

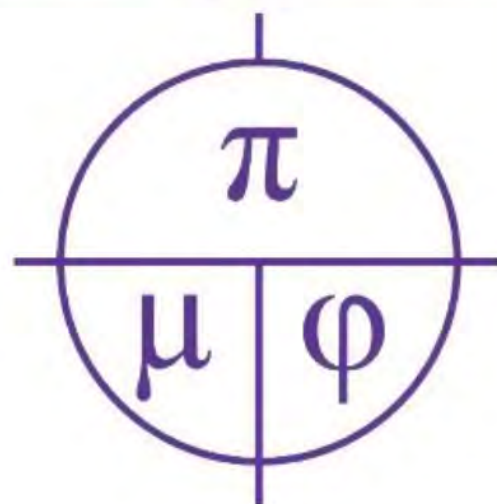


БелГУ
Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959 (online)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2024. Том 56, № 4





Прикладная математика & Физика

2024. Том 56, № 4

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;

Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;

Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;

Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;

Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;

Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;

Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;

Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;

Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 11,3

Дата выхода 30.12.2024.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Архипов В. П., Глушак А. В.

Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения 245

Федоров В. Е., Авилевич А. С.

Задача типа Коши для некоторых квазилинейных уравнений с производными Римана – Лиувилля и секториальным оператором 261

Кайгородов Е. В., Крылов П. А., Туганбаев А. А.

О некоторых линейных отображениях коалгебр инцидентности 273

Орешина М. Н.

Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором 286

Гринько А. П.

Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности 296

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Захвалинский В. С., Борисенко А. В., Маширов А. В., Кочура А. В., Пилюк Е. А., Соболев В. В.

Влияние ориентации монокристаллических игл NiSb на электропроводность монокристаллов композита $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ 314

Исупов А. Ю., Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Парахин А. С.

Волновые функции стационарных состояний поперечного движения позитронов с энергиями 5 и 20 ГэВ при каналировании в направлении $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния 320

Твердохлеб В. В., Хлопов А. М., Акиньшин Д. И.

Модификация стеганографического метода неравномерных смещений с учетом особенностей сегментов графического контейнера 328

ПЕРСОНАЛИИ

К 75-летию профессора Ю. П. Вирченко 337



Applied Mathematics & Physics

2024. Volume 56, No 4

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics (Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia, Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 11,3

Date of publishing 30.12.2024.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

Arkhipov V. P., Glushak A. V.

Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations with Conditions at the Degeneracy Point 245

Fedorov V. E., Avilovich A. S.

Cauchy Type Problem for Some Quasilinear Equations with Riemann – Liouville Derivatives and a Sectorial Operator 261

Kaigorodov E. V., Krylov P. A., Tuganbaev A. A.

On Some Linear Mappings of Incidence Coalgebras 273

Oreshina M. N.

Approximate Solution of a Linear Differential Equation with a Normal Operator 286

Grinko A.P.

Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity 296

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Zakhvalinskii V. S., Borisenko A. V., Mashirov A. V., Kochura A. V., Pilyuk E. A., Sobolev V. V.

The Effect of the Orientation of NiSb Single Crystal Needles on the Electrical Conductivity of Composite Single Crystals $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ 314

Isupov A. Yu., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Parakhin A. S.

Wave Functions of the Transverse Motion Stationary States of the 5 and 20 GeV Positrons Channeling in $\langle 111 \rangle$ Direction of the Silicon Crystal 320

Tverdokhlebov V. V., Khlopov A. M., Akinshin D. I.

Modification of the Steganographic Method of Irregular Displacements, Taking into Account the Features of the Segments of the Graphic Container 328

PERSONNEL

To the 75th anniversary of Professor Virchenko Yuri Petrovich 337

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.926.4

MSC 34A30, 34E05

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-245-260

Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения

Архипов В. П.¹, Глушак А. В.²

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95

varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка рассматривается двусторонняя задача Коши с начальными условиями во внутренней точке вырождения. Установлена локальная разрешимость соответствующих начальных задач и определены первые асимптотики построенных решений.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, внутренняя точка вырождения, двусторонняя задача Коши, асимптотические представления, степенная асимптотика решений

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2024. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 245–260. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-245-260

Original Research

Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations with Conditions at the Degeneracy Point

Viktor P. Arkhipov¹, Alexander V. Glushak²

¹ Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia

varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations of the second order, we consider the two-sided Cauchy problem with initial conditions at the interior point of degeneracy. The local solvability of the corresponding initial problems is established and the first asymptotic of the constructed solutions are determined. Examples are given.

Keywords: degenerate differential equations, internal point of degeneration, two-sided Cauchy problem, asymptotic representations, power asymptotic behavior of solutions

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2024. Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations with Conditions at the Degeneracy Point. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 245–260. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-245-260

1. Введение. Настоящая работа является продолжением исследований, проведённых авторами в [1], где были построены решения задачи Коши и приведены их первые асимптотики для вырождающихся при $t = 0$ дифференциальных уравнений второго порядка, когда начальные условия ставятся в точке вырождения $t = 0$ (односторонняя задача). Первые результаты по асимптотическим представлениям решений таких уравнений были приведены в [2] и развиты в дальнейшем в [3] и [4], а в [5] были получены первые асимптотики решений вблизи точки вырождения. При определённых условиях теоремы существования решения для двусторонней задачи Коши рассматривались в [6]. В отличие от [6], в настоящей работе приводятся формулы для решения, а также асимптотики этих решений вблизи точки вырождения.

2. Основные предположения и установленные ранее факты. В окрестности точки $t_0 \in \mathbb{R}$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с вырождающимся старшим коэффициентом в точке t_0

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t), \tag{1}$$

где $a(t_0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq t_0$, $b(t_0) \neq 0$, и исследуем возможность разрешимости задачи Коши с условиями в точке t_0 (двусторонняя задача Коши). Нас будет интересовать локальная разрешимость и асимптотика решений задачи Коши вблизи точки вырождения, поэтому будем рассматривать уравнение (1) на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Для упрощения формулировок об асимптотике решений будем предполагать, что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему условию.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ – действительные бесконечно дифференцируемые на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ функции, причём $a(t_0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq t_0$ и $b(t_0) = b_0 \neq 0$.

Воспользуемся результатами работы [4], в которой в правой окрестности точки вырождения было получено общее решение уравнения (1) в виде асимптотических рядов по специально построенным функциям, и дополним их выводами из работы [5].

Для некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ определим следующие функции:

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)}, \quad s(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau,$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' - 2b'(t) \right) & \text{при } a(t) > 0, \\ \frac{1}{4d(t)} \left(-a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 + 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' + 2b'(t) \right) & \text{при } a(t) < 0, \end{cases}$$

$$v_k^+(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp \left(\int_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) - (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)} d\tau \right), \quad t \in (t_0, t_0 + \delta], \quad k = 1, 2,$$

$$v_k^-(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp \left(- \int_{t_0-\delta}^t \frac{b(\tau) + (-1)^k d(\tau)}{2a(\tau)} d\tau \right), \quad t \in [t_0 - \delta, t_0), \quad k = 1, 2. \tag{2}$$

В силу непрерывности входящих в эти выражения функций можно выбрать достаточно малое $\delta > 0$ так, чтобы на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ выполнялось следующее условие.

Условие 2. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ справедливы неравенства

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}, \quad \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |h(t)| dt < \frac{1}{2}.$$

Любое решение уравнения (1) будем рассматривать отдельно на каждом из промежутков $[t_0 - \delta, t_0)$ и $(t_0, t_0 + \delta]$. Тогда

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ u^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

что позволит воспользоваться формулами, установленными в [2], [3] для односторонней задачи с вырождением в точке $t = 0$ на отрезке $[0, 1]$. В этих формулах, записанных в терминах переменной $\tilde{t} \in [0, \delta]$, используем замену переменной $t = \tilde{t} + t_0 \in [t_0, t_0 + \delta]$ для промежутка $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ и $t = -\tilde{t} + t_0 \in [t_0 - \delta, t_0]$ для промежутка $t \in [t_0 - \delta, t_0]$.

Приведем далее основные формулы, выражающие гладкие решения уравнения (1) на промежутках $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ и $t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

Из результатов работ [2]–[4] следует, что на промежутке $t \in (t_0, t_0 + \delta]$ фундаментальная система решений $u_1^+(t), u_2^+(t)$ однородного уравнения (1) при $a(t) > 0$ имеет вид

$$u_1^+(t) = v_1^+(t)\Phi^+(t), \quad u_2^+(t) = v_2^+(t)\Psi^+(t), \tag{3}$$

где функции $\Phi^+(t), \Psi^+(t)$ (в терминах работы [1] $\Phi^+(t) = \Phi(t - t_0), \Psi^+(t) = \Psi(t - t_0)$) определяются как решения задач

$$\Phi^+(t) = 1 + K_1^+ \Phi^+(t), \quad \Phi^+(t_0) = 1, \quad \Psi^+(t) = 1 + K_2^+ \Psi^+(t), \quad \Psi^+(t_0) = 1$$

с интегральными операторами

$$K_1^+ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} k_1^+(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad K_2^+ \psi(t) = \int_{t_0}^t k_2^+(t, \tau) \psi(\tau) d\tau,$$

и ядрами

$$k_1^+(t, \tau) = \begin{cases} h(\tau) & \text{при } t_0 \leq \tau \leq t \leq t_0 + \delta, \\ h(\tau) \exp\left(-\int_t^\tau \frac{d(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t \leq \tau \leq t_0 + \delta, \end{cases}$$

$$k_2^+(t, \tau) = -h(\tau) \left(1 - \exp\left(-\int_\tau^t \frac{d(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right)\right) \text{ при } t_0 \leq \tau \leq t \leq t_0 + \delta.$$

Частное решение уравнения (1) на промежутке $(t_0, t_0 + \delta]$ определим равенством (см. [4])

$$u_*^+(t) = A^+(t)\Phi^+(t) + B^+(t)\Psi^+(t), \quad \text{где} \quad (4)$$

$$A^+(t) = -\int_{t_0}^t \frac{\Psi^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$B^+(t) = -\int_t^{t_0+\delta} \frac{\Phi^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

При $b_0 > 0$ удобно использовать частное решение вида

$$u_*^+(t) = A_*^+(t)\Phi^+(t) + B_*^+(t)\Psi^+(t), \quad \text{где} \quad (5)$$

$$A_*^+(t) = A^+(t), \quad B_*^+(t) = \int_{t_0}^t \frac{\Phi^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

Аналогично, на $[t_0 - \delta, t_0)$ фундаментальную систему решений $u_1^-(t), u_2^-(t)$ однородного уравнения (1) при $a(t) > 0$ можно записать в виде (см. [2]–[4])

$$u_1^-(t) = v_1^-(t)\Phi^-(t), \quad u_2^-(t) = v_2^-(t)\Psi^-(t), \quad (6)$$

где функции $\Phi^-(t), \Psi^-(t)$ (в терминах работы [1] $\Phi^-(t) = \Phi(t_0 - t), \Psi^-(t) = \Psi(t_0 - t)$) определяются как решения задач

$$\Phi^-(t) = 1 + K_1^- \Phi^-(t), \quad \Phi^-(t_0) = 1, \quad \Psi^-(t) = 1 + K_2^- \Psi^-(t), \quad \Psi^-(t_0) = 1$$

с интегральными операторами

$$K_1^- \varphi(t) = \int_{t_0-\delta}^{t_0} k_1^-(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad K_2^- \psi(t) = \int_t^{t_0} k_2^-(t, \tau) \psi(\tau) d\tau,$$

и ядрами

$$k_1^-(t, \tau) = \begin{cases} h(\tau) & \text{при } t_0 - \delta \leq t \leq \tau \leq t_0, \\ h(\tau) \exp\left(-\int_\tau^t \frac{d(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t_0 - \delta \leq \tau \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

$$k_2^-(t, \tau) = -h(\tau) \left(1 - \exp\left(-\int_t^\tau \frac{d(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right)\right), \quad \text{при } t_0 - \delta \leq t \leq \tau < t_0.$$

Частное решение уравнения (1) на промежутке $[t_0 - \delta, t_0)$ определим равенством

$$u_*^-(t) = A^-(t)\Phi^-(t) + B^-(t)\Psi^-(t), \quad \text{где} \quad (7)$$

$$A^-(t) = - \int_t^{t_0} \frac{\Psi^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$B^-(t) = - \int_{t_0-\delta}^t \frac{\Phi^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

При $b_0 < 0$ удобно использовать частное решение вида

$$u_\star^-(t) = A_\star^-(t)\Phi^-(t) + B_\star^-(t)\Psi^-(t), \quad \text{где} \tag{8}$$

$$A_\star^-(t) = A^-(t), \quad B_\star^-(t) = \int_{t_0}^t \frac{\Phi^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_\tau^t \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

Приведем, наконец, формулы для решений уравнения (1) на промежутке $t \in (t_0, t_0 + \delta]$ при $a(t) < 0$. В этом случае введём в рассмотрение функции

$$\tilde{v}_1^+(t) = v_2^+(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) - d(\tau)}{2a(\tau)} d\tau\right),$$

$$\tilde{v}_2^+(t) = v_1^+(t) = \frac{1}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^{t_0+\delta} \frac{b(\tau) + d(\tau)}{2a(\tau)} d\tau\right), \tag{9}$$

а также функции $\tilde{\Phi}^+(t)$, $\tilde{\Psi}^+(t)$, как решения задач

$$\tilde{\Phi}^+(t) = 1 + \tilde{K}_1^+ \tilde{\Phi}^+(t), \quad \tilde{\Phi}^+(t_0) = 1, \quad \tilde{\Psi}^+(t) = 1 + \tilde{K}_2^+ \tilde{\Psi}^+(t), \quad \tilde{\Psi}^+(t_0) = 1$$

с интегральными операторами

$$\tilde{K}_1^+ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} \tilde{k}_1^+(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad \tilde{K}_2^+ \psi(t) = \int_{t_0}^t \tilde{k}_2^+(t, \tau) \psi(\tau) d\tau,$$

и ядрами

$$\tilde{k}_1^+(t, \tau) = \begin{cases} h(\tau) & \text{при } t_0 \leq \tau \leq t \leq t_0 + \delta, \\ h(\tau) \exp\left(\int_t^\tau \frac{d(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t \leq \tau \leq t_0 + \delta, \end{cases}$$

$$\tilde{k}_2^+(t, \tau) = -h(\tau) \left(1 - \exp\left(\int_\tau^t \frac{d(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right)\right) \quad \text{при } t_0 \leq \tau \leq t \leq t_0 + \delta.$$

Как и в равенстве (3) определим фундаментальную систему решений на $(t_0, t_0 + \delta]$

$$\tilde{u}_1^+(t) = \tilde{v}_1^+(t)\tilde{\Phi}^+(t), \quad \tilde{u}_2^+(t) = \tilde{v}_2^+(t)\tilde{\Psi}^+(t) \tag{10}$$

и частное решение уравнения (1)

$$\tilde{u}_\star^+(t) = \tilde{A}^+(t)\tilde{\Phi}^+(t) + \tilde{B}^+(t)\tilde{\Psi}^+(t), \quad \text{где} \tag{11}$$

$$\tilde{A}^+(t) = \int_{t_0}^t \frac{\tilde{\Psi}^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$\tilde{B}^+(t) = - \int_t^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

При $b_0 < 0$ можно использовать частное решение

$$\tilde{u}_\star^+(t) = \tilde{A}_\star^+(t)\tilde{\Phi}^+(t) + \tilde{B}_\star^+(t)\tilde{\Psi}^+(t), \quad \text{где} \tag{12}$$

$$\tilde{A}_*^+(t) = \tilde{A}^+(t), \quad \tilde{B}_*^+(t) = - \int_{t_0}^t \frac{\tilde{\Phi}^+(\tau) f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_{\tau}^t \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

Укажем важные предельные соотношения, которые легко устанавливаются и которые позволяют проводить стыковку решений в точке t_0 . В дальнейшем буквой θ с соответствующими индексами будем обозначать некоторые вполне конкретные постоянные.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t > t_0$. Тогда для определяемых равенствами (3)–(5) функций справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_1^+(t) &= v_1^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \begin{cases} \theta_1^+ > 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ +\infty & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_2^+(t) &= v_2^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ \theta_2^+ > 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_*^+(t) &= u_*^+(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ \theta_*^+ > 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_*^+(t) = u_*^+(t_0) = 0 \text{ при } b_0 > 0. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t < t_0$. Тогда для определяемых равенствами (6)–(8) функций справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^-} u_1^-(t) &= v_1^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b_0 < 0, \\ \theta_1^- > 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow t_0^-} u_2^-(t) &= v_2^-(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \begin{cases} \theta_2^- > 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow t_0^-} u_*^-(t) &= u_*^-(t_0) = \begin{cases} \theta_*^- > 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^-} u_*^-(t) = u_*^-(t_0) = 0 \text{ при } b_0 < 0. \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия 1, 2 и $a(t) < 0$ при $t > t_0$. Тогда для определяемых равенствами (9)–(12) функций справедливы предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{u}_1^+(t) &= \tilde{v}_1^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi) - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b_0 < 0, \\ \tilde{\theta}_1^+ > 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{u}_2^+(t) &= \tilde{v}_2^+(t_0) = \frac{1}{\sqrt{|b_0|}} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \begin{cases} \tilde{\theta}_2^+ > 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{u}_*^+(t) &= \tilde{u}_*^+(t_0) = \begin{cases} \tilde{\theta}_*^+ > 0 & \text{при } b_0 < 0, \\ 0 & \text{при } b_0 > 0, \end{cases} \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{u}_*^+(t) = \tilde{u}_*^+(t_0) = 0 \text{ при } b_0 < 0. \end{aligned}$$

3. Задача Коши. Используя введённые формулами (2)–(12) функции, приступим к изучению двусторонней задачи Коши для уравнения (1) с условиями в точке t_0 . Двусторонней задачей Коши будем называть задачу нахождения непрерывного на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ решения $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$\lim_{t \rightarrow t_0^\pm} u(t) = u_0. \quad (13)$$

В дальнейшем будет ясно, что дополнительное задание условия на производную $u'(t)$ в точке t_0 либо не приводит к выделению единственного решения, либо излишне.

Введённая в (3) функция $u_2^+(t)$ определена на промежутке $[t_0, t_0 + \delta]$ и при $b_0 < 0$ обладает свойством $(u_2^+)^{(k)}(t_0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ (см. [2]). Продолжим её нулём при $t < t_0$, сохранив за этой функцией прежнее обозначение.

Теорема 1. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta]$ и $b_0 < 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений

$u(t, C^+) \in C^\infty [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (13). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^+) = w_1(t) + C^+ u_2^+(t), \tag{14}$$

где C^+ — произвольная постоянная,

$$w_1(t) = \begin{cases} \frac{u_0}{u_2^-(t_0)} u_2^-(t) + u_\star^-(t) \text{ при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \frac{u_0}{u_1^+(t_0)} u_1^+(t) + u_\star^+(t) \text{ при } t \in [t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

и при этом $u_\star^-(t_0) = u_\star^+(t_0) = 0$, $u'(t_0, C^+) = \frac{1}{b_0}(f(t_0) - u_0 c(t_0))$.

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_\star^-(t) \text{ при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_\star^+(t) \text{ при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

которая, очевидно, бесконечно дифференцируема на $[t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta]$.

Поскольку в силу леммы 2 левый предел в точке t_0 функции $u_1^-(t)$ равен $+\infty$, то для выполнения условия (13) следует положить $C_1 = 0$, и тогда, учитывая леммы 1-3, получим

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0^-} (C_2 u_2^-(t) + u_\star^-(t)) = C_2 u_2^-(t_0) = u_0 \Rightarrow C_2 = \frac{u_0}{u_2^-(t_0)}, \\ \lim_{t \rightarrow t_0^+} (\hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_\star^+(t)) = \hat{C}_1 u_1^+(t_0) = u_0 \Rightarrow \hat{C}_1 = \frac{u_0}{u_1^+(t_0)}, \hat{C}_2 = C^+, \end{cases}$$

что и приводит к представлению (14), а также обеспечивает существование семейства непрерывных решений задачи Коши на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Бесконечная дифференцируемость функции $u(t, C^+)$ устанавливается методом математической индукции как и в статье [4], при этом используются равенства (см. [2], [6])

$$\lim_{t \rightarrow t_0^\pm} a(t)u''(t) = 0, \quad u'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} \frac{f(t) - c(t)u(t)}{a'(t) + b(t)}.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Пусть в уравнении (1) $a(t) = (t-1)^2$, $b(t) = -1$, $c(t) = -2$, $f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(t-1)^2 u''(t) + (2t-3)u'(t) - 2u(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1^\pm} u(t) = u_0. \tag{15}$$

Любое решение задачи (15) имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u^-(t) \text{ при } t \in (-\infty, 1), \\ u^+(t) \text{ при } t \in (1, +\infty). \end{cases}$$

С использованием системы Wolfram Mathematica при $t > 1$ определим функцию

$$u^+(t) = u_0(3-2t) + C^+(2-4t) \exp\left(\frac{1}{1-t}\right) + 1-t, \quad \lim_{t \rightarrow 1^+} u^+(t) = u_0,$$

где C^+ — произвольная постоянная.

