. Chaplygin SA. Novyi metod priblizhennogo integrirvaniya differentsial'nykh uravnenii. M.: Nauka; 1950. 106 p.
9. Walter W. Differential and Integral Inequalities. *Springer Verlag. Berlin*. 1970;710–713.

10. Zhukovskiy ES. On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities. *Differential equations*. 2016;52(12): 1610–1627. (In Russian)
11. Benarab S., Zhukovskaya ZT., Zhukovskiy ES., Zhukovskiy SE. Functional and differential inequalities and their applications to control problems. *Differential equations*. 2020;56(11):1471–1482. (In Russian)
12. Бенараб С. On chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order  $n$ . *Russian Universities Reports. Mathematics*. 2021;26(135):225–233. (In Russian)
13. Arutyunov AV., Zhukovskiy ES., Zhukovskiy SE. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*. 2015;179(1):13–33.
14. Burlakov EO., Serova ID., Zhukovskiy ES., Panasenko EA. On Order Covering Set-Valued Mappings and Their Applications to the Investigation of Implicit Differential Inclusions and Dynamic Models of Economic Processes. *Advances in Systems Science and Applications*. 2022;22(1):176–191.
15. Serova ID. Superpositional measurability of a multivalued function under generalized caratheodory conditions. *Russian Universities Reports. Mathematics*. 2021;26(135):305–314. (In Russian)
16. Zhukovskiy ES., Serova ID. On a control problem for a system of implicit differential equations *Differential equations*. 2023;59(9):1283–1296. (In Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.07.2024

Received July 4, 2024

Поступила после рецензирования 16.08.2024

Revised August 16, 2024

Принята к публикации 20.08.2024

Accepted August 20, 2024

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Серова Ирина Дмитриевна** – аспирант кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина, г. Тамбов, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Irina D. Serova** – Graduate Student of the Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russia

[К содержанию](#)

## О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

Абдурагимов Г. Э. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. А. Алхутвым)

Дагестанский государственный университет,  
Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М.Гаджиева, 43-а  
[gusen\\_e@mail.ru](mailto:gusen_e@mail.ru)


**Аннотация.** В статье рассматривается двухточечная краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающая деформацию состояния равновесия балки, один конец которой жестко закреплен, а второй подвижный, на шарнире. В случае подлинейного роста правой части уравнения с помощью теоремы Лере – Шаудера устанавливается существование положительного решения рассматриваемой задачи. Для доказательства единственности положительного решения используются полученные в работе априорные оценки решения и ее производных.

**Ключевые слова:** краевая задача, положительное решение, функция Грина, теорема Лере – Шаудера

**Для цитирования:** Абдурагимов Г. Э. 2024. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 193–197. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-193-197

Original Research

## On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for one Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation

Gusen E. Abduragimov 

(Article submitted by a member of the editorial board Yu. A. Alkhutov)

Dagestan State University,  
43-a M. Gadzhieva St., Makhachkala, 367000, Russia  
[gusen\\_e@mail.ru](mailto:gusen_e@mail.ru)

**Abstract.** The article considers a two-point boundary value problem for a fourth-order nonlinear ordinary differential equation, which describes the deformation of the equilibrium state of a beam, one end of which is rigidly fixed and the other is movable on a hinge. In the case of sublinear growth of the right side of the equation, using the Leray-Schauder theorem, the existence of a positive solution to the problem under consideration is established. To prove the uniqueness of a positive solution, a priori estimates of the solution and its derivatives.

**Keywords:** Boundary Value Problem, Positive Solution, Green's function, Leray-Schauder Theorem

**For citation:** Abduragimov G. E. 2024. On the Existence and Uniqueness of a Positive Solution to a Boundary Value Problem for one Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 193–197. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-193-197

**1. Введение.** В настоящей статье исследуется краевая задача

$$x^{(4)}(t) = -f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad (2)$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(1) = 0, \quad x'''(1) = 0, \quad (3)$$

где  $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  – непрерывная функция. Задача (1)–(3) моделирует деформацию состояния равновесия упругой балки, у которой один конец жестко закреплен, а другой – подвижный. В механике такая задача называется уравнением консольной балки (см., например, [1, 2]), где производные функции деформации  $x(t)$  имеют следующий физический смысл:  $x^{(4)}$  – жесткость плотности нагрузки,  $x'''$  – жесткость поперечной силы,  $x''$  – жесткость изгибающего момента и  $x'$  – наклон.

Целью данной работы является получение достаточных условий существования и единственности положительных решений краевой задачи (1)–(3). Среди близких к настоящей статье задач отметим



[3, 4, 5, 6, 7], в основе которых лежат теоремы о неподвижной точке оператора. Полученные результаты дополняют исследования автора в этом направлении [8, 9].

**2. Основные результаты.** Для удобства выкладок введем следующие сокращения пространств: обозначим через  $\mathbb{R}^+$  пространство всех неотрицательных действительных чисел, через  $\mathbb{C}$  соответственно пространство  $\mathbb{C}[0, 1]$  с нормой  $\|x\|_{\mathbb{C}} = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ ,  $\mathbb{C}^m$  – пространство  $\mathbb{C}^m[0, 1]$  с нормой  $\|x\|_{\mathbb{C}^m} = \max \{ \|x\|_{\mathbb{C}}, \|x'\|_{\mathbb{C}}, \dots, \|x^{(m)}\|_{\mathbb{C}} \}$ ,  $\mathbb{L}_2$  – пространство  $\mathbb{L}_2(0, 1)$  с нормой  $\|x\|_{\mathbb{L}_2} = \left( \int_0^1 x(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}$  и через  $\mathbb{W}^m$  – пространство Соболева с нормой  $\|x\|_{\mathbb{W}^m} = \left( \sum_{i=0}^m \|x^{(i)}\|_{\mathbb{L}_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Вместе с задачей (1)–(3) рассмотрим линейную задачу

$$x^{(4)}(t) = -h(t), \quad 0 < t < 1, \quad (4)$$

$$x(0) = 0, \quad (5)$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(1) = 0, \quad x'''(1) = 0, \quad (6)$$

где  $h \in \mathbb{L}_2$  – неотрицательная на  $[0, 1]$  функция.

**Лемма 2.1.** Для каждого  $h \in \mathbb{L}_2$  существует единственное положительное решение  $x \in \mathbb{W}^4$  задачи (4)–(6), такое что

$$\|x^{(i-1)}\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x^{(i)}\|_{\mathbb{L}_2}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (7)$$

**Доказательство.** Легко проверить, что для любого  $h \in \mathbb{L}_2$  функция

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) h(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (8)$$

где

$$G(t, s) = \frac{1}{6} \begin{cases} 3st(s-t) + t^3, & \text{если } 0 \leq t \leq s; \\ s^3, & \text{если } s \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (9)$$

функция Грина оператора  $-\frac{d^4}{dt^4}$  с краевыми условиями (5), (6), принадлежит  $\mathbb{W}^4$  и является единственным положительным решением линейной задачи (4)–(6).

С учетом граничного условия (5) имеем

$$x(t) = \int_0^t x'(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Следовательно, в силу неравенства Гельдера

$$|x(t)| \leq \int_0^t |x'(s)| ds \leq t^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t |x'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq t^{\frac{1}{2}} \|x'\|_{\mathbb{L}_2}, \quad t \in [0, 1],$$

откуда следует, что  $\|x\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x'\|_{\mathbb{L}_2}$ . Аналогично, из соотношений

$$x'(t) = - \int_t^1 x''(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad x''(t) = - \int_t^1 x'''(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad x'''(t) = - \int_t^1 x^{(4)}(s) ds, \quad t \in [0, 1],$$

соответственно получим  $\|x'\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x''\|_{\mathbb{L}_2}$ ,  $\|x''\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x'''\|_{\mathbb{L}_2}$  и  $\|x'''\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x^{(4)}\|_{\mathbb{L}_2}$ .

Как легко видеть для  $h \in \mathbb{C}$  функция

$$x = Gh \in \mathbb{C}^4,$$

где  $G$  – оператор Грина с ядром (9), является классическим положительным решением задачи (4)–(6). В силу компактности вложения Соболева  $\mathbb{W}^4 \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ , оператор  $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$  является вполне непрерывным оператором.

Определим отображение  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  равенством

$$(Fx)(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Ввиду непрерывности  $f$ , непрерывен и оператор  $F$ . Определим суперпозицию отображений равенством

$$A = G \circ F. \quad (10)$$

Из полной непрерывности  $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$  следует полная непрерывность оператора  $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ . В силу определения оператора  $G$  положительное решение краевой задачи (4)–(6) эквивалентно неподвижной точке оператора  $A$ .

**Теорема 2.1.** *Предположим, что существуют числа  $0 \leq a < 4$  и  $b > 0$ , такие что*

$$f(t, y_0) \leq ay_0 + b, \tag{11}$$

для всех  $(t, y_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$ . Тогда краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

**Доказательство.** Пусть  $A : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  – вполне непрерывный оператор, определяемый формулой (10). Тогда положительное решение задачи (1)–(3) эквивалентно неподвижной точке оператора  $A$ . Воспользуемся теоремой Лере – Шаудера для доказательства наличия у оператора  $A$  неподвижной точки. С этой целью рассмотрим гомотопное семейство операторных уравнений

$$x = \lambda Ax, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{12}$$

Покажем, что множество положительных решений (12) ограничено в  $\mathbb{C}^3$ .

Пусть  $x \in \mathbb{C}^3$  – положительное решение уравнения (12) для  $\lambda \in [0, 1]$ . Введя обозначение  $h = \lambda F(x)$ , получим  $x = \lambda Ax = \lambda G(F(x)) = G(\lambda F(x)) = Gh$ . В силу определения  $G$  выражение  $x = Gh$  определяет единственное положительное решение линейной граничной задачи (4)–(6). Следовательно  $x \in \mathbb{C}^4$  удовлетворяет задаче

$$x^{(4)}(t) = -\lambda f(t, x(t)), \quad 0 < t < 1, \tag{13}$$

$$x(0) = 0, \tag{14}$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(0) = 0, \quad x'''(1) = 0. \tag{15}$$

Умножая уравнение (13) на  $-x''(t)$ , воспользовавшись (11), получим

$$-x^{(4)}(t)x''(t) = \lambda f(t, x(t))x''(t) \leq \lambda(ax(t)x''(t) + bx''(t)) \leq ax(t)x''(t) + bx''(t), \quad t \in [0, 1],$$

где  $0 \leq a < 4$  и  $b > 0$  – произвольные числа. Интегрируя теперь это неравенство на  $[0, 1]$  с учетом граничных условий (14), (15) и применяя неравенство Гельдера к правой части соответственно получим

$$\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}^2 \leq a\|x\|_{\mathbb{L}_2}\|x''\|_{\mathbb{L}_2} + b\|x''\|_{\mathbb{L}_2}.$$

В силу леммы 2.1 имеем

$$\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}^2 \leq \frac{a}{4}\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}^2 + \frac{b}{\sqrt{2}}\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\|x'''\|_{\mathbb{L}_2} \leq M_0, \quad \text{где } M_0 = \frac{4b}{\sqrt{2}(4-a)}.$$

На основании этой оценки и леммы 2.1 имеем

$$\|x\|_{\mathbb{W}^3} \leq \left( \sum_{i=0}^3 \|x^{(i)}\|_{\mathbb{L}_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \|x'''\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\frac{15}{8}} M_0.$$

Следовательно, в силу ограниченности вложения Соболева  $\mathbb{W}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$

$$\|x\|_{\mathbb{C}^2} \leq C\|x\|_{\mathbb{W}^3} \leq C\sqrt{\frac{15}{8}} M_0 =: M_1, \tag{16}$$

где  $C$  – постоянная вложения Соболева  $\mathbb{W}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ .

Несложно показать, что  $\max_{t \in [0,1]} G(t, s) = \frac{s^3}{6}$ ,  $s \in [0, 1]$ . Тогда на основании (12) имеем

$$\|x\|_{\mathbb{C}} = \lambda \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s)) ds \leq \int_0^1 \frac{s^3}{6}(ax(s) + b) ds \leq \frac{a}{24}\|x\|_{\mathbb{C}} + \frac{b}{24}.$$

Откуда

$$\|x\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{b}{24-a} =: M_2. \tag{17}$$

Проинтегрировав уравнение (13) на  $[0, 1]$  с учетом граничного условия  $x'''(1) = 0$ , получим

$$x'''(t) = \lambda \int_t^1 f(s, x(s)) ds.$$

Воспользовавшись (11) и (17), имеем

$$\|x'''\|_{\mathbb{C}} = \lambda \int_0^1 f(s, x(s)) ds \leq \int_0^1 (ax(s) + b) ds \leq a\|x\|_{\mathbb{C}} + b \leq aM_2 + b =: M_3. \quad (18)$$

Окончательно из (16) и (18) заключаем, что

$$\|x\|_{\mathbb{C}^3} = \max \{\|x\|_{\mathbb{C}^2}, \|x'''\|_{\mathbb{C}}\} = \max \{M_1, M_3\} =: M.$$

Это означает, что множество положительных решений (12) ограничено в  $\mathbb{C}^3$ . Согласно теореме Лере – Шаудера оператор  $A$  имеет неподвижную точку в  $\mathbb{C}^3$ , что равносильно существованию по меньшей мере одного положительного решения задачи (1)–(3).

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Кроме того, предположим, что существует число  $0 \leq \alpha < 4$  такое, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \alpha|y_1 - y_2|, \quad (19)$$

для всех  $(t, y_1, y_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Тогда краевая задача (1)–(3) имеет по крайней мере одно положительное решение.

**Доказательство.** Пусть  $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^4$  – два различных положительных решения задачи (1)–(3). Положим  $x = x_2 - x_1$  и  $h = F(x_2) - F(x_1)$ . Имеем  $x = x_2 - x_1 = Ax_2 - Ax_1 = G(F(x_2)) - G(F(x_1)) = Gh$ . Следовательно,  $x$  является решением линейной задачи (4)–(6) и удовлетворяет уравнению

$$x^{(4)}(t) = -[F(x_2)(t) - F(x_1)(t)], \quad t \in [0, 1].$$

Умножая это уравнение на  $-x''(t) = -(x_2''(t) - x_1''(t))$ , воспользовавшись условием (19) получим

$$\begin{aligned} -x^{(4)}(t)x''(t) &= [F(x_2)(t) - F(x_1)(t)](x_2''(t) - x_1''(t)) \\ &\leq \alpha(x_2(t) - x_1(t))(x_2''(t) - x_1''(t)) = \alpha x(t)x''(t), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство на  $[0, 1]$  и используя лемму 2.1, получим

$$\|x'''\|_{\mathbb{L}_2}^2 \leq \alpha \|x\|_{\mathbb{L}_2} \|x''\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{\alpha}{4} \|x'''\|_{\mathbb{L}_2}^2.$$

Поскольку  $\alpha < 4$ , из этого неравенства следует, что  $\|x'''\|_{\mathbb{L}_2} = 0$ . В то же время из леммы 2.1 вытекает, что  $\|x\|_{\mathbb{L}_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \|x'''\|_{\mathbb{L}_2}$ , откуда  $\|x\|_{\mathbb{L}_2} = 0$ . Следовательно  $x_1 = x_2$ . Это означает, что краевая задача (1)–(3) имеет только одно положительное решение.

**3. Пример.** Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(4)}(t) = -2\sqrt{x(t) + \beta}, \quad 0 < t < 1, \quad (20)$$

$$x(0) = 0, \quad (21)$$

$$x'(1) = 0, \quad x''(1) = 0, \quad x'''(1) = 0, \quad (22)$$

где  $\beta > \frac{1}{16}$ .

Проверим, что соответствующая нелинейная составляющая  $f(t, y_0) = 2\sqrt{y_0 + \beta}$  удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Взяв  $a = 1$  и  $b = \beta + 1$ , для каждого  $(t, y_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$  имеем

$$f(t, y_0) = 2\sqrt{y_0 + \beta} \leq y_0 + \beta + 1.$$

Следовательно,  $f$  удовлетворяет условию (11) и в силу теоремы 2.1 краевая задача (20)–(22) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Очевидно, функция  $f$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $[0, 1]$ . Тогда, как следует из формулы конечных приращений, она удовлетворяет условию (19) с постоянной

$$\alpha = \max_{(t, y_0) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+} |f'_x(t, y_0)| = \max_{y_0 \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{\sqrt{y_0 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

С учетом ограничений на  $\beta$  легко видеть, что  $\alpha \in (0, 4)$ . Следовательно в силу теоремы 2.2 краевая задача (20)–(22) имеет единственное положительное решение.

**4. Заключение.** В работе рассмотрена краевая задача (1)–(3), моделирующая деформацию состояния равновесия консольной балки. В подлинейном случае с помощью теоремы Лере – Шаудера доказано существование хотя бы одного положительного решения рассматриваемой задачи. Кроме того, при выполнении условия (19) показано, что данная задача имеет только единственное положительное решение. Приведен соответствующий пример, иллюстрирующий выполнение условий теорем существования и единственности положительного решения задачи (1)–(3).

## Список литературы

1. Aftabzadeh A.R. Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 1986;116:415–426.
2. Gupta C.P. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation. *Appl. Anal.* 1988;26:289–304.
3. Yao Q. Monotonically iterative method of nonlinear cantilever beam equations. *Appl. Math. Comput.* 2008;205:432–437.
4. Infante G., Pietramala P. A cantilever equation with nonlinear boundary conditions. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2009;15:1–14.
5. Alves E., Ma T.F., Pelicer M.L. Monotone positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions. *Nonlinear Anal.* 2009;71:3834–3841.
6. Cabada A., Tersian S. Multiplicity of solutions of a two point boundary value problem for a fourth-order equation. *Appl. Math. Comput.* 2013;219:5261–5267.
7. Абдурагимов Э.И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка. *Вестник Самарского университета. Естественная серия.* 2014;10(121):9–16.
8. Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка. *Вестник российских университетов. Математика.* 2021;136(25):341–347.
9. Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. *Математические заметки СВФУ.* 2022;4(29):3–10.

## References

1. Aftabzadeh AR. Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 1986;116:415–426.
2. Gupta CP. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation. *Appl. Anal.* 1988;26:289–304.
3. Yao Q. Monotonically iterative method of nonlinear cantilever beam equations. *Appl. Math. Comput.* 2008;205:432–437.
4. Infante G., Pietramala P. A cantilever equation with nonlinear boundary conditions. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 2009;15:1–14.
5. Alves E., Ma TF., Pelicer ML. Monotone positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions. *Nonlinear Anal.* 2009;71:3834–3841.
6. Cabada A., Tersian S. Multiplicity of solutions of a two point boundary value problem for a fourth-order equation. *Appl. Math. Comput.* 2013;219:5261–5267.
7. Abduragimov EI. Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one fourth-order nonlinear ODE. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series.* 2014;10(121):9–16. (In Russian)
8. Abduragimov GE., Abduragimova PE., Kuramagomedova MM. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order. *Russian Universities Reports. Mathematics.* 2021;136(25):341–347. (In Russian)
9. Abduragimov GE., Abduragimova PE., Kuramagomedova MM. On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a fourth-order nonlinear ordinary differential equation. *Mathematical notes of NEFU.* 2022;4(29):3–10. (In Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.07.2024

Received July 4, 2024

Поступила после рецензирования 14.08.2024

Revised August 14, 2024

Принята к публикации 20.08.2024

Accepted August 20, 2024

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ


**Абдурагимов Гусен Эльдерханович** – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия

## INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Gusen E. Abduragimov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, Russia

[К содержанию](#)

## О нижней границе для минимального собственного значения оператора четвёртого порядка на графе

Уртаева А. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии О. М. Пенкиным)

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова,  
Россия, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46  
[urtaeva-96@mail.ru](mailto:urtaeva-96@mail.ru)

**Аннотация.** Данная статья посвящена получению нижних границ для минимального собственного значения дифференциального оператора четвертого порядка на метрическом графе, возникающего при моделировании плоских стержневых систем. На этом пути устанавливается аналог тождества Пиконе для уравнения четвертого порядка на сети. В качестве применения такого тождества получена теорема сравнения стурмовского типа для уравнения четвертого порядка на графе.

**Ключевые слова:** собственное значение, квантовый граф, уравнение на графе, уравнение четвертого порядка

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2024-1447.

**Для цитирования:** Уртаева А. А. 2024. О нижней границе для минимального собственного значения оператора четвёртого порядка на графе. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 198–207.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-198-207

Original Research

## On the Lower Bound for the Minimum Eigenvalue of a Fourth-Order Operator on a Graph

Aleksandra A. Urtaeva 

(Article submitted by a member of the editorial board O. M. Penkin)

North Ossetian State University after K. L. Khetagurova,  
44-46 Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, Russia  
[urtaeva-96@mail.ru](mailto:urtaeva-96@mail.ru)

**Abstract.** In this article we obtain lower bounds for the minimum eigenvalue of a fourth-order differential operator on a metric graph, which is a model of a planar system of thin rods. In this way, we establish an analogue of the Picone identity for a fourth-order equation on a network. As an application of this identity, we formulate Sturm type comparison theorem for a fourth-order equation on a graph.

**Keywords:** Eigenvalue, Quantum Graph, Network Equation, Fourth Order Equation

**Acknowledgements:** The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. Agreement no 075-02-2024-1447.

**For citation:** Urtaeva A. A. 2024. On the Lower Bound for the Minimum Eigenvalue of a Fourth-Order Operator on a Graph. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 198–207. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-198-207

**1. Введение.** В данной статье мы изучаем краевую задачу на собственные значения для дифференциального оператора  $L$  четвертого порядка на графе  $\Gamma$ , которая возникает при моделировании малых деформаций плоских стержневых систем:

$$Lu(x) = \lambda \rho(x)u, \quad x \in \Gamma, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \partial u')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Оператор  $L$  задаётся обыкновенными дифференциальными уравнениями на рёбрах графа  $\Gamma$ , а в узлах графа оператор  $L$  задаётся наборами условий согласования (см. раздел 2, условия (5)–(6)). При этом под дифференциальным уравнением (1) на графе мы подразумеваем, следуя [1], набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа и набор условий согласования во внутренних вершинах.

К настоящему времени подробно изучен вопрос об асимптотике спектра краевых задач 2-го и 4-го порядка на графах [2, 3, 4, 5], получены оценки кратностей собственных значений оператора Штурма-Лиувилля [6] и оператора четвёртого порядка на графе [7]. В данной работе мы даем оценку снизу ведущего собственного значения краевой задачи четвёртого порядка.

Имеется несколько подходов к получению таких оценок. Наиболее общим является операторный подход, развитый в работах М.А. Красносельского и его учеников [8]. Основная идея этого подхода заключается в том, что оценка снизу ведущего собственного значения краевой задачи эквивалентна оценке спектрального радиуса интегрального оператора, обращающего краевую задачу. Ядром такого интегрального оператора является функция Грина соответствующей краевой задачи. И тот факт, что положительность функции Грина задачи на графе обеспечивают оператору хорошие знакорегулярные свойства [1, 9, 10, 11, 12, 13], даёт возможность применения теории операторов, действующих в пространствах с конусами, для получения оценки ведущего собственного значения. Однако, если найти явный вид функции Грина задачи на графе невозможно, то упомянутый выше операторный подход не может быть применен для наших целей.

Другой подход при получении оценок ведущего собственного значения краевой задачи для лапласиана с краевыми условиями Дирихле на графе основан на принципе Рэля и методе перестановок-симметризаций [14]. При симметризации Шварца (при симметричной перестановке) неотрицательной функции из  $H^1(\mathbb{R})$  норма ее градиента в  $L^2(\mathbb{R})$  не возрастает. Вместе с принципом Рэля этот факт позволил получить оценку первого собственного значения лапласиана, подчиненного условиям Дирихле.

В настоящей статье мы даем оценку минимального собственного значения краевой задачи дифференциального оператора четвертого порядка на графе  $\Gamma$  аналогичную оценке Д.Р. Даннингера для билапласиана [15] (см. также [16]). В доказательстве используется аналог тождества Пиконе [17, Глава X].

**2. Постановка задачи.** В данной работе мы используем терминологию и обозначения работ [9, 18]. На протяжении всей статьи  $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$  обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель, с множеством вершин  $V(\Gamma)$  и множеством точек ребер графа  $E(\Gamma)$ . *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – это концевая точка одного или нескольких ребер. Ребра графа обозначаются  $\gamma_i$ , вершины обозначаются  $a, b$  и т. д. Для любой  $a \in V(\Gamma)$  через  $I(a)$  обозначим множество индексов ребер, инцидентных вершине  $a$ , и через  $|I(a)|$  обозначим количество элементов множества  $I(a)$ . Элементы множеств  $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geq 2\}$  и  $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$  называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Мы считаем, что  $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$  и  $\partial\Gamma \neq \emptyset$ . Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф.

Введем функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Через  $u_i$  будем обозначать сужение функции  $u \in C[\Gamma]$  (или  $C[E(\Gamma)]$ ) на соответствующее ребро  $\gamma_i$ . Для функции  $u \in C[\Gamma]$  (или  $C[E(\Gamma)]$ ), произвольной вершины  $a \in V(\Gamma)$  и  $i \in I(a)$  полагаем  $u_i(a) := \lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$ .

Обратим внимание, что  $u_k(a)$  не обязательно равны  $u_i(a)$  или  $u(a)$ , где  $k, i \in I(a)$  ( $k \neq i$ ). Пространство непрерывных функций определяется равенством  $C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] \mid u_i(a) = u(a) \ (\forall a \in J(\Gamma), \forall i \in I(a))\}$ .

Теперь определим производную функции на графе. Для этого вводим параметризацию каждого ребра  $\gamma = (a, b) \subset E(\Gamma)$ , где  $a, b \in V(\Gamma)$ , и ставим в соответствие каждой точке  $x \in \gamma$  координату  $t \in (0, l) \subset \mathbb{R}$ , определяемую соотношением  $x = a + t(b - a)/l$ , где  $l$  – длина соответствующего ребра  $\gamma$ . Производная функции  $u \in C[\Gamma]$  (или  $C[E(\Gamma)]$ ) в точке  $x \in \gamma$  определяется как  $u'(x) := \frac{d}{dt} u(a + t(b - a)/l)$ .