Для нахождения $u^-(t)$ при $t < 1$ в задаче (15) произведём замену $t = 1 - \tau$, $u(t) = u(1 - \tau) = w(\tau)$, где функция $w(\tau)$ является решением задачи

$$\tau^2 w''(\tau) + (2\tau+1)w'(\tau) - 2w(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0^+} w(\tau) = u_0.$$

С использованием системы Wolfram Mathematica при $\tau > 0$ определим функцию

$$w(\tau) = u_0(2\tau+1) + \tau$$

и, таким образом, решением задачи (15) будет

$$u(t) = \begin{cases} u_0(3-2t) + 1-t \text{ при } t \in (-\infty, 1], \\ u_0(3-2t) + 1-t + C^+(2-4t) \exp\left(\frac{1}{1-t}\right) \text{ при } t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

где C^+ — произвольная постоянная, что согласуется с теоремой 1. В этом конкретном примере решение определено на всей оси. Очевидно, дополнительное задание значения производной $u'(t)$ в точке $t_0 = 1$ не приводит к выделению единственного решения ввиду невозможности определить постоянную C^+ .

Введённая в (6) функция $u_2^-(t)$ определена на промежутке $[t_0 - \delta, t_0]$ и при $b_0 > 0$ обладает свойством $(u_2^-)^{(k)}(t_0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$ (см. [2]). Продолжим её нулём при $t > t_0$, сохранив за этой функцией прежнее обозначение.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0] \cup (t_0, t_0 + \delta]$ и $b_0 > 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений $u(t, C^-) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (13). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^-) = w_2(t) + C^- u_2^-(t), \quad (16)$$

где C^- — произвольная постоянная,

$$w_2(t) = \begin{cases} \frac{u_0}{u_1^-(t_0)} u_1^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \frac{u_0}{u_2^+(t_0)} u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

и при этом $u'(t_0, C^-) = \frac{1}{b_0} (f(t_0) - u_0 c(t_0))$.

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

которая, очевидно, бесконечно дифференцируема на $[t_0 - \delta, t_0] \cup (t_0, t_0 + \delta]$.

Аналогично доказательству теоремы 1, учитывая условие (13), леммы 1–3 и выбирая

$$\hat{C}_1 = 0, C_1 = \frac{u_0}{u_1^-(t_0)}, \hat{C}_2 = \frac{u_0}{u_2^+(t_0)}, C_2 = C^-,$$

получим представление (16). Теорема доказана.

Пример 2. Пусть в уравнении (1) $a(t) = (t-1)^2$, $b(t) = 1$, $c(t) = -2$, $f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(t-1)^2 u''(t) + (2t-1)u'(t) - 2u(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1^\pm} u(t) = u_0. \quad (17)$$

С использованием системы Wolfram Mathematica найдём решение задачи (17) в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_0(2t-1) + t - 1 + C^-(2t-3) \exp\left(\frac{1}{t-1}\right) & \text{при } t \in (-\infty, 1), \\ u_0(2t-1) + t - 1 & \text{при } t \in [1, +\infty), \end{cases}$$

где C^- — произвольная постоянная, что согласуется с теоремой 2. Как и в примере 1, в этом примере решение определено на всей оси и дополнительное задание условия на значение производной $u'(t)$ в точке $t_0 = 1$ не приводит к выделению единственного решения.

В случае изменения знака коэффициента $a(t)$ на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $(t_0 - t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0] \cup (t_0, t_0 + \delta]$ и $b_0 < 0$. Тогда существует единственное непрерывное решение $u(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ этого уравнения, удовлетворяющее условию (13) и это решение имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \frac{u_0}{u_2^-(t_0)} u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \frac{u_0}{\tilde{u}_2^+(t_0)} \tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

и при этом $u'(t_0) = \frac{1}{b_0 + a'(t_0)} (f(t_0) - u_0 c(t_0))$.

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \hat{C}_1 \tilde{u}_1^+(t) + \hat{C}_2 \tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

которая, очевидно, бесконечно дифференцируема на $[t_0 - \delta, t_0] \cup (t_0, t_0 + \delta]$.

Аналогично доказательству теоремы 1, учитывая условие (13), леммы 1–3 и выбирая

$$C_1 = \hat{C}_1 = 0, C_2 = \frac{u_0}{u_2^-(t_0)}, \hat{C}_2 = \frac{u_0}{u_2^+(t_0)},$$

получим требуемое в теореме представление. Теорема доказана.

Пример 3. Пусть в уравнении (1) $a(t) = 1 - t^2$, $b(t) = -1$, $c(t) = -2$, $f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(1 - t^2)u''(t) - (2t + 1)u'(t) - 2u(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1^\pm} u(t) = u_0. \quad (18)$$

С использованием системы Wolfram Mathematica найдём единственное решение задачи (18) в виде

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2u_0 + 1}{\sqrt{14(1-t)}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{7} \arcsin \sqrt{\frac{1-t}{2}} \right) - \frac{1}{2} & \text{при } t \in (-\infty, 1), \\ \frac{2u_0 + 1}{\sqrt{14(t-1)}} \sin \left(\sqrt{7} \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{t-1}{2}} \right) - \frac{1}{2} & \text{при } t \in [1, +\infty), \end{cases}$$

что согласуется с теоремой 3. Как и в примерах 1 и 2, в этом примере решение определено на всей оси, а дополнительное задание условия на значение производной $u'(t)$ в точке $t_0 = 1$ излишне.

Теорема 4. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2, $(t_0 - t)a(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta]$ и $b_0 > 0$. Тогда существует двухпараметрическое семейство

$$u(t, C^-, C^+) \in C^m [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad m = \max\{k \in \mathbb{N} : b_0 + ka'(t_0) > 0\},$$

решений этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (13). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^-, C^+) = w_2(t) + C^- u_2^-(t) + C^+ \tilde{u}_2^+(t), \quad (19)$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_2(t) = \begin{cases} \frac{u_0}{u_1^-(t_0)} u_1^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \frac{u_0}{\tilde{u}_1^+(t_0)} \tilde{u}_1^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Кроме того, следующие решения однородного уравнения (1) на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$

$$u_2^-(t) = \begin{cases} \frac{\Psi^-(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp \left(\int_{t_0 - \delta}^t \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi \right) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ 0 & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

$$\tilde{u}_2^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \frac{\tilde{\Psi}^+(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp \left(\int_t^{t_0 + \delta} \frac{b(\xi) + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi \right) & \text{при } t \in [t_0, t_0 + \delta] \end{cases}$$

принадлежат $C^m [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, являются бесконечно малыми порядка m в точке t_0 и

$$u'(t_0) = \frac{1}{b_0 + a'(t_0)} (f(t_0) - u_0 c(t_0)).$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде функции

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \hat{C}_1 \tilde{u}_1^+(t) + \hat{C}_2 \tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Аналогично доказательству теоремы 1, учитывая условие (13), леммы 1–3 и выбирая

$$C_1 = \frac{u_0}{u_1^-(t_0)}, \hat{C}_1 = \frac{u_0}{u_1^+(t_0)},$$

при этом постоянные $C_2 = C^-, \hat{C}_2 = C^+$ остаются произвольными, получим требуемое в теореме представление (19) для непрерывного на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ решения.

В статье [4] установлено, что любое непрерывное на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ решение уравнения (1) принадлежит $C^m[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $m = \max\{k \in \mathbb{N} : b_0 + ka'(t_0) > 0\}$. Наконец, свойства решений $\tilde{u}_2^+(t)$, $\tilde{u}_2^-(t)$ в точке t_0 вытекают из соответствующих свойств функций $\tilde{v}_2^+(t)$, $\tilde{v}_2^-(t)$ (см. [4]). Теорема доказана.

Пример 4. Пусть в уравнении (1) $a(t) = 1 - t^2$, $b(t) = 1$, $c(t) = 0$, $f(t) = 1$. При этих предположениях задача (1), (13) имеет вид

$$(1 - t^2)u''(t) + (1 - 2t)u'(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow 1^\pm} u(t) = u_0. \quad (20)$$

С использованием системы Wolfram Mathematica найдём решение задачи (20) в виде

$$u(t) = \begin{cases} u_0 + \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \left(C^- + 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-t}{2}} \right) & \text{при } t \in (-1, 1], \\ u_0 + \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \left(C^+ + 2 \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{t-1}{2}} \right) & \text{при } t \in (1, +\infty), \end{cases}$$

где C^+ , C^- — произвольные постоянные, что согласуется с теоремой 4. В точке t_0 решение непрерывно, но не дифференцируемо. Как и в примерах 1, 2 дополнительное задание условия на производные функции $u(t)$ в точке $t_0 = 1$ не приводит к выделению единственного решения ввиду невозможности определения постоянных C^+ , C^- .

4. Асимптотика решений двусторонней задачи Коши в окрестности точки вырождения t_0 . В работе [5] для уравнения (1) были построены первые асимптотики решений в правой окрестности точки $t_0 = 0$, а в работе [1] они были использованы для нахождения асимптотик решений односторонней задачи Коши в этой точке. Покажем, как эти результаты можно применить и в настоящей работе при исследовании двусторонней задачи Коши. Для упрощения формулировок далее будем придерживаться следующих предположений.

Условие 3. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые при $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ функции, причём $a(t) = (t_0 - t)^{m+1}a_0(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0(t) > 0$ при $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ и $b(t) = b \neq 0$.

Такой выбор даёт при $t \rightarrow t_0$ асимптотические представления определяемых в равенствах (2) следующих функций:

$$a(t) = (t_0 - t)^{m+1}O(1), \quad h(t) = (t_0 - t)^{2m}O(1), \quad d(t) = |b| (1 + (t_0 - t)^{m+1}O(1)),$$

$$s(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau = (t_0 - t)^{2m+1}O(1),$$

для которых в этом пункте мы будем использовать их асимптотические представления.

Переформулируем некоторые результаты работы [5], установленные на $[0, \delta]$ при стремлении $t \rightarrow 0+$ применительно к решениям уравнения (1) на отрезках $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ и $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. При этом асимптотические представления функций будем отмечать индексом \diamond , например, $\Phi_\diamond^+(t)$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия 2, 3. Если $a(t) > 0$ при $t \neq t_0$, то в окрестности точки вырождения t_0 определяемые формулами (3), (6), (10) фундаментальные решения уравнения (1) допускают при $t \rightarrow t_0 \pm$ следующие асимптотические представления:

$$u_{1_\diamond}^+(t) = v_1^+(t)\Phi_\diamond^+(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где } \Phi_\diamond^+(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)',$$

$$u_{2_\diamond}^+(t) = v_2^+(t)\Psi_\diamond^+(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где } \Psi_\diamond^+(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)',$$

$$u_{1_\diamond}^-(t) = v_1^-(t)\Phi_\diamond^-(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где } \Phi_\diamond^-(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)',$$

$$u_{2_\diamond}^-(t) = v_2^-(t)\Psi_\diamond^-(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где } \Psi_\diamond^-(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)'.$$

Если же $a(t) < 0$ при $t \in (t_0, t_0 + \delta]$, то при $t \rightarrow t_0$

$$\tilde{u}_{1_\diamond}^+(t) = \tilde{v}_1^+(t)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где } \tilde{\Phi}_\diamond^+(t) = 1 + s(t) - \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)', \quad (21)$$

$$\tilde{u}_{2_\diamond}^+(t) = \tilde{v}_2^+(t)\tilde{\Psi}_\diamond^+(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где } \tilde{\Psi}_\diamond^+(t) = 1 - s(t) - \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)'. \quad (22)$$

Лемма 5. Пусть выполнены условия 2, 3. Тогда если $a(t) > 0$ при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, то для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существуют бесконечно дифференцируемые решения уравнения (1), допускающие при $t \rightarrow t_0+$ асимптотические представления:

$$u_{*\diamond}^+(t) = A_\diamond^+(t)\Phi_\diamond^+(t) + B_\diamond^+(t)\Psi_\diamond^+(t) + s^2(t)O(1), \quad \text{где}$$

$$A_\diamond^+(t) = - \int_{t_0}^t \frac{\Psi_\diamond^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1),$$

$$B_\diamond^+(t) = - \int_t^{t_0+\delta} \frac{\Phi_\diamond^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau;$$

если $b > 0$, то

$$u_{\star\diamond}^+(t) = A_{\star\diamond}^+(t)\Phi_\diamond^+(t) + B_{\star\diamond}^+(t)\Psi_\diamond^+(t) + s^2(t)O(1), \quad \text{где}$$

$$A_{\star\diamond}^+(t) = A_\diamond^+(t), \quad B_{\star\diamond}^+(t) = \int_{t_0}^t \frac{\Phi_\diamond^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1);$$

если $a(t) > 0$ для $t \in [t_0 - \delta, t_0)$, то при $t \rightarrow t_0-$

$$u_{*\diamond}^-(t) = A_\diamond^-(t)\Phi_\diamond^-(t) + B_\diamond^-(t)\Psi_\diamond^-(t) + s^2(t)O(1), \quad \text{где} \tag{23}$$

$$A_\diamond^-(t) = - \int_t^{t_0} \frac{\Psi_\diamond^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1),$$

$$B_\diamond^-(t) = - \int_{t_0-\delta}^t \frac{\Phi_\diamond^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau;$$

если $b < 0$, то

$$u_{\star\diamond}^-(t) = A_{\star\diamond}^-(t)\Phi_\diamond^-(t) + B_{\star\diamond}^-(t)\Psi_\diamond^-(t) + s^2(t)O(1), \quad \text{где}$$

$$A_{\star\diamond}^-(t) = A_\diamond^-(t), \quad B_{\star\diamond}^-(t) = \int_t^{t_0} \frac{\Phi_\diamond^-(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1).$$

Если $a(t) < 0$ для $t \in (t_0, t_0 + \delta]$, то при $t \rightarrow t_0+$

$$\tilde{u}_{*\diamond}^+(t) = \tilde{A}_\diamond^+(t)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) + \tilde{B}_\diamond^+(t)\tilde{\Psi}_\diamond^+(t) + s^2(t)O(1), \quad \text{где} \tag{24}$$

$$\tilde{A}_\diamond^+(t) = \int_{t_0}^t \frac{\tilde{\Psi}_\diamond^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$\tilde{B}_\diamond^+(t) = - \int_t^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}_\diamond^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau;$$

если $b < 0$, то

$$\tilde{u}_{\star\diamond}^+(t) = \tilde{A}_{\star\diamond}^+(t)\tilde{\Phi}_\diamond^+(t) + \tilde{B}_{\star\diamond}^+(t)\tilde{\Psi}_\diamond^+(t) + s^2(t)O(1), \quad \text{где}$$

$$\tilde{A}_{\star\diamond}^+(t) = \tilde{A}_\diamond^+(t), \quad \tilde{B}_{\star\diamond}^+(t) = - \int_{t_0}^t \frac{\tilde{\Phi}_\diamond^+(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1).$$

Применив леммы 4, 5 и введённые в них обозначения к найденным в теоремах 1–4 решениям, после элементарных преобразований получим следующие четыре теоремы.

Теорема 5. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $b < 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений

$$u_\diamond(t, C^+) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (13), и это семейство имеет вид

$$u_\diamond(t, C^+) = w_{1\diamond}(t) + C^+ u_{2\diamond}^+(t),$$

где C^+ — произвольная постоянная,

$$w_{1\circ}(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Psi_{\circ}^{-}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{-}(t), t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_{\circ}^{+}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{+}(t), t \in [t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Теорема 6. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ и $b > 0$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений

$$u_{\circ}(t, C^-) \in C^{\infty}[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (13), и это семейство имеет вид

$$u_{\circ}(t, C^-) = w_{2\circ}(t) + C^- u_{2\circ}^{-}(t),$$

где C^- — произвольная постоянная,

$$w_{2\circ}(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Phi_{\circ}^{-}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{-}(t), t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_{\circ}^{+}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{+}(t), t \in [t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Теорема 7. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ и $b < 0$. Тогда существует единственное ограниченное решение $u(t) \in C^{\infty}[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (13), и оно имеет вид

$$u_{\circ}(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Psi_{\circ}^{-}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{-}(t), t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \tilde{\Psi}_{\circ}^{+}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + \tilde{u}_{\star\circ}^{+}(t), t \in [t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Теорема 8. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ и $b > 0$. Тогда существует двухпараметрическое семейство решений

$$u_{\circ}(t, C^-, C^+) \in C^{\infty}[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (13), и это семейство имеет вид

$$u_{\circ}(t, C^-, C^+) = w_{3\circ}(t) + C^- u_{2\circ}^{-}(t) + C^+ \tilde{u}_{2\circ}^{+}(t),$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_{3\circ}(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Phi_{\circ}^{-}(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{-}(t), t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_{\circ}^{+}(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) (1 + (t_0 - t)^{4m+2} O(1)) + u_{\star\circ}^{+}(t), t \in [t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

5. Весовая задача Коши. Учитывая установленные в п.п. 3 и 4 результаты, рассмотрим весовые условия Коши, позволяющие выделять неограниченные и бесконечно малые при $t \rightarrow t_0$ решения уравнения (1).

Приведём, например, утверждения, которые соответствуют случаю $a(t) = (t_0 - t)^{2n+1} a_0(t)$, $n \in \mathbb{N}$ и для этого определим функцию

$$q(t) = \begin{cases} \exp\left(b \int_{t_0-\delta}^t \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0], \\ \exp\left(-b \int_t^{t_0+\delta} \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

Следует отметить, что для $b < 0$ при $t \rightarrow t_0 \pm$ функция $q(t) = o((t_0 - t)^\infty)$, а для $b > 0$ функция $q(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0 \pm$.

Под весовой задачей Коши будем понимать задачу нахождения решений уравнения (1), удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow t_0 \pm} q(t)u(t) = w_0. \quad (25)$$

Лемма 6. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда определяемые равенствами (21), (22) фундаментальные решения уравнения (1) при $t \rightarrow t_0 +$ допускают следующие асимптотические представления:

$$\tilde{u}_{1\circ}^+(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}_{1q}^+(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где} \quad (26)$$

$$\tilde{u}_{1q}^+(t) = \frac{\tilde{\Phi}_\circ^+(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(-\int_t^{t_0+\delta} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \in C^\infty[t_0, t_0 + \delta],$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{u}_{1q}^+(t) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b > 0, \\ \tilde{u}_{1q}^+(t_0) = \tilde{\varphi}_1^+ & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_1^+ = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right);$$

$$\tilde{u}_{2\circ}^+(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}_{2q}^+(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где} \quad (27)$$

$$\tilde{u}_{2q}^+(t) = \frac{\tilde{\Psi}_\circ^+(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^{t_0+\delta} \frac{-b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \in C^\infty[t_0, t_0 + \delta],$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \tilde{u}_{2q}^+(t) = \begin{cases} \tilde{u}_{2q}^+(t_0) = \tilde{\varphi}_2^+ & \text{при } b > 0, \\ 0 & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_2^+ = \frac{1}{\sqrt{b}} \exp\left(-\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right).$$

Если $t \rightarrow t_0 -$, то справедливы асимптотические представления:

$$u_{1\circ}^-(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}_{1q}^-(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где} \quad (28)$$

$$\tilde{u}_{1q}^-(t) = \frac{\tilde{\Phi}_\circ^-(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0],$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \tilde{u}_{1q}^-(t) = \begin{cases} +\infty & \text{при } b > 0, \\ \tilde{u}_{1q}^-(t_0) = \varphi_1^- & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad \varphi_1^- = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right);$$

$$u_{2\circ}^-(t) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}_{2q}^-(t) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где} \quad (29)$$

$$u_{2q}^-(t) = \frac{\Psi_\circ^-(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0],$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} u_{2q}^-(t) = \begin{cases} u_{2q}^-(t_0) = \varphi_2^- & \text{при } b > 0, \\ 0 & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad \varphi_2^- = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \exp\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right).$$

Доказательство. Приведем, например, доказательство формулы (26). Воспользовавшись формулой (21), получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1\circ}^+(t) &= \tilde{v}_1^+(t) \tilde{\Phi}^+(t) = \frac{\tilde{\Phi}_\circ^+(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^{t_0+\delta} \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \\ &= \exp\left(b \int_t^{t_0+\delta} \frac{d\xi}{a(\xi)}\right) \frac{\tilde{\Phi}_\circ^+(t)}{\sqrt{d(t)}} \exp\left(\int_t^{t_0+\delta} \frac{-b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) = \frac{1}{q(t)} \tilde{u}_{1q}^+(t) (1 + s^2(t)O(1)). \end{aligned}$$

Аналогичным образом устанавливаются представления (27)–(29). Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $t = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $t \neq t_0$ для любой функции $f(t) = \frac{f_0(t)}{q(t)}$, $f_0(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ определяемые равенствами (24), (23) частные решения уравнения (1) при $t \rightarrow t_0+$ допускают следующие асимптотические представления:

$$\tilde{u}_{*o}^+(t) = \frac{1}{q(t)} \left(\tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_o^+(t) + \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_o^+(t) \right) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где} \quad (30)$$

$$\tilde{A}_q^+(t) = \int_{t_0}^t \frac{\tilde{\Psi}_o^+(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_{\tau}^t \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1),$$

$$\tilde{B}_q^+(t) = \int_t^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}_o^+(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^{\tau} \frac{-b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0+} \tilde{B}_q^+(t) = \begin{cases} \tilde{B}_q^+(t_0) = \tilde{\varphi}_* & \text{при } b > 0, \\ a(t)O(1) & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_* = \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{\tilde{\Phi}_o^+(\tau) f_0(\tau)}{b\sqrt{d(\tau)}} \exp\left(\int_{t_0}^{\tau} \frac{-b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

Если $t \rightarrow t_0-$, то справедливы асимптотические представления:

$$u_{*o}^-(t) = \frac{1}{q(t)} \left(A_q^-(t) \Phi_o^-(t) + B_q^-(t) \Psi_o^-(t) \right) (1 + s^2(t)O(1)), \quad \text{где} \quad (31)$$

$$A_q^-(t) = - \int_t^{t_0} \frac{\Psi_o^-(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(- \int_t^{\tau} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau = o(1),$$

$$B_q^-(t) = - \int_{t_0-\delta}^t \frac{\Phi_o^-(\tau) f_0(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_{\tau}^t \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0-} B_q^-(t) = \begin{cases} B_q^-(t_0) = \varphi_*^- & \text{при } b > 0, \\ a(t)O(1) & \text{при } b < 0, \end{cases} \quad \varphi_*^- = - \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{\Phi_o^-(\tau) f_0(\tau)}{b\sqrt{d(\tau)}} \exp\left(\int_{\tau}^{t_0} \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau.$$

Доказательство. Приведем доказательство формулы (30). Учитывая формулу (24) и используя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{*o}^+(t) &= \tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_o^+(t) + \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_o^+(t) + s^2(t)O(1) = \frac{1}{q(t)} \tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_o^+(t) (1 + s^2(t)O(1)) + \\ &+ \frac{1}{q(t)} \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_o^+(t) (1 + s^2(t)O(1)) = \frac{1}{q(t)} \left(\tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_o^+(t) + \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_o^+(t) \right) (1 + s^2(t)O(1)). \end{aligned}$$

Аналогичным образом устанавливается представление (31). Лемма доказана.

Применив леммы 6, 7 и введённые в них обозначения к найденным в теоремах 1–4 решениям, после элементарных преобразований получим следующие две теоремы.

Теорема 9. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $t = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ и $b < 0$. Тогда при $t \neq t_0$ для любой функции $f(t) = \frac{f_0(t)}{q(t)}$, $f_0(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существует двухпараметрическое семейство $u(t, C^-, C^+) \in C^\infty([t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta])$ решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (25). Это семейство имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \frac{w_0}{w_0^-} u_1^-(t) + u_*^-(t) + C^- u_2^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ \frac{w_0}{w_0^+} \tilde{u}_1^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) + C^+ \tilde{u}_2^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные. При $t \rightarrow t_0+$ они имеют асимптотическое представление

$$u(t) = \frac{1}{q(t)} \left(w_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \tilde{\Phi}_o^+(t) \exp\left(- \int_{t_0}^t \frac{2c(\xi) d\xi}{d(\xi) - b}\right) + \tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_o^+(t) + \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_o^+(t) \right) \times$$

$$\times (1 + s^2(t)O(1)) + C^+ \tilde{u}_2^+(t),$$

а при $t \rightarrow t_0^-$ асимптотическое представление имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{q(t)} \left(w_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_\diamond^-(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{2c(\xi) d\xi}{d(\xi) - b}\right) + A_q^-(t) \Phi_\diamond^-(t) + \tilde{B}_q^- \Psi_\diamond^-(t) + s^2(t)O(1) \right) + C^- \tilde{u}_2^-(t).$$

Доказательство. Запишем общее решение уравнения (1) в виде

$$u(t) = \begin{cases} C_1 u_1^-(t) + C_2 u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ \hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_*^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

и, используя леммы 6, 7, вычислим предел (25) для $b < 0$ и $t \rightarrow t_0^+$. Имеем

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} q(t)u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} q(t) (\hat{C}_1 u_1^+(t) + \hat{C}_2 u_2^+(t) + u_*^+(t)) = \hat{C}_1 \lim_{t \rightarrow t_0^+} q(t)u_1^+(t) = \hat{C}_1 \tilde{\varphi}_1 = w_0.$$

Выбирая в общем решении $\hat{C}_1 = \frac{w_0}{\tilde{\varphi}_1}$, $\hat{C}_2 = C^+$, и, учитывая (27), (30), получим (32). Действительно,

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{q(t)} \left(\frac{w_0}{\tilde{\varphi}_1} \tilde{u}_{1q}^+(t) + \tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_\diamond^+(t) + \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_\diamond^+(t) \right) (1 + s^2(t)O(1)) + C^+ u_2^+(t) = \\ &= \frac{1}{q(t)} \left(w_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_\diamond^-(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{2c(\xi) d\xi}{d(\xi) - b}\right) + A_q^-(t) \Phi_\diamond^-(t) + \tilde{B}_q^- \Psi_\diamond^-(t) + s^2(t)O(1) \right) + \\ &\quad + C^- \tilde{u}_2^-(t). \end{aligned}$$

При этом мы использовали равенство

$$\begin{aligned} \frac{w_0}{\tilde{\varphi}_1} \tilde{u}_{1q}^+(t) &= w_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \exp\left(\int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \exp\left(-\int_t^{t_0+\delta} \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \tilde{\Phi}_\diamond^+(t) = \\ &= w_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) \tilde{\Phi}_\diamond^+(t) = w_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{2c(\xi)}{|b| + d(\xi)} d\xi\right) \tilde{\Phi}_\diamond^+(t). \end{aligned}$$

Используя леммы 6, 7, вычисляется предел (25) для случая $b < 0$ и $t \rightarrow t_0$. Имеем

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} q(t)u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} q(t) (C_1 u_1^+(t) + C_2 u_2^+(t) + u_*^-(t)) = C_1 \lim_{t \rightarrow t_0^-} q(t)u_1^+(t) = C_1 \varphi_1^- = w_0.$$

Выбирая в общем решении $C_1 = \frac{w_0}{\varphi_1^-}$, $C_2 = C^-$, аналогично предыдущему случаю, получим (33).

Теорема доказана.

В следующей теореме мы будем использовать обозначения леммы 7 и функцию $\frac{1}{q(t)}$. Как уже было указано в начале этого пункта, при $b > 0$ функция $q(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t_0^\pm$, поэтому доопределим функцию $\frac{1}{q(t)}$ в точке t_0 нулём.

Теорема 10. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ и $b > 0$. Тогда для любой функции $f(t) = \frac{f_0(t)}{q(t)}$, $f_0(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существует единственное решение $u(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (25). Это решение имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} \frac{w_0 - \varphi_*^-}{\varphi_2^-} u_2^-(t) + u_*^-(t) & \text{при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ \frac{w_0 - \tilde{\varphi}_*^+}{\tilde{\varphi}_2^+} \tilde{u}_2^+(t) + \tilde{u}_*^+(t) + C^+ \tilde{u}_2^+(t) & \text{при } t \in (t_0, t_0 + \delta]. \end{cases}$$

При $t \rightarrow t_0^+$ оно имеет асимптотическое представление

$$u(t) = \frac{1}{q(t)} \left((w_0 - \tilde{\varphi}_*^+) \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \tilde{\Psi}_\diamond^+(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{(b - d(\xi)) d\xi}{2a(\xi)}\right) + \tilde{A}_q^+(t) \tilde{\Phi}_\diamond^+(t) + \tilde{B}_q^+(t) \tilde{\Psi}_\diamond^+(t) \right) \times$$

$$\times (1 + s^2(t)O(1)), \tag{32}$$

а при $t \rightarrow t_0-$ асимптотическое представление имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{q(t)} \left((w_0 - \varphi_*^-) \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_\diamond^-(t) \exp \left(\int_t^{t_0} \frac{(d(\xi) - b) d\xi}{a(\xi)} \right) + A_q^-(t) \Phi_\diamond^-(t) + \tilde{B}_q^- \Psi_\diamond^-(t) \right) \times (1 + s^2(t)O(1)). \tag{33}$$

Доказательство. В отличие от теоремы 9 для выполнения условия (25) следует в общем решении выбрать $C_1 = \hat{C}_1 = 0$ и тогда

$$\lim_{t \rightarrow t_0+} q(t)u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0+} q(t) \left(\hat{C}_2 u_2^+(t) + (t) + u_*^+(t) \right) = \hat{C}_2 \tilde{u}_{2q}^+(t_0) + \tilde{B}_q^+(t_0) = \hat{C}_2 \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_* = w_0,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0-} q(t)u(t) = \lim_{t \rightarrow t_0-} q(t) \left(C_2 u_2^-(t) + (t) + u_*^-(t) \right) = C_2 u_{2q}^-(t_0) + B_q^-(t_0) = C_2 \varphi_2^- + \varphi_*^- = w_0.$$

Выбирая в общем решении $C_1 = \hat{C}_1 = 0$, $C_2 = \frac{w_0 - \varphi_*^-}{\varphi_2^-}$, $\hat{C}_2 = \frac{w_0 - \tilde{\varphi}_*}{\varphi_2}$, получаем требуемое решение.

Аналогично теореме 9 устанавливается справедливость асимптотических представлений (32), (33). Теорема доказана.

Подобным образом можно рассмотреть и весовые условия Коши вида (25) для случая $a(t) = (t_0 - t)^{2n} a_0(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

В заключение отметим, что в отличие от теорем 9 и 10 при $b < 0$ и $q(t) = o((t_0 - t)^\infty)$ уже для любой функции $f(t) \in C^\infty[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существует семейство решений $\tilde{u}(t, C) \in C^\infty([t_0 - \delta, t_0] \cup (t_0, t_0 + \delta])$ уравнения (1), удовлетворяющих условию (25), имеющее вид

$$\tilde{u}(t, C) = \begin{cases} w_3(t, C) + \frac{\sqrt{|b|} w_0 \Phi_0^-(t)}{q(t) \sqrt{d(t)}} \exp \left(\int_t^{t_0} \frac{2c(\xi) d\xi}{-b + d(\xi)} \right) (1 + s^2(t)O(1)) \text{ при } t \in [t_0 - \delta, t_0), \\ w_3(t, C) + \frac{\sqrt{|b|} w_0 \tilde{\Phi}_0^+(t)}{q(t) \sqrt{d(t)}} \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{2c(\xi) d\xi}{b - d(\xi)} \right) (1 + s^2(t)O(1)) \text{ при } t \in (t_0, t_0 + \delta], \end{cases}$$

где $w_3(t, C)$ — произвольное непрерывное на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ решение уравнения (1), которое можно построить как и в теоремах 3 и 7, а $\Phi_0^-(t)$, $\tilde{\Phi}_0^+(t)$ определены в лемме 4.

Список литературы

1. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика и Физика*. 2023;55(3):197–206.
2. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
3. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2013;5(148)30:5–18.
4. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016;20(241)44:5–22.
5. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(3):197–206.
6. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998;4(3):1063–1095.

References

1. Arkhipov VP., Glushak AV. First Asymptotics of Solutions of Degenerate Second-Order Differential Equation. *Math. Notes*. 2023;114:6:1107–1117. (in Russian)
2. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393. (in Russian)
3. Arhipov VP., Glushak AV. Asymptotic representations of solutions of differential second order equations near the point of degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2013;5(148)30:5–18. (in Russian)

4. Arhipov VP., Glushak AV. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of solutions. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics.* 2016;20(241)44:5–22. (in Russian)
5. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics.* 2023;55(3):197–206. (in Russian)
6. Rosov NKh, Sushko VG, Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundamental and applied mathematics.* 1998;4(3):1063–1095. (in Russian)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.07.2024

Received July 8, 2024

Поступила после рецензирования 21.08.2024

Revised August 21, 2024

Принята к публикации 26.08.2024

Accepted August 26, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орёл, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия



INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Задача типа Коши для некоторых квазилинейных уравнений с производными Римана – Лиувилля и секториальным оператором

Федоров В. Е. , Авилевич А. С. ,
Челябинский государственный университет,
Россия, 454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129
kar@csu.ru, avilovich_aas@bk.ru

Аннотация. Исследованы вопросы разрешимости задачи типа Коши для квазилинейных уравнений, разрешенных относительно старшей дробной производной Римана – Лиувилля, оператор в линейной части при неизвестной функции в уравнении предполагается секториальным. При этом нелинейный оператор зависит от дробных производных младшего порядка с произвольной дробной частью. Получены теоремы о локальном и глобальном существовании единственного решения при условии локальной липшицевости и липшицевости нелинейного оператора соответственно в случае его непрерывности в норме графика секториального оператора. Задача типа Коши для квазилинейного уравнения сводится к интегро-дифференциальному уравнению в специально подобранном функциональном пространстве. Для доказательства существования единственного решения используется теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. Полученный абстрактный результат использован при исследовании вопросов существования и единственности решения одного класса начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных с многочленами от самосопряженного эллиптического оператора по пространственным переменным и с дробными производными по времени.



Ключевые слова: производная Римана – Лиувилля, задача типа Коши, квазилинейное уравнение, теорема о сжимающем отображении, локальная разрешимость, глобальная разрешимость

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-00100, <https://rscf.ru/project/24-71-00100/>

Для цитирования: Федоров В. Е., Авилевич А. С. 2024. Задача типа Коши для некоторых квазилинейных уравнений с производными Римана – Лиувилля и секториальным оператором. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 261–272. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-261-272

Original Research

Cauchy Type Problem for Some Quasilinear Equations with Riemann – Liouville Derivatives and a Sectorial Operator

Vladimir E. Fedorov , Anna S. Avilovich ,
Chelyabinsk State University,
129 Brat'yev Kashirinykh St., Chelyabinsk 454001, Russia
kar@csu.ru, avilovich_aas@bk.ru

Abstract. We studies the issues of solvability of the Cauchy type problem for quasi-linear equations solved with respect to the highest fractional Riemann – Liouville derivative, the operator in the linear part at an unknown function in the equation is assumed to be sectorial. In this case, the nonlinear operator depends on low-order fractional derivatives with an arbitrary fractional part. Theorems on the local and global existence of a unique solution are obtained under the condition of local Lipschitz continuity and Lipschitz continuity of a nonlinear operator, respectively, in the case of its continuity in the norm of the graph of the sectorial operator. The Cauchy type problem for a quasi-linear equation is reduced to an integro-differential equation in a specially selected functional space. To prove the existence of a unique solution, Banach Theorem on the fixed point of a compressive map in a complete metric space is used. The abstract result obtained is applied for the study of the existence and uniqueness of a solution of a class of initial boundary value problems for nonlinear partial differential equations with polynomials from a self-adjoint elliptic operator in spatial variables and with fractional derivatives in time.

Keywords: Riemann – Liouville Derivative, Cauchy Type Problem, Quasilinear Equation, Contraction Mapping Theorem, Local Solvability, Global Solvability

Acknowledgements: The study was supported by the grant of the Russian Science Foundation No. 24-71-00100, <https://rscf.ru/project/24-71-00100/>

For citation: Fedorov V. E., Avilovich A. S. 2024. Cauchy Type Problem for Some Quasilinear Equations with Riemann – Liouville Derivatives and a Sectorial Operator. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 261–272. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-261-272

1. Введение. Изучение функционально-аналитических аспектов интегро-дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка, в настоящее время является актуальной задачей в

связи со все более широким использованием таких уравнений в качестве математических моделей различных процессов [1, 2, 3]. Задачи для уравнений с различными дробными производными в банаховых пространствах исследовались в работах J. Prüss [4] (в форме интегральных уравнений), Э. Г. Бажлековой [5, 6], А. В. Глушака (см. [7, 8]) и др.

В работе [9] введен в рассмотрение класс операторов \mathcal{A}_α , для которых уравнение ${}^C D^\alpha z(t) = Az(t)$ в банаховом пространстве с дробной производной Герасимова – Капуто ${}^C D^\alpha z$ и оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$ имеет аналитическое в секторе разрешающее семейство операторов. В [10] получена теорема о существовании единственного решения неоднородного линейного уравнения, а в работах [11, 12, 13] исследованы вопросы однозначной разрешимости квазилинейных уравнений с оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$ в линейной части и производной Герасимова – Капуто.

Существование единственного решения для линейного уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля $D^\alpha z$ и оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$ доказано в [14, 15]. Соответствующие квазилинейные уравнения изучены в [16, 17], при этом нелинейный оператор предполагается зависящим только от производных порядков $\alpha - m, \alpha - m + 1, \dots, \alpha_1$, чтобы избежать появления дефекта задачи типа Коши, возникающего в случае нескольких дробных производных Римана – Лиувилля в уравнении (см. [18]). Локальная однозначная разрешимость задачи типа Коши для квазилинейных уравнений с несколькими производными Римана – Лиувилля произвольных порядков в линейной и нелинейной частях уравнения исследована в [19] с использованием непрерывности в норме графика нелинейного оператора и в [20] – с использованием его гильбертовости.

В данной работе исследуется квазилинейное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве \mathcal{Z} вида

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha-e-m}z(t), D^{\alpha-e-m+1}z(t), \dots, D^{\alpha-1}z(t), D^{\gamma_1}z(t), D^{\gamma_2}z(t), \dots, D^{\gamma_q}z(t)), \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

с линейным оператором $A \in \mathcal{A}_\alpha$, нелинейным отображением B и несколькими дробными производными Римана – Лиувилля $D^\delta z$ при $\delta > 0$ и дробными интегралами Римана – Лиувилля $D^\delta z$ при $\delta < 0$. Здесь $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$. В предположении непрерывности нелинейного оператора B в норме графика оператора A будут исследованы вопросы локальной и глобальной разрешимости задачи типа Коши для уравнения (1). Заметим, что в используемом в [19] функциональном пространстве решений, включающем требование на старшую производную D^α , нет возможности доказать теорему о глобальной разрешимости, поэтому в данной работе для этой цели введено в рассмотрение другое функциональное пространство $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Для этого пространства сначала получен ряд вспомогательных результатов. С их помощью посредством теорем о неподвижной точке сначала доказано локальное существование единственного решения задачи типа Коши для уравнения (1), а затем и однозначная глобальная разрешимость (т. е. на любом заданном отрезке) для этой задачи. Полученные результаты проиллюстрированы на примере одного класса начально-краевых задач.

2. Предварительные сведения. Пусть \mathcal{Z} – банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ – пространство линейных ограниченных операторов в \mathcal{Z} и $Cl(\mathcal{Z})$ – множество линейных замкнутых плотно определённых в \mathcal{Z} операторов. Для $h : (t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{Z}$ определим интеграл Римана – Лиувилля порядка $\beta > 0$

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t (t-s)^{\beta-1} h(s) ds, \quad t > 0,$$

J^0 будет означать тождественный оператор. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D^m – обычная производная порядка m , D^α – дробная производная Римана – Лиувилля порядка α , т. е. $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha} h(t)$. При $\beta < 0$ будем использовать обозначение $D^\beta h(t) := J^{-\beta} h(t)$.

Через D_A будем обозначать область определения оператора $A \in Cl(\mathcal{Z})$, снабженную его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A \cdot\|_{\mathcal{Z}}$. В силу замкнутости оператора A множество D_A с нормой графика является банаховым пространством. Обозначим также $\rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$, $R_\mu(A) := (\mu I - A)^{-1}$ при $\mu \in \rho(A)$.