Через  $C^n[\Gamma]$  (или  $C^n[E(\Gamma)]$ ) мы обозначаем пространство функций  $u(x) \in C[\Gamma]$  (или  $C[E(\Gamma)]$ ), производные которых до порядка  $n$  включительно существуют и принадлежат пространству  $C[E(\Gamma)]$ . Для функции  $u(x) \in C^n[\Gamma]$  (или  $C^n[E(\Gamma)]$ ) в любой вершине  $a \in V(\Gamma)$  определено множество производных  $u_i^{(j)}(a)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , вдоль ребер, смежных с  $a$ . Производные нечетного порядка зависят от ориентации ребер. Для четной производной ориентация не важна.

Под интегралом функции  $u \in C[E(\Gamma)]$  понимаем сумму интегралов

$$\int_{\Gamma} u(x) dx := \sum_{\gamma_i \subset E(\Gamma)} \int_0^{l_i} u_i(x(t)) dt.$$

В статье рассматривается уравнение четвертого порядка на геометрическом графе  $\Gamma$ , которое коротко можно записать в виде

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

При этом под дифференциальным уравнением (3) мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')' - (q_i(x)u_i')' + r_i(x)u_i = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \quad (4)$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине  $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_i'(a) = 0, \quad i \in I(a), \quad (5)$$

$$\sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + r(a)u(a) = f(a), \quad (6)$$

где  $D^3 u = (pu'')' - qu'$  – третья квазипроизводная функции  $u$ .

Уравнение (4)–(6) возникает при моделировании малых деформаций стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения (см. [9], [19], [15], [20]). В этом случае равенства (4)–(6) можно трактовать следующим образом:  $u(x)$  обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (5) описывают классические локальные условия в узлах графа – перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упруго-шарнирное сочленение в вершине  $a$ . Последнее условие – это условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения (3) будем называть всякую функцию  $u \in C^4[\Gamma]$ , удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (4), а в каждой внутренней вершине – условиям (5), (6).

Таким образом, дифференциальный оператор  $L : D \rightarrow C[\Gamma]$  определяется соотношениями

$$D = \{u \in C^4[\Gamma] : u \text{ удовлетворяет (5) на } J(\Gamma)\},$$

$$Lu(x) \equiv \begin{cases} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' + r(x)u, & x \in E(\Gamma), \\ \sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + r(a)u(a), & a \in J(\Gamma). \end{cases} \quad (7)$$

На протяжении всей статьи мы считаем, что выполнены условия:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ ,  $q \in C^1[E(\Gamma)]$ ,  $q \geq 0$  на  $E(\Gamma)$ ,  $r, \rho \in C[\Gamma]$ ,  $r \geq 0$  на  $\Gamma$ ,  $\rho > 0$  на  $E(\Gamma)$  и  $\rho \geq 0$  на  $J(\Gamma)$ ;

- в граничных условиях и условиях согласования в узловых вершинах графа все производные вычисляются в направлении «от вершины»;

- $\beta(a) \geq 0$ ,  $\vartheta(a) \geq 0$  и  $\beta(a) + \vartheta(a) > 0$  для любой  $a \in \partial\Gamma$ ;

- $\beta_i(a)\vartheta_i(a) = 0$  и  $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$  для любой  $a \in J(\Gamma)$  и любого индекса  $i \in I(a)$ , причём  $\sum_{i \in I(a)} \vartheta_i(a) > 0$ ;

- для любого ребра  $\gamma_i = (a, b)$  по крайней мере одна из величин  $\max_{x \in \gamma_i} q(x)$ ,  $\vartheta_i(a)$ ,  $\vartheta_i(b)$  положительна.

Отметим, что серия условий на коэффициенты уравнения и граничных условий определяется физическим смыслом задачи (см., например, [1, Глава 8] или [18]). Что касается последних условий, то при их нарушении задача оказывается вырожденной. В этом случае спектр задачи (1), (2) из строго положительного становится неотрицательным: первое собственное значение оказывается равным нулю (см. [1, Глава 8]).

**3. Тождество Пиконе.** Рассмотрим оператор  $L : D \rightarrow C[\Gamma]$ , порожденный соотношениями (7) с коэффициентами  $p \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $q \in C^1[E(\Gamma)]$ ,  $r \in C[\Gamma]$ . Вместе с оператором  $L$  мы будем рассматривать оператор  $\mathcal{L} : D \rightarrow C[\Gamma]$ , порождаемый теми же соотношениями с заменой коэффициентов  $p, q, r$  на  $\mathcal{P} \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $\mathcal{Q} \in C^1[E(\Gamma)]$  и  $\mathcal{R} \in C[\Gamma]$  соответственно.

**Теорема 3.1.** Пусть функции  $u, v \in C^4[\Gamma]$  непрерывны на  $\Gamma$ . Если  $u/v \in C(\Gamma)$ , то

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\ &= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P})u''^2 + (q - \mathcal{Q})u'^2 + (r - \mathcal{R})u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a))u^2(a) \\ &+ \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left(u'' - \frac{u}{v}v''\right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left(u' - \frac{u}{v}v'\right)^2 dx \\ &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a) [u(a)\mathcal{D}^3 v(a) - v(a)\mathcal{D}^3 u(a)] \\ &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a)u'(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2}(a)(\mathcal{P}v'')(a)v'(a) - 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v}(a)u'(a)(\mathcal{P}v'')(a) \\ &+ \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} (p_i u_i')(a)u_i'(a) + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2}(a) \sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a)v_i'(a) \\ &- 2 \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) \sum_{i \in I(a)} u_i'(a)(\mathcal{P}_i v_i'')(a). \end{aligned} \quad (8)$$

**Доказательство.** Проинтегрируем по частям вдоль  $\Gamma$  произведение  $uLu$ . Имеем

$$\int_{\Gamma} u Lu dx = \int_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} [u'(pu'') - uD^3u]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} [u'_i(p_i u'_i) - u_i D^3 u_i]_{x=a}.$$

Поскольку функция  $u$  непрерывна в каждой внутренней вершине  $a \in J(\Gamma)$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u Lu dx &= \int_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} u'(a)(pu'')(a) - \sum_{a \in \partial\Gamma} u(a)D^3u(a) \\ &+ \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} u'_i(a)(p_i u'_i)(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} u(a) \left[ \sum_{i \in I(a)} D^3 u_i(a) + r(a)u(a) \right] + \sum_{a \in J(\Gamma)} r(a)u^2(a). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично, интегрируя дважды по частям произведение  $\frac{u^2}{v} \mathcal{L}v$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx &= \int_{\Gamma} \left[ \mathcal{P}v'' \left( \frac{u^2}{v} \right)'' + \mathcal{Q}v' \left( \frac{u^2}{v} \right)' + \mathcal{R}u^2 \right] dx \\ &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} \left[ \left( \frac{u^2}{v} \right)' (\mathcal{P}v'') - \frac{u^2}{v} \mathcal{D}^3 v \right]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} \left[ \left( \frac{u_i^2}{v_i} \right)' (\mathcal{P}_i v_i'') - \frac{u_i^2}{v_i} \mathcal{D}^3 v_i \right]_{x=a} \\ &= \int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{Q}u'^2 + \mathcal{R}u^2] dx + \int_{\Gamma} \left[ \mathcal{P}v'' \left( \frac{u^2}{v} \right)'' - \mathcal{P}u''^2 \right] dx + \int_{\Gamma} \left[ \mathcal{Q}v' \left( \frac{u^2}{v} \right)' - \mathcal{Q}u'^2 \right] dx \\ &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} \left[ \left( \frac{u^2}{v} \right)' (\mathcal{P}v'') - \frac{u^2}{v} \mathcal{D}^3 v \right]_{x=a} + \sum_{a \in J(\Gamma)} \sum_{i \in I(a)} \left[ \left( \frac{u_i^2}{v_i} \right)' (\mathcal{P}_i v_i'') - \frac{u_i^2}{v_i} \mathcal{D}^3 v_i \right]_{x=a}. \end{aligned}$$

Вычислим производные дроби  $u^2/v$ . Тогда правая часть последнего равенства примет вид

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{Q}u'^2 + \mathcal{R}u^2] dx - \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx \\ &+ 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx - \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx \\ &- \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2} (a) (\mathcal{P}v'')(a) v'(a) + 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v} (a) u'(a) (\mathcal{P}v'')(a) - \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v} (a) \mathcal{D}^3 v(a) \\ &- \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v^2} (a) \sum_{i \in I(a)} (\mathcal{P}_i v_i'')(a) v'_i(a) + 2 \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v} (a) \sum_{i \in I(a)} u'_i(a) (\mathcal{P}_i v_i'')(a) \\ &- \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v} (a) \left[ \sum_{i \in I(a)} \mathcal{D}^3 v_i(a) + \mathcal{R}(a)v(a) \right] + \sum_{a \in J(\Gamma)} \mathcal{R}(a)u^2(a). \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь, составляя разность  $\int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx$ , и привлекая (9), (10) и (7), получим (8).

**Следствие 3.1.** Пусть функция  $u \in C^2[\Gamma]$  удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u(a), \quad \forall a \in J(\Gamma), \forall i \in I(a); \\ u'_i(a) &= 0, \text{ если } \beta_i(a) = 0, \quad \forall a \in J(\Gamma), \forall i \in I(a). \end{aligned} \quad (11)$$

Если  $v \in D$  и  $u/v \in C(\Gamma)$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[u] &:= \int_{\Gamma} [\mathcal{P}u''^2 + \mathcal{Q}u'^2 + \mathcal{R}u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \mathcal{R}(a)u^2(a) \\ &= \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx \\ &+ \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v} (a) \mathcal{D}^3 v(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u^2}{v^2} (a) (\mathcal{P}v'')(a) v'(a) - 2 \sum_{a \in \partial\Gamma} \frac{u}{v} (a) u'(a) (\mathcal{P}v'')(a) \\ &+ \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v} (a) \mathcal{L}v(a). \end{aligned} \quad (12)$$



Равенство (12) сразу следует из (8), (5) и условия  $\beta_i(a)\vartheta_i(a) = 0$ , выполненного для любых  $a \in J(\Gamma)$  и  $i \in I(a)$ .

**Следствие 3.2** (тождество Пиконе). Если в условиях следствия 3.1 дополнительно предположить, что  $u|_{\partial\Gamma} = 0$ , то выполняется тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[u] = & \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx \\ & + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a) \mathcal{L}v(a). \end{aligned} \quad (13)$$

**Следствие 3.3.** Пусть  $u, v \in D$  и  $u/v \in C(\Gamma)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\ & = \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P}) u''^2 + (q - \mathcal{Q}) u'^2 + (r - \mathcal{R}) u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a)) u^2(a) \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a) u'(a). \end{aligned}$$

**4. Теорема сравнения.** Теоремы Штурма о перемежаемости и сравнении для уравнения второго порядка на графе впервые были установлены в работе Ю. В. Покорного и О. М. Пенкина [1]. В работах [15], [18] были доказаны аналоги теоремы Штурма о разделении нулей решений для уравнения четвёртого порядка на графе. В данном пункте, как первое следствие тождества Пиконе, мы приводим некоторые свойства дифференциальных неравенств и, в частности, теорему сравнения штурмовского типа для уравнения четвёртого порядка, заданного соотношениями (4)–(6).

**Теорема 4.1.** Если существует нетривиальная функция  $u \in D$ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} & uLu \leq 0, \quad x \in \Gamma, \\ & u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (u''u')|_{\partial\Gamma} \geq 0, \\ \mathcal{W}[u] := & \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P}) u''^2 + (q - \mathcal{Q}) u'^2 + (r - \mathcal{R}) u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a)) u^2(a) \geq 0, \end{aligned}$$

то любое решение  $v \in D$  системы неравенств

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}v(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma, \\ & v''(x) < 0, \quad x \in E(\Gamma), \end{aligned}$$

положительное хотя бы в одной точке графа  $\Gamma$ , имеет нуль в  $\Gamma \cup \partial\Gamma$ .

**Доказательство.** Действительно, если  $v \neq 0$  в  $\Gamma \cup \partial\Gamma$ , то  $v > 0$  на  $\Gamma \cup \partial\Gamma$ . Привлекая формулу (13), получим

$$\begin{aligned} 0 \geq & -\mathcal{W}[u] + \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\ & = \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx \\ & + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial\Gamma} (pu'')(a) u'(a) \geq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку  $(u''u')|_{\partial\Gamma} \geq 0$ , то  $(pu'')(a)u'(a) \geq 0$  для любой граничной вершины  $a \in \partial\Gamma$ . Поэтому  $u'' - \frac{u}{v} v'' \equiv 0$  и  $u' - \frac{u}{v} v' \equiv 0$  на  $E(\Gamma)$ . Отсюда сразу получаем  $u/v \equiv \text{const}$  на  $\Gamma$ . Но это противоречит равенствам  $u|_{\partial\Gamma} = 0$  и  $v|_{\partial\Gamma} > 0$ . Теорема доказана.

**Лемма 4.1.** Пусть нетривиальная функция  $u \in C^2[\Gamma]$  удовлетворяет условиям (11) и

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad \mathcal{V}[u] \leq 0. \quad (15)$$

Тогда следующая система дифференциальных неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geq 0 \quad (x \in \Gamma), \quad v''(x) < 0 \quad (x \in E[\Gamma]), \quad v|_{\partial\Gamma} > 0 \quad (16)$$

не имеет решений в классе  $D$ .

**Доказательство.** Предполагая противное, рассмотрим решение  $v \in D$  системы (16). Из непрерывности функции  $v$  и неравенств  $v''(x) < 0$  на  $x \in E[\Gamma]$ ,  $v|_{\partial\Gamma} > 0$  следует  $v > 0$  на  $\Gamma$ . Действительно, в противном случае  $v$  имеет точку неположительного глобального минимума  $b \in J(\Gamma)$ . Тогда из свойств коэффициентов условий (5) (см. конец раздела 2) следует, что для некоторого индекса  $i_0 \in I(b)$  выполнено равенство  $v'_{i_0}(b) = 0$ , несовместимое с тем, что  $b$  – точка минимума и  $v''_{i_0}(x) < 0$ . Следовательно,  $u/v \in C(\Gamma)$ .

Подставляя функции  $u$  и  $v$  в тождество Пиконе, получим

$$0 \geq \mathcal{V}[u] = \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx \\ + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a) \mathcal{L}v(a) \geq 0.$$

Но тогда  $u'' - \frac{u}{v} v'' \equiv 0$  и  $u' - \frac{u}{v} v' \equiv 0$  на  $E(\Gamma)$ . Отсюда сразу получаем  $u/v \equiv \text{const}$  на  $\Gamma$ . Но это невозможно ввиду условий леммы  $u|_{\partial\Gamma} = 0$  и  $v|_{\partial\Gamma} > 0$ . Следовательно система (16) не разрешима в  $D$ . Лемма доказана.

**Теорема 4.2.** Пусть существует нетривиальная функция  $u \in C^2[\Gamma]$ , удовлетворяющая условиям (11) и (15). Тогда любое решение  $v \in D$  системы неравенств

$$\mathcal{L}v(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma, \\ v''(x) < 0, \quad x \in E(\Gamma), \quad (17)$$

положительное хотя бы в одной точке графа  $\Gamma$ , либо пропорциональна  $u$  на  $\Gamma$ , либо имеет нуль в  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Пусть  $v \in D$  удовлетворяет (17) и положительна хотя бы в одной точке графа  $\Gamma$ . Если  $v$  равна нулю в некоторой точке графа  $\Gamma$ , то утверждение теоремы верно. Поэтому рассмотрим случай, когда  $v$  не имеет нулей в  $\Gamma$ . В этом случае  $v|_{\partial\Gamma} \geq 0$  и из леммы 4.1 следует, что  $v$  имеет нуль в  $\partial\Gamma$ . Ввиду  $v > 0$  на  $\Gamma$  и  $v''(x) < 0$  на  $E(\Gamma)$ , все нули функции  $v$  из  $\partial\Gamma$  простые. Поэтому, учитывая  $u|_{\partial\Gamma} = 0$ , имеем  $u/v \in C(\Gamma)$ .

Рассмотрим пространство  $C_0^\infty(\Gamma)$  функций из  $C^\infty[\Gamma]$ , удовлетворяющих (11) и имеющих компактный носитель в  $\Gamma$ . Снабдим пространство  $C_0^\infty(\Gamma)$  нормой

$$\|u\|_2 := \left( \int_{\Gamma} u'^2 + u^2 dx \right)^{1/2} + \left( \sum_{a \in J(\Gamma)} u^2(a) \right)^{1/2} \quad (18)$$

и обозначим через  $H_0^2(\Gamma)$  пополнение  $C_0^\infty(\Gamma)$  по этой норме.

Пусть  $u$  удовлетворяет условиям теоремы. Очевидно,  $u \in H_0^2(\Gamma)$ . Пусть  $\{u_{[m]}\}$  – последовательность функций из  $C_0^\infty(\Gamma)$ , сходящаяся к  $u$  в норме (18). Поскольку каждая из функций  $u_{[m]}$  равна нулю в окрестности границы  $\partial\Gamma$ , то  $u_{[m]}/v \in C(\Gamma)$  и стало быть выполняется равенство (13). Легко видеть, что  $\mathcal{V}[u_{[m]}] \geq 0$ . Поэтому, учитывая ограниченность  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  на  $E(\Gamma)$  и  $\mathcal{R}$  на  $\Gamma$ , имеем

$$|\mathcal{V}[u_{[m]}] - \mathcal{V}[u]| \leq K_1 \int_{\Gamma} |u'_{[m]}(u_{[m]} - u)| + |u''(u_{[m]} - u)| dx \\ + K_2 \int_{\Gamma} |u'_{[m]}(u_{[m]} - u)| + |u'(u_{[m]} - u)| dx + K_3 \int_{\Gamma} |u_{[m]}(u_{[m]} - u)| + |u(u_{[m]} - u)| dx \\ + K_4 \sum_{a \in J(\Gamma)} (|u_{[m]}(u_{[m]} - u)|(a) + |u(u_{[m]} - u)|(a)).$$

Привлекая неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|\mathcal{V}[u_{[m]}] - \mathcal{V}[u]| \leq K_5 (\|u_{[m]}\|_2 + \|u\|_2) \|u_{[m]} - u\|_2.$$

Поскольку  $\|u_{[m]} - u\|_2 \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$ , то  $\mathcal{V}[u_{[m]}] \rightarrow \mathcal{V}[u]$ , а значит,  $\mathcal{V}[u] \geq 0$ . Но по условиям теоремы  $\mathcal{V}[u] \leq 0$ . Следовательно,  $\mathcal{V}[u] = 0$ .

Пусть  $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma : d(x, \partial\Gamma) > \varepsilon\}$ , где  $d(x, \partial\Gamma)$  – минимальная длина маршрута в  $\Gamma$  от точки  $x$  до  $\partial\Gamma$  и  $\varepsilon > 0$ . Положим

$$\mathcal{U}[u_{[m]}] := \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{P} \left( u'_{[m]} - \frac{u_{[m]}}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u'_{[m]} - \frac{u_{[m]}}{v} v' \right)^2 dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q} \left( u'_{[m]} - \frac{u_{[m]}}{v} v' \right)^2 dx.$$

Обозначая  $w = u/v$ ,  $w_{[m]} = u_{[m]}/v$ , имеем (см. (10))

$$\mathcal{U}[u_{[m]}] = \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{P}u_{[m]}''^2 - \mathcal{P}v''(u_{[m]}w_{[m]})'' dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}u_{[m]}'^2 - \mathcal{Q}(u_{[m]}w_{[m]})' dx.$$

Поскольку  $v''$  ограничена на  $E(\Gamma)$ , то

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}[u_{[m]}] - \mathcal{U}[u]| &\leq K_1^* \int_{\Gamma_\varepsilon} |u_{[m]}''(u_{[m]} - u)'' + u''(u_{[m]} - u)'| dx \\ &+ K_2^* \int_{\Gamma_\varepsilon} |(u_{[m]}(w_{[m]} - w))'' + (w(u_{[m]} - u))''| dx + K_3^* \int_{\Gamma_\varepsilon} |u_{[m]}'(u_{[m]} - u)' + u'(u_{[m]} - u)'| dx \\ &+ K_4^* \int_{\Gamma_\varepsilon} |(u_{[m]}(w_{[m]} - w))' + (w(u_{[m]} - u))'| dx. \end{aligned}$$

Вновь, привлекая неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}[u_{[m]}] - \mathcal{U}[u]| &\leq K^* (\|u_{[m]}\|_{2,\Gamma_\varepsilon} + \|u\|_{2,\Gamma_\varepsilon}) \|u_{[m]} - u\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \\ &+ K^* \|u_{[m]}\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \|w_{[m]} - w\|_{2,\Gamma_\varepsilon} + K^* \|w\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \|u_{[m]} - u\|_{2,\Gamma_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Так как  $\inf_{\Gamma_\varepsilon} v > 0$ , то из определения функций  $w_{[m]}$  и  $w$  следует, что  $\|w_{[m]} - w\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \rightarrow 0$  при  $\|u_{[m]} - u\|_{2,\Gamma_\varepsilon} \rightarrow 0$ . Значит,  $\mathcal{U}[u_{[m]}] \rightarrow \mathcal{U}[u]$ . Поскольку  $0 \leq \mathcal{U}[u_{[m]}] \leq \mathcal{V}[u_{[m]}]$ , а правая часть стремится к нулю, то  $\mathcal{U}[u] = 0$ . Отсюда сразу получаем  $u'' - \frac{u}{v}v'' \equiv 0$  и  $u' - \frac{u}{v}v' \equiv 0$  на  $E(\Gamma_\varepsilon)$ . Учитывая произвольность  $\varepsilon$ , окончательно получаем  $u/v \equiv \text{const}$  на  $\Gamma$ , т. е.  $v$  пропорциональна  $u$  на  $\Gamma$ . Теорема доказана.

**Теорема 4.3** (сравнения). Если существует нетривиальное решение краевой задачи

$$Lu = 0, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (u''u')|_{\partial\Gamma} \geq 0, \quad (19)$$

удовлетворяющее условию  $\mathcal{W}[u] \geq 0$ , то любое решение  $v \in D$  системы неравенств (17) положительное хотя бы в одной точке графа  $\Gamma$ , либо пропорционально  $u$  на  $\Gamma$ , либо имеет нуль в  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Условие  $\mathcal{W}[u] \geq 0$  эквивалентно

$$\mathcal{V}[u] \leq \int_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} r(a)u^2(a). \quad (20)$$

Поскольку  $Lu = 0$  на  $\Gamma$ , то ввиду (9) и граничных условий (19)

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} r(a)u^2(a) \\ &\leq \int_{\Gamma} [pu''^2 + qu'^2 + ru^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} r(a)u^2(a) + \sum_{a \in \partial\Gamma} u'(a)(pu'')(a) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно выполнены все условия теоремы 4.2. Теорема доказана.

**5. Нижняя оценка ведущего собственного значения.** В данном разделе мы рассматриваем спектральную краевую задачу (1), (2). Устанавливается оценка снизу для ведущего собственного значения оператора  $L$ .

Как и в предыдущем пункте, вместе с оператором  $L : D \rightarrow C[\Gamma]$ , порожденным соотношениями (7) с коэффициентами  $p \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $q \in C^1[E(\Gamma)]$ ,  $r \in C[\Gamma]$ , мы рассматриваем оператор  $\mathcal{L} : D \rightarrow C[\Gamma]$ , порождаемый теми же соотношениями (7), но с коэффициентами  $\mathcal{P} \in C^2[E(\Gamma)]$ ,  $\mathcal{Q} \in C^1[E(\Gamma)]$ ,  $\mathcal{R} \in C[\Gamma]$ .

Рассмотрим коэффициент  $\rho$  из правой части уравнения (1) и введем обозначения:  $J_\rho(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma) | \rho(a) > 0\}$ ,  $\Gamma_\rho = E(\Gamma) \cup J_\rho(\Gamma)$ .

**Теорема 5.1.** Пусть  $\lambda_0$  – наименьшее собственное краевой задачи (1), (2), а  $u$  – соответствующая собственная функция. Пусть, далее,  $v$  – произвольная функция из  $D$ , удовлетворяющая условиям:

- (i)  $\inf_{x \in \Gamma} v(x) > 0$ ;
- (ii)  $v''(x) \leq 0$  на  $E(\Gamma)$ ;
- (iii)  $\mathcal{L}v(x) \geq 0$  на  $J(\Gamma) \setminus J_\rho(\Gamma)$ .

Если  $\mathcal{W}[u] \geq 0$ , то

$$\lambda_0 \geq \inf_{x \in \Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}. \quad (21)$$

**Доказательство.** Из (i) следует  $u/v \in C(\Gamma)$ . Поэтому мы можем привлечь следствие 3.3. Поскольку  $Lu(x) = \lambda_0 \rho(x)u$  для всех  $x \in \Gamma$ , то имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{u}{v} (vLu - u\mathcal{L}v) dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u}{v}(a) (v(a)Lu(a) - u(a)\mathcal{L}v(a)) \\ &= \int_{\Gamma} \lambda_0 \rho u^2 dx - \int_{\Gamma} \frac{u^2}{v} \mathcal{L}v dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} \lambda_0 \rho(a) u^2(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} \frac{u^2}{v}(a) \mathcal{L}v(a) \\ &= \int_{\Gamma} [(p - \mathcal{P}) u''^2 + (q - \mathcal{Q}) u'^2 + (r - \mathcal{R}) u^2] dx + \sum_{a \in J(\Gamma)} (r(a) - \mathcal{R}(a)) u^2(a) \\ &+ \int_{\Gamma} \mathcal{P} \left( u'' - \frac{u}{v} v'' \right)^2 dx - 2 \int_{\Gamma} \mathcal{P} \frac{v''}{v} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \int_{\Gamma} \mathcal{Q} \left( u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 dx + \sum_{a \in \partial \Gamma} (pu'')(a) u'(a). \end{aligned}$$

Из условий теоремы и неотрицательности коэффициентов краевых условий (2) следует неотрицательность правой части последнего равенства. Поэтому

$$0 \leq \lambda_0 \int_{\Gamma} \rho u^2 dx - \int_{\Gamma} \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} dx + \lambda_0 \sum_{a \in J(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) - \sum_{a \in J(\Gamma)} u^2(a) \frac{\mathcal{L}v}{v}(a).$$

Наконец, привлекая условие (iii), получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_0 \int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \lambda_0 \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) - \int_{\Gamma} \rho u^2 \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} dx - \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}(a) \\ &\leq \left( \lambda_0 - \inf_{x \in \Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v} \right) \left( \int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{\Gamma} \rho u^2 dx + \sum_{a \in J_\rho(\Gamma)} \rho(a) u^2(a) > 0,$$

получаем  $\lambda_0 \geq \inf_{x \in \Gamma_\rho} \frac{\mathcal{L}v}{\rho v}$ . Теорема доказана.