Определение 2.1. Пусть $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, $a_0 \geq 0$. Через $\mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ обозначим класс операторов $A \in Cl(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

- (i) для любого $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta, \mu \neq a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;
- (ii) для любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a \geq a_0$ найдется такое $K = K(\theta, a) > 0$, что

$$\forall \lambda \in S_{\theta, a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda|^\alpha}. \quad (2)$$

Замечание 2.1. В предыдущих работах использовалось неравенство

$$\forall \lambda \in S_{\theta, a} \quad \|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a| |\lambda|^{\alpha-1}} \quad (3)$$

в условии (ii) определения 2.1. Покажем, что эти условия эквивалентны. Действительно, импликация из (2) в (3) очевидна. Обратно, в силу (3) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ имеем

$$\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta, \frac{a+a_0}{2})}{|\lambda - \frac{a+a_0}{2}| |\lambda|^{\alpha-1}},$$

так как $\frac{a+a_0}{2} > a_0$. При этом $|\lambda - \frac{a+a_0}{2}|^{-1} \leq C(\theta, a)|\lambda|^{-1}$ для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$, поэтому (2) выполняется с константой $K(\theta, a) = C(\theta, a)K(\theta, \frac{a+a_0}{2})$.

Лемма 2.1. [14]. Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$Z_\beta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \mu^{\alpha-1+\beta} R_{\mu^\alpha}(A) e^{\mu t} d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + r e^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ при $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$. Тогда Z_β допускает аналитическое продолжение в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2} := \{\tau \in \mathbb{C} : |\arg \tau| < \theta_0 - \pi/2, \tau \neq 0\}$ и при всех $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ существует такое $C_\beta = C_\beta(\theta, a)$, что для всех $\tau \in \Sigma_{\theta_0-\pi/2}$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a \operatorname{Re} \tau} (|\tau|^{-1} + a)^\beta, \quad \beta \geq 0,$$

$$\|Z_\beta(\tau)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq C_\beta(\theta, a) e^{a \operatorname{Re} \tau} |\tau|^{-\beta}, \quad \beta < 0.$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\pi/2, \pi] \\ a_0 \geq 0}} \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$$

и сформулируем два варианта теоремы об однозначной разрешимости задачи типа Коши для неоднородного линейного уравнения, которые были доказаны в [14] и [15].

Теорема 2.1. [14]. Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $f \in C([0, T]; D_A)$. Тогда при любых начальных данных $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ функция

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t) z_k + \int_0^t Z_{1-\alpha}(t-s) f(s) ds \tag{4}$$

является единственным решением задачи типа Коши

$$D^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{5}$$

для уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T). \tag{6}$$

Теорема 2.2. [15]. Пусть $\alpha > 0$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $f \in C^{\gamma}([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда при любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ функция (4) является единственным решением задачи типа Коши (5), (6).

3. Локальная разрешимость. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$D^\alpha z(t) = Az(t) + B(t, D^{\alpha-m-\varrho} z(t), D^{\alpha-m-\varrho+1} z(t), \dots, D^{\alpha-1} z(t), D^{\gamma_1} z(t), \dots, D^{\gamma_q} z(t)), \tag{7}$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\varrho \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha-1$, $n_i-1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$. Некоторые γ_i могут быть отрицательными. Пусть $i_0 := \min\{i \in \{1, 2, \dots, q\} : \gamma_i > 0\}$, если $\{i \in \{1, 2, \dots, q\} : \gamma_i > 0\}$ не пусто, при $\gamma_q \leq 0$ будем считать, что $i_0 := q+1$.

Определим $\underline{\gamma} := \max\{\gamma_i : \gamma_i - m_i < \alpha - m, i = 1, 2, \dots, q\}$, $\underline{n} := \lceil \underline{\gamma} \rceil$, $\bar{\gamma} := \max\{\gamma_i : \gamma_i - m_i > \alpha - m, i = 1, 2, \dots, q\}$, $\bar{n} := \lceil \bar{\gamma} \rceil$, $n^* := \max\{\underline{n} - 1, \bar{n}\}$. В работе [18] n^* называется дефектом задачи типа Коши.

Для исследования уравнения (7) потребуется существование конечных пределов $\lim_{t \rightarrow t_0} D^{\gamma_i} z(t) := D^{\gamma_i} z(t_0)$, $i = 1, 2, \dots, q$, поэтому определим $\mu^* := \max\{n^* + 1, 0\}$. В итоге, с учетом следствий 1-4 [18] для уравнения (7) будем рассматривать задачу

$$D^{\alpha-m+k} z(t_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \mu^* - 1, \quad D^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = \mu^*, \mu^* + 1, \dots, m-1. \tag{8}$$

Пусть Z — открытое подмножество в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, отображение $B : Z \rightarrow \mathcal{Z}$ локально липшицево в норме D_A , т. е. для каждого $(t, z_1, z_2, \dots, z_{m+\varrho+q}) \in Z$ существуют окрестность $V \subset Z$, $l > 0$, такие, что для всех $(t, x_1, x_2, \dots, x_{m+\varrho+q}), (t, y_1, y_2, \dots, y_{m+\varrho+q}) \in V$

$$\|B(t, x_1, x_2, \dots, x_{m+\varrho+q}) - B(t, y_1, y_2, \dots, y_{m+\varrho+q})\|_{D_A} \leq l \sum_{k=1}^{m+\varrho+q} \|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}}. \tag{9}$$

Решением задачи типа Коши (8) для уравнения (7) на отрезке $[t_0, t_1]$ будем называть функцию $z \in C((t_0, t_1]; D_A)$, такую, что $J^{m-\alpha}z \in C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $D^{Y_i}z \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, q$, выполнены условия (8), включение

$$(t, D^{\alpha-m-\varrho}z(t), D^{\alpha-m-\varrho+1}z(t), \dots, D^{\alpha-1}z(t), D^{Y_1}z(t), D^{Y_2}z(t), \dots, D^{Y_q}z(t)) \in \mathcal{Z}$$

при $t \in [t_0, t_1]$ и равенство (7) при $t \in (t_0, t_1]$.

Лемма 3.1. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1]$. Тогда линейное пространство

$$C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : (t - t_0)^{m-\alpha}x(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), J^{m-\alpha}x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})\}$$

с нормой $\|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} := \|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} + \|(t - t_0)^{m-\alpha}x(t)\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}$ является банаховым.

Доказательство. Аксиомы нормы могут быть проверены непосредственно. Пусть последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, тогда существуют пределы $y := \lim_{k \rightarrow \infty} (t - t_0)^{m-\alpha}x_k \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $y_1(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} J^{m-\alpha}x_k \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. Положим при $t \in (t_0, t_1]$ $x(t) := (t - t_0)^{\alpha-m}y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t)$ в пространстве \mathcal{Z} . Ограниченность последовательности $\{x_k\}$ в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ влечет неравенство $\|x_k(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C(t - t_0)^{\alpha-m}$ при $t \in (t_0, t_1]$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left\| \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} x_k(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq C \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} (s-t_0)^{\alpha-m} ds = C\Gamma(\alpha - m + 1).$$

По теореме Лебега существует $J^{m-\alpha}x = J^{m-\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} J^{m-\alpha}x_k = y_1 \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Лемма 3.2. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $k \in \mathbb{Z}$, $k < m - 1$ существует такое $C > 0$, что при всех $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $s, t \in [t_0, t_1]$

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C\|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}|s - t|.$$

Доказательство. При $k \in \mathbb{Z}$, $k < -1$, $s, t \in [t_0, t_1]$, $s < t$ в силу определения дробного интеграла Римана – Лиувилля и теоремы Лагранжа

$$\begin{aligned} D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t) &= (s-t)D^{\alpha-m+k+1}x(\xi) = (s-t)J^{-k-1}J^{m-\alpha}x(\xi) = \\ &= (s-t) \int_{t_0}^{\xi} \frac{(\xi-\tau)^{-k-2}}{\Gamma(-k-1)} J^{m-\alpha}x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

при некотором ξ , расположенном между точками s и t . Поэтому

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq (s-t)\|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} \frac{(t_1 - t_0)^{-k-1}}{\Gamma(-k)}.$$

Для $k \in \{-1, 0, \dots, m-2\}$

$$\|D^{\alpha-m+k}x(s) - D^{\alpha-m+k}x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq (s-t) \max_{\tau \in [s, t]} \|D^{\alpha-m+k+1}x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \leq \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} (s-t).$$

Замечание 3.1. В условиях леммы 3.2 легко получить, что при любом $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$

$$\|D^{\alpha-m+k}x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq \frac{(t_1 - t_0)^{-k}}{\Gamma(1-k)} \|J^{m-\alpha}x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})}.$$

Лемма 3.3. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $n - 1 < \beta \leq n \in \mathbb{Z}$, $\beta < \alpha - 1$, $\alpha - m \neq \beta - n$. Тогда $D^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Доказательство. Если $\beta - n < \alpha - m$, то $n \leq m - 1$, при $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ $J^{n-\beta}x = J^{n-\beta+\alpha-m}J^{m-\alpha}x$. Поэтому при $k = 0, 1, \dots, m - 1$

$$\begin{aligned} D^k J^{n-\beta+\alpha-m} J^{m-\alpha} x(t) &= \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l} D^{\alpha-m+l} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \\ &+ \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m)} D^{\alpha-m+k} x(s) ds, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left\| \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m-1}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m)} D^{\alpha-m+k} x(s) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \frac{\|x\|_{C_{\alpha}(t_0, t_1; \mathcal{Z})} (t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m+1)}.$$

В случае $\beta-n > \alpha-m$ имеем $n \leq m-2$ согласно условию $\beta < \alpha-1$. Следовательно, для $k = 0, 1, \dots, m-2$

$$\begin{aligned} D^k J^{n-\beta} x(t) &= D^k J^{n-\beta} D^{m-\alpha} J^{m-\alpha} x(t) = D^k J^{n-\beta} D^1 J^{\alpha-m+1} J^{m-\alpha} x(t) = \\ &= D^k J^{n-\beta} \left(\frac{(t-t_0)^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} J^{m-\alpha} x(t_0) + J^{\alpha-m+1} D^{\alpha-m+1} x(t) \right) = \\ &= \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k} J^{m-\alpha} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+1)} + D^k J^{n-\beta+\alpha-m+1} D^1 J^{m-\alpha} x(t) = \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{(t-t_0)^{n-\beta+\alpha-m-k+l} D^{\alpha-m+l} x(t_0)}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m-k+l+1)} + \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n-\beta+\alpha-m}}{\Gamma(n-\beta+\alpha-m+1)} D^{\alpha-m+k+1} x(s) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

При получении последнего равенства используется (10) и сдвиг нумерации в сумме. Как и в предыдущем абзаце, получим неравенства для интегралов при значениях $k = 0, \dots, m-2$, поэтому $D^{\beta} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.

Введем в рассмотрение также пространство $C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C_{\alpha}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k} x(t_0) = 0, k = 0, 1, \dots, \mu^* - 1\}$.

Замечание 3.2. По построению μ^* для $x \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ имеем равенства (см. [18]) $D^{\gamma_i - n_i + k} x(t_0) = 0, k = 0, 1, \dots, n_i, i = 1, 2, \dots, q$.

Лемма 3.4. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}, \gamma_q < \alpha-1$. Тогда $D^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, и существует такое $C > 0$, что для всех $x \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}), i = 1, 2, \dots, q$

$$\|D^{\gamma_i} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|x\|_{C_{\alpha}(t_0, t_1; \mathcal{Z})}. \quad (12)$$

Доказательство. Из замечания 3.2 и леммы 3.3 следует, что для $x \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ выполняются включения $D^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z}), i = 1, 2, \dots, q$. Из (10) и равенств $D^{\alpha-m+k} x(t_0) = 0, k = 0, 1, \dots, n_i, i = 1, 2, \dots, q$, получаем при $\gamma_i - n_i < \alpha - m$

$$D^{\gamma_i} x(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m)} D^{n_i} J^{m-\alpha} x(s) ds, \quad (13)$$

а при $\gamma_i - n_i > \alpha - m$ в соответствии с (11) имеем

$$D^{\gamma_i} x(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1)} D^{n_i+1} J^{m-\alpha} x(s) ds.$$

В обоих случаях приходим к (12). Лемма доказана.

Возьмем в качестве $\underline{\gamma} \in (0, 1)$ минимальное из положительных чисел $n_i - \gamma_i + \alpha - m$ и $\bar{\gamma} \in (0, 1)$ — минимальное из чисел $n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1$, таких, что $n_i - \gamma_i + \alpha - m < 0$. Определим $\gamma^* := \min\{\underline{\gamma}, \bar{\gamma}\} \in (0, 1)$.

Замечание 3.3. Из доказательства леммы 3.4 следует, что в ее условиях существует $C > 0$, такое, что при всех $x \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}), i = 1, 2, \dots, q$

$$\|D^{\gamma_i} x\|_{C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} \leq C \|J^{m-\alpha} x\|_{C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z})} (t-t_0)^{\gamma^*}.$$

Лемма 3.5. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}, x \in C_{\alpha; \mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}), \gamma_q < \alpha-1$. Тогда существует $C > 0$, такое, что для каждого $i = 1, 2, \dots, q$ при всех $s, t \in [t_0, t_1]$

$$\|D^{\gamma_i} x(s) - D^{\gamma_i} x(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq C \|x\|_{C_{\alpha}(t_0, t_1; \mathcal{Z})} |s-t|^{\gamma^*}.$$

Доказательство. При $s, t \in [t_0, t_1], s < t, \gamma_i - n_i < \alpha - m$ в силу (13) имеем

$$\begin{aligned} D^{\gamma_i} x(t) - D^{\gamma_i} x(s) &= \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m)} D^{n_i} J^{m-\alpha} x(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^s \frac{(t-\tau)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1} - (s-\tau)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m)} D^{n_i} J^{m-\alpha} x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} \|D^{\gamma_i} x(t) - D^{\gamma_i} x(s)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} (t-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1)} + \\ &+ \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} \left| \int_{t_0}^s \int_s^t \frac{(u-\tau)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 2}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1)} du d\tau \right| = \frac{\|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} (t-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1)} + \\ &+ \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} \left| \int_s^t \frac{(u-t_0)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1} - (u-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m)} du \right| \leq \\ &\leq \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} \left(\frac{(t-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1)} + 2 \int_s^t \frac{(u-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m - 1}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m)} du \right) \leq \\ &\leq \frac{3\|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}}{\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1)} (t-s)^{n_i - \gamma_i + \alpha - m} = C_i \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} (t-s)^{\delta_i}, \quad \delta_i = n_i - \gamma_i + \alpha - m \in (0, 1). \end{aligned}$$

Аналогично при $\gamma_i - n_i > \alpha - m$ получим $\|D^{\gamma_i} x(t) - D^{\gamma_i} x(s)\|_{\mathcal{Z}} \leq C_i \|x\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})} (t-s)^{\delta_i}$ с $\delta_i = n_i - \gamma_i + \alpha - m + 1 \in (0, 1)$, $C_i = 3/\Gamma(n_i - \gamma_i + \alpha - m + 2) > 0$. Взяв максимальное из C_i и минимальное из δ_i , $i = 1, 2, \dots, q$, завершим доказательство.

Замечание 3.4. Функция, удовлетворяющая условиям задачи типа Коши (8), с точностью до $o(t-t_0)^{\alpha-1}$ при $t \rightarrow t_0+$ ведет себя как функция

$$\tilde{z}(t) = \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu^*} z_{\mu^*}}{\Gamma(\alpha-m+\mu^*+1)} + \frac{(t-t_0)^{\alpha-m+\mu^*+1} z_{\mu^*+1}}{\Gamma(\alpha-m+\mu^*+2)} + \dots + \frac{(t-t_0)^{\alpha-1} z_{m-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

По построению $\mu^* D^{\alpha-m-\varrho} \tilde{z}(t_0) = D^{\alpha-m-\varrho+1} \tilde{z}(t_0) = \dots = D^{\alpha-m+\mu^*-1} \tilde{z}(t_0) = 0$, $D^{\gamma_1} \tilde{z}(t_0) = D^{\gamma_2} \tilde{z}(t_0) = \dots = D^{\gamma_q} \tilde{z}(t_0) = 0$. Поэтому при $t = t_0$ аргумент нелинейного оператора в уравнении (7) имеет вид $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu^*}, z_{\mu^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0)$.

Лемма 3.6. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha-1$, $n_i-1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = \mu^*, \mu^*+1, \dots, m-1$, Z открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu^*}, z_{\mu^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in Z$, $B \in C(Z; D_A)$. Тогда функция $z \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ является решением задачи (7), (8) на отрезке $[t_0, t_1]$ при некотором $t_1 > t_0$ в том и только в том случае, когда при $t \in [t_0, t_1]$

$$z(t) = \sum_{k=\mu^*}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0) z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s) B^z(s) ds, \quad (14)$$

где $B^z(s) = B(s, D^{\alpha-m-\varrho} z(s), D^{\alpha-m-\varrho+1} z(s), \dots, D^{\alpha-1} z(s), D^{\gamma_1} z(s), \dots, D^{\gamma_q} z(s)) ds$.

Доказательство. Если $z \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, то в силу леммы 3.5 и с учетом условий на оператор B отображение, $t \rightarrow B^z(t)$ непрерывно действует из $[t_0, t_1]$ в D_A , а значит, удовлетворяет условиям теоремы 2.1. В силу этой теоремы z является решением задачи (7), (8) на отрезке $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда на нем выполняется равенство (14).

Теорема 3.1. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha-1$, $n_i-1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = \mu^*, \mu^*+1, \dots, m-1$, Z открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu^*}, z_{\mu^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in Z$, отображение $B \in C(Z; D_A)$ локально липшицево в норме D_A . Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (7), (8) имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.

Доказательство. Возьмём $t_1 > t_0$, $\varepsilon > 0$, такие, что в окрестности

$$\begin{aligned} V := \{ &(t, y_1, y_2, \dots, y_{m+\varrho+q}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} : t \in [t_0, t_1], \|y_k\| \leq \varepsilon, \\ &k = 1, 2, \dots, \varrho + \mu^*, \varrho + m + 1, \varrho + m + 2, \dots, \varrho + m + q, \\ &\|y_j - z_{j-\varrho-1}\| \leq \varepsilon, j = \varrho + \mu^* + 1, \varrho + \mu^* + 2, \dots, \varrho + m \} \end{aligned}$$

неравенство (9) выполняется при некотором $l > 0$.

Рассмотрим множество

$$M_{t_1} := \{y \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : \|D^{\alpha-m+k} y(t)\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon, k = -\varrho, -\varrho+1, \dots, \mu^*-1,$$

$$\|D^{\alpha-m+k} y(t) - z_k\|_{\mathcal{Z}} \leq \varepsilon, k = \mu^*, \mu^*+1, \dots, m-1, t \in [t_0, t_1]\},$$

которое в силу леммы 3.1 является полным метрическим пространством с метрикой, задаваемой как норма разности в $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$. Определим в \mathcal{M}_{t_1} оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=\mu^*}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s) ds$$

при $t \in (t_0, t_1]$. Имеем для $y \in \mathcal{M}_{t_1}$ в силу леммы 2.1 $(t-t_0)^{m-\alpha}G(y)(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$. С учетом доказательства предыдущей леммы и теоремы 2.1 получим, что $G(y) \in \mathcal{M}_{t_1}$ для любого $y \in \mathcal{M}_{t_1}$ при $t_1 > t_0$, достаточно близком к t_0 .

В [14, 15] показано, что

$$D^{\alpha-m+k} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s) ds = \int_{t_0}^t Z_{k+1-m}(t-s)B^y(s) ds.$$

Поэтому для $x, y \in \mathcal{M}_{t_1}$ в силу лемм 2.1 и 3.4 при $k = 0, 1 + 1, \dots, m - 1$,

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha-m+k}G(x)(t) - D^{\alpha-m+k}G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \int_{t_0}^t Z_{k+1-m}(t-s)(B^x(s) - B^y(s)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq lC_{k+1-m}(t-t_0)e^{\alpha(t-t_0)} \left(\sum_{j=-\varrho}^{m-1} \max_{t \in [t_0, t_1]} \|D^{\alpha-m+j}x(t) - D^{\alpha-m+j}y(t)\|_{\mathcal{Z}} + \right. \\ &\quad \left. + \max_{t \in [t_0, t_1]} \sum_{i=1}^q \|D^{y_i}x(t) - D^{y_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}} \right) \leq c_1(t_1 - t_0)\|x - y\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от x, y . Кроме того,

$$\begin{aligned} \|(t-t_0)^{m-\alpha}(G(x)(t) - G(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| (t-t_0)^{m-\alpha} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)(B^x(s) - B^y(s)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=-\varrho}^{m-1} \max_{t \in [t_0, t_1]} \|D^{\alpha-m+j}x(t) - D^{\alpha-m+j}y(t)\|_{\mathcal{Z}} + \max_{t \in [t_0, t_1]} \sum_{i=1}^q \|D^{y_i}x(t) - D^{y_i}y(t)\|_{\mathcal{Z}} \right) \times \\ &\quad \times lC_{1-\alpha}e^{\alpha(t_1-t_0)}(t_1 - t_0)^m \leq c_1(t_1 - t_0)^m\|x - y\|_{C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор G отображает метрическое пространство \mathcal{M}_{t_1} в себя и является оператором сжатия на нем, если $t_1 - t_0$ достаточно мало. Поэтому существует его единственная неподвижная точка $z \in \mathcal{M}_{t_1}$. Согласно лемме 3.6 z — решение задачи (7), (8) на отрезке $[t_0, t_1]$.

Единственность решения следует из единственности неподвижной точки в силу леммы 3.6.

4. Глобальная разрешимость. Обозначим $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{m+\varrho+q}) \in \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$. Отображение $B : [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q} \rightarrow \mathcal{Z}$ называется липшицевым по \bar{x} , если существует такое $L > 0$, что для всех $(t, \bar{x}), (t, \bar{y}) \in [t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$ выполняется

$$\|B(t, \bar{x}) - B(t, \bar{y})\|_{\mathcal{Z}} \leq L \sum_{k=1}^{m+\varrho+q} \|x_k - y_k\|_{\mathcal{Z}}.$$

Теорема 4.1. Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $z_k \in D_A$, $k = \mu^*, \mu^* + 1, \dots, m - 1$, отображение $B \in C([t_0, T] \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}; D_A)$ липшицево по \bar{x} в норме D_A . Тогда задача (7), (8) имеет единственное решение на $[t_0, T]$.

Доказательство. По лемме 3.6 достаточно показать, что уравнение (7) имеет единственное решение в банаховом пространстве

$$C_{\alpha; \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z}) := \{x \in C_\alpha(t_0, T; \mathcal{Z}) : D^{\alpha-m+k}x(t_0) = 0, k = 0, 1, \dots, \mu^* - 1\}.$$

Определим для $y \in C_{\alpha; \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ оператор

$$G(y)(t) := \sum_{k=\mu^*}^{m-1} Z_{m-\alpha-k}(t-t_0)z_k + \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s)B^y(s) ds, \quad t \in [t_0, T].$$

Как при доказательстве теоремы 3.1 получаем, что $G(y) \in C_{\alpha, \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ для любой функции $y \in C_{\alpha, \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$. При этом используется тот факт, что

$$D_t^{\alpha-m+k} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s) B^z(s) ds \Big|_{t=t_0} = \int_{t_0}^t Z_{k+1-m}(t-s) B^z(s) ds \Big|_{t=t_0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Обозначим j -ю степень оператора G как G^j , $T_1 := \max\{1, T - t_0\}$. Для $x, y \in C_{\alpha, \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ в силу леммы 2.1 при $k = 0, 1, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha-m+k} G(x)(t) - D^{\alpha-m+k} G(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \int_{t_0}^t Z_{k+1-m}(t-s) (B^x(s) - B^y(s)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq C_{k+1-m} e^{a(T-t_0)} \int_{t_0}^t (t-s)^{m-k-1} L \sum_{j=-\varrho}^{m-1} \|D^{\alpha-m+j} x(s) - D^{\alpha-m+j} y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds + \\ &+ C_{k+1-m} e^{a(T-t_0)} \int_{t_0}^t (t-s)^{m-k-1} L \sum_{i=1}^q \|D^{y_i} x(s) - D^{y_i} y(s)\|_{\mathcal{Z}} ds \leq \\ &\leq LC_{k+1-m} T_1^{m-k-1} e^{a(T-t_0)} (t-t_0) \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq c_1 (t-t_0) \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})}, \end{aligned}$$

где $c_1 := Le^{a(T-t_0)} \max\{\alpha^{-1} C_{1-\alpha} T_1^{m-1}, C_{k+1-m} T_1^{m-k-1} : k = 0, 1, \dots, m-1\}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \|(t-t_0)^{m-\alpha} (G(x)(t) - G(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| (t-t_0)^{m-\alpha} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s) (B^x(s) - B^y(s)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq \frac{LC_{1-\alpha}}{\alpha} e^{a(T-t_0)} (t-t_0)^m \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, T; \mathcal{Z})} \leq c_1 (t-t_0) \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})}. \end{aligned}$$

Таким образом, верна следующая оценка

$$\|G(x) - G(y)\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq (m+1)c_1 (t-t_0) \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})}.$$

Для $k = 0, 1, \dots, m-1$ имеем

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha-m+k} G^2(x)(t) - D^{\alpha-m+k} G^2(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| \int_{t_0}^t Z_{k+1-m}(t-s) (B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq LC_{k+1-m} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-k-1} \int_{t_0}^t \|G(x) - G(y)\|_{C_{\alpha}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \\ &\leq (m+1)c_1^2 \int_{t_0}^t (s-t_0) \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \frac{(m+1)c_1^2}{2} (t-t_0)^2 \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\ \|(t-t_0)^{m-\alpha} (G^2(x)(t) - G^2(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} &= \left\| (t-t_0)^{m-\alpha} \int_{t_0}^t Z_{1-\alpha}(t-s) (B^{G(x)}(s) - B^{G(y)}(s)) ds \right\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ &\leq LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \|G(x) - G(y)\|_{C_{\alpha}(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \\ &\leq (m+1)c_1 LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} (s-t_0) ds \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})} = \\ &= (m+1)c_1 LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-\alpha} \int_0^{t-t_0} \tau^{\alpha-1} (t-t_0-\tau) d\tau \|x - y\|_{C_{\alpha}(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (m+1)c_1 LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-1} (t-t_0)^2 \mathcal{B}(\alpha, 2) \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \\
&\leq \frac{(m+1)c_1 LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-1}}{\alpha} (t-t_0)^2 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \\
&\leq \frac{(m+1)c_1^2}{\alpha+1} (t-t_0)^2 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq (m+1)c_1^2 (t-t_0)^2 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\
&\|G^2(x) - G^2(y)\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq (m+1)^2 c_1^2 (t-t_0)^2 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ – бета-функция Эйлера. Продолжая аналогичным образом, получим

$$\begin{aligned}
\|D^{\alpha-m+k} G^3(x)(t) - D^{\alpha-m+k} G^3(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq (m+1)^2 c_1^3 \int_{t_0}^t (s-t_0)^2 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^2 c_1^3}{3} (t-t_0)^3 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\
\|(t-t_0)^{m-\alpha} (G^3(x)(t) - G^3(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} &\leq LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-\alpha} \int_{t_0}^t (t-s)^{\alpha-1} \|G^2(x) - G^2(y)\|_{C_\alpha(t_0, s; \mathcal{Z})} ds \leq \\
&\leq (m+1)^2 c_1^2 LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-\alpha} \int_0^{t-t_0} \tau^{\alpha-1} (t-t_0-\tau)^2 d\tau \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \\
&\leq (m+1)^2 c_1^2 LC_{1-\alpha} e^{a(T-t_0)} T_1^{m-1} (t-t_0)^3 \mathcal{B}(\alpha, 3) \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \\
&\leq \frac{(m+1)^2 c_1^3}{(\alpha+1)(\alpha+2)} (t-t_0)^3 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^2 c_1^3 (t-t_0)^3}{2} \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\
\|G^3(x) - G^3(y)\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} &\leq \frac{(m+1)^3 c_1^3 (t-t_0)^3}{2} \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\
\|D^{\alpha-m+k} G^4(x)(t) - D^{\alpha-m+k} G^4(y)(t)\|_{\mathcal{Z}} &\leq \frac{(m+1)^3 c_1^4}{2 \cdot 4} (t-t_0)^4 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\
\|(t-t_0)^{m-\alpha} (G^4(x)(t) - G^4(y)(t))\|_{\mathcal{Z}} &\leq \\
&\leq \frac{(m+1)^3 c_1^4}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} (t-t_0)^4 \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^3 c_1^4 (t-t_0)^4}{3!} \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}, \\
\|G^4(x) - G^4(y)\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} &\leq \frac{(m+1)^4 c_1^4 (t-t_0)^4}{3!} \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})},
\end{aligned}$$

и т. д. Следовательно, для всех $t \in [t_0, T]$, $j \in \mathbb{N}$, $x, y \in C_{\alpha, \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$ выполняется оценка

$$\|G^j(x) - G^j(y)\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})} \leq \frac{(m+1)^j c_1^j T_1^j}{(j-1)!} \|x-y\|_{C_\alpha(t_0, t; \mathcal{Z})}.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом значении $j \in \mathbb{N}$ G^j является оператором сжатия и поэтому существует его единственная неподвижная точка $z \in C_{\alpha, \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$, которая также является единственной неподвижной точкой оператора G в пространстве $C_{\alpha, \mu^*}(t_0, T; \mathcal{Z})$. Согласно лемме 3.6, z – решение задачи (7), (8) на отрезке $[t_0, T]$. Его единственность следует из единственности неподвижной точки.

Замечание 4.1. В данном и предыдущем параграфах квазилинейные уравнения исследованы с использованием результата теоремы 2.1 о неоднородном линейном уравнении. Аналогичное исследование на основе теоремы 2.2 планируется провести авторами в ближайшее время.

5. Уравнения с многочленами от самосопряженного оператора. Пусть $\varrho, \varsigma, d, r \in \mathbb{N}$, $P_\varrho(\lambda) = \sum_{i=0}^{\varrho} c_i \lambda^i$, $Q_\varsigma(\lambda) = \sum_{j=0}^{\varsigma} d_j \lambda^j$, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, \varrho$, $j = 0, 1, \dots, \varsigma$, $c_\varrho \neq 0$, $d_\varsigma \neq 0$, $\varrho < \varsigma$. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2, \dots, B_r$ предполагается регулярно эллиптическим [21], где

$$(\Lambda y)(s) = \sum_{|q| \leq 2r} \frac{a_q(s) \partial^{|q|} y(s)}{\partial^{q_1} s_1 \partial^{q_2} s_2 \dots \partial^{q_d} s_d}, \quad a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l y)(s) = \sum_{|q| \leq r_l} \frac{b_{lq}(s) \partial^{|q|} y(s)}{\partial^{q_1} s_1 \partial^{q_2} s_2 \dots \partial^{q_d} s_d}, \quad b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, 2, \dots, r,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + q_2 + \dots + q_d$.

Определим оператор $\Lambda_1 \in Cl(L_2(\Omega))$ равенством $\Lambda_1 y = \Lambda y$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega) := \{y \in H^{2r}(\Omega) : B_l y(s) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad s \in \Omega\}.$$

Пусть Λ_1 является самосопряженным оператором с ограниченным справа спектром, который в таком случае является вещественным, дискретным и сгущается только на $-\infty$. Пусть $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ является ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системой собственных функций оператора Λ_1 , занумерованной в порядке неубывания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Для $\alpha \in (1, 2)$ определим дефект $\mu^* \in \{0, 1, 2\}$ и рассмотрим уравнение при $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - 2$, $i = 1, 2, \dots, q$,

$$D_t^\alpha P_\varrho(\Lambda)v(s, t) = Q_\zeta(\Lambda)v(s, t) + F(s, D^{\alpha-m-\rho}v(t), \dots, D^{\alpha-1}v(t), D^{\gamma_1}v(s, t), D^{\gamma_2}v(s, t), \dots, D^{\gamma_q}v(s, t)) \quad (s, t) \in \Omega \times (t_0, T), \quad (15)$$

с начальными условиями, которые при $\mu^* = 0$ имеют вид

$$D_t^{\alpha-2+k}v(s, 0) = v_k(s), \quad s \in \Omega, \quad k = 0, 1, \quad (16)$$

при $\mu^* = 1$ –

$$D_t^{\alpha-2}v(s, 0) = 0, \quad D_t^{\alpha-1}v(s, 0) = v_1(s), \quad s \in \Omega, \quad (17)$$

при $\mu^* = 2$ –

$$D_t^{\alpha-2+k}v(s, 0) = 0, \quad s \in \Omega, \quad k = 0, 1, \quad (18)$$

а также краевыми условиями

$$B_l \Lambda^k v(s, t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \zeta - 1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T), \quad (19)$$

где $v_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ заданы, функция $v : \Omega \times (t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ неизвестна. Здесь и далее D_t^α – оператор дробной производной Римана – Лиувилля по переменной t .

Пусть $r_0 \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Z} = \{y \in H^{2r_0+r_0}(\Omega) : B_l \Lambda^k y(s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \varrho - 1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad s \in \partial\Omega\}$ и оператор $P_\varrho(\Lambda_1) : \mathcal{Z} \rightarrow H^0(\Omega)$ непрерывно обратим, что выполняется, если и только если множество нулей многочлена $P_\varrho(\lambda)$ не пересекается со спектром $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 . Тогда определим оператор $Ay := [P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1} Q_\zeta(\Lambda)y$ с областью определения $D_A = \{y \in H^{2r_0+r_0}(\Omega) : B_l \Lambda^k y(s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \zeta - 1, \quad l = 1, \dots, r, \quad s \in \partial\Omega\}$.

Теорема 5.1. Пусть $\zeta > \varrho$, $(-1)^{\zeta-\varrho}(d_\zeta/c_\varrho) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей полинома $P_\varrho(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, оператор $Az := [P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1} Q_\zeta(\Lambda)z$ с областью определения $D_A = \{y \in H^{2r_0+r_0}(\Omega) : B_l \Lambda^k y(s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \zeta - 1, \quad l = 1, \dots, r, \quad s \in \partial\Omega\}$ действует в пространстве $\mathcal{Z} = \{z \in H^{2r_0+r_0}(\Omega) : B_l \Lambda^k z(s) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \varrho - 1, \quad l = 1, 2, \dots, r, \quad s \in \partial\Omega\}$. Тогда при $\alpha \in [1, 2)$ существуют такие $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, что $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$. Если, кроме того,

$$\max_{k \in \mathbb{N}} \frac{Q_\zeta(\lambda_k)}{P_\varrho(\lambda_k)} < 1, \quad (20)$$

то $A \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$ при $\alpha \in (0, 1)$. В обоих случаях $\sigma(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = Q_\zeta(\lambda_k)/P_\varrho(\lambda_k)\}$.

Доказательство для $r_0 = 0$ проведено в [10]. В случае $r_0 \in \mathbb{N}$ его можно повторить дословно.

Теорема 5.2. Пусть $\alpha \in (1, 2)$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha - 1$, $n_i - 1 < \gamma_i \leq n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \neq \alpha - 2$, $i = 1, 2, \dots, q$, $\varrho < \zeta \leq 2\varrho$, $4r_0 + 2r_0 > d$, $(-1)^{\zeta-\varrho}(d_\zeta/c_\varrho) < 0$, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа, не содержит нулей многочлена $P_\varrho(\lambda)$, $0 \notin \sigma(\Lambda_1)$, $v_k \in D_A$ при $k = 0, 1$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{\rho+m+q}; \mathbb{R})$. Тогда задача (15), (16), (19) (или (15), (17), (19), или (15), (18), (19)) имеет единственное решение на $[t_0, T]$.

Доказательство. Нелинейный оператор $h(y_1, y_2, \dots, y_{\rho+m+q}) := F(\cdot, y_2(\cdot), \dots, y_{\rho+m+q}(\cdot))$ не зависит явно от t и в силу условия $d < 4r_0 + 2r_0$, по предложению 1 из [22, дополнение Б] получим включение $h \in C^\infty((H^{2r_0+r_0}(\Omega))^{\rho+m+q}; H^{2r_0+r_0}(\Omega))$. При редукции исследуемой начально-краевой задачи к (7), (8) получим $B(y_1, y_2, \dots, y_{\rho+m+q}) = [P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1} h(y_1, y_2, \dots, y_{\rho+m+q}) \in \mathcal{Z}$, так как $h(y_1, y_2, \dots, y_{\rho+m+q}) \in H^0(\Omega)$. Поэтому выполняется включение $B \in C^\infty(\mathcal{Z}^{\rho+m+q}; \mathcal{Z})$. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \|AB(x_1, \dots, x_{\rho+m+q}) - AB(y_1, \dots, y_{\rho+m+q})\|_{\mathcal{Z}} = \\ & = \|[P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1} Q_\zeta(\Lambda_1) [P_\varrho(\Lambda_1)]^{-1} (h(x_1, \dots, x_{\rho+m+q}) - h(y_1, \dots, y_{\rho+m+q}))\|_{\mathcal{Z}} \leq \\ & \leq C \|h'\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z}^{\rho+m+q}; \mathcal{Z})} \sum_{j=1}^{\rho+m+q} \|x_j - y_j\|_{\mathcal{Z}}, \end{aligned}$$

так как $\zeta \leq 2\rho$. Здесь h' — производная Фреше отображения $h : \mathcal{Z}^{\rho+m+q} \rightarrow \mathcal{Z}$. Таким образом, по теореме 4.1 и теореме 5.1 существует единственное решение начально-краевой задачи на $[t_0, T]$.

Замечание 5.1. При $\alpha \in (0, 1)$ аналогичный теореме 5.2 результат справедлив при дополнительном условии (20).

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника; 1987. 688 с.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит; 2003. 272 с.
4. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer; 1993. 366 p.
5. Bazhlekova E.G. Subordination principle for fractional evolution equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis*. 2000;3(3):213–230.
6. Bazhlekova E.G. Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis*. 2018;21(4):869–900.
7. Глушак А.В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика, математика*. 2001;2:74–77.
8. Глушак А.В., Манаенкова Т.А. Прямая и обратная задачи для абстрактного дифференциального уравнения, содержащего дробные производные Адамара. *Дифференциальные уравнения*. 2011;(47)9:1294–1304.
9. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.
10. Fedorov V.E., Romanova E.A. Inhomogeneous fractional evolutionary equation in the sectorial. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;250(3):819–829.
11. Fedorov V.E., Avilovich A.S., Borel L.V. Initial Problems for Semilinear Degenerate Evolution Equations of Fractional Order in the Sectorial Case. *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems. NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7*. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2019;292:41–62.
12. Fedorov V.E., Zakharova T.A. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov – Caputo derivatives. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(2):595–606.
13. Fedorov V.E., Kostic M., Zakharova T.A. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators. *Fractal and Fractional*. 2023;7(5)385.
14. Федоров В.Е., Авилевич А.С. Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае. *Сибирский математический журнал*. 2019;60(2):461–477.
15. Авилевич А.С., Гордиевских Д.М., Федоров В.Е. Вопросы однозначной разрешимости и приближённой управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гёльдеровской правой частью. *Челябинский физико-математический журнал*. 2020;(5)1:5–21.
16. Fedorov V.E., Avilovich A.S. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2021;66(6–7):1108–1121.
17. Fedorov V.E., Turov M.M. Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022;(43)6:1502–1512.
18. Федоров В.Е., Туров М.М. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана – Лиувилля. *Сибирский математический журнал*. 2021;62(5):1143–1162.
19. Туров М.М. Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана – Лиувилля произвольных порядков. *Челябинский физико-математический журнал*. 2022;(7)4:434–446.
20. Fedorov V.E., Turov M.M.. Multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives and Hölder type function spaces. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 2023;29:42.
21. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир; 1980. 664 с.
22. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир; 1985. 280 с.