**6. Пример.** Рассмотрим граф-звезду  $\Gamma$ , состоящий из  $m$  ребер  $\gamma_i = (a_i, b)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Точка  $b$  – является единственной внутренней вершиной графа, а точки  $a_i$  образуют границу графа  $\Gamma$ . Длину ребра  $\gamma_i$  обозначим через  $l_i$ .

На графе-звезде  $\Gamma$  рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} u^{IV} &= \lambda u, \quad x \in E(\Gamma), \\ u_i(b) &= u(b), \quad u'_i(b) = 0, \quad \forall i \in I(b), \quad \sum_{i \in I(b)} u_i'''(b) = 0, \\ \beta(a_i) u''(a_i) - \vartheta(a_i) u'(a_i) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Построим пробную функцию  $v$  для неравенства (21). В качестве оператора  $\mathcal{L}$  возьмём оператор краевой задачи (22):

$$\begin{aligned} D &= \{u \in C^4[\Gamma] : u_i(b) = u(b), \quad u'_i(b) = 0, \quad \forall i \in I(b)\}, \\ \mathcal{L}u(x) &\equiv \begin{cases} u^{IV}(x), & x \in E(\Gamma), \\ \sum_{i \in I(b)} u_i'''(x), & x = b. \end{cases} \end{aligned}$$

При таком выборе оператора  $\mathcal{L}$  очевидно  $\Gamma_\rho = E(\Gamma)$  и выполнено тождество  $\mathcal{W}[u] \equiv 0$ .

Для определённости будем считать, что все рёбра графа направлены от внутренней вершины  $b$  к граничным вершинам  $a_i$ . Параметризуем каждое ребро  $\gamma_i$ , сопоставив ему гомеоморфно интервал  $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$ . Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и определим функцию  $v$  на ребре  $\gamma_i$  формулой

$$v_i(x) = \sin \frac{\pi(l_i + \varepsilon - t(x))}{2(l_i + \varepsilon)}, \quad x \in \gamma_i, \quad t \in (0, l_i).$$

Очевидно, что построенная таким образом функция  $v$  положительна, непрерывна на  $\Gamma$  и  $v'_i(b) = 0$  для всех  $i \in I(b)$ . Кроме того,  $v''(x) < 0$  для всех  $x \in E(\Gamma)$ . Привлекая формулу (21), получим, что

$$\lambda_0 \geq \inf_{E(\Gamma)} \frac{v^{IV}}{v} = \inf_{i \in I(b)} \frac{\pi^4}{16(l_i + \varepsilon)^4}.$$

Положим  $l = \max_{i \in I(b)} \{l_i\}$ . Тогда, устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим  $\lambda_0 \geq \frac{\pi^4}{16l^4}$ .

Отметим, что полученная оценка для  $\lambda_0$  не зависит от коэффициентов граничных условий и от количества рёбер в графе-звезде.

**Благодарность.** Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за внимательное прочтение текста статьи и ценные замечания.

#### Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. *М. Физматлит* 2005, 272с.
2. Bondarenko N.P. Partial Inverse Sturm-Liouville Problems. *Mathematics*, 2023;11:2408.
3. Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph with mixed boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, 2018; 26:1–12.
4. Завгородний М.Г., Майорова С.П. Об одном уравнении математической физики четвертого порядка на графе. Сборник трудов «Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию». – Владикавказ: ВНИЦ РАН, 2008;88–102.
5. Yang Ch.-F. Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph. *J. Math. Anal. Appl*, 2010;365(2):742–749.
6. Диаб А.Т., Калдыбекова Б.К., Пенкин О.М. О кратности собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля на графах. *Математические заметки*, 2016;99(4):489–501.
7. Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка на графе, *Дифференциальные уравнения*, 2023;58(7):882–889.
8. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. *М.: Физматгиз*, 1962;394 с.
9. Borovskikh A.V., Lazarev, K.P. Fourth-order differential equations on geometric graphs *J. Math. Sci*, 2004;119(6):719–738.
10. Кулаев Р.Ч., Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе. *Математический сборник*, 2015;206(12):79–118.
11. Кулаев Р.Ч., О свойстве неосцилляции уравнения на графе. *Сибирский математический журнал*, 2016; 57(1):85–97.
12. Kulaev, R.Ch. On the disconjugacy property of an equation on a graph. *Sib. Math. J.*, 2016;57(1):64–73.
13. Kulaev R.Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph. *Mediterr. J. Math*, 2022;19(73).
14. Диаб А.Т., Кулешов П.А., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе. *Математические заметки*, 2014;96(6):885–895.
15. Dunninger D.R. A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1971;50:630–641.
16. Jaroš J. Picone's identity for the p-biharmonic operator with applications. *Electron. J. Diff. Equations*, 2011;122:1–6.
17. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *Харьков: ОНТИ*, 1939;719 с.
18. Kulaev R.Ch., Urtaeva A.A. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023;1–21.
19. Dekoninck B., Nicase, S. The eigenvalue problem for networks of beams. *Linear Algebra Appl*, 2000;314(1-3):165–189.
20. Кулаев Р.Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке. *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2013; 2:56–66.

#### References

1. Pokornyy YuV., Penkin OM., Borovskikh A.V., Pryadiev VL., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential equations on geometric graphs. *M.: Fizmatlit*, 2005, 272p. (in Russian)
2. Bondarenko NP. Partial Inverse Sturm-Liouville Problems. *Mathematics*, 2023;11:2408.
3. Bondarenko NP. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on a star-shaped graph with mixed boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl*, 2018;26:1–12.
4. Zavgorodnii MG. and Maiorova SP. Boundary Value Problems Describing Processes in Network Systems, in *Mat. forum: Itogi nauki. Yug Rossii (Mathematical Forum: Scientific Results. South Russia)*, Vladikavkaz, 2010,48–64.

5. Yang Ch.-F. Inverse spectral problems for the Sturm–Liouville operator on a d-star graph. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010;365(2):742–749.
6. Diab AT., Kaldybekova BK., Penkin OM. On the Multiplicity of Eigenvalues of the Sturm–Liouville Problem on Graphs, *Math. Notes*, 2016;99(4):492–502 p. (In Russian)
7. Kulaev RCh., Urtaeva AA. On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph, *Differential equations*, 2023;58(7):882–889. (In Russian)
8. Krasnoselsky MA. Positive solutions of operator equations. *M.: Физматгиз.*, 1962;394 p. (In Russian)
9. Borovskikh AV., Lazarev KP. Fourth-order differential equations on geometric graphs *J. Math. Sci.*, 2004;119(6):719–738.
10. Kulaev RCh. Disconjugacy of fourth-order equations on graphs. *Sb. Math* 2015; 206(12):79–118. (in Russian)
11. Kulaev RCh. On the disconjugacy property of an equation on a graph. *Siberian Math. J.*, 2016;57(1):85–97. (in Russian)
12. Kulaev RCh. On the disconjugacy property of an equation on a graph. *Sib. Math. J.*, 2016;57(1):64–73.
13. Kulaev RCh. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph. *Mediterr. J. Math.*, 2022;19(73).
14. Diab AT., Kuleshov PA., Penkin OM. Estimate of the First Eigenvalue of the Laplacian on a Graph. *Math. Notes*, 2014;96(6):885–895. (In Russian)
15. Dunninger DR. A Picone integral identity for a class of fourth order elliptic differential inequalities. *Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1971;50:630–641.
16. Jaroš J. Picone’s identity for the p-biharmonic operator with applications. *Electron. J. Diff. Equations*, 2011;122:1–6.
17. Ains EL Ordinary differential equations. *Харьков: ОНТИ*, 1939;719 p. (In Russian)
18. Kulaev RCh., Urtaeva AA. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023;1–21 .
19. Dekoninck B., Nicase S. The eigenvalue problem for networks of beams. *Linear Algebra Appl.* 2000;314(1-3):165–189.
20. Kulaev RCh. The Green function of the boundary value problem on a star-shaped graph. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013;2:56–66. (in Russian)

Поступила в редакцию 12.07.2024

Поступила после рецензирования 19.08.2024

Принята к публикации 22.08.2024

Received July 12, 2024

Revised August 19, 2024

Accepted August 22, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Уртаева Александра Артуровна** – ассистент кафедры алгебры и анализа, Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Aleksandra A. Urtaeva** – Department Assistant Algebra and Analysis, North Ossetian State University after K. L. Khetagurova, Vladikavkaz, Russia




[К содержанию](#)

## ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 51.73  
MSC 35K35  
Original Research

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-208-217

### Temporal Method of Presenting the Fundamentals of Classical Thermodynamics

Gennadiy V. Averin<sup>1</sup> , Maria V. Shevtsova<sup>2</sup> , Anna V. Zvyagintseva<sup>1</sup>   
(Article submitted by a member of the editorial board S. V. Blazhevich)

<sup>1</sup> Donetsk State University,  
24 University St., Donetsk, 283001, Russia  
[averin.gennadiy@gmail.com](mailto:averin.gennadiy@gmail.com)

<sup>2</sup> Belgorod National Research University,  
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia  
[shevtsova\\_m@bsu.edu.ru](mailto:shevtsova_m@bsu.edu.ru)




**Abstract.** Thermodynamics has a universal theory with great potential for the development of science. This article proposes a new system of presenting the laws of classical thermodynamics using temporal representations of thermodynamic processes, which allows to introduce time into basic laws and ratios of thermodynamics. The study shows the analysis of thermodynamics representation systems. We formulate thermodynamics methodology based on temporal approach. The principle of the existence of entropy and the equation of energy conservation are justified by methods of statistical modeling and differential geometry. We use the principle of equal possibility of thermodynamic states and processes for modeling the statics and dynamics of the perfect gas. So it is possible to apply the Monte Carlo method for the forming of states and for the estimation of their posterior probabilities. For real gases the principle of equal probability of states does not hold, therefore at statistical modeling it is necessary to take into account the laws of distribution of variables that will be associated with the empirical state equations - the Van der Waals equation, the virial equation, etc. The study presents the new temporal ratios which are important for the development of the theory, such as connection between time and entropy, correlation between entropy and process length, etc. Here we discuss the directions of research related to the disclosure of the physical and mathematical meanings of entropy.

**Keywords:** Thermodynamics, Fundamentals of Theory, Presentation Systems, Temporal Method

**For citation:** Averin G. V., Shevtsova M. V., Zvyagintseva A. V. 2024. Temporal Method of Presenting the Fundamentals of Classical Thermodynamics. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 208–217. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-208-217

Оригинальное исследование

### Темпоральный метод изложения основ классической термодинамики

Аверин Г. В.<sup>1</sup> , Шевцова М. В.<sup>2</sup> , Звягинцева А. В.<sup>1</sup>   
(Статья представлена членом редакционной коллегии С. В. Блажевичем)

<sup>1</sup> Донецкий государственный университет,  
Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24  
[averin.gennadiy@gmail.com](mailto:averin.gennadiy@gmail.com)

<sup>2</sup> Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
[shevtsova\\_m@bsu.edu.ru](mailto:shevtsova_m@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Термодинамика обладает универсальной теорией с большим потенциалом для развития науки. В данной статье предлагается новая система изложения основ классической термодинамики с использованием темпоральных представлений о термодинамических процессах, что позволяет ввести время в основные законы и соотношения термодинамики. Дается анализ систем изложения термодинамики, формулируется методология термодинамики на основе темпорального подхода. Методами статистического моделирования и дифференциальной геометрии обосновываются законы идеального газа, принцип существования энтропии и уравнение сохранения энергии. При моделировании статики и динамики идеального газа использован принцип равновозможности термодинамических состояний и процессов. Это позволило использовать метод Монте-Карло при формировании состояний и оценке их апостериорных вероятностей. Для реальных газов принцип равновозможности состояний не выполняется, поэтому при статистическом моделировании необходимо учитывать законы распределения величин, которые будут связаны с эмпирическими уравнениями состояний – уравнением Ван-дер-Ваальса, вириальным уравнением и т. д. Приводятся новые темпоральные соотношения, имеющие большое значение для развития теории, такие как связь

времени и энтропии, зависимости между энтропией и длиной траектории процесса и т. д. Обсуждаются направления исследований, связанные с раскрытием физических и математических смыслов энтропии.

**Ключевые слова:** термодинамика, основы теории, системы изложения, темпоральный метод

**Для цитирования:** Аверин Г. В., Шевцова М. В., Звягинцева А. В. 2024. Темпоральный метод изложения основ классической термодинамики. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 208–217.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-208-217

**1. Introduction.** The initial positions of thermodynamics are based on the postulation of system-wide laws and patterns. These features are characteristic of macroscopic physical systems and established by experimental methods. The bases of thermodynamics are distinguished by their logical originality. So it is quite possible to talk about a certain beauty of this science in the context of its theory: it is characterized by integrity, simplicity and universality. However, although solid there are several problems in this science, a solution to which has not been found yet. Thermodynamic theory in its modern form is not complete, many its aspects are inconsistent and confusing, and a number of provisions have no logical clarity. First of all, it is about the concept of entropy and the principle of its increase, ideas of thermodynamic irreversibility, reflection of the fundamentality of time in theory, the problem of correlation between determinism and probability and other thermodynamic paradoxes [1]–[4]. As G. Falk noted 65 years ago, the main problem of the development of thermodynamic's theory is how to find new ways and expand the original concepts [5]. In this regard, the problem of reflecting time in the relations of classical thermodynamics is fundamental. The ways of further development of this science are associated with it [6].

The purpose of this article is to formulate a new system of presentation the fundamentals of classical thermodynamics. For that, we use temporal ideas of thermodynamic processes, which allows to introduce time into the basic laws and relations of thermodynamics.

**2. Thermodynamics Presentation Systems.** There are several methods for presenting thermodynamic foundations, for example, K.A. Putilov spoke of five such methods [7]. If we take into account the approaches proposed by A.A. Guhman, A. Sommerfeld, M. Born, G. Falk and other authors the number of such methods will be more than ten. Nevertheless, only two of them can be distinguished as integral systems of presentation of thermodynamics. Let's call them conditionally traditional and axiomatic systems.

The traditional system of presentation of thermodynamics is used in many courses of this subject. For presenting the material, basic terms are introduced: body state, state parameters, thermodynamic process, amount of heat, etc. Empirical laws of perfect gas are given. The first postulate of thermodynamics is formulated based on the generalization of experimental facts - on the state of thermodynamic equilibrium, as well as the principle of the existence of temperature (second postulate). Further, the fundamentality of the concept of absolute temperature is substantiated and the relationship between empirical and absolute temperatures is established. The law of conservation and transformation of energy is stated. The equation of the first principle of thermodynamics is written in the form:

$$dQ = du + pdv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k,$$

where work  $dA = pdv$ , and  $p, v, z_k$  -- state parameters.

To justify the second principle (law) of thermodynamics the definitions of the heat engine, working fluid, thermodynamic cycle, hot and cold heat sources, thermal efficiency are introduced and an ideas of reversible and non-reversible processes are given. After that we proceed to the justification of the concept of entropy, for which the Carnot cycle and its thermal efficiency are described. The Carnot theorem is proved and the ratio for the reduced heat is established. By defining entropy as the sum of the reduced heat it is shown that the Clausius integral for the any reversible cycle is zero:  $\oint dQ/T = 0$ . All this makes possible to represent the entropy change in reversible and irreversible processes correspondingly in the form:  $ds = dQ/T$  and  $ds \geq dQ/T$  and to write the law of conservation of energy in:  $Tds \geq du + pdv + \sum_{k=1}^n P_k dz_k$ . The presentation of the material is completed by the formulation of the most important differential equations of thermodynamics. After that we move on to the issues of technical thermodynamics.

In the axiomatic system of presentation of thermodynamics at the first stage the semantic content of basic concepts and definitions are also given. To justify the concept of temperature the postulates of thermodynamics are presented. Then we introduce the concepts of heat, work and energy and give the law of conservation and transformation of energy [8]. From here the fundamental differences in the content of material are already observed, because they adhere to the approach proposed by K. Karatheodori [9].

At the next stage it is shown that for many parameters the energy conservation equation is represented by the differential Pfaff form:  $dQ = P_1(z_1, \dots, z_n)dz_1 + \dots + P_n(z_1, \dots, z_n)dz_n$ . After that, an analysis of the holonomicity and non-holonomicity of differential forms is given. In the holonomic Pfaff form there exists an integrating divisor  $\lambda(z_1, \dots, z_n)$ , when  $dQ = \sum_{k=1}^n P_k(z_1, \dots, z_n)dz_k = \lambda d\Phi$ . Here  $\Phi$  is a function of parametres  $z_1, \dots, z_n$  which is



a common integral. Then the physical sense of the amount of heat concludes the idea that near any point in space  $E^n(z_1, \dots, z_n)$  the points that are not achievable from it in the adiabatic process  $dQ = 0$  are existed. This property of space is called "adiabatic unreachability". In [9] K. Karatheodori postulated adiabatic unattainability as a universal property of all thermodynamic systems and proved the validity of the theorem: if in the vicinity of a certain point of n-dimensional space there are points that are not achievable without breaking the equation  $\sum_{k=1}^n P_k(z_1, \dots, z_n) dz_k = 0$ , then for this equation an integrating divisor in the form of absolute temperature  $\lambda = T$  is existed. In turn, the common integral  $\Phi(z_1, \dots, z_n) = C$  is defined as the entropy of the thermodynamic system  $ds = dQ/T$ . Due to the fact that the principle of the existence of entropy is justified we can easily proceed to the conclusion of all other theorems and equations of thermodynamics.

The traditional system of presentation is usually criticized for its too close connection with the processes of operation of heat machines, the insufficient expressiveness of mathematical formalism and the contradiction of some provisions. The axiomatic system is criticized for its abstractness and formally mathematical approach to the establishment of concepts, which does not correspond to the style of thermodynamic research and violates the physical clarity and simplicity of the basic provisions. However, when justifying the fundamentality of thermodynamics, the second system is preferable, although we must agree with critics that it misses the physical content of some concepts.

It is especially noted that in both systems of presentation one initial principle is applied, which is based on all subsequent conclusions. The whole system of thermodynamics is built on the universal position - the inviolability of the thermodynamic form of the equation of the law of conservation and transformation of energy [1]. This equation is a fundamental law. Using it the logical integrity of thermodynamics is originally formed.

**3. Thermodynamics methodology based on temporal approach.** Historically thermodynamics has developed mainly in a phenomenological way from experiment to theory. However, the methods and means of statistical modeling and differential geometry allow to operate with many model states and processes in the state space of thermodynamic system and to establish basic patterns based on data analysis. In this regard, the model of a perfect gas, which has the extremely simple structure, is the basis for the implementation of the temporal approach in thermodynamics.

Based on statistical modeling methods and differential geometry, it is possible to propose a system of presentation of thermodynamic foundations, using probabilistic and geometric models, and to obtain basic empirical laws of thermodynamics.

Ask ourselves the following problematic question: is it possible in thermodynamics of an ideal gas to obtain the Clapeyron equation, the principle of the existence of entropy and the law of conservation of energy in a theoretical way, using ideas about the dependence of processes on time?

One of the important features of the statics and dynamics of an ideal gas is that its states and thermodynamic processes are equally possible. Using this fact, the statistical modeling method can be applied to obtain the laws of ideal gas. The second feature is that all positions and models in this area can be represented in three-dimensional space by geometric objects with the ability to describe all their parameters. Thus, by methods of statistical modeling and differential geometry using ideas about the temporality of processes, it is necessary to establish and justify:

- Clapeyron equation, Charles and Gay-Lussac laws, etc.;
- the principle of existence of entropy and dependences for its definition;
- the law of conservation and transformation of energy in the form of the first principle of thermodynamics;
- new relationships of great importance for the development of the theory.

**4. Perfect gas law.** Let's hold the following simple statistical experiment, using the Monte Carlo method. Suppose that the state of the system is characterized by two independent parameters  $x$  and  $y$ . In the definition area of these variables  $E^2(0 \leq x \leq x_{max}, 0 \leq y \leq y_{max})$  parameter  $x$  changes from zero to  $x_{max}$ , and parameter  $y$  changes from zero to  $y_{max}$ . In this case when modeling we can get a random point, which is a certain state of the system in space  $E^2$ .

It follows from the probability theory that, if a uniformly distributed two-dimensional random variable is given on the plane, then a geometric definition of probability is applicable. The probability of hit of random point in rectangle is determined in the form of ratio of the domain of the rectangle, formed by coordinate lines  $x$  and  $y$  to point  $A(x, y)$ , to the domain of the whole rectangular  $E^2$  [10]. Suppose, that the coordinates of the point  $A(x, y)$  during statistical experiments can be selected on segments  $[0, x_{max}]$  and  $[0, y_{max}]$  absolutely by chance, taking into account the uniform distribution of values  $x$  and  $y$ . Let's define the probability of the point location as

$$\rho = 0 \text{ if } 0 \leq x \text{ or } y \leq 0; \rho = 1 \text{ if } x > x_{max} \text{ and } y > y_{max};$$

$$\rho = \frac{xy}{x_{max}y_{max}} \text{ if } 0 < x \leq x_{max} \text{ and } 0 < y \leq y_{max}.$$

Let's accept a certain reference point  $A_0(x_0; y_0)$  in domain  $E^2$  where  $\rho = \rho_0$ . We will conduct a linear scaling of the geometric probability. For this procedure we assign a value equal to zero, for example, (degrees or grades) to the point  $A_0(x_0; y_0)$ , and a value equal to 100 (degrees or grades) to the point  $A'_0(x_{max}; y_{max})$ . Let's construct a linear scale of intervals in the form of an index  $t$  [6]:

$$t = 100 \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0} = 100 \frac{xy - x_0y_0}{x_{max}y_{max} - x_0y_0}.$$

Further, we will determine the relationship between probability and index using regression methods.

Let's conduct a computational experiment in the available physical data.

Suppose that the parameter  $x$  is the specific volume of the gas  $v$  and the parameter  $y$  is the gas pressure  $p$ . Let's take only two test points for random gas, such as helium. It is known that at a pressure of environment equals to  $p_0 = 101325 Pa$ , and physical conditions, when the water flows into ice, the specific volume of helium is  $v_0 = 5.59910 m^3/kg$  (point  $A_0$ ). At the same pressure and conditions, when the water boils, the specific volume of helium is  $v_{100} = 7.64893 m^3/kg$  (point  $A'_0$ ). We will consider the gas state is a certain joint event for which pairs of values  $v$  and  $p$  are chosen by chance. Generating a specific volume  $v$  value from zero to  $v_{100}$  and a pressure value  $p$  from zero to  $p_0$  with a uniformly distributed random number generator, we will obtain a set of helium states for the domain  $E^2$ .

Statistical processing of the data gives a practically functional dependence of the index  $t$  on the probability  $\rho$  for helium (correlation coefficient 0.999):

$$t = a + b\rho = -273.1496 + 373.1496\rho. \quad (1)$$

Taking the experimental data for hydrogen ( $v_0 = 11.12720 m^3/kg$ ,  $v_{100} = 15.20087 m^3/kg$ ) allows to receive the equation (1) in a look:

$$t = -273.1493 + 373.1493\rho.$$

Similarly we can found, for oxygen:

$$t = -273.1492 + 373.1492\rho;$$

for nitrogen:

$$t = -273.1527 + 373.1527\rho;$$

for neon:

$$t = -273.1519 + 373.1519\rho.$$

Let's introduce, taking into account (1) the concept of an absolute index  $T = T_0 + t$ , where  $T_0 = -a$ . Then we have a simple linear relationship of this index with the geometric probability in the form  $T = b\rho$ . It can be shown that the coefficient  $T_0$  is related to the probability  $\rho_0$  at the reference point  $A_0$  and is equal to

$$T_0 = \frac{100\rho_0}{1 - \rho_0} = 273.1496,$$

while the constants  $a$  and  $b$  in the equation (1) are practically independent of the choice of the reference point on the straight line  $p_0 = 101325 Pa$ , i.e. do not depend on the value of the specific volume. The main thing is that the condition  $\rho_0 = \frac{v_0}{v_{100}} = 0.732011$ , which is determined by the experimental data of heating of perfect gas at low pressure, must be fulfilled on this straight line. Consequently, the obtained results are universal in nature and are not attached to the physical properties of specific gases.

Thus, on the basis of statistical experiments, the absolute zero value was found and it equals to  $t_z = -273.1496$  grades on the scale  $t$ . From the given results it is obvious the analogies with the processes of constructing temperature scales - the Celsius scale and the Kelvin scale. Everything described above allows to make the following outputs:

- when measuring temperatures on the Kelvin scale inside the scale  $0 < T \leq 373.15$ , the geometric probability of the state of any abstract thermodynamic system, which is called ideal, is determined. The main feature of such ideal system is the equal choice of values of gas parameters at low pressures;
- the absolute zero value on the Kelvin scale ( $T = 0K$ ,  $t_z = 273.1496^\circ C$ ) is determined exclusively by the selected reference state (normal conditions:  $p_0 = 101325 Pa$  and  $t_0 = 0^\circ C$ ), the absolute zero temperature is found from conditions  $\rho_0 = \frac{v_0}{v_{100}}$ ;  $T_0 = \frac{100\rho_0}{1 - \rho_0}$ . In this case, it is conditionally accepted that  $1^\circ C = 1K$ . It follows from the equation  $T = b\rho$  that the Kelvin scale is a positive scale, since the geometric probability  $\rho \geq 0$ ;
- The Clapeyron equation follows as a consequence from equation (1):

$$T = 373.1496\rho = 373.1496 \frac{pv}{p_0v_{100}} = \frac{373.1496}{1.3661} \frac{pv}{p_0v_0}.$$

So we get the Clapeyron equation in the form:

$$pv = R_i T,$$

here the individual gas constant is equal to  $R_i = 0.003661p_0v_0$ , which fully corresponds to the experimental data. Similarly, the Monte Carlo method justifies the validity of the laws of Charles and Gay-Lussac [6].

Thus, the thermometry procedures, used in the construction of the absolute temperature scale, are based on the principle of linear scaling of geometric probability. Moreover, the perfect gas model assumes that its parameters are subordinated to a uniform probability distribution, which is not characteristic of real systems.

**5. Theoretical dependencies.** In addition to the Clapeyron equation for the perfect gas, there is an experimental fact that is associated with the existence of concepts of the amount of heat and heat capacities. Since the ratio  $dQ = c_l dT$  is true for any thermal process, the following ratios are also true:

$$\frac{\partial Q}{\partial v} = c_p \left( \frac{\partial T}{\partial v} \right) \text{ and } \frac{\partial Q}{\partial p} = c_v \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right), \quad (2)$$

where  $c_p$  and  $c_v$  are the heat capacities of the perfect gas respectively at constant pressure and constant volume. In the most general case, the values  $c_p$  and  $c_v$  may depend on the parameters  $v$ ,  $p$  or  $T$ . In this case, the change of the amount of heat in any process  $l$  can be represented as:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial v} dv + \left( \frac{\partial Q}{\partial p} \right) dp \text{ or } dQ = c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv + c_v \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right) dp. \quad (3)$$

According to the relations of differential geometry, the Pfaff form (3) corresponds to the first-order partial differential equation. For example, based on the Clapeyron equation, temperature has the form of a second-degree homogeneous function that satisfies the Euler formula [11]:

$$T = \frac{1}{2} \left( v \frac{\partial T}{\partial v} + p \frac{\partial T}{\partial p} \right).$$

This equation, taking into account relations (2), can be represented as a linear non-homogeneous first-order partial differential equation:

$$\frac{v}{2c_p} \frac{\partial Q}{\partial v} + \frac{p}{2c_v} \frac{\partial Q}{\partial p} = T. \quad (4)$$

The solution  $Q = Q(v, p)$  of equation (4) in space  $E^3(v, p, Q)$  geometrically represents a surface, which is an integral surface and is determined, using a system of ordinary differential equations for characteristics of the form [12]:

$$2c_p \frac{dv}{v} = 2c_v \frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T} = ds, \quad (5)$$

where  $s$  is a real parameter that can be defined as the arc length varying along the characteristic curve [12]. At once, from the first two equations (5) for the value  $ds$  the following dependence is obtained (it is known from thermodynamics for entropy):

$$ds = \frac{dQ}{T} = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}; \quad s - s_0 = c_p \ln \left( \frac{v}{v_0} \right) + c_v \ln \left( \frac{p}{p_0} \right), \quad (6)$$

and from the last follows the well-known formula  $dQ = T ds$ . Thus, in geometric representation the entropy can be determined by the arc length of the characteristic curves corresponding to the field of directions, which is determined by the system of equations (5). Based on this, the integral surface  $Q = Q(v, p)$  is uniquely connected to the surface  $s = s(v, p)$ , taking into account the ratio  $dQ = T ds$ .

Shall we introduce in consideration a value  $du = c_v dT$  that we define as the energy of the perfect gas. The value  $du$  is a total differential, since the value  $dT$  is a total differential by definition, based on the existence of the Clapeyron equation. Let's present a ratio  $dQ = T ds$ , taking into account (6), in the form of the equation of conservation and transformation of energy:

$$dQ = du_* + pdv, \text{ where } du_* = \frac{c_p - R_i}{R_i} pdv + \frac{c_v}{R_i} v dp. \quad (7)$$

Suppose that  $du_*$  is a total differential, then applying the Euler sign, it can be shown that  $du_*$  is a total differential under the condition:  $c_p - c_v = R_i$ . The last relation is the known Mayer equation for the perfect gas, with the validity of which, the value  $du_*$  is identically equal to  $du$ :

$$du_* = du = \frac{c_v}{R_i} d(pv) = c_v dT.$$

Thus, under the condition  $c_p - c_v = R_i$  equation (7) is represented with energy in the form:

$$dQ = du + pdv, \text{ or } dQ = du + dA. \quad (8)$$

If we do not impose strict conditions as the Mayer equation on the relationship of values  $c_p$ ,  $c_v$  and  $R_i$ , then  $du_*$  will not be a total differential. Here the important result is can be expressed in the form: the possibility of representing the law of conservation of energy in the form (8) is a consequence of the existence of the Clapeyron equation  $pv = R_i T$ , which we have determined on the basis of statistical experiments, as well as dependence on the amount of heat  $dQ = Tds$ . Moreover, this law in the form (8) is a consequence arising from the principle of the existence of entropy and the dependencies of the form (5).

**6. Justification of the law of energy conservation based on computational experiments.** Now on the basis of statistical modeling we will justify the law of energy conservation for perfect gas in a form (8). Using the Monte Carlo method, we will conduct a statistical experiment that allows us to generate many processes for changing the states of a perfect gas. To do this, we will randomly create the points of the beginning and the end of each thermodynamic process, after which we will connect them to each other. This procedure we will be carried out several times for various gases.

For example, for helium, generating a specific volume value  $v$  from zero to  $v_{100}$  and a pressure value  $p$  from zero to  $p_0$  by a uniformly distributed random number generator, we get 1000 states that will determine the beginning of the process (point  $A_1(v_1, p_1)$ ). Similarly, we create another 1000 states that will determine the end of the process (point  $A_2(v_2, p_2)$ ). Connecting points  $A_1$  and  $A_2$  by straight lines, we get 1000 linear processes of changing helium states. Now let's check the validity of the law of energy conservation in the form (8). Integrating (8) over the curve of each process from point  $A_1$  to point  $A_2$ , using dependence

$$dQ = Tds = \frac{c_p}{R_i} pdv + \frac{c_v}{R_i} vdp,$$

we find:

$$\Delta Q = \frac{c_p}{R_i} (p_1 - kv_1)(v_2 - v_1) + k \frac{c_p + c_v}{2R_i} (v_2^2 - v_1^2), \quad k = \frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1},$$

where the curve of each process is defined by the equation

$$\frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1}.$$

Similarly,

$$\Delta u = c_v(T_2 - T_1); \Delta A = (p_1 - kv_1)(v_2 - v_1) + \frac{k}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

The data processing results of the computational experiment for 1000 linear helium state change processes are shown in Figure 1.

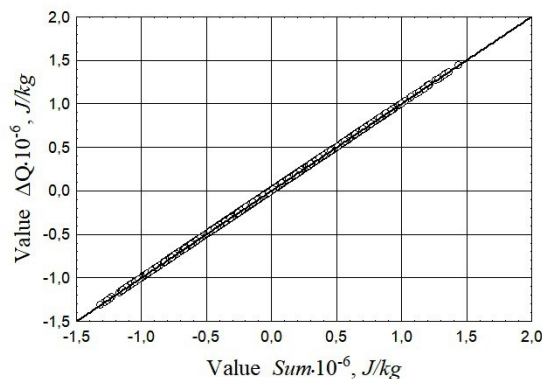


Fig. 1. The equation for conservation of energy (8) for helium state change processes,  
 $Sum = \Delta u + \Delta A$  (number of statistical experiments - 1000)

Рис. 1. Уравнение сохранения энергии (8) для процессов изменения состояний гелия,  
 $Sum = \Delta u + \Delta A$  (число статистических экспериментов - 1000)

As can be seen from the figure 1, the equation (8) holds exactly at least for linear thermodynamic processes. Similar results were obtained for other perfect gases (hydrogen, oxygen, nitrogen, neon, etc.).

Thus, the law of energy conservation for a perfect gas is a mathematical model and can be justified by conducting statistical experiments.

**7. Temporal patterns.** By the temporal method we can study both linear and nonlinear processes and assess the degree of influence of time  $\tau$  during processing:

$$v = v_l(\tau); p = p_l(\tau); T = T_l(\tau). \quad (9)$$

We will assume that each process is done in a definitely given time  $\tau_0$  and the initial moments of time equal to zero are correspond to the points  $A_1(v_1, p_1)$ . Since the process paths have different lengths of segments and the time intervals for each process are also different, the speeds of the processes will be different. Let's construct a linear scale of absolute temperature between points  $O(v = 0; p = 0; T = 0)$  and  $A_0(v_0; p_0; T_0)$ , then the scale equation will be:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{p}{p_0} = \frac{\tau}{\tau_0}.$$

This scale belongs to the equation of the state  $pv = R_i T$ . The linear segment between the points  $O$  and  $A_0$  can be divided into 273.15 parts, and each degree corresponds to a certain length of the segment  $\delta$ . For the temporological estimate of processes we will introduce the concept of the amount of impact - a mathematical value that determines the intensity and duration of the processes of changing the state of a perfect gas, based on the external and internal conditions of the impact [1]. The amount of impact  $Q_*$  will mathematically characterize the thermodynamic process  $l$ , unlike the amount of heat  $Q$  gives a physical characteristic of the process, based on experimental data and is defined as  $dQ = Tds = \frac{c_p}{R_i} p dv + \frac{c_v}{R_i} v dp$ . We will use the amount of impact as a criterion for the similarity of processes to each other:

$$\Delta Q_* = \frac{1}{\delta} \int_l T_l(\epsilon) d\epsilon. \quad (10)$$

where  $d\epsilon$  is the arc differential of the curve  $l$ . Here the value  $T$  will characterize the states during the process  $l$ , and the length of the curve will characterize the duration of this process. To determine the values  $Q_*$  and  $\delta$  we shall lead curvilinear integrals the definite integrals over time.

For all generated thermodynamic processes let's determine the amount of impact according to the ratio (10). By specifying the unit of measurement  $\delta$  as a fraction  $1/273.15$  of changing of the amount of impact for the process  $OA_0$  and determining the line integral (10) for an arbitrary linear process  $l = A_1A_2$ , we shall get the value  $\Delta Q_*$  in a dimensionless form:

$$\Delta Q_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( T_1 + T_2 + \frac{p_1 v_2 + p_2 v_1}{2R_i} \right) \sqrt{\left( \frac{p_2 - p_1}{p_0} \right)^2 + \left( \frac{v_2 - v_1}{v_0} \right)^2}. \quad (11)$$

We'll determine the line integrals and the length of the path of each process on the basis of parametric setting of linear processes with respect to the time  $\tau$ :

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} = \frac{\tau}{\tau_0}.$$

According to equation (11) the changing of the amount of impact is always a positive number. In [6] it has been shown that if any value, for example  $Q_*$ , characterizes the dynamic process of changing properties of an object and is additive with respect to the curve of this process, then the changing of this value can be represented as  $dQ_* = \theta ds_*$ , where  $\theta$  - the interaction potential, which depends only on the parameters of the properties,  $ds_*$  - the change of the state coordinate and  $ds_* = \Phi(\tau) d\tau$ . According to this, we introduce the concept of dynamic entropy  $ds_*$  as a temporal characteristic of any process in the form of a function of time. At the same time the method of determining (measuring) this value is directly related to the amount of impact  $ds_* = dQ_*/T$ .

The general solution of the equation (4) is a family of integral solutions in a space  $E^3(v, p, Q)$ , that are associated with the characteristics (5) of this equation. Each solution in the state space corresponds to a certain state change process  $l(\tau)$ , which is characterized by properties of parameters, changing in time (9). Only one characteristic curve (5) passes through each point of the process curve [12].

Based on this, dynamic entropy value can be assigned for each point of any process curve  $l(\tau)$ . In other words, the length of the curve  $l(\tau)$  is uniquely related to the value  $\Delta s_*$  and the length of the curve  $l(\tau)$  may be measured in units of this value and vice versa. Thus, the entropy differential  $ds_*$  will be proportional to the differential of the arc of the process curve  $l(\tau)$ , which in a dimensionless form is determined according to the relationship:

$$d\epsilon = \sqrt{\left( \frac{v_l(\tau)}{v_0} \right)^2 + \left( \frac{p_l(\tau)}{p_0} \right)^2} d\tau,$$

where the parameters are given by equations (9). Since in any process the value  $\Delta\epsilon$  always increases over time, the rise of dynamic entropy is determined by the irreversible course of time.

**8. Justification of established temporal patterns.** Using the obtained patterns, we will compare the modeling results with experimental data. Based on known values  $\Delta Q_*$  for each process, we'll find changes of the values of dynamic entropy  $\Delta s_*$  and establish the relationship between the values  $\Delta Q$  and  $\Delta Q_*$ . Figure 2 shows the dependence of the change of the amount of heat on the change of the amount of impact, which is expressed by almost straight lines. There are four processes  $l_1, l_2, l_3, l_4$  here with the following parameters:

- $l_1 = A_1A_2: v_1 = 7.50 \text{ m}^3/\text{kg}, v_2 = 2.70 \text{ m}^3/\text{kg}, p_1 = 42300 \text{ Pa}, p_2 = 12200 \text{ Pa};$
- $l_2 = A_1A_2: v_1 = 2.00 \text{ m}^3/\text{kg}, v_2 = 6.50 \text{ m}^3/\text{kg}, p_1 = 1500 \text{ Pa}, p_2 = 100000 \text{ Pa};$
- $l_3 = A_1A_2: v_1 = 7.00 \text{ m}^3/\text{kg}, v_2 = 3.00 \text{ m}^3/\text{kg}, p_1 = 85000 \text{ Pa}, p_2 = 25000 \text{ Pa};$
- $l_4 = A_1A_2: v_1 = 1.50 \text{ m}^3/\text{kg}, v_2 = 7.50 \text{ m}^3/\text{kg}, p_1 = 30000 \text{ Pa}, p_2 = 70000 \text{ Pa}.$

The dependence of thermodynamic entropy  $\Delta s$  on dynamic entropy  $\Delta s_*$  for each process has a weakly expressed nonlinear character (Figure 3). Entropy increments  $\Delta s$  in processes can increase or decrease, be both positive and negative, and changes of the dynamic entropy are strictly positive and always increase. In this case the value  $\Delta s_*$  is determined by the equation  $\Delta s_* = \Delta Q_*/T$  and the entropy of the state  $\Delta s$  – according to (6).

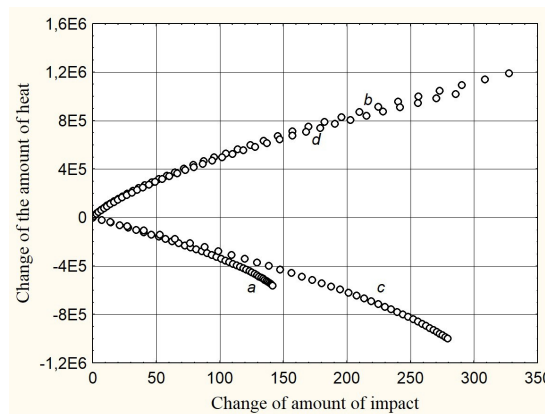


Fig. 2. Dependencies of amount of heat  $\Delta Q$  on amount of impact  $\Delta Q_*$  for helium state change processes: a) process  $l_1$ ; b) process  $l_2$ ; c) process  $l_3$ ; d) process  $l_4$

Рис. 2. Зависимости количества теплоты  $\Delta Q$  от количества воздействия  $\Delta Q_*$  для процессов изменения состояний гелия: а) процесс  $l_1$ ; б) процесс  $l_2$ ; в) процесс  $l_3$ ; д) процесс  $l_4$

The relationship of dynamic entropy with the length of the process path is shown in Figure 4. An important statement follows from this: in any thermodynamic process the change of dynamic entropy uniquely depends on the length of path of this process and, as a result, on time  $\tau$ . Since changes in entropy  $\Delta s$  are closely related to changes in value  $\Delta s_*$  (Fig. 3), then thermodynamic entropy  $\Delta s$  also uniquely depends on the length of the process path  $\Delta \epsilon$  and, of course, on time  $\tau$ .

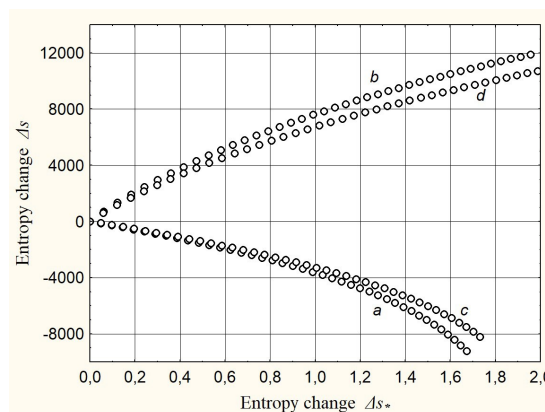


Fig. 3. Dependencies of thermodynamic entropy  $\Delta s$  on dynamic entropy  $\Delta s_*$  for helium state change processes: a) process  $l_1$ ; b) process  $l_2$ ; c) process  $l_3$ ; d) process  $l_4$

Рис. 3. Зависимости термодинамической энтропии  $\Delta s$  от динамической энтропии  $\Delta s_*$  для процессов изменения состояний гелия: а) процесс  $l_1$ ; б) процесс  $l_2$ ; в) процесс  $l_3$ ; д) процесс  $l_4$

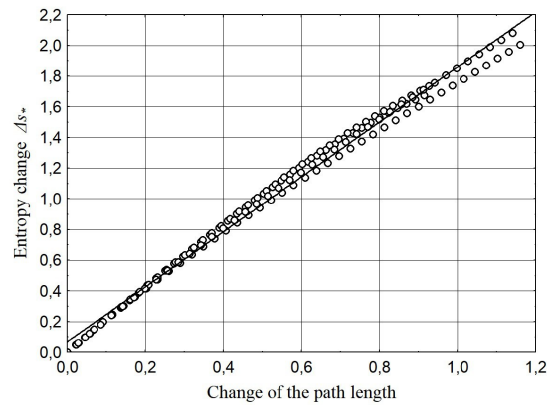


Fig. 4. Dependencies of dynamic entropy  $\Delta s_*$  on the length of the process path  $\Delta \epsilon$  for helium state change processes:  
a) process  $l_1$ ; b) process  $l_2$ ; c) process  $l_3$ ; d) process  $l_4$

Рис. 4. Зависимости динамической энтропии  $\Delta s_*$  от длины траектории процессов  $\Delta \epsilon$  при изменении состояний гелия: а) процесс  $l_1$ ; б) процесс  $l_2$ ; в) процесс  $l_3$ ; г) процесс  $l_4$

Thus, the relationship between changes of the amount of heat and the amount of exposure, between thermodynamic and dynamic entropies can be established. As well as relationships between entropy and the path length of the process have occurred. It was done on the basis of experimental data in the thermodynamic process of changing of the perfect gas states.

**8. Discussion of results and conclusions.** Thermodynamic temperature is a fundamental concept in thermodynamics. However, as can be seen from the results obtained, this value is a mathematical model since a reference point  $A_0$  for the constructing of a temperature scale is taken randomly. The domain  $E^2$  is also freely selected, which allows you to set a second reference point  $A'_0$ . Based on the obtained equation  $T = 100\rho_0/(1 - \rho_0)$ , the absolute zero value will change in the Celsius scale in the model by setting the value  $\rho_0 = v_0/v_{100}$ . But experimental data for all perfect gases give the same amount 0.732011 for this value. That is why the model of thermodynamic temperature is fundamental in thermodynamics, since it is of a system-wide nature.

It should be noted that for real gases outside the domain of ideal thermodynamic states, the principle of equal probability of states will no longer be fulfilled. In this case, it will be necessary to take into account the existing laws of distribution for a two-dimensional random variable, which will be associated with empirically established state equations - the Van der Waals equation, the virial equation, etc. The extension of the proposed method to this case is a separate problem of statistical modeling.

The research results make it possible to propose new methods for determining and measuring entropy when changing of the states of thermodynamic systems. They are based on the established relationships of thermodynamic and dynamic entropy, entropy and the path length of the process, as well as entropy and time. Therefore, further research should be aimed at the practical application of the proposed methods.

In conclusion, we note that the proposed system of presentation of the fundamentals of thermodynamics principally differs from the traditional and axiomatic systems of presentation. The lack of time in classical thermodynamics, as a basic physical theory, is paradoxical. In turn, the temporal approach is based on dynamic process models, where time is fundamental. The method, proposed in the article, allows to solve the problem of introduction of time into classical thermodynamics and reveal the physical and mathematical meaning of entropy. It also permits to exclude the contradictory concept of equilibrium of processes and to formulate adequate ideas about the irreversibility of thermodynamic processes. In turn, generalization of the obtained patterns in multidimensional thermodynamic systems is given in the work [6].

#### Список литературы

1. Гухман А.А. Об основаниях термодинамики. М.: Энергоатомиздат; 1986. 383 с.
2. Вейник А.И. Термодинамика реальных процессов. Минск: Наука і тэхніка; 1991. 576 с.
3. Венгеров И.Р. Хроноартефакты термодинамики. Донецк: Норд-пресс; 2005. 235 с.
4. Эткин В.А. Ахилесова пята термодинамики. *Проблемы науки*. 2018; №10(34): 5–18.
5. Falk G. und Jung H. Axiomatik der Thermodynamik. *Handbuch der Physik*. 1959; III(2): 119–175.
6. Аверин Г.В. Системодинамика: теория и приложения. Изд. 2-е перераб. и доп. Донецк: ООО «НПП «Фолиант»; 2022. 535 с.
7. Путилов К.А. Термодинамика. М.: Наука; 1971. 375 с.
8. Борн М. Критические замечания по поводу традиционного изложения термодинамики. В кн.: Развитие современной физики. Пер. с нем. М.: Наука; 1964. 223–256.

9. Каратеодори К. Об основах термодинамики. В кн.: Развитие современной физики. Пер. с нем. М.: Наука; 1964. 188–222.
10. Pirkina O.E. Probability Theory and Mathematical Statistic for Applications in Data Analysis. Moscow. Prometei. 2023. 583 p.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. СПб.: Лань; 2009.
12. Кошляков И.С. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа; 1970. 712 с.

#### References

1. Guhman AA. On the foundations of thermodynamics. Moscow, Energoatomizdat. 1986. 383 p. (in Russian)
2. Weinik AI. Thermodynamics of real processes. Minsk, Nauka i tekhnika. 1991. 576 p. (in Russian)
3. Vengerov IR. Chronoartefacts of thermodynamics. Donetsk, Nord Press. 2005. 235 p. (in Russian)
4. Etkin VA. Achilles heel of thermodynamics. *Problems of science*. 2018; №10(34): 5–18. (in Russian)
5. Falk G. und Jung H. Axiomatik der Thermodynamik. *Handbuch der Physik*. 1959; III(2): 119–175.
6. Averin GV. Systemodynamics: theory and applications. Donetsk, LLC NPP Foliant. 2022. 535 p. (in Russian)
7. Putilov KA. Thermodynamics. Moscow, Nauka Publ. 1971. 375 p. (in Russian)
8. Born M. Criticisms of the traditional presentation of thermodynamics. In book: Development of modern physics. Trans. from German. Moscow, Nauka Publ. 1964. 223–256. (in Russian)
9. Karatheodori K. On the foundations of thermodynamics. In book: Development of modern physics. Trans. from German. Moscow, Nauka Publ. 1964. 188–222. (in Russian)
10. Pirkina OE. Probability Theory and Mathematical Statistic for Applications in Data Analysis. Moscow. Prometei. 2023. 583 p.
11. Fichtenholtz GM. Course of differential and integral calculus. In 3 books. St. Petersburg, Lan Publ. 2009. 656 p.(in Russian)
12. Koshlyakov IS. Equations in partial derivatives of mathematical physics. Moscow, The higher school. 1970. 712 p. (in Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.05.2024

Received May 29, 2024

Поступила после рецензирования 14.06.2024

Revised June 14, 2024

Принята к публикации 18.06.2024

Accepted June 18, 2024

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Gennadiy V. Averin** – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Technologies Donetsk State University, Donetsk, Russia

**Maria V. Shevtsova** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Anna V. Zvyagintseva** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Аверин Геннадий Викторович** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерных наук, Донецкий государственный университет, г. Донецк, Россия

**Шевцова Мария Витальевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Звягинцева Анна Викторовна** – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерных наук, Донецкий государственный университет, г. Донецк, Россия

[К содержанию](#)



## Фотофорез умеренно крупной высоковязкой капли в режиме со скольжением с учетом термодиффузионных и стефановских эффектов

Малай Н. В. , Сохань П. В. , Шостак Ю. И. 

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85  
[malay@bsu.edu.ru](mailto:malay@bsu.edu.ru), [sokhanp95@gmail.com](mailto:sokhanp95@gmail.com), [juliashostak@mail.ru](mailto:juliashostak@mail.ru)


**Аннотация.** В квазистационарном приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле проведено теоретическое описание фотофоретического движения умеренно крупной испаряющейся высоковязкой капли сферической формы (отсутствуют циркуляция вещества внутри капли и силы межфазного поверхностного натяжения) в вязкой бинарной газовой смеси с фазовым переходом одного из компонентов на поверхности конденсированной фазы. В граничных условиях на поверхности капли учитывались линейные поправки по числу Кнудсена (изотермическое, тепловое и диффузионное скольжения, скачков температуры и концентрации, а так же скольжение, возникающее из-за неоднородности температуры вдоль искривленной поверхности частицы), реактивный эффект и вклад прямого влияния коэффициента испарения с учетом термодиффузионных и стефановских эффектов.