References

1. Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and applications, Yverdon, Gordon and Breach Publ.; 1993. 976 p. (in Russian)
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publishing; 2006. 541 p.
3. Nakhushiev AM. Fractional Calculus and its Applications. Moscow: Fizmatlit; 2003. 272 p. (in Russian)

4. Prüss J. Evolutionary integral equations and applications. Basel: Springer; 1993. 366 p.
5. Bazhlekova E.G. Subordination principle for fractional evolution equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis*. 2000;3(3):213–230.
6. Bazhlekova E.G. Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations. *Fractional Calculus & Applied Analysis*. 2018;21(4):869–900.
7. Glushak AV. On the cauchy type problem for an abstract differential equation with fractional derivative. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Fizika, matematika*. 2001;2:74–77. (in Russian)
8. Glushak AV, Manaenkova TA. Direct and inverse problems for an abstract differential equation containing Hadamard fractional derivatives. *Differential Equations*. 2011;(47)9:1294–1304. (in Russian)
9. Bajlekova E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology; 2001. 107 p.
10. Fedorov V.E., Romanova E.A. Inhomogeneous fractional evolutionary equation in the sectorial. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;250(3):819–829.
11. Fedorov V.E., Avilovich A.S., Borel L.V. Initial Problems for Semilinear Degenerate Evolution Equations of Fractional Order in the Sectorial Case. *Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems. NABVP 2018, Santiago de Compostela, Spain, September 4–7*. Ed. by I.Area, A.Cabada, J.A.Cid etc. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2019;292:41–62.
12. Fedorov V.E., Zakharova T.A. Nonlocal solvability of quasilinear degenerate equations with Gerasimov – Caputo derivatives. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(2):595–606.
13. Fedorov V.E., Kostic M., Zakharova T.A. Quasilinear fractional order equations and fractional powers of sectorial operators. *Fractal and Fractional*. 2023;7(5)385.
14. Fedorov VE, Avilovich AS. A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann – Liouville derivative in the sectorial case. *Siberian Mathematical Journal*. 2019; (60)2:359–372. (in Russian)
15. Avilovich AS, Gordievskikh DM, Fedorov VE. Issues of unique solvability and approximate controllability for linear fractional order equations with a Hölderian right-hand side. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 2020;(5)1:5–21. (in Russian)
16. Fedorov V.E., Avilovich A.S. Semilinear fractional-order evolution equations of Sobolev type in the sectorial case. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2021;66(6–7):1108–1121.
17. Fedorov V.E., Turov M.M. Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022;(43)6:1502–1512.
18. Fedorov VE, Turov MM. The defect of a Cauchy type problem for linear equations with several Riemann – Liouville derivatives. *Siberian Mathematical Journal*. 2021; (62)5:925–942. (in Russian)
19. Turov MM. Quasilinear multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives of arbitrary orders. *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*. 2022;(7)4:434–446. (in Russian)
20. Fedorov V.E., Turov M.M.. Multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives and Hölder type function spaces. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 2023;29:42.
21. Triebel H. Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators. Amsterdam: North-Holland Publ.; 1978. 528 p.
22. Hassard BD, Kazarinoff ND, Wan Y-H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Cambridge University Press; 1981. 311 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.09.2024

Received September 18, 2024

Поступила после рецензирования 01.11.2024

Revised November 1, 2024

Принята к публикации 05.11.2024

Accepted November 5, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Федоров Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Авилевич Анна Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной механики и информационных технологий, Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия




INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir E. Fedorov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Mathematical Analysis Department, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

Anna S. Avilovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Department of Computational Mechanics and Information Technology, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

[К содержанию](#)

О некоторых линейных отображениях коалгебр инцидентности

Кайгородов Е. В.¹ , Крылов П. А.² , Туганбаев А. А.³ 
(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

¹ Горно-Алтайский государственный университет,
Россия, 649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, 1
gazetaintegral@gmail.com

² Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
krylov@math.tsu.ru

³ Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Россия, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14, стр. 1
tuganbaev@gmail.com

Аннотация. Различные линейные отображения алгебры инцидентности $I(X, F)$ частично упорядоченного множества X над полем F всегда привлекали внимание специалистов. Исследовались автоморфизмы, изоморфизмы, дифференцирования, антиавтоморфизмы и инволюции. Работы, в которых изучались бы линейные отображения коалгебры инцидентности $\text{Co}(X, F)$, неизвестны. Эта коалгебра является в определенном смысле двойственным объектом к алгебре $I(X, F)$. В данной статье найдено строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований коалгебры $\text{Co}(X, F)$. Установлено также, что группа автоморфизмов коалгебры $\text{Co}(X, F)$ антиизоморфна группе автоморфизмов алгебры $I(X, F)$, в то время как пространства дифференцирований этих объектов изоморфны. Доказательства основаны на том известном факте, что двойственная алгебра к коалгебре $\text{Co}(X, F)$ канонически изоморфна алгебре $I(X, F)$.




Ключевые слова: автоморфизм, дифференцирование, алгебра инцидентности, коалгебра инцидентности

Благодарности: Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет Российского научного фонда.

Для цитирования: Кайгородов Е. В., Крылов П. А., Туганбаев А. А. 2024. О некоторых линейных отображениях коалгебр инцидентности. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 273–285. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-273-285

Original Research

On Some Linear Mappings of Incidence Coalgebras

Evgeniy V. Kaigorodov¹ , Piotr A. Krylov² , Askar A. Tuganbaev² 
(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

¹ Gorno-Altai State University,
1 Lenkina St., Gorno-Altai 649000, Russia
gazetaintegral@gmail.com

² National Research Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk 634050, Russia
krylov@math.tsu.ru

³ National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14, Build. 1 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia
tuganbaev@gmail.com

Abstract. Various linear mappings of the incidence algebra $I(X, F)$ of the partially ordered set X over a field F have always attracted attention of specialists. Automorphisms, isomorphisms, derivations, antiautomorphisms and involutions have been studied. Works that would study linear mappings of the incidence coalgebra $\text{Co}(X, F)$ are unknown. This coalgebra is in some sense a dual object to the algebra $I(X, F)$. This paper reveals the structure of the automorphism group and the derivation space of the coalgebra $\text{Co}(X, F)$. It is found that the group of automorphisms of the coalgebra $\text{Co}(X, F)$ is antiisomorphic to the group of automorphisms of the algebra $I(X, F)$, while the derivation spaces of these objects are isomorphic. The proofs are based on the well-known fact that the dual algebra to the coalgebra $\text{Co}(X, F)$ is canonically isomorphic to the algebra $I(X, F)$.

Keywords: Automorphism, Derivation, Incidence Algebra, Incidence Coalgebra

Acknowledgements: The research of the second and third authors has been conducted at the expense of the Russian Science Foundation.

For citation: Kaigorodov E. V., Krylov P. A., Tuganbaev A. A. 2024. On Some Linear Mappings of Incidence Coalgebras. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 273–285. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-273-285

1. Введение. В данной статье для частично упорядоченного множества X и поля F изучаются автоморфизмы и дифференцирования коалгебры инцидентности $\text{Co}(X, F)$ множества X над F . Известно, что алгебра, двойственная к коалгебре $\text{Co}(X, F)$ канонически изоморфна алгебре инцидентности $I(X, F)$ частично упорядоченного множества X над полем F . Теория алгебр и коалгебр инцидентности представлена в книге [1]. За дополнительной информацией можно обратиться к статьям [2] и [3], содержащим также разнообразный материал о произвольных коалгебрах.

Строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований алгебры инцидентности $I(X, F)$ выяснено достаточно давно. Соответствующие результаты изложены в [1]. В дальнейшем эти результаты распространялись в довольно большом числе работ на более общие кольца инцидентности $I(X, R)$, где X – предупорядоченное множество и R – некоторое кольцо.

Среди работ, опубликованных после выхода книги [1], выделим следующие работы. В [4] вычисляется группа внешних автоморфизмов алгебры $I(X, F)$ для конечного предупорядоченного множества X и поля F . При этом развивается подход, основанный на когомологической интерпретации группы автоморфизмов. Обзор [5] посвящен автоморфизмам, антиавтоморфизмам, инволюциям и изоморфизмам колец инцидентности, см. также [6]. В [7] изучаются автоморфизмы финитарных алгебр инцидентности. При некоторых предположениях найдено строение группы внешних автоморфизмов такой алгебры. В [8] рассматривается ряд вопросов о мультипликативных автоморфизмах алгебры $I(X, F)$, где X – конечное частично упорядоченное множество и F – поле (об этих автоморфизмах см. конец раздела 4).

Много внимания также уделялось дифференцированиям колец инцидентности, как обычным, так и лиевым и йордановым дифференцированиям, см. [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

В ряде статей были введены и исследовались кольца, близкие в разных смыслах к обычным кольцам инцидентности (см., например, [3, 16] и [17]). С другой стороны, авторам неизвестны работы, в которых изучались автоморфизмы или дифференцирования коалгебр инцидентности.

При изучении автоморфизмов и дифференцирований мы переходим от коалгебры $\text{Co}(X, F)$ к алгебре $I(X, F)$ и наоборот. Правда, обратный переход затруднен. В общем случае нельзя каким-то стандартным способом вернуться от алгебры $I(X, F)$ к коалгебре $\text{Co}(X, F)$. При этом важно то, что автоморфизмы и дифференцирования коалгебры $\text{Co}(X, F)$ индуцируют автоморфизмы и дифференцирования соответственно двойственной алгебры и затем алгебры $I(X, F)$.

Применение изложенного подхода привело к удовлетворительному описанию автоморфизмов и дифференцирований коалгебры $\text{Co}(X, F)$ (теоремы 7.1 и 11.1). Именно, каждый автоморфизм является произведением трех стандартных автоморфизмов (здесь мы считаем автоморфизм стандартным, если его строение вполне понятно). А всякое дифференцирование является суммой двух стандартных дифференцирований.

Результаты и техника доказательств данной статьи могут служить примером при изучении автоморфизмов и дифференцирований коалгебр из других классов. В частности, в разделах 6 и 10 даны определения внутреннего автоморфизма и внутреннего дифференцирования коалгебры $\text{Co}(X, F)$. В основном благодаря этим понятиям удалось получить разложения автоморфизмов и дифференцирований в теоремах 7.1 и 11.1.

Разделы 2–4 и 8 содержат различные и в целом известные факты о коалгебрах и алгебрах инцидентности, автоморфизмах и дифференцированиях алгебр инцидентности. Этот материал необходим в основных разделах и включен в статью для удобства чтения.

Группа автоморфизмов частично упорядоченного множества X обозначается через $\text{Aut } X$. Для любых элементов $x, y \in X$ через $[x, y]$ обозначим подмножество $\{z \in X \mid x \leq z \leq y\}$. Оно называется интервалом в X . Далее считаем, что все интервалы в X конечны. В таком случае X называют локально конечным частично упорядоченным множеством.

Если V – линейное пространство над полем F (кратко, F -пространство), то V^* – двойственное пространство к V , т. е. $V^* = \text{Hom}_F(V, F)$. Затем, $\text{End}_F V$ – кольцо эндоморфизмов (т. е. линейных операторов) пространства V и $\text{Aut}_F V$ – группа автоморфизмов (т. е. обратимых линейных операторов) пространства V . В качестве пространства V будет выступать какая-то алгебра A , либо коалгебра C и её двойственная алгебра C^* .

Пусть A – алгебра над полем F (кратко, F -алгебра). Тогда $\text{Aut } A$ – группа автоморфизмов алгебры A , $\text{In}(\text{Aut } A)$ – подгруппа внутренних автоморфизмов, $\text{Der } A$ – пространство дифференцирований алгебры A , $\text{In}(\text{Der } A)$ – подпространство внутренних дифференцирований. Группу автоморфизмов коалгебры C тоже обозначаем через $\text{Aut } C$.

Полупрямое произведение групп A и B обозначается через $A \rtimes B$. Такое обозначение носит условный характер, но оно удобно. Запись $G \cong A \rtimes B$ подразумевает, что группа G содержит нормальную подгруппу H и подгруппу E , для которых $G = H \cdot E$, $H \cap E = \langle e \rangle$, $A \cong H$, $B \cong E \cong G/H$. Отметим, что некоторые результаты данной статьи содержатся в препринте [18].

2. Коалгебры и двойственные алгебры. Пусть (C, Δ, ϵ) – некоторая коалгебра над полем F . Таким образом, C – F -пространство, Δ – коумножение в C , ϵ – коединица для C . Для обозначения этой коалгебры

используем одну букву C .

Естественным образом можно так определить линейные отображения $m: C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$ и $u: F \rightarrow C^*$, что получится F -алгебра $C^* = (C^*, m, u)$. Она называется двойственной алгеброй к коалгебре C . Единичным элементом алгебры C^* является коединица ε . Отметим, что если C – конечномерное пространство, то двойственность есть и в обратном направлении.

Немного детализируем только что сказанное. Умножение $m: C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$ индуцируется коумножением Δ .

Пусть ω – это канонический изоморфизм $F \otimes F \rightarrow F$. Для произвольных элементов χ, ξ из C^* их произведение в C^* обозначим через $\chi \circ \xi$. Имеют место равенства

$$m(\chi \otimes \xi) = \chi \circ \xi = \omega(\chi \otimes \xi)\Delta.$$

Из них получается правило умножения в алгебре C^* , изложенное в следующей лемме.

Лемма 2.1. Пусть $\chi, \xi \in C^*$. Далее пусть $c \in C$ и $\Delta(c) = \sum_i a_i \otimes b_i$, где $a_i, b_i \in C$. Тогда справедливо равенство

$$(\chi \circ \xi)(c) = \sum_i \chi(a_i)\xi(b_i).$$

Обозначим через Γ отображение $\text{End}_F C \rightarrow \text{End}_F C^*$, где $\Gamma(\varphi) = \varphi^*$ для каждого $\varphi \in \text{End}_F C$. Здесь φ^* – линейное отображение пространства C^* , индуцированное φ , т. е. $\varphi^*(\chi) = \chi\varphi$ для любого $\chi \in C^*$. Если $\varphi \in \text{Aut}_F C$, то понятно, что $\varphi^* \in \text{Aut}_F C^*$.

Запишем следующий полезный факт.

Лемма 2.2. Отображение Γ является антимоморфизмом F -алгебр $\text{End}_F C \rightarrow \text{End}_F C^*$ и групповым антимоморфизмом $\text{Aut}_F C \rightarrow \text{Aut}_F C^*$.

Всюду далее X – некоторое локально конечное частично упорядоченное множество. Пусть C – векторное пространство, базис которого состоит из всех интервалов $[x, y]$ множества X . Определим отображения $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ и $\varepsilon: C \rightarrow F$, полагая

$$\Delta([x, y]) = \sum_{x \leq z \leq y} [x, z] \otimes [z, y], \quad \varepsilon([x, y]) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ 0, & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

для всякого интервала $[x, y]$.

Тройка (C, Δ, ε) является коалгеброй, называемой коалгеброй инцидентности локально конечного частично упорядоченного множества X . Будем обозначать её $\text{Co}(X, F)$. Или же, как раньше, одной буквой C .

3. Двойственная алгебра к $\text{Co}(X, F)$ и алгебра $I(X, F)$. Приведем определение алгебры инцидентности (см. [1]). Положим

$$I(X, F) = \{f: X \times X \rightarrow F \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \not\leq y\}.$$

Функции складываются поточечно и умножаются естественным образом на скаляры из F . Произведение функций задается формулой

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y)$$

для любых $x, y \in X$. В результате получаем F -алгебру $I(X, F)$, называемую алгеброй инцидентности частично упорядоченного множества X над полем F . Если X – конечное множество, то алгебру $I(X, F)$ обычно называют кольцом структуральных матриц. Такие кольца являются одним из видов колец формальных матриц, последним посвящена книга [19].

Алгебру инцидентности $I(X, F)$ иногда будем обозначать буквой A . А коалгебру инцидентности $\text{Co}(X, F)$ обозначаем через C , как договаривались в конце предыдущего раздела. Раскроем связи между алгебрами C^* и A .

Существуют взаимно обратные изоморфизмы F -алгебр

$$\Phi: C^* \rightarrow A \text{ и } \Psi: A \rightarrow C^*, \text{ где } (\Phi(\chi))(x, y) = \chi([x, y]), \chi \in C^*, \\ (\Psi(f))([x, y]) = f(x, y), f \in A,$$

для любых $x, y \in X$ со свойством $x \leq y$.

В свою очередь, Φ и Ψ индуцируют взаимно обратные изоморфизмы алгебр линейных отображений

$$\Phi^*: \text{End}_F C^* \rightarrow \text{End}_F A, \quad \Psi^*: \text{End}_F A \rightarrow \text{End}_F C^*,$$

где

$$\Phi^*(\eta) = \Phi\eta\Psi, \eta \in \text{End}_F C^*, \quad \Psi^*(\xi) = \Psi\xi\Phi, \xi \in \text{End}_F A.$$

Обозначим через Θ антимономорфизм алгебр $\Phi^*\Gamma: \text{End}_F C \rightarrow \text{End}_F A$ (см. лемму 2.2). Выясним, что окажется очень полезным, как действует Θ . Для произвольных $\varphi \in \text{End}_F C$ и $f \in A$ можно записать равенства

$$\begin{aligned} (\Theta(\varphi))(f) &= ((\Phi^*\Gamma)(\varphi))(f) = (\Phi^*(\Gamma(\varphi)))(f) = ((\Phi\Gamma(\varphi))\Psi)(f) = \\ &= \Phi(\Gamma(\varphi)(\Psi(f))) = \Phi(\Psi(f)\varphi), \text{ где } \Psi(f)\varphi \in C^*. \end{aligned}$$

Для любых $x, y \in X$, таких, что $x \leq y$, имеем равенство $\Phi(\Psi(f)\varphi)(x, y) = \Psi(f)(\varphi([x, y]))$. В итоге получили равенство $((\Theta(\varphi))(f))(x, y) = \Psi(f)(\varphi([x, y]))$.

Далее, если

$$\varphi([x, y]) = \alpha_1[x_1, y_1] + \dots + \alpha_k[x_k, y_k], \text{ где } \alpha_i \in F,$$

то справедливы равенства

$$\Psi(f)(\varphi([x, y])) = \alpha_1\Psi(f)([x_1, y_1]) + \dots + \alpha_k\Psi(f)([x_k, y_k]) = \alpha_1f(x_1, y_1) + \dots + \alpha_kf(x_k, y_k).$$

Таким образом, можем записать следующее предложение.

Предложение 3.1. Пусть $\varphi \in \text{End}_F C$, $f \in I(X, F)$, $[x, y]$ – интервал в X . Имеют место приведенные ниже утверждения.

1. Верно равенство $((\Theta(\varphi))(f))(x, y) = \Psi(f)(\varphi([x, y]))$. В частности, $\Psi(f)([x, y]) = f(x, y)$ (при $\varphi = 1$).
2. Если $\varphi([x, y]) = \alpha_1[x_1, y_1] + \dots + \alpha_k[x_k, y_k]$, $\alpha_i \in F$, то $((\Theta(\varphi))(f))(x, y) = \alpha_1f(x_1, y_1) + \dots + \alpha_kf(x_k, y_k)$.

4. О группе $\text{Aut}(I(X, F))$. Соберём вместе ряд сведений об алгебре инцидентности $I(X, F)$ и её группе автоморфизмов (см. подробности в [1] и [13]). Как и в прошлом разделе, алгебру $I(X, F)$ обозначаем также буквой A . Для группы автоморфизмов частично упорядоченного множества X используем символ $\text{Aut } X$.

Напомним о некоторых специальных функциях из $I(X, F)$. Для данного $x \in X$ положим $e_x(x, x) = 1$ и $e_x(z, y) = 0$ для всех оставшихся пар (z, y) . Система $\{e_x \mid x \in X\}$ состоит из попарно ортогональных идемпотентов в кольце L_1 (последнее кольцо определено в следующем абзаце).

Определим подкольцо L_1 и идеал M_1 в A . Положим

$$\begin{cases} L_1 = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x \neq y\}, \\ M_1 = \{f \in A \mid f(x, y) = 0, \text{ если } x = y\}. \end{cases}$$

Имеем прямую сумму F -пространств $A = L_1 \oplus M_1$. Таким образом, алгебра A является расщепляющимся расширением идеала M_1 с помощью подкольца L_1 . Идеал M_1 можно рассматривать как L_1 - L_1 -бимодуль и как неунитальную алгебру.

Пусть дан произвольный элемент $x \in X$. Обозначим через R_x множество всех таких функций $f \in A$, что $f(z, y) = 0$ при $(z, y) \neq (x, x)$. Справедливо равенство $R_x = e_x A e_x$. Следовательно, R_x – кольцо с единицей e_x . Более точно, $R_x \cong F$.

Возьмем теперь два различных элемента x, y и положим

$$M_{xy} = \{f \in A \mid f(s, t) = 0, \text{ если } (s, t) \neq (x, y)\}.$$

Здесь $M_{xy} = e_x A e_y$ и, значит, M_{xy} есть R_x - R_y -бимодуль.

Произведение $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ обладает естественной структурой L_1 - L_1 -бимодуля. Можно также определить в этом бимодуле умножение посредством формулы

$$(g_{xy})(h_{xy}) = (d_{xy}), \text{ где } d_{xy} = \sum_{x \leq z \leq y} g_{xz} h_{zy}.$$

После этого произведение $\prod_{x, y \in X} M_{xy}$ становится (неунитальной) алгеброй.

Предложение 4.1. [13, предложение 3.1]. Существуют канонические изоморфизмы алгебр $L_1 \cong \prod_{x \in X} R_x$ и L_1 - L_1 -бимодулей и алгебр $M_1 \cong \prod_{x, y \in X} M_{xy}$.