**Ключевые слова:** фотофорез испаряющихся капель, движение капель в поле электромагнитного излучения, тепло- и массоперенос

**Для цитирования:** Малай Н. В., Сохань П. В., Шостак Ю. И. 2024. Фотофорез умеренно крупной высоковязкой капли в режиме со скольжением с учетом термодиффузионных и стефановских эффектов. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 218–225. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-218-225

Original Research

## Photophoresis of a Moderately Large High-Viscosity Droplet in a Sliding Mode, Taking into Account Thermodiffusion and Stephan Effects

Nikolai V. Malai , Pavel V. Sohan , Julia I. Shostak 

Belgorod National Research University,  
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia  
[malay@bsu.edu.ru](mailto:malay@bsu.edu.ru), [sokhanp95@gmail.com](mailto:sokhanp95@gmail.com), [juliashostak@mail.ru](mailto:juliashostak@mail.ru)

**Abstract.** A theoretical description of the photophoretic motion of a moderately large evaporating highly viscous spherical droplet (absent, circulation of matter inside the droplet and interfacial surface tension forces) in a viscous binary gas mixture with a phase transition of one of the components on the surface of the condensed phase is carried out in the quasi-stationary approximation at low Reynolds and Peckle numbers. In the boundary conditions on the droplet surface, linear corrections by the Knudsen number were taken into account (isothermal, thermal and diffusion slip, temperature and concentration jumps, as well as sliding due to temperature inhomogeneity along the curved surface of the particle), the reactive effect and the contribution of the direct influence of the evaporation coefficient taking into account thermodiffusion and Stephan effects.

**Keywords:** Photophoresis of Evaporating Droplets, Movement of Droplets in the Field of Electromagnetic Radiation, Heat and Mass Transfer

**For citation:** Malay N. V., Sokhan P. V., Shostak Yu. I. 2024. Photophoresis of a Moderately Large High-Viscosity Droplet in a Sliding Mode, Taking into Account Thermodiffusion and Stephan Effects. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 218–225. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-218-225

**1. Введение.** Явление фотофореза в газе заключается в движении частиц в поле электромагнитного излучения. Находящаяся в поле направленного излучения частица поглощает электромагнитную энергию, которая преобразуется в тепло и вызывает неоднородный нагрев ее поверхности. Газ, взаимодействуя с неоднородно нагретой поверхностью, начинает двигаться вдоль поверхности в направлении возрастания температуры. Это явление называется тепловым скольжением и оно вызывает появление фотофоретической силы. Под действием этой силы капля начинает двигаться. Когда величина фотофоретической силы становится равной по величине силы вязкого сопротивления среды, капля начинает двигаться равномерно. Скорость равномерного движения капли называют фотофоретической скоростью.

В зависимости от размеров, формы поверхности частицы, оптических свойств ее материала, длины волны излучения более нагретой может оказаться как освещенная, так и теневая сторона поверхности. В связи с этим наблюдается как положительный фотофорез (движение частицы в направлении распространения излучения), так и отрицательный (движение частицы в обратном направлении).

С математической точки зрения фотофорез является сложной задачей, состоящей из электродинамической задачи (расчет характеристик поглощенного электромагнитного поля в объеме частицы), тепловой задачи (расчет температурных полей в объеме и на поверхности частицы) и газокINETической задачи (описание тепломассопереноса в газовой фазе, вычисление полей сил, давлений, скоростей и т. д.).

Несмотря на то, что это явление было открыто в начале 20 века [1], интерес к нему не ослабевает, а только растет. Открываются все новые области применения фотофореза [2]-[13]. Во-первых, это глобальная проблема борьбы с загрязнениями воздушной среды аэрозолями как искусственного, так и естественного происхождения (улавливание частиц и левитация); во-вторых, многочисленные технологические приложения требуют сведений о поведении дисперсных сред в различных условиях. Такие проблемы актуальны для химической промышленности; для всевозможных технологий, использующих процессы осаждения частиц в каналах; при проведении тонкой очистки небольших объемов газа; отборе аэрозольных проб; нанесения заданной толщины специальных покрытий. В-третьих, вопросы поведения частиц во внешних полях в условиях высокого вакуума, например, астрофизика и т. д.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим сферическую умеренно крупную ( $0.01 \leq Kn \leq 0.3$ ,  $Kn$  – число Кнудсена [14]) высоковязкую каплю (отсутствуют циркуляция вещества внутри капли и силы межфазного поверхностного натяжения) радиуса  $R$ , взвешенную в однородной по температуре бинарной газовой смеси с температурой  $T_e$ , плотностью  $\rho_e$ , теплопроводностью  $\lambda_e$ , диффузией  $D_{12}$ , вязкостью  $\mu_e$  и коэффициентом испарения  $\alpha_0$ .

Бинарная газовая смесь описывается относительными числовыми концентрациями компонентов  $C_1$  и  $C_2$ . Здесь  $C_1 = n_1/n_e$ ,  $C_2 = n_2/n_e$ ,  $n_e = n_1 + n_2$  – полное количество молекул в единице объема смеси,  $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ ,  $\rho_1 = n_1 m_1$ ,  $\rho_2 = n_2 m_2$ ,  $m_1, n_1$  и  $m_2, n_2$  – масса и численная концентрация молекул первого и второго компонентов смеси. Первый компонент  $C_1$  по своему физико-химическому составу совпадает с веществом жидкой капли. Второй компонент считается основным (несущим). Здесь и далее индексы «e» и «i» будем относить к газу и капле, индексом «s» – обозначены значения физических величин, взятые при средней температуре поверхности капли  $T_s$ , а индексом «∞» – обозначены средние значения физических величин, характеризующие бинарную газовую среду вдали от капли.

Предполагается диффузионный режим испарения капли ( $C_1 \ll 1$ ). Основное влияние на процесс тепломассопереноса в окрестности капли определяется молекулярной диффузией. Радиус капли считается неизменным (время заметного изменения радиуса капли значительно больше времени релаксации диффузионных и тепловых неоднородностей вблизи нее). При движении капля сохраняет свою сферическую форму, т. е. силы поверхностного натяжения значительно больше силы вязкого сопротивления. В силу малости времени тепловой и диффузионной релаксации процесс тепломассопереноса в системе частица-газ протекает квазистационарно, и свободной конвекцией пренебрегаем (число Грасгофа мало). Задача решается гидродинамическим методом, т. е. решаются уравнения гидродинамики и тепломассопереноса с соответствующими граничными условиями.

Задача решается в сферической системе координат ( $y = r/R, \theta, \varphi$ ), начало которой совпадает с центром масс капли. При таком выборе системы отсчета задача сводится к анализу обтекания испаряющейся капли бесконечным плоскопараллельным потоком в положительном направлении оси  $Oz$ , скорость которого  $U_\infty$  подлежит определению ( $U_\infty \parallel Oz$ ,  $U_\infty = -U_{ph}$ ,  $U_{ph}$  – фотофоретическая скорость).

Распределения скоростей, давлений, температур и относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси (в силу симметрии задачи) зависят только от радиальной координаты  $y$  и полярного угла  $\theta$ .

Задача рассматривается при малых относительных перепадах температуры в окрестности высоковязкой капли, коэффициенты молекулярного переноса (вязкость, теплопроводность, диффузия) и плотность бинарной газовой смеси считаются постоянными. Газ рассматривать как несжимаемую среду, а сама система газодинамических уравнений распадается при этом на гидродинамическую и тепло-массопереноса.

Таким образом, решается система газодинамических уравнений (1)-(3) для среднemasсовой скорости  $U_e(\mathbf{r})$ , давления  $P_e(\mathbf{r})$ , относительной концентрации  $C_1(\mathbf{r})$  и полей температур  $T_e(\mathbf{r})$  и  $T_i(\mathbf{r})$  вне и внутри капли с краевых условий (4)-(6) [15, 16, 17]:

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e, \quad \text{div}(\rho_e U_e) = 0, \quad (1)$$

$$\Delta T_e = 0, \quad \Delta C_1 = 0, \quad (2)$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (3)$$

На бесконечности при  $y \rightarrow \infty$  и конечность физических величин, характеризующих каплю при  $y \rightarrow 0$ , учтены в краевых условиях (4), (5), а на граничной поверхности, т. е. при  $y = 1$  справедливы краевые

условия (6)-(9)

$$\mathbf{U}_e = U_\infty \mathbf{n}_z, \quad T_e = T_\infty, \quad C_1 = C_0, \quad P_e = P_\infty, \quad U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|, \quad (4)$$

$$T_i \neq \infty, \quad (5)$$

$$n_1 U_r^{(e)} - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \left( \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{K_{TD}}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) = \alpha_0 v n_e \left[ C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1 \right], \quad (6)$$

$$n_2 U_r^{(e)} + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \left( \frac{\partial C_1}{\partial y} + \frac{K_{TD}}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial y} \right) = 0, \quad C_{1s}^{(H)} = \frac{n_{1s}^{(H)}}{n_e} \Big|_{T_i=T_s}, \quad v = \sqrt{k_B T_e / (2\pi m_1)}, \quad (7)$$

$$U_\theta^{(e)} = C_m K n \left( \frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial y} - \frac{U_\theta^{(e)}}{y} \right) + K_{TS}^{(0)} \frac{v_e}{RT_e} \left( 1 + K n \beta_{RT} \right) \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS}^{(0)} \left( 1 + K n \beta_{RC} \right) \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta}, \quad T_e - T_i = K n \left( K_T^T \frac{\partial T_e}{\partial y} + K_T^n \frac{\partial C_1}{\partial y} \right), \quad C_{1s}^* = \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_{1s}^{(H)}}{\partial T_i} \Big|_{T_i=T_s}, \quad (8)$$

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = -L m_1 R \alpha_0 v n_e \left[ C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1 \right] - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_\infty^4). \quad (9)$$

Здесь  $U_r^{(e)}, U_\theta^{(e)}$  – компоненты массовой скорости  $\mathbf{U}_e$  в сферической системе координат,  $L$  – удельная теплота испарения жидкости,  $\sigma_0$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $Kn$  – число Кнудсена [ ],  $\sigma_1$  – интегральная степень черноты,  $v_e$  – коэффициент кинематической вязкости,  $v$  – одна четвертая средней арифметической скорости теплового движения газовых молекул первого сорта [18],  $n_{1s}^{(H)}$  – насыщенная концентрация молекул первого компонента бинарной газовой смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли  $T_i$ ,  $C_m, K_{TS}^{(0)}, K_{DS}^{(0)}$  – коэффициенты изотермического, теплового и диффузионного скольжений,  $\beta_{RT}, \beta_{RC}$  – коэффициенты скольжения, возникающие из-за неоднородности температуры вдоль искривленной поверхности (учитывающие кривизну поверхности капли) и  $K_T^T, K_T^n$  – коэффициенты скачков температуры и концентрации. Все выше газокинетические коэффициенты определяются из решения в слое Кнудсена уравнения Больцмана [14, 19, 20] и при коэффициентах аккомодации по энергии и тангенциального импульса равных единице  $K_{TS}^{(0)} = 1.161, K_{DS}^{(0)} = 0.3, C_m = 1.131, \beta_{RT} = 3.731, \beta_{RC} = 1.572, K_T^T = 2.179$  [14, 19, 20]. Невозмущенные параметры  $(T_\infty, P_\infty)$  наблюдаются в месте нахождения геометрического центра высоковязкой капли при ее отсутствии (величина  $C_0$  определяется через численные концентрации  $n_1$  и  $n_2$  газовых молекул),  $q_i = \frac{4\pi n_k a_k}{n_s \lambda_0} I_0 B_k$  – объемная плотность внутренних источников тепла, неоднородно распределенных внутри капли,  $m_k = n_k + i a_k$  – комплексный показатель преломления капли,  $n_s$  – показатель преломления среды,  $I_0, \lambda_0$  – длина волны и интенсивность падающего излучения,  $B_k$  – функция координат, рассчитываемая по теории Ми [21, 22].

В граничных условиях на поверхности высоковязкой капли учтено соответственно: непрерывность радиального летучего потока первого компонента через поверхность капли (6). Левая часть равна суммарному радиальному потоку первого компонента вне капли и представляет из себя сумму конвективного, диффузионного и термодиффузионного потоков. Правая же часть дает радиальный поток первого компонента, отводимый через слой Кнудсена с поверхности капли и пропорциональный коэффициенту испарения  $\alpha_0$  капли. Вывод выражения для этого потока основан на предположении, что радиальный поток молекул пара определяется на основе статистических соображений и равен по величине  $n_e \alpha_0 v \left( C_1^{(s)} - C_1 \right) \Big|_{y=1}$ , где  $C_1^{(s)}$  – насыщенная относительная концентрация первого компонента, являю-

щаяся функцией температуры  $T_{iS}$  на поверхности капли,  $v = \sqrt{k_B T_e / 2\pi m_1}$  – одна четвертая абсолютной тепловой скорости молекул пара,  $k_B$  – постоянная Больцмана. Поскольку  $C_1^{(s)} = C_1^{(s)}(T_i)$ , то мы можем  $C_1^{(s)}$  разложить в ряд по малому параметру  $\varepsilon$  (роль которого играет число Рейнольдса  $\varepsilon = Re = (\rho_e U_\infty R) / \mu_e \ll 1$ ) с удержанием линейных по этому параметру членов:  $C_1^{(s)}(T_i) = C_{1s}^{(H)} + C_{1s}^* \delta T_i - C_1$ ,  $\delta T_i$  находится из граничных условий на поверхности капли; следующее краевое условие (7) учитывает тот факт, что поверхность капли непроницаема для второго компонента бинарной газовой смеси и в нем учтены радиальный конвективный, диффузионный и термодиффузионный потоки второго компонента смеси; далее граничное условие (8) отражает известное явление изотермического, теплового и диффузионного скольжений и поправки на кривизну поверхности капли, пропорциональные соответственно коэффициентам  $C_m, K_{TS}^{(0)}, K_{DS}^{(0)}, \beta_{RT}, \beta_{RC}$  и скачок температуры разность температур на границе слоя Кнудсена и внутри капли пропорциональные коэффициентам  $K_T^T$  и  $K_T^n$  и в последнем краевом условии (8) учтено условие непрерывности радиального потока тепла с учетом тепла, идущее на фазовый переход жидкости капли в пар, пропорциональное величине  $L$  и на излучение.

**3. Поля температур, относительной концентрации первого компонента бинарной газовой смеси, массовой скорости и давления.** Используя гидродинамический подход к решению уравнений

гидродинамики, метод разделения переменных при решении уравнений тепломассопереноса, получаем следующие общие решения для уравнений гидродинамики и тепломассопереноса при малых числах Рейнольдса и Пекле, удовлетворяющие краевым условиям (4)–(5):

$$\begin{aligned}
 U_r^{(e)}(y, \theta) &= U_\infty \cos \theta \left( 1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), \quad U_\theta^{(e)}(y, \theta) = -U_\infty \sin \theta \left( 1 - \frac{A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right), \quad t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), \\
 P_e(y, \theta) &= P_\infty + U_\infty \frac{\mu_e}{R} \cos \theta \frac{A_2}{y^2}, \quad t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), \quad C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta), \\
 J_0 &= \frac{1}{V} \int_V q_i dV, \quad V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad t_e = T_e/T_\infty, \quad t_i = T_i/T_\infty, \quad t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad C_{10}(y) = C_0 + \frac{M_0}{y}, \\
 t_{e1}(y, \theta) &= \cos \theta \frac{\Gamma_1}{y^2}, \quad C_{11}(y, \theta) = \cos \theta \frac{M_1}{y^2}, \quad \psi_0(y) = -\frac{R^2}{2\lambda_i T_\infty} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i dx, \quad H_0 = \frac{R^2 J_0}{3\lambda_i T_\infty}, \quad H_1 = \frac{R J_1}{3\lambda_i T_\infty}, \\
 t_{i0}(y) &= B_0 + \frac{H_0}{y} - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0(y) dy + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy, \quad \psi_1(y) = -\frac{3}{2} \frac{R^2}{\lambda_i T_\infty} y^2 \int_{-1}^{+1} q_i x dx, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV, \quad (10) \\
 t_{i1}(y) &= \cos \theta \left\{ B_1 y + \frac{H_1}{y^2} + \frac{1}{3} \left[ y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y y \psi_1 dy \right] \right\}, \quad z = r \cos \theta, \quad x = \cos \theta, \quad \int_V q_i z dV -
 \end{aligned}$$

дипольный момент плотности тепловых источников [4, 8, 23]. Интегрирование ведется по всему объему испаряющейся капли.

Среднее значение температуры поверхности капли  $T_{iS} = t_{iS} T_\infty$  определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 t_{eS} - t_{iS} &= -Rn \left( K_T^T \Gamma_0 + K_T^{(n)} t_{eS} M_0 \right), \\
 \frac{\lambda_e \Gamma_0}{\lambda_i} &= \frac{R^2 J_0}{3\lambda_i T_\infty} + LD_{12} \frac{n_e m_1 R \alpha_0 v}{T_\infty \lambda_i} \left( C_0 - C_{1s}^{(H)} + M_0 \right) - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_\infty^4}{\lambda_i} (t_{iS}^4 - 1), \\
 M_0 &= \frac{C_{1s}^{(H)} - C_0 - D_{12} \frac{n_e}{n_e R \alpha_0 n_2 v} \frac{K_{TD}}{T_\infty} \Gamma_0}{1 + D_{12} \frac{n_e}{n_e R \alpha_0 n_2 v}}.
 \end{aligned} \right.$$

Здесь  $t_{eS} = t_{e0}(y = 1)$ ,  $t_{iS} = t_{i0}(y = 1)$ .

**4. Сила и скорость фотофореза. Анализ полученных результатов.** После того как получены в первом приближении по  $\varepsilon$  выражения для полей температур вне и внутри испаряющейся капли и первого компонента бинарной газовой смеси методом сращиваемых асимптотических разложений, общая сила, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности высоковязкой капли (11) [15]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi |_{r=R}. \quad (11)$$

Здесь

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r} \right).$$

После определения постоянных интегрирований, входящих в выражения (10) из краевых условий (6)–(9), подстановки (10) в (11) и интегрирования получаем, что результирующая сила  $F$  складывается из силы вязкого сопротивления среды  $F_\mu$  и фотофоретической силы  $F_{ph}$ :

$$F = F_\mu + F_{ph}. \quad (12)$$

Здесь  $F_\mu = 6\pi R\mu_e f_\mu U_\infty \mathbf{n}_z$ ,  $F_{ph} = -6\pi R\mu_e f_{ph} J_1 \mathbf{n}_z$ ,

$$\begin{aligned}
 f_\mu &= \frac{1 + 2C_m Kn}{1 + 3C_m Kn}, \quad \Omega_1 = 1 + 4 \frac{\sigma_0 \sigma_1}{\lambda_i} RT_\infty^3 t_{iS}^3 + 2LD_{12} \frac{n_e m_1}{\lambda_i n_2 a_1} C_{1s}^*, \\
 f_{ph} &= \frac{2}{3} \frac{1}{\delta \lambda_i T_\infty a_1 (1 + 3C_m Kn)} \left\{ K_{TS}^{(0)} \frac{v_e a_1}{t_{eS}} (1 + Kn \beta_{RT}) + K_{DS}^{(0)} \frac{D_{12}}{\Omega_0} (1 + Kn \beta_{RC}) \left[ C_{1s}^* T_\infty \times \right. \right. \\
 &\times \left( 1 + Kn [2K_T^T + K_T^n M_0] \right) - 2D_{12} \frac{n_e}{R\alpha_0 v n_2} \frac{K_{TD}}{t_{eS}} \left( 1 - \frac{\Gamma_0}{2t_{eS}} \right) \left. \right] + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e n_2 \Omega_0} (1 + 6C_m Kn) \times \\
 &\times \left[ C_{1s}^* T_\infty (1 + Kn [2K_T^T + K_T^n M_0]) + \frac{K_{TD}}{t_{eS}} \left( 1 - \frac{\Gamma_0}{2t_{eS}} \right) (1 - 2K_T^n t_{eS} C_{1s}^* T_\infty) \right], \\
 a_1 &= 1 + 2D_{12} \frac{n_e}{R\alpha_0 v n_2}, \quad \delta = 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} + 2LD_{12} \frac{n_e m_1}{\lambda_i T_\infty n_2 a_1} \frac{K_{TD}}{t_{eS}} \left( 1 - \frac{\Gamma_0}{2t_{eS}} \right) + \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \left[ 1 + Kn \left( 2K_T^T + \right. \right. \\
 &\left. \left. + K_T^n M_0 [M_0 - 4LD_{12} \frac{n_e}{R\alpha_0 v n_2 a_1} K_{TD} (1 - \frac{\Gamma_0}{2t_{eS}})] \right) \right], \quad \Omega_0 = 1 - 2K_T^n Kn t_{eS} C_{1s}^* \frac{T_\infty}{a_1}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Приравнявая полную силу к нулю (капля движется прямолинейно и равномерно), получаем общее выражение для фотофоретической скорости умеренно крупной испаряющейся капли сферической формы:

$$\mathbf{U}_{ph} = - \frac{f_{ph}}{f_\mu} \mathbf{n}_z. \tag{14}$$

Выражения (12)–(14) позволяют оценивать влияние коэффициента испарения, реактивного эффекта, линейных поправок по числу Кнудсена и термодиффузии на фотофоретическую силу и скорость высоковязкой умеренно крупной испаряющейся капли в бинарной газовой среде и носят наиболее общий характер.

Входящий в силу и скорость фотофореза коэффициент  $f_{ph}$  состоит из суммы трех слагаемых. Первое слагаемое, которое пропорционально коэффициенту теплового скольжения  $K_{TS}^{(0)}$  и, за счет которого испаряющаяся капля стремится двигаться в сторону падения температуры во внешней среде, т. е. из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой; за счет второго слагаемого (диффузионного скольжения, которое пропорционально коэффициенту  $K_{DS}^{(0)}$ ) капля может двигаться как в сторону роста, так и в сторону падения температуры, в зависимости от масс компонентов бинарной газовой смеси. Если масса молекул компонента внешней смеси, испытывающей фазовый переход на поверхности капли  $m_1 < m_2$ , то  $K_{DS}^{(0)} > 0$ . В противном случае  $-K_{DS}^{(0)} < 0$ ; третье слагаемое связано с фазовым переходом и описывает действие реактивной части импульса на каплю. Температурная зависимость относительной концентрации насыщенных паров летучего вещества капли ( $C_{1s}^*$ ) и термодиффузионные явления в объеме газовой смеси вызывают неравномерное испарение вдоль границы конденсированной фазы и, как следствие, реактивный эффект.

Следует так же отметить, что выражения, пропорциональные коэффициентам  $K_{TS}^{(0)}$ ,  $K_{DS}^{(0)}$  и реактивному эффекту, умножаются соответственно на  $(1 + Kn \beta_{RT})$ ,  $(1 + Kn \beta_{RC})$ ,  $(1 + 6C_m Kn)$  и на  $Kn(2K_T^T + K_T^n M_0)$ , т. е. учитывается влияние линейных поправок по числу Кнудсена на силу и скорость фотофореза. Поскольку эти коэффициенты по знаку могут быть различны (в зависимости от выбранной модели (БГК-модель, S-модель), выбранных пробных функций, при определенных соотношениях коэффициентов скольжений и скачков, варьирование значений коэффициентов аккомодации импульса и энергии и т. д.), то может возникнуть отрицательный фотофорез. Аналогичная ситуация имеет место и для термофореза умеренно крупных аэрозольных частиц [24].

Для высокотеплопроводных умеренно крупных испаряющихся капель (при  $\lambda_i \rightarrow \infty$ ), видим, фотофорез практически отсутствует, т. е.  $f_{ph} \rightarrow 0$ , что подтверждается в экспериментах.

Величина и направление скорости фотофореза высоковязкой капли зависит от величины и направления дипольного момента плотности тепловых источников  $\int_V q_i z dV$ , которые входят в выражение  $J_1$ . В тех случаях, когда дипольный момент отрицательный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в той части капли, которая обращена к потоку излучения), капля движется в направлении падающего излучения. Если дипольный момент положительный (когда большая часть тепловой энергии выделяется в теневой части капли), капля будет двигаться навстречу направлению распространения излучения.

Плотность тепловых источников при увеличении интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно. Отсюда следует, что фотофоретическая сила и скорость с увеличением интенсивности электромагнитного излучения возрастает линейно.

При постоянной величине дипольного момента увеличение радиуса капли ( $J_1 = \frac{1}{V} \int_V q_i z dV$ ,  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ )

приводит к уменьшению скорости фотофореза, которое происходит обратно пропорционально  $R^3$ , что согласуется с экспериментом.

Что же касается вклада термодиффузии в силу и скорость фотофореза, отметим следующее. Термодиффузия относится к так называемым «слабым» эффектам, или эффектам второго порядка малости, однако она весьма чувствительна к параметрам потенциалов межмолекулярного взаимодействия. Явление термодиффузии во многих процессах является определяющим и имеет самостоятельный характер. Это проявляется, например, при очистке и разделении смесей газов и изотопов; извлечении различных нефтепродуктов; получении особо чистых веществ; процессах, протекающих в атмосферах планет, высокотемпературной плазме, и многих других.

Во многих случаях термодиффузия является процессом, который может существенно воздействовать на течение других процессов или вызывать их появление, в частности, в вопросах фазового равновесия, многофазной фильтрации, сорбции, дегазации, гидратации, выпадения газоконденсата и других процессов, связанных с нефтегазовым комплексом. В этом случае необходимо либо вводить соответствующую поправку на термодиффузию, либо исключать ее влияние. В связи с этим, в работе получены формулы, позволяющие оценивать силу и скорость фотофореза высоковязкой умеренно крупной испаряющейся капли в бинарной газовой среде с учетом термодиффузии и, носят наиболее общий характер.

**Заключение.** В квазистационарном приближении в поле электромагнитного излучения при малых числах Рейнольдса и Пекле проведено теоретическое описание движения умеренно крупной испаряющейся высоковязкой капли сферической формы в вязкой бинарной газовой смеси с фазовым переходом одного из компонентов на поверхности конденсированной фазы. Полученные выражения для силы и скорости фотофореза позволяют учесть прямой вклад влияния коэффициента испарения, линейных поправок по числу Кнудсена и термодиффузии.

#### Список литературы

1. Ehrenhaft F. 1918. Die Photophorese, 361(10):81-132.
2. Cheremisin A.A., Kushnarenko A.V. 2013. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium. J. of Aerosol Science, 62:26-39.
3. Гращенков С.И. Использование метода конечных элементов для расчета скорости фотофореза крупных аэрозольных частиц. 2017. Colloid Journal, 79(5):596-604.
4. Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А. 2012. Фотофорез нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы. Журнал технической физики, 82(10): 42-50.
5. Gui-hua Chen, Lin He, Mu-ying Wu, and Yong-qing Li Temporal Dependence of Photophoretic Force Optically Induced on Absorbing Airborne Particles by a Power-Modulated. 2018. Phys. Rev. Applied, 10 (5).
6. Малай Н.В., Шукин Е.Р. Фото-и термофорез нагретых умеренно крупных аэрозольных частиц сферической формы. 2019. Журнал технической физики, 89(4): 500-506.
7. Cortes J., Stanczak C., Azadi M., Narula M. et al. Photophoretic Levitation: Photophoretic Levitation of Macroscopic Nanocardboard Plates. 2020. Advanced Materials, 32 (16): 207-227.
8. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Шулиманова З.Л. Фото-термо-и диффузиофорез крупных нелетучих аэрозольных частиц сферической формы в бинарных газовых смесях. 2020. Оптика атмосферы и океана, 33(6): 476-482.
9. Leonardo A. Ambrosio Photophoresis in the slip-flow and free molecular regimes for arbitrary-index particles. 2020. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 255: 107276.
10. Schafer B., Kim J., Vlassak J., Keith D. Towards photophoretically levitating macroscopic sensors in the stratosphere. 2022. Applied Physics (physics. app-ph.): 1-39.
11. Mitri F.G. Optical Magnus effect in the photophoresis of a spinning absorptive dielectric circular. 2022. Applied Optics, 61(5): 1203-1211.
12. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Шостак Ю.И. О влиянии теплообмена на фотофорез нагретой крупной аэрозольной частицы. Теплофизика высоких температур, 60(6):866-872.
13. Souvik Sil Anita Pahi, Aman Anil Punse, and Ayan Banerjee Ultrastable Three-Dimensional Photophoretic Trap in Air Facilitated by a Single Multimode Fiber. 2024. ACS Photonics, 11(1): 159-170.
14. Галоян В.С., Яламов Ю.И. 1985. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван, Луйс. 207.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 2003. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М., Физматлит. 731.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. 1972. Уравнения математической физики. М., Наука. 735.
17. Хаппель Дж., Бреннер Г. 1976. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., Мир.630.
18. Яламов Ю.И. О влиянии коэффициента испарения на диффузиофорез крупных капель.1990. МОПИ, Деп. в ВИНТИ № 4120-Б-90.
19. Яламов Ю.И., Подоскин А.Б., Юшканов А.А. 1980. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны. ДАН СССР, 254(2): 1047-1050.

20. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. 1980. К вопросу о термофорезе умеренно крупных аэрозольных частиц. Журнал технической физики, 50(1): 158-160.
21. Борен К., Хафмен Д. 1986. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир. 660.
22. Рязанов К.С., Попов И.В., Малай Н.В. Вычисление распределения поглощаемой электромагнитной энергии внутри частиц сферической формы 2010. Свид. о госуд. регистрации программы для ЭВМ № 2010616043 14.09.2010.
23. Береснев С.А., Ковалев Ф.Д., Кочнева Л.Б., Рунков В.А., Суетин П.Е., Черемисин А.А. 2003. О возможности фотофоретической левитации частиц в стратосфере. Оптика атмосферы и океана, 16(1): 52-57.
24. Ryan W. Bosworth, A.L. Ventura, A.D. Ketsdeverand, S.F. Gimelshein Measurement of negative thermophoretic force. 216. J. of Fluid Mechanics, 805: 207-221.

### References

1. Ehrenhaft F. 1918. Die Photophorese, 361(10):81-132.
2. Cheremisin A.A., Kushnarenko A.V. 2013. Photophoretic interaction of aerosol particles and its effect on coagulation in rarefied gas medium. J. of Aerosol Science, 62:26-39.
3. Grashchenkov S.I. Using the finite element method to calculate the photophoresis rate of large aerosol particles. 2017. Colloid Journal, 79(5):596-604.
4. Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A. 2012. Photophoresis of heated large aerosol particles of spherical shape. Journal of Technical Physics, 82(10):42-50.
5. Gui-hua Chen, Lin He, Mu-ying Wu, and Yong-qing Li Temporal Dependence of Photophoretic Force Optically Induced on Absorbing Airborne Particles by a Power-Modulated. 2018. Phys. Rev. Applied, 10 (5).
6. Malai N.V., Shchukin E.R. Photo- and thermophoresis of heated moderately large aerosol particles of spherical shape. 2019. Journal of Technical Physics, 89(4):500-506.
7. Cortes J., Stanczak C., Azadi M., Narula M. et al. Photophoretic Levitation: Photophoretic Levitation of Macroscopic Nanocardboard Plates. 2020. Advanced Materials, 32 (16): 207-227.
8. Malai N.V., Shchukin E.R., Shulimanova Z.L. Photo-thermo-and diffusiophoresis of large non-volatile aerosol particles of spherical shape in binary gas mixtures. 2020. Optics of the Atmosphere and Ocean, 33(6): 476-482.
9. Leonardo A. Ambrosio Photophoresis in the slip-flow and free molecular regimes for arbitrary-index particles. 2020. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 255: 107276.
10. Schafer B., Kim J., Vlassak J., Keith D. Towards photophoretically levitating macroscopic sensors in the stratosphere. 2022. Applied Physics (physics. app-ph.): 1-39.
11. Mitri F.G. Optical Magnus effect in the photophoresis of a spinning absorptive dielectric circular. 2022. Applied Optics, 61(5): 1203-1211.
12. Malai N.V., Shchukin E.R., Shostak Yu.I. On the effect of heat transfer on photophoresis of a heated large aerosol particle. Thermophysics of High Temperatures, 60(6): 866-872.
13. Souvik Sil Anita Pahi, Aman Anil Punse, and Ayan Banerjee Ultrastable Three-Dimensional Photophoretic Trap in Air Facilitated by a Single Multimode Fiber. 2024. ACS Photonics, 11(1): 159-170.
14. Galoyan V.S., Yalamov Yu.I. 1985. Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media. Yerevan, Luys. 207.
15. Landau L.D., Lifshits E.M. 2003. Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics. М., Fizmatlit. 731.
16. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. 1972. Equations of mathematical physics. М., Nauka. 735.
17. Happel J., Brenner G. 1976. Hydrodynamics at small Reynolds numbers. М., Mir.630.
18. Yalamov Yu.I. On the effect of the evaporation coefficient on the diffusiophoresis of large droplets.1990. MOPI, Dept. in VINITI No. 4120-B-90.
19. Yalamov Yu.I., Poddoskin A.B., Yushkanov A.A. 1980. On boundary conditions in the flow of inhomogeneously heated gas around a spherical surface of low curvature. DAN USSR, 254(2): 1047-1050.
20. Poddoskin A.B., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. 1980. On the issue of thermophoresis of moderately large aerosol particles. Journal of Technical Physics, 50(1): 158-160.
21. Boren K., Hafman D. 1986. Absorption and scattering of light by small particles. М., Mir. 660.
22. Ryazanov K.S., Popov I.V., Malai N.V. Calculation of the distribution of absorbed electromagnetic energy inside spherical particles 2010. Svid. about the state. registration of the computer program No. 2010616043 on 14.09.2010.
23. Beresnev S.A., Kovalev F.D., Kochneva L.B., Runkov V.A., Suetin P.E., Cheremisin A.A. 2003. On the possibility of photophoretic levitation of particles in the stratosphere. Optics of the Atmosphere and Ocean, 16(1):52-57.
24. Ryan W. Bosworth, A.L. Ventura, A.D. Ketsdeverand, S.F. Gimelshein Measurement of negative thermophoretic force. 216. J. of Fluid Mechanics, 805: 207-221.

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.07.2024

Поступила после рецензирования 16.08.2024

Принята к публикации 21.08.2024

Received July 4, 2024

Revised August 16, 2024

Accepted August 21, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Малай Николай Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Сохань Павел Витальевич** – аспирант второго года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

**Шостак Юлия Ивановна** – аспирант третьего года обучения кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Nikolai V. Malai** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Pavel V. Sohan** – Post Graduate Student of the Second Year of Study, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

**Julia I. Shostak** – Post Graduate Student of the Third Year of Study, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)



## Параметрические характеристики нано- и микропор, влияющие на их залечивание при селективной лазерной обработке

Сафронов И. С. , Ушаков А. И. , Андрухова О. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»,

Россия, 119049, г. Москва, Ленинский проспект, д. 4, стр. 1

[Issafronov@yandex.ru](mailto:Issafronov@yandex.ru), [Ushakov\\_a\\_i@mail.ru](mailto:Ushakov_a_i@mail.ru), [Ova17@yandex.ru](mailto:Ova17@yandex.ru)

**Аннотация.** В работе теоретически рассмотрены закономерности прогрева материала в окрестности нано- и микроразмерных пор, расположенных вблизи поверхности металлического образца, подвергаемого лазерному нагреву лазерным импульсом длительностью 20 нс. Установлены зависимости нагрева материала над порой и под порой для различных расстояний от нагреваемой поверхности до поры. Показано, что в окрестности «идеальной поры» формируется специфическое распределение температуры с дополнительным нагревом материала над порой по сравнению с бездефектным материалом. Показано, что с точки зрения распределения теплового поля наиболее благоприятные условия для залечивания пор реализуются для пор малого диаметра, расположенных на расстоянии 0,5–2 мкм от поверхности, подвергаемой лазерному облучению. В условиях одновременного ударного сжатия это обеспечивает благоприятные условия для заполнения поры нагретым материалом и её полного или частичного залечивания.

**Ключевые слова:** нано- и микропоры, селективное лазерное воздействие, наносекундные лазерные импульсы

**Для цитирования:** Сафронов И. С., Ушаков А. И., Андрухова О. В. 2024. Параметрические характеристики нано- и микропор, влияющие на их залечивание при селективной лазерной обработке. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 226–233. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-226-233

Original Research

## Parametric Characteristics of Nano- and Micropores Affecting Their Healing During Selective Laser Treatment

Ivan S. Safronov , Alexander I. Ushakov , Olga V. Andrukhnova 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

National Research Technological University "MISIS",

4 building 1 Leninskiy Ave, Moscow, 119049, Russia

[Issafronov@yandex.ru](mailto:Issafronov@yandex.ru), [Ushakov\\_a\\_i@mail.ru](mailto:Ushakov_a_i@mail.ru), [Ova17@yandex.ru](mailto:Ova17@yandex.ru)

**Abstract.** The regularities of material heating in the vicinity of nano- and micro-sized pores located near the surface of a metal sample subjected to ultrafast laser heating are theoretically considered. The model used the properties of a titanium alloy VT18u exposed to a laser pulse with a duration of 20 ns. The dependences of the material heating above and below the pore for different distances from the heated surface to the pore are established. It is shown that in the vicinity of the «ideal pore» a specific temperature distribution is formed with additional heating of the material over the pore in comparison with the defect-free material. It is shown that the most favorable conditions for pore healing are realized for small-diameter pores located at distance of 0.5 - 2 micrometers from the irradiated surface. Under conditions of simultaneous shock compression, this provides favorable conditions for filling the pore with heated material and its complete or partial healing.

**Keywords:** nano- and micropores, selective laser treatment, nanosecond laser pulses

**For citation:** Safronov I. S., Ushakov A. I., Andrukhnova O. V. 2024. Parametric Characteristics of Nano- and Micropores Affecting Their Healing During Selective Laser Treatment. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 226–233. (in Russian)  
DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-226-233

**1. Введение.** Актуальной задачей физики конденсированного состояния является изучение физического механизма селективной лазерной обработки поверхности твердых непрозрачных материалов. В отличие от большинства «традиционных» методов лазерной и плазменной обработки, селективное лазерное воздействие позволяет одновременно повысить как пластичность поверхности, так и ее микро- и нанотвердость [1, 2, 3, 4, 5]. Например, для аморфных и нанокристаллических металлических сплавов (82КЗХСР, 5БДСР), титановых сплавов (ВТ9 и ВТ18у) при использовании метода селективного лазерного воздействия удается одновременно повысить нанотвердость (до четырех раз) и пластические характеристики (в частности – стойкость к растрескиванию при механических воздействиях) [3, 6, 7].

Возникающий эффект обусловлен существенными отличиями физического механизма селективной лазерной обработки от «традиционных» методов [3, 7]. В ряде случаев импульсный режим облучения поверхностного слоя металлического образца инициирует частичное или полное залечивание пор и трещин в приповерхностном слое материала за счет комплексного воздействия формирующейся ударной волны и кратковременного повышения температуры.

В настоящее время для металлов и их сплавов улучшение механических свойств поверхности установлено при облучении лазерными импульсами длительностью  $\tau$  в десятки наносекунд [6, 7, 8, 9, 10]. Характер действия лазерного излучения определяется не только временем экспозиции, но общей энергией лазерного импульса и его формой, плотностью мощности на полувысоте, а также средой, в которой находится образец. Когерентное излучение находит все более широкое применение и способно воздействовать на органические полимеры и композиты, упрочняя их или увеличивая срок старения материала [9, 10, 11, 12]. При достаточной энергии и плотности мощности импульса его воздействие на поверхность (в том числе в условиях приповерхностного оптического пробоя воздуха) сопровождается формированием газоплазменного факела/облака, время существования которого может в несколько раз превышать длительность лазерного импульса. Следовательно, в случае селективной лазерной обработки модификация свойств поверхности обусловлена также воздействием излучения и давления со стороны газоплазменного факела. Естественно предположить существование достаточно широкого диапазона длительностей лазерного импульса  $\tau$ , в котором наблюдается селективное лазерное воздействие на объемные нано- и микродефекты. Вероятно, время экспозиции ограничено сверху длительностью импульса  $\tau \sim 1$  мкс и  $\sim 10$  нс снизу. При больших значениях  $\tau$  существует опасность частичного расплавления приповерхностных слоев металла с последующей кристаллизацией/рекристаллизацией материала, вследствие чего нивелируется эффект селективного воздействия [7, 8, 9, 10]. В случае меньших длительностей импульса может реализоваться механизм абляции, при котором также не происходит избирательного воздействия на нано- и микродефекты.

Существование значительного числа параметров лазерных импульсов (длительность импульса, частота, плотность мощности лазерного излучения, последовательность обработки локальных участков и т.д.), а также существенные различия структуры приповерхностных слоев: пористость, микроструктура и др., определяющих характер воздействия лазерного излучения (ЛИ) на материал, делают экспериментальный подбор режимов селективной лазерной обработки металлов и сплавов нерациональным [3, 9, 10, 13, 14]. Эффективный выбор параметров возможен после выявления физических закономерностей процесса залечивания пор и трещин в результате импульсного лазерного облучения.

Так как залечивание дефектов внутри тонкого приповерхностного слоя металла/сплава под действием наносекундных лазерных импульсов происходит крайне быстро, экспериментальное изучение особенностей процесса с достаточной детализацией и необходимым разрешением затруднительно. Одним из возможных путей решения этой задачи является теоретическое исследование процесса селективного воздействия, в том числе компьютерное моделирование, с последующей экспериментальной верификацией модельных предсказаний при измерении локальных и интегральных механических свойств материалов, подвергнутых обработке при заданных условиях.

В работах [15, 16] рассмотрено селективное воздействие лазерного излучения на отдельные нанопоры и их системы. Однако остается неисследованным влияние размера пор и их расстояния от поверхности на специфику и эффективность процесса залечивания.

Таким образом, целью данной работы является исследование физических закономерностей селективного лазерного воздействия на поры в зависимости от их размера и расстояния от поверхности методами математического моделирования.

**2. Методика исследования.** При описанных выше условиях обработки поверхности ультракороткими лазерными импульсами рассматриваемые процессы не успевают выйти даже на квазистационарный режим. Возникающее тепловое поле имеет ряд особенностей. Образующийся газоплазменный факел поддерживает температуру поверхности образца практически неизменной в течение достаточно длительного времени ( $\Delta t > \tau$ ), а в приповерхностных слоях наблюдается высокий градиент температур. Как следствие тонкий поверхностный слой образца в области системы пор нагревается сильно неравномерно [15, 16, 17], что влияет на механические свойства металла/сплава в окрестности поры. Как следствие, распределение температуры вблизи поры может играть существенную роль в кинетике ее залечивания.

Конечная конфигурация поры после воздействия лазерного импульса и плазмы определяется рядом факторов: температурой, до которой нагрет материал, механическими напряжениями в рассматриваемой области и газовой средой в поре. На месте исходной поры в результате залечивания может сформироваться, во-первых, пора меньшего размера с неправильной геометрической формой. Во-вторых, система меньших по размеру пор. И, наконец, может произойти полное залечивание поры с формированием «шва».

В рамках подхода, предложенного ранее [15, 16], в данной работе полагается, что особенности взаимодействия короткоимпульсного мощного лазерного излучения на поверхность материала позволяют сначала провести математическое моделирование процесса теплопереноса в образце, содержащем

пору и/или систему пор, залегающих на некоторой глубине от поверхности материала. В результате чего строится скалярное температурное поле в окрестности поры/системы пор, которое в дальнейшем используется для проведения численного моделирования процесса деформации разогретого образца с порой/системой пор.

Рассматривается 2D-модель металлического образца, геометрия которой показана на рисунке 1. На основании предварительных модельных экспериментов размеры образца были выбраны таким образом, чтобы температура у границ образца не успевала вырасти более чем на один градус за время процесса. Это соответствует реальному процессу, за исключением участков поверхности, находящихся вблизи облученной области.

Расчет проводился методом конечных элементов (МКЭ) с использованием дифференциального уравнения Фурье, причем не учитывается генерация тепла в результате пластической деформации:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T), \quad (1)$$

где  $T$  [К] – температура,  $t$  [с] – время,  $\lambda$  [Вт/(м·К)] – коэффициент теплопроводности,  $c$  [Дж/(кг·К)] – удельная теплоёмкость,  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – плотность.

Для получения более полного представления о специфике воздействия лазерного излучения и плазмы на пору была проведена серия модельных экспериментов, в которых использовали одинаковые свойства материала и другие параметры моделирования, но варьировали размеры поры и ее расстояние от поверхности. Размер поры изменяли в пределах от 50 нм до 3 мкм, а расстояние от поры до поверхности варьировали от 2 мкм до 5 мкм.

Определяли условия однозначности для процессов теплопроводности, которые включали в себя физические, временные, геометрические и граничные условия.

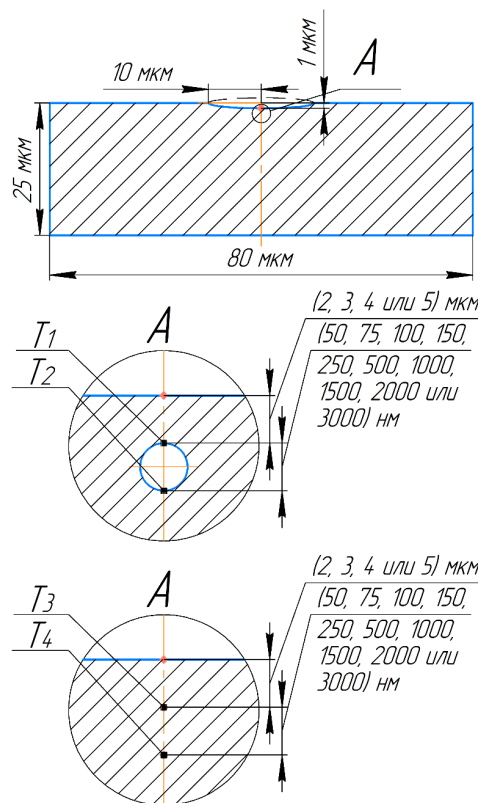


Рис. 1. Общий вид образца (а), где радиус области облучения 10 мкм, глубина лунки 1 мкм. Выносной элемент «А» показан с большим увеличением. В ходе моделирования контролировали температуру материала, прилегающего к поре сверху ( $T_1$ ), и температуру материала, прилегающего к поре снизу ( $T_2$ ). В бездефектном образце контролировали температуру ( $T_3$  и  $T_4$ ) в идентичных точках (идентичное расстояние от поверхности)

Fig. 1. General view of the sample (a), where the radius of the irradiation area is 10 micrometers, the depth of the small cavity is 1 micrometer. The remote element «А» is shown with a large magnification. During the simulation, the temperature of the material adjacent to the pore from above ( $T_1$ ) and the temperature of the material adjacent to the pore from below ( $T_2$ ) were controlled. In a defect-free sample, the temperature ( $T_3$  and  $T_4$ ) was controlled at identical points (identical distance from the surface)

Лазерная плазма взаимодействует с твердой частью образца, и температура в области контакта равна температуре плавления [18, 19, 20]. То есть граничными условиями для области контакта с лазерной плазмой являются граничные условия Дирихле. Во время процесса часть материала расплавляется/испаряется.

Это было учтено при выборе формы поверхности, на которую воздействует лазерная плазма, на рисунке 1 области облучения размером не более 10 мкм соответствует углубление в виде лунки.

На внешней поверхности образца (кроме поверхности области лазерного воздействия) происходит свободная конвекция, которая описывается формулой Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha(T_c - T_f), \quad (2)$$

где  $q$  [Вт/м<sup>2</sup>] – плотность теплового потока,  $T_c$  [K] – температура поверхности твёрдого тела,  $T_f$  [K] – температура окружающей среды,  $\alpha$  [Вт/(м<sup>2</sup>K)] – коэффициент теплоотдачи конвекцией. Так как по результатам предварительных модельных экспериментов избыточная температура не успевает распространиться до поверхности образца, то справедливо следующее:  $T_c = T_f$ , где  $T_c$  [K] – температура поверхности твёрдого тела,  $T_f$  [K] – температура окружающей среды. Следовательно, плотность теплового потока  $q=0$ . Граничные условия третьего рода (условия Ньютона) вырождаются в граничные условия второго рода (условия Неймана), которые и были использованы.

**3. Результаты и обсуждение** Наличие дефектов вносит искажение в тепловое поле. Естественно характер искажений определяется геометрией дефекта: размерами и его формой, глубиной залегания в приповерхностном слое облучаемого материала. В данной работе рассматриваются искажения в распределении теплового поля, вносимого «идеальными порами» с околонулевой теплопроводностью. В случае, если материал перед порой нагреется до высоких температур (станет достаточно пластичным), то возможно эффективное залечивание поры.

На рисунке 2 проиллюстрировано распределение температуры в приповерхностном слое, прилегающем к области облучения в бездефектном образце (рис. 2 А) и образце, содержащем круглую пору (рис. 2 Б). Скалярное температурное поле в поверхностном слое образца характеризуется высоким температурным градиентом, перпендикулярным лунке, образованной в результате воздействия лазерной плазмы. При этом материал перед порой нагревается сильнее, чем материал на тех же глубинах в бездефектном образце.

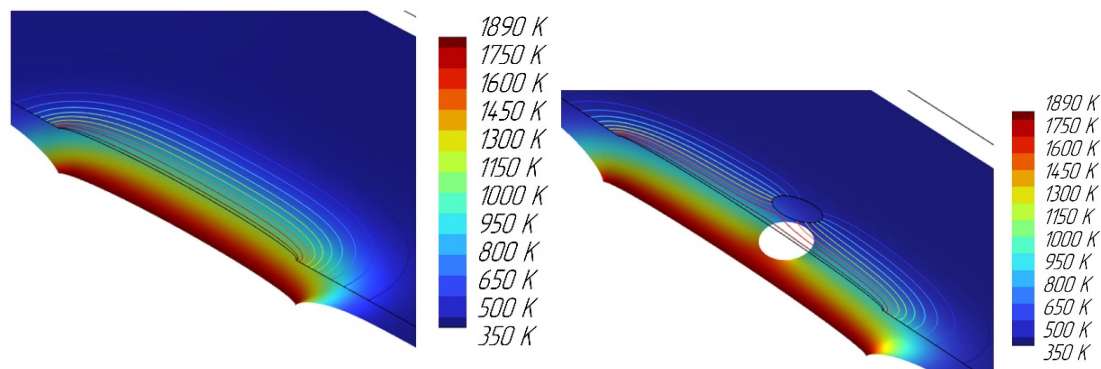


Рис. 2. Картины скалярного температурного поля, сформировавшегося в результате теплового действия лазерного излучения на материал: А) бездефектный металлический образец; Б) металлический образец с круглой порой в приповерхностном слое

Fig. 2. Pictures of the scalar temperature field in the sample. The temperature field was formed as a result of the thermal action of laser radiation: А) a defect-free metal sample; В) a metal sample with a round pore in the near-surface layer

При анализе процесса полного/частичного залечивания поры важно учитывать не только абсолютную температуру материала в окрестности поры, но и разность температур в верхней и нижней части поры  $\Delta T_1 = T_1 - T_2$ . Поэтому по результатам компьютерного моделирования были построены зависимости разности температур  $\Delta T_1$  от диаметра поры для разных расстояний от нагреваемой поверхности до поры (рисунок 3). С увеличением диаметра поры  $\Delta T_1$  растет, при этом характер поведения графиков одинаков для всего исследованного диапазона глубин залегания пор. При сравнительно малых размерах пор (диаметр  $d$  до 500 нм) зависимости можно считать линейными (рисунок 3 А).

При дальнейшем росте диаметра пор зависимости имеют нелинейный характер. Скорость роста  $\Delta T_1$  с увеличением диаметра пор снижается, причем тем быстрее, чем дальше удалена пора от нагреваемой поверхности (рис. 3).