В дальнейшем мы не будем различать соответствующие объекты относительно изоморфизмов, указанных в предложении 4.1.

Пусть φ – произвольный автоморфизм алгебры A . Исходя из прямой суммы F -пространств $A = L_1 \oplus M_1$, можно сопоставить автоморфизму φ 2×2 матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Причем в нашем случае $\gamma = 0$ (см. [13, предложение 3.1]). Затем, α – автоморфизм алгебры L_1 и β – автоморфизм (неунитальной) алгебры M_1 . Если $\delta = 0$, то β является также автоморфизмом L_1 - L_1 -бимодуля M_1 .

Пусть v – какой-то обратимый элемент алгебры A . С его помощью можно получить автоморфизм μ_v этой алгебры, если положить $\mu_v(f) = v^{-1}fv$ для каждого $f \in A$. Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом, определяемым элементом v . Все внутренние автоморфизмы образуют нормальную подгруппу $\text{In}(\text{Aut } A)$ в $\text{Aut } A$. В нашем случае введенное понятие полезно детализировать, как это сделано в [13]. Обозначим через $\text{In}_1(\text{Aut } A)$ (соответственно, $\text{In}_0(\text{Aut } A)$) подгруппу внутренних автоморфизмов, определяемых обратимыми элементами вида $1+g$, $g \in M_1$ (соответственно, определяемых обратимыми элементами алгебры L_1). Первая подгруппа нормальна в $\text{Aut } A$ и имеет место полупрямое разложение

$$\text{In}(\text{Aut } A) = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } A).$$

В дополнение к $\text{In}(\text{Aut } A)$ введем еще две подгруппы группы $\text{Aut } A$.

Пусть $\text{Mult } A$ обозначает подгруппу в $\text{Aut } A$, состоящую из автоморфизмов вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Такие автоморфизмы называются мультипликативными. Подойдем несколько иначе к их определению.

Определение 4.2. Назовем мультипликативной системой такую систему ненулевых элементов $\{c_{xy} \in F \mid x < y\}$, что верно равенство $c_{xy} = c_{xz}c_{zy}$, как только $x < z < y$.

Пусть $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \text{Mult } A$. Для любых элементов $x, y, x < y$ существует ненулевой элемент c_{xy} поля F , для которого верно равенство $\beta(g) = c_{xy}g$ при всех $g \in M_{xy}$. Причем система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ является мультипликативной (см. абзац перед [13, предложение 10.2]). Все эти утверждения вытекают из того, что β – автоморфизм алгебры M_1 и L_1 - L_1 -бимодуля M_1 , как указано после предложения 4.1.

Таким образом, можно поставить в соответствие автоморфизму ψ мультипликативную систему $\{c_{xy} \mid x < y\}$. И обратно, всякая мультипликативная система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ задает мультипликативный автоморфизм ψ . Именно, для элемента $g = (g_{xy}) \in M_1$ полагаем $\psi(g) = (c_{xy}g_{xy})$ и $\psi(f) = f$ для $f \in L_1$.

Можно записать следующий факт [13, предложение 10.2].

Предложение 4.3. Имеется взаимно однозначное соответствие между мультипликативными автоморфизмами и мультипликативными системами элементов.

Рассмотрим другой вид автоморфизмов. Пусть $\tau \in \text{Aut } X$. Определим отображение $\eta_\tau: A \rightarrow A$, полагая $(\eta_\tau(f))(x, y) = f(\tau(x), \tau(y))$ для любых $f \in A, x, y \in X$.

Здесь η_τ – автоморфизм алгебры A и сопоставление $\tau \rightarrow \eta_\tau$ будет антиизоморфным вложением групп $\text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } A$. Образ этого вложения обозначим символом $\text{Aut}_A X$. Автоморфизмы вида η_τ назовем порядковыми.

Приведем основной результат о строении группы $\text{Aut } A$. Он содержится в [1, теорема 7.3.6]. Некоторые его усиления и уточнения получены в [13, следствие 9.4].

Теорема 4.4. Имеют место следующие равенства групп

$$\text{Aut } A = (\text{In}(\text{Aut } A) \cdot \text{Mult } A) \rtimes \text{Aut}_A X = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \text{Mult } A \rtimes \text{Aut}_A X.$$

5. Группа $\text{Aut } C$ и её подгруппы. Пусть $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ и $C' = (C', \Delta', \varepsilon')$ – произвольные коалгебры над полем F . Линейное отображение $\varphi: C \rightarrow C'$ называется гомоморфизмом коалгебры C в коалгебру C' при условии, что $(\varphi \otimes \varphi)\Delta = \Delta'\varphi$ и $\varepsilon'\varphi = \varepsilon$.

Если $\varphi: C \rightarrow C$ – гомоморфизм коалгебр и φ – биекция, то φ называют автоморфизмом коалгебры C . Все автоморфизмы коалгебры C образуют группу относительно композиции. Она обозначается $\text{Aut } C$ и называется группой автоморфизмов коалгебры C .

Напомним, что $\text{Aut } C^*$ – это группа автоморфизмов двойственной алгебры C^* (см. раздел 2).

Утверждение следующей известной леммы проверяется простыми вычислениями.

Лемма 5.1. Если $\varphi \in \text{Aut } C$, то $\varphi^* \in \text{Aut } C^*$.

До конца этого раздела буквой C обозначаем коалгебру инцидентности $\text{Co}(X, F)$, а буквой A – алгебру инцидентности $I(X, F)$. Для алгебры A можно ввести аналоги матричных единиц. Пусть $x, y \in X$ и $x < y$. Обозначим через e_{xy} такую функцию $X \times X \rightarrow R$, что $e_{xy}(s, t) = 1$, если $s = x, t = y$, и $e_{xy}(s, t) = 0$ для всех других пар (s, t) . Функции e_{xy} обладают следующим свойством: если $x < z < y$, то $e_{xz}e_{zy} = e_{xy}$.

Ввиду лемм 2.2, 5.1 и материала раздела 3 мы располагаем групповыми антимоморфизмами $\Gamma: \text{Aut } C \rightarrow \text{Aut } C^*$ и $\Theta: \text{Aut } C \rightarrow \text{Aut } A$. Теперь определим в $\text{Aut } C$ подгруппы, аналогичные подгруппам $\text{Mult } A$ и $\text{Aut}_A X$ в $\text{Aut } A$ из раздела 4.

Пусть дана мультипликативная система элементов $\{d_{xy} \mid x < y\}$ (подобные системы появились в разделе 4). Определим отображение $\lambda: C \rightarrow C$, положив $\lambda([x, y]) = d_{xy}[x, y]$ для всякого базисного вектора $[x, y]$, где $x < y$, пространства C и $\lambda([x, x]) = [x, x]$ для всякого вектора $[x, x]$. Естественным образом λ продолжается до линейного отображения пространства C . Проверка подтверждает, что λ – автоморфизм коалгебры C . Будем называть его мультипликативным автоморфизмом, соответствующим мультипликативной системе $\{d_{xy} \mid x < y\}$.

Все мультипликативные автоморфизмы коалгебры C образуют подгруппу в $\text{Aut } C$, которую обозначим через $\text{Mult } C$.

Предложение 5.2. Группы $\text{Mult } C$ и $\text{Mult } A$ изоморфны, причем изоморфизм осуществляется отображением Θ .

Доказательство. Прежде заметим, что группы $\text{Mult } A$ и $\text{Mult } C$ абелевы.

Пусть $\lambda \in \text{Mult } C$ и $\{d_{xy} \mid x < y\}$ – соответствующая мультипликативная система. Таким образом $\lambda([x, y]) = d_{xy}[x, y]$ для всех базисных векторов $[x, y]$ пространства C (можно считать, что $d_{xx} = 1$ для всех векторов вида $[x, x]$). На основании предложения 3.1 для любой пары (s, t) с условием $s \leq t$ можно записать равенства

$$((\Theta(\lambda))(e_{xy}))(s, t) = d_{st}e_{xy}(s, t) = \begin{cases} d_{xy}, & \text{если } (s, t) = (x, y); \\ 0, & \text{если } (s, t) \neq (x, y). \end{cases}$$

Откуда получаем $(\Theta(\lambda))(e_{xy}) = d_{xy}e_{xy}$. Делаем вывод, что $\Theta(\lambda)$ – мультипликативный автоморфизм алгебры A , соответствующий системе $\{d_{xy} \mid x < y\}$ (надо еще принять во внимание предложение 4.3). Таким образом, $\Theta(\lambda) \in \text{Mult } A$.

Возьмем теперь некоторый автоморфизм $\psi \in \text{Mult } A$. И пусть ему соответствует мультипликативная система $\{c_{xy} \mid x < y\}$ из предложения 4.3. Обозначим через δ мультипликативный автоморфизм коалгебры C , соответствующий системе $\{c_{xy} \mid x < y\}$. Из предыдущего абзаца следует, что $\Theta(\delta) = \psi$. Можно утверждать, что ограничение Θ на $\text{Mult } C$ отображает $\text{Mult } C$ на $\text{Mult } A$ и, значит, является изоморфизмом $\text{Mult } C \rightarrow \text{Mult } A$. ■

Теперь рассмотрим аналог порядковых автоморфизмов для коалгебры C . Пусть дан автоморфизм τ частично упорядоченного множества X . Зададим отображение $\zeta_\tau: C \rightarrow C$, полагая $\zeta_\tau([x, y]) = [\tau(x), \tau(y)]$ для каждого базисного вектора $[x, y]$. В результате получаем автоморфизм ζ_τ коалгебры C . Сопоставление $\tau \rightarrow \zeta_\tau$ является групповым мономорфизмом $\text{Aut } X \rightarrow \text{Aut } C$. Его образ обозначим через $\text{Aut}_C X$.

Предложение 5.3. Отображение Θ осуществляет групповой антиизоморфизм $\text{Aut}_C X \rightarrow \text{Aut}_A X$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \text{Aut } X$, η_τ – автоморфизм алгебры A , определенный после предложения 4.3 и ζ_τ – автоморфизм коалгебры C , введенный выше. Опираясь на предложение 3.1, можно заметить, что Θ переводит ζ_τ в η_τ . Отсюда вытекает требуемый результат. ■

6. Внутренние автоморфизмы коалгебры $\text{Co}(X, F)$. Введем понятие внутреннего автоморфизма коалгебры. Цель раздела – убедиться, что группа внутренних автоморфизмов коалгебры $\text{Co}(X, F)$ антиизоморфна группе внутренних автоморфизмов алгебры $I(X, F)$.

Пусть теперь C – произвольная коалгебра.

Определение 6.1. Автоморфизм ν коалгебры C будем называть внутренним, если ν^* – внутренний автоморфизм двойственной алгебры C^* .

Все внутренние автоморфизмы коалгебры C образуют нормальную подгруппу в $\text{Aut } C$, которую обозначаем через $\text{In}(\text{Aut } C)$.

С этого момента и до конца раздела 7 буква C снова обозначает коалгебру инцидентности $\text{Co}(X, F)$, а A – алгебру инцидентности $I(X, F)$.

Пусть $\nu \in \text{In}(\text{Aut } C)$. Согласно определению, имеем включение $\nu^* \in \text{In}(\text{Aut } C^*)$. И затем можно убедиться, что $\Phi^*(\nu^*) \in \text{In}(\text{Aut } A)$. Таким образом, получаем групповое антиизоморфное вложение $\Theta: \text{In}(\text{Aut } C) \rightarrow \text{In}(\text{Aut } A)$ (см. начало раздела 5).

Исходя из произвольной обратимой функции h алгебры A определим некоторые элементы поля F . Возьмем конкретные элементы x, y множества X , причем $x \leq y$. Для элементов $s, t \in X$ с условием $x \leq s \leq t \leq y$ положим

$$\alpha_{xy}(s, t) = h^{-1}(x, s) \cdot h(t, y). \quad (1)$$

Лемма 6.2. Справедливы записанные ниже утверждения.

1. Для элементов $x, s, r, t, y \in X$ с условием $x \leq s \leq r \leq t \leq y$ верно равенство

$$\alpha_{xy}(s, t) = \alpha_{xr}(s, r) \cdot \alpha_{ry}(r, t).$$

2. Пусть даны $x, p, q, u, v, y \in X$ с условием $x \leq p \leq q < u \leq v \leq y$. Тогда сумма $\sum_{q \leq z \leq u} \alpha_{xz}(p, q) \cdot \alpha_{zy}(u, v)$ равна нулю.

3. Справедливы равенства

$$\alpha_{xx}(x, x) = 1, \quad \sum_{x \leq s \leq y} \alpha_{xy}(s, s) = 0 \quad \text{при } x < y.$$

Доказательство. 1. Согласно формуле (1) имеем

$$\alpha_{xr}(s, r) \cdot \alpha_{ry}(r, t) = h^{-1}(x, s)h(r, r)h^{-1}(r, r) \cdot h(t, y).$$

Осталось заметить, что $h(r, r) \cdot h^{-1}(r, r) = 1$.

2. Можно записать равенства

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq z \leq u} \alpha_{xz}(p, q) \cdot \alpha_{zy}(u, v) &= \sum_{q \leq z \leq u} h^{-1}(x, p) \cdot h(q, z) \cdot h^{-1}(z, u) \cdot h(v, y) = \\ &= h^{-1}(x, p) \cdot h(v, y) \left(\sum_{q \leq z \leq u} h(q, z) \cdot h^{-1}(z, u) \right) = \\ &= h^{-1}(x, p) \cdot h(v, y) \cdot h h^{-1}(q, u) = h^{-1}(x, p) \cdot h(v, y) \cdot 1_A(q, u) = 0 \end{aligned}$$

(здесь 1_A – тождественное отображение алгебры A).

Равенства из утверждения 3 проверяются непосредственно. ■

По-прежнему, h – некоторая обратимая функция в A . Зададим линейное отображение v пространства C , полагая для любого его базисного вектора $[x, y]$:

$$v([x, y]) = \sum_{x \leq s \leq t \leq y} \alpha_{xy}(s, t)[s, t] = \sum_{x \leq s \leq t \leq y} h^{-1}(x, s)[s, t]h(t, y). \quad (2)$$

Обозначим через μ внутренний автоморфизм алгебры A , определяемый её обратимым элементом h .

Предложение 6.3. *Отображение v является внутренним автоморфизмом коалгебры C . Кроме того, верно равенство $\Theta(v) = \mu$.*

Доказательство. Проверим справедливость равенства $\Delta v = (v \otimes v)\Delta$, где, как и раньше, Δ – коумножение в C .

Возьмем произвольный интервал $[x, y]$. Вычисляя, приходим к равенствам

$$\Delta v([x, y]) = \sum_{x \leq s \leq r \leq t \leq y} \alpha_{xy}(s, t)([s, r] \otimes [r, t]), \quad (3)$$

$$(v \otimes v)\Delta([x, y]) = \sum_{x \leq p \leq q \leq z \leq u \leq v \leq y} \alpha_{xz}(p, q)\alpha_{zy}(u, v)([p, q] \otimes [u, v]). \quad (4)$$

Нужно убедиться в совпадении коэффициентов при одинаковых базисных векторах пространства $C \otimes C$, присутствующих в правых частях равенств (3) и (4).

Между слагаемыми в (3) и слагаемыми в (4), для которых $q = z = u$, имеется взаимно однозначное соответствие. Конкретному слагаемому $\alpha_{xy}(s, t)([s, r] \otimes [r, t])$ в (3) соответствует слагаемое $\alpha_{xr}(s, r)\alpha_{ry}(r, t)([s, r] \otimes [r, t])$ в (4). Ввиду леммы 6.2 $\alpha_{xy}(s, t) = \alpha_{xr}(s, r)\alpha_{ry}(r, t)$.

Теперь покажем, что сумма всех слагаемых в (4) с условием $q < u$, равна нулю. Для этого данную сумму мы разобьем на сумму определенных слагаемых. И затем будет нетрудно заметить, что все подобные слагаемые равны нулю.

Возьмем какой-нибудь базисный вектор $[p, q] \otimes [u, v]$, для которого $q < u$. Слагаемых с данным базисным вектором имеется несколько за счет того, что z принимает значения из интервала $[q, u]$. Коэффициент при выбранном векторе равен $\sum_{q \leq z \leq u} \alpha_{xz}(p, q)\alpha_{zy}(u, v)$. Последнее выражение равно нулю по лемме 6.2. Равенство $\Delta v = (v \otimes v)\Delta$ установлено.

Еще требует проверки равенство $\varepsilon v = \varepsilon$. Пусть $[x, y]$ – произвольный базисный вектор коалгебры C . Если $x = y$, то $\varepsilon([x, x]) = 1$ и $v([x, x]) = \alpha_{xx}(x, x)[x, x]$, где $\alpha_{xx}(x, x) = 1$ по лемме 6.2.

Если $x < y$, то $\varepsilon([x, y]) = 0$. По лемме 6.2 имеем $\sum_{x \leq s \leq y} \alpha_{xy}(s, s) = 0$. С учетом равенства (2) отсюда все получается.

Остается проверить, что v – биекция. Сначала убедимся в справедливости равенства $\Theta(v) = \mu$. Потом будет легко установить биективность v .

Пусть $f \in A$ и $x, y \in X$ ($x \leq y$). На основании предложения 3.1 имеем равенство

$$((\Theta(v))(f))(x, y) = \sum_{x \leq s \leq t \leq y} \alpha_{xy}(s, t)f(s, t).$$

Запишем также равенство $(\mu(f))(x, y) = h^{-1}fh(x, y)$ и проведем некоторые вычисления:

$$\begin{aligned} h^{-1}fh(x, y) &= \sum_{x \leq t \leq y} (h^{-1}f)(x, t) \cdot h(t, y) = \sum_{x \leq t \leq y} \left(\sum_{x \leq s \leq t} h^{-1}(x, s)f(s, t) \right) \cdot h(t, y) = \\ &= \sum_{x \leq s \leq t \leq y} h^{-1}(x, s) \cdot h(t, y) \cdot f(s, t) = \sum_{x \leq s \leq t \leq y} \alpha_{xy}(s, t)f(s, t). \end{aligned}$$

Равенство $\Theta(v) = \mu$ действительно имеет место.

Аналогично (1) положим

$$\beta_{xy}(s, t) = h^{-1}(t, y)h(x, s).$$

После чего определим линейное отображение $\varkappa: C \rightarrow C$ посредством равенства

$$\varkappa([x, y]) = \sum_{x \leq s \leq t \leq y} \beta_{xy}(s, t)[s, t].$$

Как и для ν можно проверить, что \varkappa – гомоморфизм коалгебр и $\Theta(\varkappa) = \mu^{-1}$. Теперь из равенств $\Theta(\nu\varkappa) = 1 = \Theta(\varkappa\nu)$ заключаем, что $\nu\varkappa = 1 = \varkappa\nu$ и ν, \varkappa – взаимно обратные изоморфизмы. Последние равенства также проверяются прямыми вычислениями.

Итак, ν – внутренний автоморфизм коалгебры C и $\Theta(\nu) = \mu$. Доказательство предложения завершено. ■

Можно сделать вывод, что все внутренние автоморфизмы коалгебры C могут быть получены исходя из обратимых элементов алгебры A с помощью формул (1) и (2). Следующее утверждение придает точный смысл последней фразе.

Следствие 6.4. *Ограничение отображения Θ на $\text{In}(\text{Aut } C)$ является антиизоморфизмом между группами $\text{In}(\text{Aut } C)$ и $\text{In}(\text{Aut } A)$.*

Положим $\text{In}_0(\text{Aut } C) = \Theta^{-1}(\text{In}_0(\text{Aut } A))$, $\text{In}_1(\text{Aut } C) = \Theta^{-1}(\text{In}_1(\text{Aut } A))$. Перед определением 4.2 записано полупрямое разложение $\text{In}(\text{Aut } A) = \text{In}_1(\text{Aut } A) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } A)$. Принимая теперь во внимание следствие 6.4, запишем такой факт.

Следствие 6.5. *Справедливо полупрямое разложение групп*

$$\text{In}(\text{Aut } C) = \text{In}_1(\text{Aut } C) \rtimes \text{In}_0(\text{Aut } C).$$

7. Строение группы $\text{Aut } C$. У нас есть теорема 4.4 о строении группы $\text{Aut}(I(X, F))$, а также предложения 5.2, 5.3 и следствия 6.4, 6.5. Они позволяют сформулировать главный результат разделов 5–7. Заметим, что обозначение $\text{Aut}_C X$ появилось перед предложением 5.3.