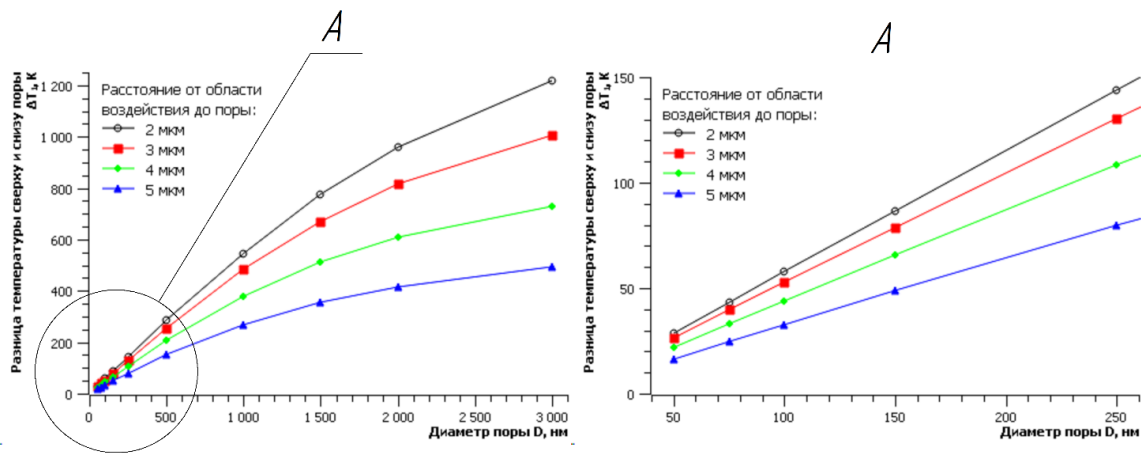


Рис. 3. Зависимости разности температур в верхней и нижней части поры  $\Delta T_1 = T_1 - T_2$  от диаметра поры. Зависимости построены для четырёх разных расстояний от нагреваемой поверхности до поры: 2 мкм, 3 мкм, 4 мкм, 5 мкм

Fig. 3. Dependences of the temperature difference in the upper and lower parts of the pore  $\Delta T_1 = T_1 - T_2$  on the pore diameter. The dependences are constructed for four different distances from the heated surface to the pore: 2 micrometers, 3 micrometers, 4 micrometers, 5 micrometers

Кроме того, по мере удаления поры от области воздействия газоплазменного облака разница температур между её верхней и нижней частями значительно снижается. Таким образом, селективная лазерная обработка оказывается эффективной только для тонкого приповерхностного слоя образца. Этот эффект был обнаружен экспериментально [3, 6, 7, 8, 9, 10, 14] и является подтверждением корректности описанных выше рассуждений.

Отметим, что величина  $\Delta T_1 = T_1 - T_2$  существенно влияет на характер залечивания. Если  $\Delta T_1 \rightarrow 0$ , то система поры (сплав, окружающий пору) обладает однородным сопротивлением деформации. При этом в области избыточного давления нет «слабого места» (округлая форма поры может выдерживать значительные механические нагрузки), и деформация практически не происходит, так как напряжение передаётся остальному материалу образца. Процесс залечивания поры во время селективной лазерной обработки поверхности наиболее вероятен при нагреве материала и наличии значительного температурного градиента в области поры [21, 22, 23, 24, 25]. В случае, если  $\Delta T_1 \rightarrow T_{melt}$ , процесс залечивания поры будет наиболее эффективным. Процесс деформации и залечивания поры в условиях селективной лазерной обработки может быть реализован за короткий промежуток времени существования лазерной плазмы (100 нс – 1 мкс).

Для анализа полученных результатов были проведены аналогичные расчеты для бездефектного металлического образца. На рисунке 4 сплошными линиями приведены зависимости разности температур на глубинах, соответствующих верхнему и нижнему краю поры в образце, содержащем объёмный дефект,  $\Delta T_2 = T_3 - T_4$  для четырёх разных расстояний от нагреваемой поверхности до верхней точки: 2 мкм, 3 мкм, 4 мкм, 5 мкм (см. рис. 1). Несмотря на то, что графики зависимости  $\Delta T_2(d)$  описываются теми же закономерностями, что и  $\Delta T_1(d)$ , очевидно, что  $\Delta T_2$  нарастает существенно быстрее, чем  $\Delta T_1$ . Поэтому для анализа процесса селективного залечивания поры важно знать, насколько внедрение поры повышает нагрев материала, расположенного перед ней, по сравнению с бездефектным образцом. Количественно это можно оценить, определив разность  $\Delta = \Delta T_1 - \Delta T_2$  как функцию линейного размера поры.

На рисунке 4 пунктирными линиями проиллюстрированы зависимости  $\Delta(d)$  при различных глубинах залегания поры. Из анализа зависимостей, приведенных на рисунках 2 и 3, следует, что зависимость  $\Delta = \Delta(d)$  практически выходит на насыщение при достижении пор некоторого критического размера  $d_{cr} \sim 2-2,5$  мкм. Таким образом, естественно предположить, что наиболее благоприятные условия для селективного залечивания будут наблюдаться для пор с диаметрами  $d \leq d_{cr}$ , расположенных близко к поверхности, нагреваемой ультракоротким лазерным импульсом.

С силовой и энергетической точки зрения эффективность залечивания идеальной поры определяется как тепловым полем, так и размером дефекта [15, 21, 22, 23, 24, 25]. С точки зрения тепловых процессов максимальная скорость роста  $\Delta T_1(d)$  по мере увеличения диаметров пор наблюдается для пор малого размера ( $d < 500$  нм). Поэтому для них процесс залечивания должен протекать эффективнее. Кроме того, с точки зрения механики для залечивания больших пор нужны большие энергии и плотности мощности лазерного импульса. Отметим также, что в реальной ситуации необходимо учитывать газовую среду внутри поры, которая должна затруднять полное её залечивание.

Полученные результаты хорошо коррелируют с экспериментальными данными. В частности, для титановых сплавов ВТ9 и ВТ18у максимальное увеличение микротвердости может достигать 30-40 %, в то время как нанотвердость увеличивается до четырех раз [6, 7].

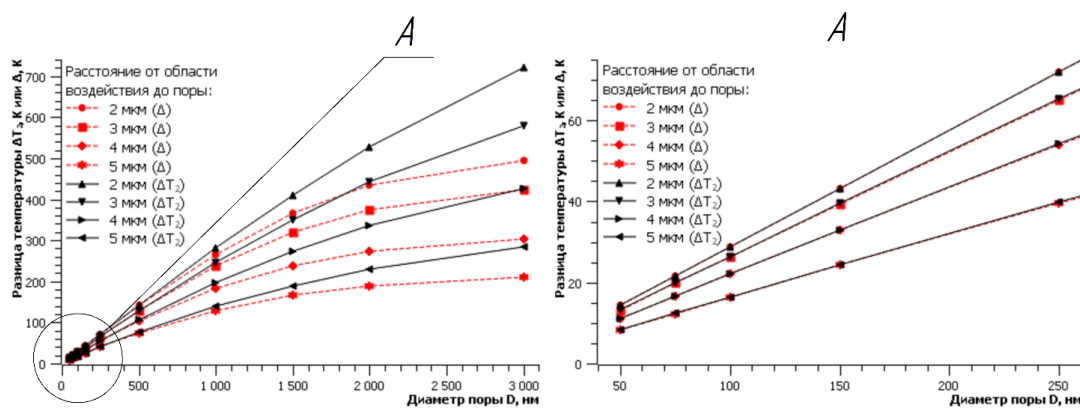


Рис. 4. Сплошными линиями показаны зависимости разности температур  $\Delta T_2 = T_3 - T_4$ . Зависимости построены для четырёх разных расстояний от нагреваемой поверхности до поры: 2 мкм, 3 мкм, 4 мкм, 5 мкм. Пунктирными линиями показаны зависимости  $\Delta = \Delta T_1 - \Delta T_2$

Fig. 4. Solid lines show the dependences of the temperature difference  $\Delta T_2 = T_3 - T_4$ . The dependences are constructed for four different distances from the heated surface to the pore: 2 micrometers, 3 micrometers, 4 micrometers, 5 micrometers.

The dotted lines show the dependencies  $\Delta = \Delta T_1 - \Delta T_2$

Отметим также, что селективное залечивание дефектов (пор, трещин и других концентраторов механических напряжений) сопровождается увеличением пластических характеристик и стойкости к растрескиванию при локальных нагружениях.

**4. Выводы.** 1. Теоретически рассмотрены специфика прогрева материала в окрестности пор разного диаметра, расположенных вблизи поверхности подвергаемой сверхбыстрому нагреву. Установлены зависимости нагрева материала над порой и под порой для различных расстояний от нагреваемой поверхности до поры.

2. В случае сверхбыстрого лазерного прогрева идеальная пора, расположенная вблизи поверхности, обеспечивает более быстрый прогрев материала сверху и более медленный прогрев материала, расположенного снизу. Это приводит к формированию избыточной разности температур  $\Delta$  по сравнению с бездефектным материалом. Абсолютная величина  $\Delta$  выходит на насыщение при расстоянии от лазерно-нагреваемой поверхности до поры в 2-3 мкм.

3. Показано, что с точки зрения распределения теплового поля наиболее благоприятные условия для залечивания пор реализуются для пор малого диаметра (<500 нм), расположенных вблизи поверхности подвергаемой лазерному облучению. В условиях одновременного ударного сжатия это обеспечивает благоприятные условия для заполнения поры нагретым материалом.

#### Список литературы

1. Майоров В.С. Лазерное упрочнение металлов. В кн.: Лазерные технологии обработки материалов: современные проблемы фундаментальных исследований и прикладных разработок / под ред. В.Я. Панченко. М.: Физматлит; 2009. 664 с.
2. Костюк Г.И., Руденко Н.В. Лазерное упрочнение легированных сталей. *Авиационно-космическая техника и технология*. 2012;2(89):23–27.
3. Safronov I., Ushakov A. Effect of simultaneous improvement of plasticity and microhardness of an amorphous-nanocrystalline material based on Co, as a result of laser processing of nanosecond duration. *Elsevier Ltd.: Materials Today: Proceedings*. 2020;38:1516–1520.DOI: 10.1016/j.matpr.2020.08.141
4. Duradji V.N., Kaputkin D.E., Duradji A. Aluminum Treatment in the Electrolytic Plasma during the Anodic Process. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2017;10(3):81–84.DOI: 10.25103/jestr.103.11
5. Duradji V.N.; Kaputkin D.E. and Duradji A.Y. Electrolyte-Plasma Modification of Surface of Ti-Based Alloy during Electrohydrodynamic Mode of Anodic Process. *Journal of The Electrochemical Society*. 2017;164(9):226–232.doi:10.1149/2.0451709jes
6. Симонов Ю.В., Ушаков И.В. Механические свойства поверхностных структур титанового сплава ВТ9 после многократной локальной обработки наносекундными лазерными импульсами. *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*. 2020;2:19–35.
7. Ushakov I., Simonov Y. Formation of surface properties of vt18u titanium alloy by laser pulse treatment. *Materials Today: Proceedings*. 2021;19:2051.DOI:10.1016/j.matpr.2019.07.072
8. Dunn A., Carstensen J.V., Wlodarczyk K., Hansen E.B. Nanosecond laser texturing for high friction applications. *Optics and Lasers in Engineering*. 2014;62:9–16.DOI:10.1016/j.optlaseng.2014.05.003
9. Netprasert O., Saetang V., Dumkum Ch. Surface Hardening of AISI 420 Stainless Steel by Using a Nanosecond Pulse Laser. *Materials Science Forum*. 2018;911:44–48.DOI:10.4028/www.scientific.net/MSF.911.44

10. Casalino G., Moradi M., Moghadam M., Khorram A. Experimental and Numerical Study of AISI 4130 Steel Surface Hardening by Pulsed Nd:YAG Laser. *Materials*. 2019;12:31–36.DOI:10.3390/ma12193136
11. Andrukhova O.V., Ovechkin S.V., Andrukhova T.V., Zhukovskaya T.M., Kustov S.L., Nauman L.V. Study of the effect of coherent radiation on the properties of aramid fibers and fabrics. *Fundamental'nye Problemy Sovremennogo Materialovedeniya*. 2022;19(1):125–131.
12. Овечкин С.В., Ананьин С.В., Андрухова О.В., Попов И.А. Влияние когерентного излучения на прочность арамидных волокон и тканей. *Ползуновский вестник*. 2021;2:233–238.
13. Чаус А.С., Максименко А.В., Федюченко Н.Н., Чаплович Л., Мышковец В.Н. Формирование структуры быстрорежущей стали при лазерном оплавлении поверхности. *Физика металлов и металловедение*. 2019;120(3):291–300.
14. Maharjan N., Wu N., Zhou W. Hardening Efficiency and Microstructural Changes during Laser Surface Hardening of 50CrMo4 Steel. *Metals*. 2021;11:2015.https://doi.org/10.3390/met11122015
15. Ushakov I.V., Safronov I.S., Oshorov A.D., Zhiqiang W., Muromtsev D.Yu. Physics of the effect of high-temperature pulse heating on defects in the surface layer of a metal alloy. *Metallurgist*. 2023;7:74–79.DOI:10.1007/s11015-023-01588-z
16. Wang Z., Ushakov I.V., Safronov I.S., Zuo, J. Physical Mechanism of Selective Healing of Nanopores in Condensed Matter under the Influence of Laser Irradiation and Plasma. *Nanomaterials*. 2024;14(2):139–153.https://doi.org/10.3390/nano14020139
17. Kaputkin D.E. Application of Focused Optic Irradiation for Surface Treatment of Commercial Steels. *Materials Science Forum*. 2003;426–432:1285–1288.DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.426-432.1285
18. Liu B., Wang Ch. Numerical simulation for the evolution in surface morphology of titanium alloy by nanosecond pulsed laser ablation. *Materials Chemistry and Physics*. 2024;315:128997.DOI:10.1016/j.matchemphys.2024.128997
19. Yang X., Kuang X. Influence of Molten Pool Flow and Evaporation on the Surface Morphology During Laser Micro-Texture Processing. *Metals and Materials International*. 2024;30(6):1646–1658.DOI:10.1007/s12540-023-01588-3
20. Андрухова О.В., Сафронов И.С., Ушаков А.И. Физические процессы в поверхностном слое конденсированного материала при воздействии наносекундных лазерных импульсов. *Материалы Международной научно-технической конференции «Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии»*. 2024;104–106.
21. Qiao J., Ushakov I.V., Safronov I.S., Oshorov A.D., Wang Z., Andrukhova O.V., Rychkova O.V. Physical Mechanism of Nanocrystalline Composite Deformation Responsible for Fracture Plastic Nature at Cryogenic Temperatures. *Nanomaterials*. 2024;14(8):723.https://doi.org/10.3390/nano14080723
22. Kan Y., Liu H., Zhang S. H., Zhang L. W. and other authors Probabilistic pore healing model for prediction of relative density in heat treatment. *Materials Research Innovations*. 2014;18(S4):1026–1030.DOI:10.1179/1432891714Z.000000000819
23. Chen J., Chandrashekhara K., Mahimkar C., Simon Lekakh and other authors Study of void closure in hot radial forging process using 3D nonlinear finite element analysis. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2012;62:1001–1011.DOI:10.1007/s00170-011-3876-3
24. Zhang X.-X., Cui Z., Chen W., Li Y. A criterion for void closure in large ingots during hot forging. *Journal of Materials Processing Technology*. 2009;209(4):1950–1959.DOI:10.1016/j.jmatprotec.2008.04.051
25. Бокштейн Б., Епишин А., Светлов И., Есин В., Родин А., Линк Т. Рост и залечивание пор в монокристаллах жаропрочных сплавов на никелевой основе. *Журнал функциональных материалов*. 2006;1(5).

#### References

1. Majorov V.S. Lazernoe uprochnenie metallov. V kn.: Lazernye tekhnologii obrabotki materialov: sovremennyye problemy fundamental'nyh issledovaniy i prikladnyh razrabotok / pod red. V.Ya. Panchenko. M.: Fizmatlit; 2009. 664 c.
2. Kostyuk G.I., Rudenko N.V. Laser hardening of alloy steels. *Aerospace engineering and technology*. 2012;2(89):23–27. (In Russian)
3. Safronov I., Ushakov A. Effect of simultaneous improvement of plasticity and microhardness of an amorphous-nanocrystalline material based on Co, as a result of laser processing of nanosecond duration. *Elsevier Ltd.: Materials Today: Proceedings*. 2020;38:1516–1520.DOI: 10.1016/j.matpr.2020.08.141
4. Duradji V.N., Kaputkin D.E., Duradji A. Aluminum Treatment in the Electrolytic Plasma during the Anodic Process. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2017;10(3):81–84.DOI: 10.25103/jestr.103.11
5. Duradji V.N.; Kaputkin D.E. and Duradji A.Y. Electrolyte-Plasma Modification of Surface of Ti-Based Alloy during Electrohydrodynamic Mode of Anodic Process. *Journal of The Electrochemical Society*. 2017;164(9):226–232.doi:10.1149/2.0451709jes
6. Simonov YuV., Ushakov IV. Mechanical properties of surface structures of titanium alloy vt9 after repeated local treatment with nanosecond laser pulses. *Bulletin of the Moscow State Regional University. Series: Physics-Mathematics*. 2020;2:19–35. (In Russian)
7. Ushakov I., Simonov Y. Formation of surface properties of vt18u titanium alloy by laser pulse treatment. *Materials Today: Proceedings*. 2021;19:2051.DOI:10.1016/j.matpr.2019.07.072
8. Dunn A., Carstensen J.V., Wlodarczyk K., Hansen E.B. Nanosecond laser texturing for high friction applications. *Optics and Lasers in Engineering*. 2014;62:9–16.DOI:10.1016/j.optlaseng.2014.05.003

9. Netprasert O., Saetang V., Dumkum Ch. Surface Hardening of AISI 420 Stainless Steel by Using a Nanosecond Pulse Laser. *Materials Science Forum*. 2018;911:44–48. DOI:10.4028/www.scientific.net/MSF.911.44
10. Casalino G., Moradi M., Moghadam M., Khorram A. Experimental and Numerical Study of AISI 4130 Steel Surface Hardening by Pulsed Nd:YAG Laser. *Materials*. 2019;12:31–36. DOI:10.3390/ma12193136
11. Andrukhoва О.В., Овечкин С.В., Андрухова Т.В., Жукотская Т.М., Кустов С.Л., Науман Л.В. Study of the effect of coherent radiation on the properties of aramid fibers and fabrics. *Fundamental'nye Problemy Sovremennogo Materialovedeniya*. 2022;19(1):125–131.
12. Овечкин С.В., Анан'ин С.В., Андрухова О.В., Попов И.А. Влияние когерентного излучения на прочность арамидных волокон и тканей. *Polzunovskij vestnik*. 2021;2:233–238.
13. Chaus AS., Maksimenko AV., Fedorenko NN., Chaplovich L., Myshkovets VN. Formation of the structure of high-speed steel during laser surface reflow. *Metal physics and metallurgy*. 2019;120(3):291–300. (In Russian)
14. Maharjan N., Wu N., Zhou, W. Hardening Efficiency and Microstructural Changes during Laser Surface Hardening of 50CrMo4 Steel. *Metals*. 2021;11:2015. <https://doi.org/10.3390/met11122015>
15. Ushakov IV., Safronov IS., Oshorov AD., Zhiqiang W., Muromtsev DYU. Physics of the effect of high-temperature pulse heating on defects in the surface layer of a metal alloy. *Metallurgist*. 2023;7:74–79. DOI:10.1007/s11015-023-01588-z
16. Wang Z., Ushakov IV., Safronov IS., Zuo, J. Physical Mechanism of Selective Healing of Nanopores in Condensed Matter under the Influence of Laser Irradiation and Plasma. *Nanomaterials*. 2024;14(2):139–153. <https://doi.org/10.3390/nano14020139>
17. Kaputkin DE. Application of Focused Optic Irradiation for Surface Treatment of Commercial Steels. *Materials Science Forum*. 2003;426-432:1285–1288. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.426-432.1285
18. Liu B., Wang Ch. Numerical simulation for the evolution in surface morphology of titanium alloy by nanosecond pulsed laser ablation. *Materials Chemistry and Physics*. 2024;315:128997. DOI:10.1016/j.matchemphys.2024.128997
19. Yang X., Kuang X. Influence of Molten Pool Flow and Evaporation on the Surface Morphology During Laser Micro-Texture Processing. *Metals and Materials International*. 2024;30(6):1646–1658. DOI:10.1007/s12540-023-01588-3
20. Andrukhoва О.В., Сафронов И.С., Ушаков А.И. Physical processes in the surface layer of condensed material under the influence of nanosecond laser pulses. *Materials of the International Scientific and Technical Conference "Materials, equipment and resource-saving technologies"*. 2024;104–106. (In Russian)
21. Qiao J., Ushakov IV., Safronov IS., Oshorov AD., Wang Z., Andrukhoва О.В., Rychkova О.В. Physical Mechanism of Nanocrystalline Composite Deformation Responsible for Fracture Plastic Nature at Cryogenic Temperatures. *Nanomaterials*. 2024;14(8):723. <https://doi.org/10.3390/nano14080723>
22. Kan Y., Liu H., Zhang SH., Zhang LW. and other authors Probabilistic pore healing model for prediction of relative density in heat treatment. *Materials Research Innovations*. 2014;18(S4):1026–1030. DOI:10.1179/1432891714Z.000000000819
23. Chen J., Chandrashekhara K., Mahimkar C., Simon Lekakh and other authors Study of void closure in hot radial forging process using 3D nonlinear finite element analysis. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2012;62:1001–1011. DOI:10.1007/s00170-011-3876-3
24. Zhang X.-X., Cui Z., Chen W., Li Y. A criterion for void closure in large ingots during hot forging. *Journal of Materials Processing Technology*. 2009;209(4):1950–1959. DOI:10.1016/j.jmatprotec.2008.04.051
25. Bokshetjn B., Epishin A., Svetlov I., Esin V., Rodin A., Link T. Rost i zalechivanie por v monokristallax zharoprochny'x splavov na nikelevoj osnove. *Zhurnal funkcional'ny'x materialov*. 2006;1(5).

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.07.2024

Received July 10, 2024

Поступила после рецензирования 23.08.2024

Revised August 23, 2024

Принята к публикации 26.08.2024

Accepted August 26, 2024

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Сафронов Иван Сергеевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Россия

**Ушаков Александр Иванович** – магистрант, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Россия

**Андрухова Ольга Витальевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Ivan S. Safronov** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics, National Research Technological University "MISIS", Moscow, Russia


**Alexander I. Ushakov** – Master's Student, National Research Technological University "MISIS", Moscow, Russia

**Olga V. Andrukhoва** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Physics, National Research Technological University "MISIS", Moscow, Russia

[К содержанию](#)



## Физика деформирования и разрушения кристалла исландского шпата при выделении энергии в объеме образца

Ушаков И. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»,

Россия, 119049, г. Москва, Ленинский проспект, д. 4, стр. 1

[ushakoviv@mail.ru](mailto:ushakoviv@mail.ru)

**Аннотация.** Физика деформирования кристаллов исландского шпата в условиях одновременного выделения энергии лазерного импульса в двух близкорасположенных локальных участках в объеме образца, обусловлена спецификой сверхбыстрого локального нагрева и формирования поля высоких механических напряжений сложной геометрии. В кристаллах исландского шпата, деформирующихся при нормальных условиях исключительно двойникованием, в условиях возникновения в объеме образца поля механических напряжений сложной геометрии, возможно трансляционное скольжение. При воздействии самофокусированного лазерного излучения на кристалл исландского шпата удастся сформировать уникальные структуры, такие как внутренние локальные выжженные каналы и каналы Розе второго рода с физически чистыми поверхностями, исследование физических свойств которых является одной из перспективных задач физики конденсированного состояния.

**Ключевые слова:** двойникование, исландский шпат, канал Розе, физика конденсированного состояния

**Для цитирования:** Ушаков И. В. 2024. Физика деформирования и разрушения кристалла исландского шпата при выделении энергии в объеме образца. *Прикладная математика & Физика*, 56(3): 234–240.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-234-240

Original Research

## Physics of Deformation and Destruction of Iceland Spar Crystal During the Release of Energy in the Sample Volume

Ivan V. Ushakov 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

National Research Technological University "MISIS",

4 building 1 Leninskiy Ave, Moscow, 119049, Russia

[ushakoviv@mail.ru](mailto:ushakoviv@mail.ru)

**Abstract.** The physics of deformation for Iceland spar crystals under conditions of simultaneous release of laser pulse energy in two closely spaced local areas in the sample volume is explained by specifics of ultrafast local heating and the formation of a field of high mechanical stresses of complex geometry. Iceland spar crystals may deform exclusively by twinning under normal condition, but translational sliding is possible in them under conditions of a mechanical stress field formation in the sample volume. Under the influence of self-focused laser radiation on the Iceland spar crystal, it is possible to form unique structures such as internal local burnt channels and Rose channels of the second kind with physically clean surfaces, the investigation of the physical properties of which is one of the promising tasks of condensed matter physics.

**Keywords:** twinning, Iceland spar, Rose channels, condensed matter physics

**For citation:** Ushakov I. V. 2024. Physics of Deformation and Destruction of Iceland Spar Crystal During the Release of Energy in the Sample Volume. *Applied Mathematics & Physics*, 56(3): 234–240. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-234-240

**1. Введение.** Теоретическое и экспериментальное исследование воздействия самофокусированного импульсного лазерного излучения на оптически прозрачный кристалл исландского шпата, который является двулучепреломляющим и деформируется при нормальных условиях исключительно двойникованием, является актуальным направлением физики конденсированного состояния [1, 2, 3, 4]. За счёт уникального комплекса физических свойств исландского шпата существует возможность исследовать закономерности роста двойников, в том числе упругих двойников, в областях самофокусирования обыкновенного и необыкновенного лазерных лучей в объеме образца. При пересечении двойников, развивающихся в плоскостях (110) и (101), (110) и (011), (101) и (011) возможно возникновение упругого канала Розе второго рода по направлениям  $[1\bar{1}1]$ ,  $[1\bar{1}\bar{1}]$ ,  $[11\bar{1}]$ . Отметим, что исследование каналов Розе

второго рода имеет особое значение для физики конденсированного состояния, так как данный канал, располагаясь целиком в объеме кристалла, имеет физически чистые поверхности.

В зависимости от характеристик лазерного импульса выделение лазерной энергии возможно на поглощающем включении, в локальной области с высоким содержанием примесных атомов, а также в локальной области самофокусирования/фокусирования за счёт многофотонной ионизации или электронной лавины [5, 6, 7]. Вне зависимости от того, что явилось причиной нелинейного роста поглощения лазерного излучения в исходно прозрачном материале, вторая стадия поглощения лазерного импульса приводит к резкому нагреву материала, формированию лазерной плазмы и ударной волны [6, 8, 9, 10]. При этом материал в объеме монокристалла исландского шпата на короткое время переводится в экстремальное состояние, что может инициировать деформирование и разрушение не только по механизму двойникования [1, 11, 12, 13], но и за счёт механизма трансляционного скольжения.

Таким образом, целью данной работы является решение одной из актуальных задач физики конденсированного состояния, связанной с исследованием физических процессов в монокристалле исландского шпата в условиях сверхбыстрого нагрева двух микромасштабных областей в объеме образца самофокусированным лазерным излучением.

**2. Методика эксперимента.** Экспериментальные исследования проводили на монокристаллах исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ), количество примесей в которых не превышало 10-6 вес. %. Из исходных крупных монокристаллов по плоскостям спайности выкалывали образцы размером 40x40x40 мм. Затем одну поверхность кристалла ориентировали таким образом, чтобы она была перпендикулярна направлению распространения лазерного излучения. Использовали оптический квантовый генератор ГОС-1001,  $\lambda=1060$  нм,  $\tau \approx 1$  мс, длительность импульса на полувысоте 0,1 мс [6]. Оптически квантовый генератор работает в режиме хаотической пиковой генерации. Энергию импульсов варьировали от  $\approx 25$  до 900 Дж.

**3. Экспериментальные и теоретические результаты.** 1. Специфика деформирования кристаллов исландского шпата при выделении энергии лазерного импульса в объеме материала.

Кинетика деформирования и разрушения кристалла исландского шпата, в условиях выделения в его объеме энергии лазерного импульса, зависит от ряда факторов. Для кристаллов с высоким содержанием примесей основной механизм разрушения связан с оптическим пробоем на поглощающих включениях. В этом случае возможно деформирование, разрушение и даже локальное плавление. В случае оптически более совершенных кристаллов, разрушение, как правило, связано с механизмом электронной лавины или многофотонной ионизации. В этом случае происходит быстрый нагрев и испарение материала в области оптического пробоя. Формирование в объеме кристалла газоплазменного облака приводит к возникновению высоких механических напряжений и механическому разрушению кристалла.

В случае, если плотность мощности лазерного излучения достаточно высока, меняются оптические свойства среды и происходит самофокусирование лазерного излучения. Это приводит к тому, что плотность мощности лазерного импульса возрастает до высоких значений. Существует диапазон плотности мощности лазерного излучения, когда облучение кристалла приводит к самофокусированию излучения без оптического пробоя в области самофокусировки. В этом случае возможно прохождение самософокусированного излучения сквозь кристалл с формированием выжженных каналов на пути обыкновенного и необыкновенного лучей. Инициирование оптического пробоя возможно в случае нахождения на пути распространения самофокусированного лазерного излучения поглощающего включения, поверхности кристалла или другой оптической неоднородности. Следовательно, в случае оптически совершенного кристалла исландского шпата самофокусированное лазерное излучение не повреждает материал в объеме кристалла, однако, оптической пробой и каналы выжженного материала формируются в месте выхода самофокусированного излучения из образца (оптическая прочность выходной грани кристалла всегда меньше объемной оптической прочности). В случае использования лазерных импульсов с энергией 400-900 Дж оптический пробой за счёт многофотонной ионизации формируется в объеме образца в областях самофокусировки обыкновенного и необыкновенного лучей. Расстояние между центрами развития оптического пробоя составляет  $\approx 1,5$  мм.

Исследовали кристаллы исландского шпата, разрушенные за счет оптического пробоя на поглощающих включениях, оптического пробоя на выходной поверхности, а также за счёт самофокусирования лазерного излучения. Части кристалла после разрушения были подвергнуты травлению и исследованы методами оптической микроскопии. Обнаружено, что в случае оптического пробоя самофокусированным излучением возможно двойникование по плоскостям  $\{02\bar{2}1\}$  и трансляционное скольжение по плоскостям  $\{0\bar{1}0\}$  (рис. 1а). Обнаружены многочисленные залеченные каналы Розе второго рода. С учетом характерных скоростей роста двойников можно сделать вывод, что общее время, необходимое для формирования указанных микроструктур составляет 0,1-1 мс, что хорошо согласуется с временем существования газоплазменного облака. В случае оптического пробоя на поверхности или на поглощающем включении обнаружено только двойникование в системах  $\{011\}$  (рис. 1б).

В случае достаточно высокой энергии лазерного импульса оптический пробой сопровождается формированием лазерной плазмы (газоплазменного облака). Образующееся плазменное облако непрозрачно

для лазерного излучения. Лазерное излучение поглощается плазмой, при этом материал за плазменным факелом экранируется от лазерного излучения [6, 8, 9]. В случае оптического пробоя мощным лазерным импульсом, характеристики плазмы существенно зависят только от плотности мощности лазерного импульса, его энергии и геометрического распределения мощности излучения «фокальной» области. Однако эксперимент показывает, что особенности деформирования и разрушения кристаллов исландского шпата существенно зависят от геометрии области, в которой инициируется оптический пробой и реализуется первая стадия нагрева материала. Следовательно, возможность инициирования двойникования по плоскостям  $\{0\bar{2}21\}$  и трансляционное скольжение по плоскостям  $\{010\}$  зависят от геометрии зоны первоначального нагрева и оптического пробоя.

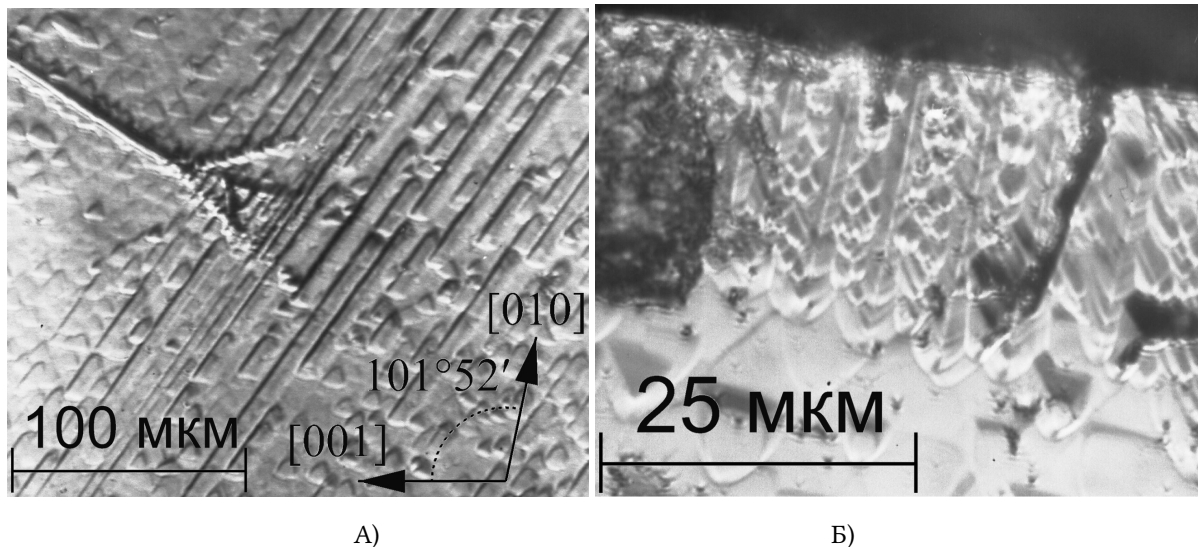


Рис. 1. А) Элементы двойникования и скольжения в образце исландского шпата, разрушенного после оптического пробоя самофокусированным излучением в объеме материала. Б) Двойникование в системах /011/ при оптическом пробое на оптической неоднородности

Fig. 1. A) Elements of twinning and sliding in a sample of Iceland spar destroyed after optical breakdown by self-focused laser irradiation in the volume of the material. B) Twinning in /011/ systems after optical breakdown on optical inhomogeneity

Следовательно, в условиях оптического пробоя в двух близко расположенных областях самофокусированным лазерным излучением возникают сложные напряженные состояния, способные привести к деформированию материала по любым возможным системам двойникования и трансляционного скольжения.

2. Специфика нагрева и деформирования материала в области выделения энергии лазерного импульса. Рассмотрим нагрев локальной области в объеме кристалла исландского шпата самофокусированным излучением. Для решения задачи был использован метод конечных элементов, который реализован на основе свободного программного обеспечения: FreeCAD, версия 0.21.1. В качестве зоны оптического пробоя рассматривали область в объеме кристалла, в которой происходит самофокусирование и инициируется оптический пробой. Рассмотрим специфику нагрева и деформирования области самофокусирования прилегающей к теоретической точке геометрического фокуса (реальная ширина канала распространения самосфокусированного излучения для данных условий существенно больше, не может быть меньше нескольких микрометров). Для решения использовали метод конечных элементов [14]. Распространение тепла в твердом материале без внутренних источников тепла описывали следующим выражением:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla T), \quad (1)$$

где  $T$  [К] – температура,  $t$  [с] – время,  $\lambda$  [Вт/(м·К)] – коэффициент теплопроводности,  $c$  [Дж/(кг·К)] – удельная теплоемкость,  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – плотность. Для решения задачи необходимо учитывать уравнение связи напряженного и деформированного состояния. Так как в данном расчёте не присутствуют пластические деформации, то использовали обобщённый закон Гука:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{av} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{av} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{av} \end{pmatrix} = 2G \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{av} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{av} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \sigma_z - \varepsilon_{av} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – нормальное механическое напряжение, Па;  $\tau$  – касательное механическое напряжение, Па;  $\sigma_{av}$  – среднее механическое напряжение, Па;  $G$  – модуль сдвига, Па;  $\varepsilon$  – относительная (инженерная) деформация;  $\varepsilon_{av}$  – средняя относительная (инженерная) деформация. Среднее механическое напряжение находится по формуле 3.

$$\sigma_{av.} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}. \quad (3)$$

Модуль сдвига (пренебрегали анизотропией свойств) для однородного и изотропного материала определяли по формуле 4

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга), Па;  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Между средними напряжениями и средними деформациями действует следующее соотношение (формула 5):

$$\varepsilon_{av.} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \quad (5)$$

На рисунке 2 схематично изображена исследуемая область и сетка метода конечных элементов.

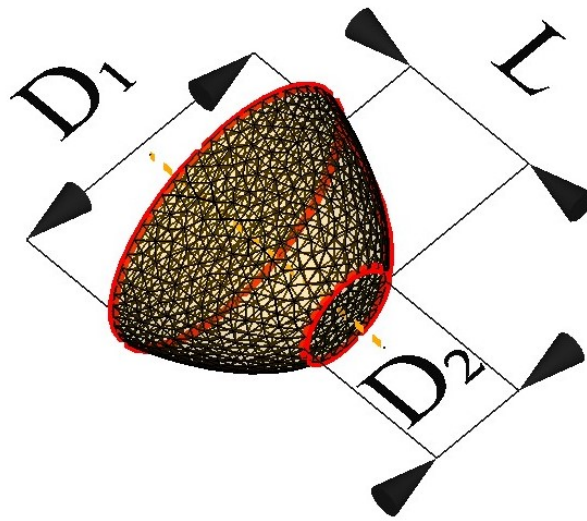


Рис. 3. А) Исоповерхности в анализируемой области в начальной стадии оптического пробоя. Б) Специфика деформирования неравномерно нагретой области. На рисунке использован масштабный коэффициент  $k=100$ .

$R$  – радиус дуги окружности, описывающей сечение изогнувшейся при термическом расширении входной поверхности.  $L_1$  и  $L_2$  показывают термическое расширение нагретой области в направлении перпендикулярном оси лазерного луча

Fig. 3. А) Isosurfaces in the analyzed area at the initial stage of optical breakdown. Б) The specifics of deformation of an unevenly heated area. The figure uses a scale factor of  $k=100$ .  $R$  is the radius of the arc of the circle describing the section of the input surface bent during thermal expansion.  $L_1$  and  $L_2$  thermal expansion of the heated area in the direction perpendicular to the axis of the laser beam

В результате инициирования оптического пробоя происходит выделение энергии лазерного излучения, которое первоначально приводит к нагреву кристалла в области, показанной на рисунке 2 (по мере развития оптического пробоя будет формироваться газоплазменное облако). Специфика прогрева анализируемой области визуализирована с использованием изоповерхностей (рис. 3а). Следствием прогрева области оптического пробоя происходит изменение/увеличение её геометрических размеров. Нагрев области происходит неравномерно, поэтому геометрия области нагрева расширяется неравномерно и искажается. Специфика изменения размера и геометрических характеристик области нагрева показана на рисунке 2б, при этом анизотропией свойств монокристалла исландского шпата при расчёте пренебрегали, а в целях визуализации термического расширения использован масштабный коэффициент, равный 100.

Таким образом, в ходе нагрева входная поверхность зоны оптического пробоя изогнулась, что на сечении даёт дугу окружности радиуса  $R$ . Увеличение радиуса входной поверхности ( $L_1$ ) больше увеличения радиусов поверхностей (например,  $L_2$ ), получаемых сечением анализируемой области в плоскостях перпендикулярных направлению распространения лазерного излучения.

Отметим, что исследование явлений деформирования и разрушения при выделении энергии лазерного импульса в кристалле исландского шпата является актуальным для физики конденсированного состояния. Высвобождение энергии лазерного импульса, имеющего сверхвысокую плотность мощности в объеме конденсированного вещества, позволяет экспериментально исследовать эволюцию структуры, дефектов, механизмов деформирования и разрушения в конденсированном веществе, находящемся в экстремальном состоянии. Кроме того, экспериментально показана возможность локального формирования двойников систем  $\{0221\}$ ,  $\{011\}$  (в том числе упругих), а также возможность формирования упругих каналов

Розе первого рода в объеме кристалла исландского шпата. Это говорит о возможности как выборочного создания микроструктур с заданными свойствами в объеме образца, так и о возможности управления процессами деформирования в кристаллах исландского шпата [15, 16], что является перспективной задачей физики конденсированного состояния.

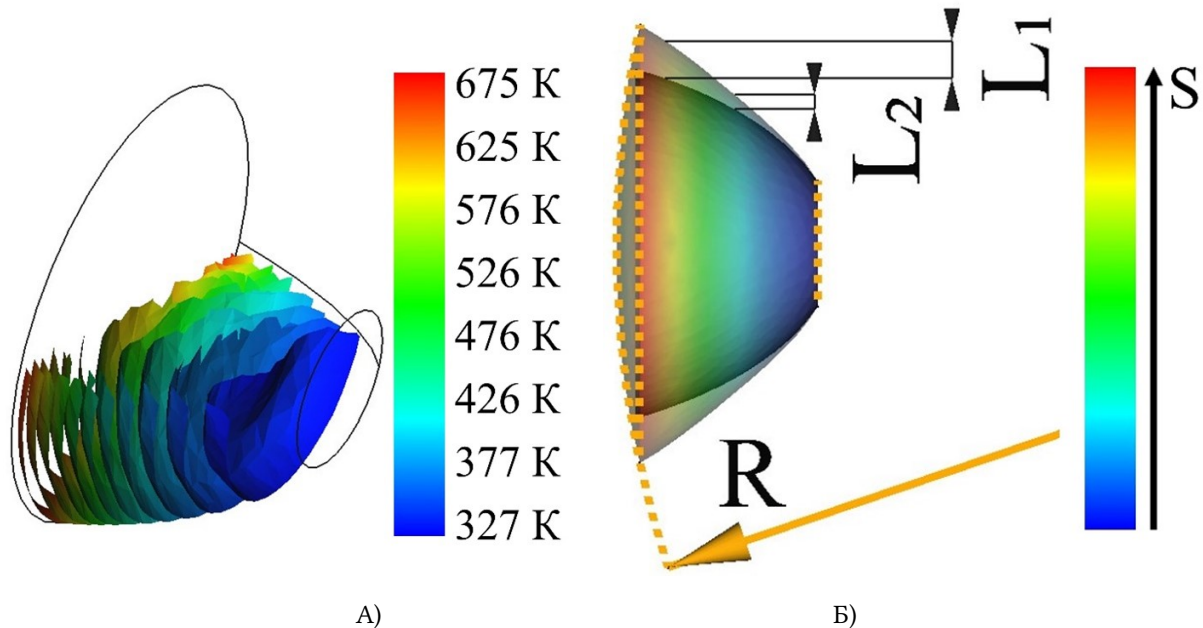


Рис. 2. Общий вид области инициирования оптического пробоя самофокусированным лазерным излучением, с сеткой метода конечных элементов.  $D_1 = 90$  мкм – диаметр окружности на входе области оптического пробоя,  $D_2 = 30$  мкм – выходная граница области оптического пробоя, инициированного самофокусированным излучением,  $L = 50$  мкм – длина области оптического пробоя

Fig. 2. General view of the optical breakdown area initiated by self-focused laser radiation, with a grid of the finite element method.  $D_1 = 90 \mu\text{m}$  is the diameter of the circle at the entrance of the optical breakdown area,  $D_2 = 30 \mu\text{m}$  is the output boundary of the optical breakdown area initiated by self-focused radiation,  $L = 50 \mu\text{m}$  is the length of the optical breakdown area

**4. Выводы.** 1. Физика деформирования кристаллов исландского шпата в условиях одновременного выделения энергии в двух близкорасположенных локальных участках в объеме образца, обусловлена спецификой локального нагрева и формированием поля высоких механических напряжений сложной геометрии. В кристаллах исландского шпата, деформирующихся при нормальных условиях исключительно двойникованием, в условиях возникновения в объеме образца поля механических напряжений сложной геометрии, возможно трансляционное скольжение.

2. На основе модели сверхбыстрого выделения энергии самофокусированного лазерного излучения в объеме кристалла исландского шпата выполнен расчет специфики нагрева и деформирования локальных областей. Показано, что системы, по которым может реализовываться двойникование определяются геометрией первоначально нагреваемой области.

3. В условиях воздействия самофокусированного лазерного излучения на кристалл исландского шпата удастся сформировать уникальные структуры, такие как внутренние локальные выжженные каналы и каналы Розе второго рода с физически чистыми поверхностями, исследование физических свойств которых является одной из перспективных задач физики конденсированного состояния.

#### Список литературы

1. Кукуй А.Л., Атабаев К.К., Матвеева О.П. Исландский шпат России. СПб.: СПбГУВК; 2009, 195 с.
2. Скоморовский В.И., Кушталь Г.И., Токарева Л.С. Исландский шпат и разработка интерференционно-поляризационных фильтров (ИПФ). *Солнечно-земная физика*. 2022;8(1):70-86; DOI: <https://doi.org/10.12737/stp-81202209>
3. Nefyodova I.V., Kamenskikh I. Hydrothermal synthesis and optical properties of calcite single crystals. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*. 2003;5(3):609-614.
4. Логунова М.Н., Кукуй А.Л. Особенности морфологии и образования двойников исландского шпата сибирской кальцитоносной провинции. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2016;10:236-241.
5. Ulian G., Valdre G. Study of the variation of the optical properties of calcite with applied stress, useful for specific rock and material mechanics. *Scientific Reports*. 2022;12:299; DOI: 10.1038/s41598-021-04471-6
6. Ushakov I.V. How a crack and the defect material in its neighborhood affect the radiation strength of transparent materials. *Journal of Optical Technology*. 2008;75(2):128-131; DOI: 10.1364/JOT.75.000128

7. Toytman I., Simanovskii D.M., Palanker D. Optical breakdown in transparent media with adjustable axial length and location. *Optics Express*. 2010;18(24):24688-98; DOI: 10.1103/PhysRevApplied.20.064035
8. Rudenko A., Moloney J.V., Polynkin P. Ionization clamping in ultrafast optical breakdown of transparent solids. *Physical review applied*. 2023;20(6); DOI: 10.1103/20.064035
9. Zhokhov P.A., Zheltikov A.M. Optical breakdown of solids by few-cycle laser pulses. *Scientific Reports*. 2018;8:1824; DOI:10.1038/s41598-017-18624-z
10. Berge L, Skupin S., Nuter R., Kasparian J., Wolf JP. Ultrashort filaments of light in weakly ionized, optically transparent media. *Reports on progress in physics*. 2008; 71:109801; DOI 10.1088/0034-4885/71/10/109801
11. Luo Ch., Yang X., Li J. Mechanical Properties of Single-Crystal Calcite and Their Temperature and Strain-Rate Effects. *Materials*. 2022;15(13):4613; DOI: 10.3390/ma15134613
12. Rybacki E., Evans B., Janssen C., et al. Influence of stress, temperature, and strain on calcite twins constrained by deformation experiments. *Tectonophysics*. 2013;601:20-36; DOI: 10.1016/j.tecto.2013.04.021
13. Schuster R., Habler G., Schafner E., et al. Intragranular deformation mechanisms in calcite deformed by high-pressure torsion at room temperature. *Mineralogy and Petrology*. 2020;114(2):105-118; DOI: 10.1007/s00710-019-00690-y
14. Lienhard, J.H., IV; Lienhard, J.H., V. A Heat Transfer Textbook. Cambridge. 2020. 761 p.
15. Ушаков И.В., Сафронов И.С., Ошоров А.Д. Физика залечивания нанопор в конденсированном веществе в условиях воздействия лазерного излучения и высокотемпературной плазмы. *Доклады академии наук высшей школы Российской Федерации*. 2024;62(1):7-18; <http://dx.doi.org/10.17212/1727-2769-2024-1-7-18>
16. Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. Лазерное управление процессами в твердом теле. *Успехи физических наук*. 1996;166(1):3-32.

#### References

1. 1. Kukuy AL., Atabaev KK., Matveeva OP. Islandskiy shpat Rossii (Island spar of Russia). Saint-Petersburg. 2009. 195 p. (In Russian)
2. 2. Skomorovsky VI., Kushtal GI., Tokareva LS. Iceland spar and birefringent filter (BF) development. *Solar-Terrestrial Physics*. 2022;8(1):70-86; DOI: <https://doi.org/10.12737/stp-81202209> (In Russian)
3. Nefyodova IV., Kamenskikh I. Hydrothermal synthesis and optical properties of calcite single crystals. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*. 2003;5(3):609-614.
4. Logunova MN., Kukuy AL. Peculiarities of morphology and the formation of twins of iceland spar from siberian calcite province. *Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten*. 2016;10:236-241. (In Russian)
5. Ulian G., Valdre G. Study of the variation of the optical properties of calcite with applied stress, useful for specific rock and material mechanics. *Scientific Reports*. 2022;12:299; DOI: 10.1038/s41598-021-04471-6
6. Ushakov I.V. How a crack and the defect material in its neighborhood affect the radiation strength of transparent materials. *Journal of Optical Technology*. 2008;75(2):128-131; DOI: 10.1364/JOT.75.000128
7. Toytman I., Simanovskii D.M., Palanker D. Optical breakdown in transparent media with adjustable axial length and location. *Optics Express*. 2010;18(24):24688-98; DOI: 10.1103/PhysRevApplied.20.064035
8. Rudenko A., Moloney J.V., Polynkin P. Ionization clamping in ultrafast optical breakdown of transparent solids. *Physical review applied*. 2023;20(6); DOI: 10.1103/20.064035
9. Zhokhov P.A., Zheltikov A.M. Optical breakdown of solids by few-cycle laser pulses. *Scientific Reports*. 2018;8:1824; DOI:10.1038/s41598-017-18624-z
10. Berge L, Skupin S., Nuter R., Kasparian J., Wolf JP. Ultrashort filaments of light in weakly ionized, optically transparent media. *Reports on progress in physics*. 2008; 71:109801; DOI 10.1088/0034-4885/71/10/109801
11. Luo Ch., Yang X., Li J. Mechanical Properties of Single-Crystal Calcite and Their Temperature and Strain-Rate Effects. *Materials*. 2022;15(13):4613; DOI: 10.3390/ma15134613
12. Rybacki E., Evans B., Janssen C., et al. Influence of stress, temperature, and strain on calcite twins constrained by deformation experiments. *Tectonophysics*. 2013;601:20-36; DOI: 10.1016/j.tecto.2013.04.021
13. Schuster R., Habler G., Schafner E., et al. Intragranular deformation mechanisms in calcite deformed by high-pressure torsion at room temperature. *Mineralogy and Petrology*. 2020;114(2):105-118; DOI: 10.1007/s00710-019-00690-y
14. Lienhard, J.H., IV; Lienhard, J.H., V. A Heat Transfer Textbook. Cambridge. 2020. 761 p.
15. Ushakov IV., Safronov IS., Oshorov AD. Fizika zalechivaniya nanopor v kondensirovannom veshchestve v usloviyakh voz-deistviya lazernogo izlucheniya i vysokotemperaturnoi plazmy (Physics of nanopore healing in condensed matter under the influence of laser radiation and high-temperature plasma). *Doklady Akademii nauk vysshei shkoly Rossiiskoi Federatsii*. 2024;62(1):7-18; <http://dx.doi.org/10.17212/1727-2769-2024-1-7-18> (In Russian)
16. Mirzoev FKh., Panchenko Vya., Shelepin LA. Laser control processes in solids. *Physics-Uspekh*. 1996;166(1):3-32. (In Russian)

**Конфликт интересов:** о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

**Conflict of interest:** no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.07.2024

Поступила после рецензирования 02.09.2024

Принята к публикации 05.09.2024

Received July 22, 2024

Revised September 2, 2024

Accepted September 5, 2024

---

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Ушаков Иван Владимирович** – доктор технических наук, заведующий кафедрой физики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Россия

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Ivan V. Ushakov** – Doctor of Technical Sciences, Head of Physical Department, National Research Technological University "MISIS", Moscow, Russia

[К содержанию](#)