Теорема 7.1. *Пусть A – алгебра инцидентности $I(X, F)$ и C – коалгебра инцидентности $\text{Co}(X, F)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Имеют место равенства*

$$\text{Aut } C = (\text{In}(\text{Aut } C) \cdot \text{Mult } C) \rtimes \text{Aut}_C X = \text{In}_1(\text{Aut } C) \rtimes \text{Mult } C \rtimes \text{Aut}_C X.$$

2. *Группы автоморфизмов $\text{Aut } C$ и $\text{Aut } A$ антиизоморфны. Антиизоморфизм получается, например, с помощью отображения Θ .*

Доказательство. 1. Возьмем произвольный автоморфизм $\varphi \in \text{Aut } C$. Тогда $\Theta(\varphi) \in \text{Aut } A$ (см. лемму 5.1 и начало раздела 5). По теореме 4.4 имеем равенство $\Theta(\varphi) = \mu\psi\tau$, где $\mu \in \text{In}_1(\text{Aut } A)$, $\psi \in \text{Mult } A$, $\tau \in \text{Aut}_A X$. Теперь на основании предложений 5.2, 5.3 и следствия 6.4 можем записать

$$\Theta(\nu) = \mu, \quad \Theta(\lambda) = \psi, \quad \Theta(\sigma) = \tau,$$

где $\nu \in \text{In}_1(\text{Aut } C)$, $\lambda \in \text{Mult } C$, $\sigma \in \text{Aut}_C X$. Откуда $\Theta(\sigma\lambda\nu) = \Theta(\nu)\Theta(\lambda)\Theta(\sigma)$. Следовательно, $\varphi = \sigma\lambda\nu$ или $\varphi = \nu'\lambda'\sigma$ для некоторых $\nu' \in \text{In}_1(\text{Aut } C)$, $\lambda' \in \text{Mult } C$. Утверждение 1 доказано. Одновременно фактически доказано утверждение 2. ■

8. О пространстве $\text{Der}(I(X, F))$. Изложим основные факты о пространстве дифференцирований $\text{Der}(I(X, F))$ алгебры инцидентности $I(X, F)$. Последнюю алгебру по-прежнему обозначаем буквой A .

Сформулируем несколько известных определений.

Пусть R – алгебра над некоторым коммутативным кольцом T . Отображение $d: R \rightarrow R$ называется дифференцированием алгебры R , если d – эндоморфизм T -модуля R , и выполняется равенство $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ для любых $a, b \in R$. Все дифференцирования алгебры R образуют T -модуль. Обозначим его через $\text{Der } R$.

Для элемента $c \in R$ определим отображение d_c из R в R , считая, что $d_c(a) = ac - ca$, $a \in R$. Тогда d_c – дифференцирование, называемое внутренним. Говорят, что d_c определяется элементом c . Внутренние дифференцирования алгебры R образуют подмодуль T -модуля $\text{Der } R$. Для его обозначения используем символ $\text{In}(\text{Der } R)$.

Есть понятие дифференцирования в более общей форме. Пусть N – R - R -бимодуль. Дифференцированием алгебры R со значениями в бимодуле N называется гомоморфизм T -модулей $d: R \rightarrow N$, удовлетворяющий равенству $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ для всех $a, b \in R$. Такое дифференцирование называется внутренним, если найдется элемент $c \in N$ со свойством $d(a) = ac - ca$, $a \in R$.

Будем использовать материал и обозначения, содержащиеся в начале раздела 4. Так, окажется полезным расщепляющееся расширение $A = L_1 \oplus M_1$.

Возьмем произвольное дифференцирование d алгебры A . Как и в случае автоморфизмов, дифференцированию d можно сопоставить матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ относительно прямого разложения $A = L_1 \oplus M_1$. И что важно, $\gamma = 0$ согласно [13, лемма 14.1]. Справедливо следующее утверждение [13, следствия 14.3, 15.4].

Следствие 8.1.

1. Всякое дифференцирование d алгебры инцидентности A имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$. Здесь α – дифференцирование алгебры L_1 , β – дифференцирование алгебры M_1 (как неунитальной алгебры), δ – дифференцирование алгебры L_1 со значениями в L_1 - L_1 -бимодуле M_1 .
2. Если $\delta = 0$, то дополнительно выполняются равенства

$$\beta(ad) = \alpha(a)d + a\beta(d), \quad \beta(cb) = \beta(c)b + c\alpha(b)$$

для всех $a, b \in L_1$ и $c, d \in M_1$.

Обозначим через $\text{In}_0(\text{Der } A)$ (соответственно, $\text{In}_1(\text{Der } A)$) подпространство внутренних дифференцирований алгебры A , определяемых элементами из L_1 (соответственно, из M_1).

Лемма 8.2 [13, лемма 15.1]. *Имеет место прямое разложение пространств*

$$\text{In}(\text{Der } A) = \text{In}_0(\text{Der } A) \oplus \text{In}_1(\text{Der } A).$$

Пусть символ $\text{Add } A$ обозначает подпространство в $\text{Der } A$, состоящее из дифференцирований вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Такие дифференцирования называются аддитивными. Подобно мультипликативным автоморфизмам их можно еще определить, исходя из определенных систем элементов поля F (см. [13]).

Определение 8.3. *Назовем аддитивной системой такую систему элементов $\{c_{xy} \in F \mid x < y\}$, что верно равенство $c_{xy} = c_{xz} + c_{zy}$ для любых $x, z, y \in X$ с условием $x < z < y$.*

Если $d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \text{Add } A$, то для каждого $x, y \in X$ с условием $x < y$ существует элемент $c_{xy} \in F$, для которого $\beta(b) = c_{xy}b$, где b – произвольный элемент из M_{xy} . При этом система элементов $\{c_{xy} \mid x < y\}$ является аддитивной. Здесь нужно учесть, что в силу следствия 8.1 β является дифференцированием алгебры M_1 и эндоморфизмом L_1 - L_1 -бимодуля M_1 .

Получается, что данному аддитивному дифференцированию d можно поставить в соответствие аддитивную систему элементов c_{xy} ($x, y \in X, x < y$) поля F . И обратно, всякая аддитивная система элементов $\{c_{xy} \in F \mid x < y\}$ приводит к аддитивному дифференцированию. Более точно, если $g = (g_{xy}) \in M_1$, то надо положить $d(g) = (c_{xy}g_{xy})$ и $d(f) = 0$ для $f \in L_1$.

На основании изложенного запишем такое утверждение.

Предложение 8.4. *Существует взаимно однозначное соответствие между аддитивными дифференцированиями алгебры A и аддитивными системами элементов поля F .*

В конце раздела запишем теорему, раскрывающую строение пространства $\text{Der } A$.

Теорема 8.5. *Справедливо равенство $\text{Der } A = \text{In}_1(\text{Der } A) \oplus \text{Add } A$.*

9. Пространство дифференцирований $\text{Der } C$. Пусть теперь C – произвольная коалгебра (C, Δ, ε) .

Определение 9.1. *Линейное отображение $d: C \rightarrow C$ называется дифференцированием коалгебры C , если выполняется равенство $\Delta d = (d \otimes 1)\Delta + (1 \otimes d)\Delta$.*

Все дифференцирования коалгебры C образуют F -пространство. Будем называть его пространством дифференцирований коалгебры C . Фиксируем для его обозначения символ $\text{Der } C$.

Как и в случае леммы 5.1, мы опустим доказательство следующей леммы.

Лемма 9.2. *Если $d \in \text{Der } C$, то $d^* \in \text{Der } C^*$.*

Начиная с этого места и до конца статьи C – вновь коалгебра инцидентности $\text{Co}(X, F)$.

Из леммы 9.2 вытекает наличие групповых мономорфизмов $\Gamma: \text{Der } C \rightarrow \text{Der } C^*, d \rightarrow d^*, \Theta: \text{Der } C \rightarrow \text{Der } A$, где A – алгебра инцидентности $I(X, F)$. Здесь нужно еще учесть, что изоморфизм Φ^* отображает $\text{Der } C^*$ на $\text{Der } A$ (отображение Γ появилось в конце раздела 2, а Φ^* и Θ – в начале раздела 3). Теорема 11.1 фактически утверждает, что в действительности Γ и Θ являются изоморфизмами.

В предыдущем разделе были определены аддитивные дифференцирования и соответствующие им аддитивные системы элементов (см. предложение 8.4). Сейчас проведем аналогичные рассуждения относительно коалгебры C .

Пусть дана аддитивная система элементов $\{c_{xy} \in F \mid x < y\}$ (см. определение 8.3). Определим отображение $\lambda: C \rightarrow C$, полагая $\lambda([x, y]) = c_{xy}[x, y]$ для любого базисного вектора $[x, y]$ пространства C с условием $x < y$, и $\lambda([x, x]) = 0$ для любого x . Тогда λ – дифференцирование коалгебры C . Назовем его аддитивным дифференцированием, соответствующим аддитивной системе $\{c_{xy} \in F \mid x < y\}$.

Все аддитивные дифференцирования образуют пространство, которое мы обозначим через $\text{Add } C$.

Предложение 9.3. *Пространства $\text{Add } A$ и $\text{Add } C$ изоморфны. Отображение Θ является изоморфизмом этих пространств.*

Доказательство. Можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства предложения 5.2. ■

10. Внутренние дифференцирования коалгебры $\text{Co}(X, F)$. Введем понятие внутреннего дифференцирования коалгебры инцидентности $C = \text{Co}(X, F)$. Следующее определение имеет смысл и для произвольной коалгебры.

Определение 10.1. Дифференцирование ν коалгебры C назовем внутренним, если ν^* – внутреннее дифференцирование двойственной алгебры C^* .

Все внутренние дифференцирования коалгебры C образуют подпространство, которое мы обозначим через $\text{In}(\text{Der } C)$.

Пусть $\nu \in \text{In}(\text{Der } C)$. Несложно убедиться, что в таком случае $\Phi^*(\nu^*) \in \text{In}(\text{Der } A)$. Поэтому мы располагаем изоморфным вложением пространств

$$\Theta: \text{In}(\text{Der } C) \rightarrow \text{In}(\text{Der } A).$$

Цель дальнейших рассуждений показать, что эти пространства изоморфны. И таким образом можно будет утверждать, что дифференцирование ν коалгебры C является внутренним в точности тогда, когда $\Theta(\nu)$ – внутреннее дифференцирование алгебры A .

Пусть g – некоторая функция из кольца A и μ – внутреннее дифференцирование, определяемое этой функцией.

Для любых $x, y \in X$ ($x \leq y$) положим

$$\nu([x, y]) = \sum_{x \leq u \leq y} [x, u]g(u, y) - \sum_{x \leq v \leq y} g(x, v)[v, y]. \quad (5)$$

Получили линейное отображение ν пространства C .

Предложение 10.2. Отображение ν является дифференцированием коалгебры C . Кроме того, $\Theta(\nu) = \mu$.

Доказательство. Требуется проверить, что верно равенство $\Delta\nu = (\nu \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \nu)\Delta$.

Возьмем произвольный базисный вектор $[x, y]$ пространства C . Вычисляя, находим, что имеют место равенства

$$\Delta\nu([x, y]) = \sum_{x \leq s \leq u \leq y} g(u, y)([x, s] \otimes [s, u]) - \sum_{x \leq v \leq t \leq y} g(x, v)([v, t] \otimes [t, y]), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & ((\nu \otimes 1)\Delta + (1 \otimes \nu)\Delta)([x, y]) = \\ & = \left[\sum_{x \leq v \leq p \leq y} g(p, y)([x, v] \otimes [v, p]) - \sum_{x \leq \ell \leq z \leq y} g(x, \ell)([\ell, z] \otimes [z, y]) \right] + \\ & + \left[\sum_{x \leq k \leq z \leq y} g(k, z)([x, k] \otimes [z, y]) - \sum_{x \leq v \leq q \leq y} g(v, q)([x, v] \otimes [q, y]) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Выражение в первой паре квадратных скобок в (7) совпадает с правой частью равенства (6), а выражение во второй паре квадратных скобок равно нулю.

Почему $\Theta(\nu) = \mu$? Пусть $f \in A$, x, y – элементы из X с условием $x \leq y$. На основании предложения 3.1 получаем из (5) равенство

$$((\Theta(\nu))(f))(x, y) = \sum_{x \leq u \leq y} g(u, y)f(x, u) - \sum_{x \leq v \leq y} g(x, v)f(v, y).$$

Его правая часть совпадает с правой частью равенства $(\mu(f))(x, y) = (fg - gf)(x, y)$. ■

Опираясь на предложения 9.3 и 10.2, можем записать следующий результат.

Следствие 10.3. Существует групповой изоморфизм $\Theta: \text{In}(\text{Der } C) \rightarrow \text{In}(\text{Der } A)$.

Получается, что любое внутреннее дифференцирование коалгебры C имеет вид, указанный в (5).

Перед следствием 6.5 были определены подгруппы внутренних автоморфизмов $\text{In}_0(\text{Aut } C)$ и $\text{In}_1(\text{Aut } C)$. Похожим образом можно ввести подпространства внутренних дифференцирований $\text{In}_0(\text{Der } C)$ и $\text{In}_1(\text{Der } C)$ коалгебры C . И тогда из леммы 8.2 и следствия 10.3 выводится такое утверждение.

Следствие 10.4. Справедливо прямое разложение F -пространств

$$\text{In}(\text{Der } C) = \text{In}_0(\text{Der } C) \oplus \text{In}_1(\text{Der } C).$$

11. Описание пространства дифференцирований $\text{Der } C$. Запишем теорему, содержащую полную информацию о строении пространства дифференцирований коалгебры C .

Теорема 11.1. Пусть A – алгебра инцидентности $I(X, F)$ и C – коалгебра инцидентности $\text{Co}(X, F)$.

1. Имеют место равенства $\text{Der } C = \text{In}(\text{Der } C) + \text{Add } C = \text{In}_1(\text{Der } C) \oplus \text{Add } C$.

2. Пространства дифференцирований $\text{Der } C$ и $\text{Der } A$ изоморфны.

Доказательство. 1. Возьмем произвольное дифференцирование d коалгебры C . Тогда $\Theta(d) \in \text{Der } A$; см. лемму 9.2 и текст после её доказательства. И можно записать $\Theta(d) = \mu + \psi$, где $\mu \in \text{In}_1(\text{Der } A)$, $\psi \in \text{Add } A$ (теорема 8.5). Ввиду следствия 10.3 и предложения 9.3 найдутся дифференцирования $v \in \text{In}_1(\text{Der } C)$ и $\lambda \in \text{Add } C$, для которых $\Theta(v) = \mu$ и $\Theta(\lambda) = \psi$. Откуда $\Theta(v + \lambda) = \mu + \psi = \Theta(d)$ и, значит, $d = v + \lambda$.

2. Искомым изоморфизмом служит Θ . Это видно из пункта 1 доказательства, а также из предложения 9.3 и следствия 10.3. ■

Открытые вопросы.

1. Можно ли определить в каком-то смысле внутренний автоморфизм произвольной коалгебры C (в частности, коалгебры инцидентности C) в терминах самой коалгебры, т. е. без обращения к двойственной алгебре C^* ?

2. Аналогичный вопрос имеет смысл и относительно внутреннего дифференцирования коалгебры C (см. определения 6.1 и 10.1).

12. Заключение. В данной статье найдено строение группы автоморфизмов и пространства дифференцирований коалгебры инцидентности $\text{Co}(X, F)$, где X – произвольное частично упорядоченное множество и F – некоторое поле. Также установлены связи указанных группы и пространства с группой автоморфизмов и пространством дифференцирований алгебры инцидентности $I(X, F)$.

Все это можно применять при исследовании автоморфизмов и дифференцирований различных обобщений коалгебр инцидентности и близких к ним объектов.

Так, более широкий класс по сравнению с коалгебрами инцидентности образуют редуцированные коалгебры инцидентности. Конкретная такая коалгебра – это некоторая факторкоалгебра коалгебры инцидентности. Она определяется с помощью некоторого отношения эквивалентности на множестве всех интервалов частично упорядоченного множества X . Равенства в конце раздела 2 фактически индуцируют отображения коумножения и коединицы редуцированной коалгебры инцидентности.

Как известно, биалгебры и, в частности, алгебры Хопфа являются прежде всего коалгебрами. Теория коалгебр, биалгебр и алгебр Хопфа инцидентности изложена в книге [1]. Нахождение строения групп автоморфизмов и пространств дифференцирований редуцированных коалгебр, биалгебр и алгебр Хопфа инцидентности кажется весьма важной и перспективной задачей.

Список литературы

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York: Marcel Dekker; 1997. 335 p. <https://doi.org/10.1017/S00130915000-20368>
2. Aquiar M., Santos W.F. Galois connections for incidence Hopf algebras of partially ordered sets. *Advances in Mathematics*. 2000;151(1):71–100. <https://doi.org/10.1006/aima.1999.1864>
3. Schmitt W.R. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 1994;96(3):299–330. [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(94\)90105-8](https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90105-8)
4. Drozd Y., Kolesnik P. Automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 2007;35(12):3851–3854. <https://doi.org/10.1080/00927870701511756>
5. Brusamarello R., Lewis D.W. Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear and Multilinear Algebra*. 2011;59(11):1247–1267. <https://doi.org/10.1080/03081087.2010.496113>
6. Fornaroli É.Z., Pezzott R.E.M. Classification of involutions on finitary incidence algebras of non-connected posets. *arXiv:2209.09690*. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.09690>
7. Khrypchenko M. Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2010;9(2):78–97.
8. Brusamarello R., Fornaroli É.Z., Santulo E.A. Jr. Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 2015;43(2):726–736. <https://doi.org/10.1080/00927872.2013.847951>
9. Fornaroli É.Z., Pezzott R.E.M. Additive derivations of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 2021;49(4):1816–1828. <http://doi.org/10.1080/00927872.2020.1854775>
10. Kaygorodov I., Khrypchenko M., Wei F. Higher Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Algebras and Representation Theory*. 2019;22:1331–1341. <https://doi.org/10.1007/s10468-018-9822-4>
11. Khrypchenko M. Derivations of Finitary Incidence Rings. *Communications in Algebra*. 2012;40(7):2503–2522. <http://doi.org/10.1080/00927872.2011.580441>
12. Khrypchenko M. Isomorphisms and derivations of partial flag incidence algebras. *International Journal of Algebra and Computation*. 2022;32(1):193–209. <https://doi.org/10.1142/S0218196722500084>
13. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Rings: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2305.02984*. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.02984>
14. Xiao Z. Jordan derivations of incidence algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 2015;45(4):1357–1368. <http://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-4-1357>

15. Yang Y., Wei F. Nonlinear Lie-Type derivations of finitary incidence algebras and related topics. *arXiv:2105.10685*. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.10685>
16. Leroux P., Sarraillé J. Structure of incidence algebras of graphs. *Communications in Algebra*. 1981;9(15):1479–1517.
17. Tapkin D.T. Isomorphisms of formal matrix incidence rings. *Russian Mathematics*. 2017;61:73–79. <https://doi.org/10.3103/S1066369X1712009X>
18. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Coalgebras: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2312.05504*. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.05504>
19. Krylov P., Tuganbaev A. Formal Matrices. Berlin: Springer-Verlag; 2017. 156 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53907-2>

References

1. Spiegel E., O'Donnell C.J. Incidence Algebras. New York: Marcel Dekker; 1997. 335 p. <https://doi.org/10.1017/S00130915000-20368>
2. Aquiar M., Santos WF. Galois connections for incidence Hopf algebras of partially ordered sets. *Advances in Mathematics*. 2000;151(1):71–100. <https://doi.org/10.1006/aima.1999.1864>
3. Schmitt WR. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*. 1994;96(3):299–330. [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(94\)90105-8](https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90105-8)
4. Drozd Y., Kolesnik P. Automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 2007;35(12):3851–3854. <https://doi.org/10.1080/00927870701511756>
5. Brusamarello R., Lewis DW. Automorphisms and involutions on incidence algebras. *Linear and Multilinear Algebra*. 2011;59(11):1247–1267. <https://doi.org/10.1080/03081087.2010.496113>
6. Fornaroli ÉZ., Pezzott REM. Classification of involutions on finitary incidence algebras of non-connected posets. *arXiv:2209.09690*. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.09690>
7. Khrypchenko M. Automorphisms of finitary incidence rings. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2010;9(2):78–97.
8. Brusamarello R., Fornaroli ÉZ., Santulo EA. Jr. Multiplicative automorphisms of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 2015;43(2):726–736. <https://doi.org/10.1080/00927872.2013.847951>
9. Fornaroli ÉZ., Pezzott REM. Additive derivations of incidence algebras. *Communications in Algebra*. 2021;49(4):1816–1828. <http://doi.org/10.1080/00927872.2020.1854775>
10. Kaygorodov I., Khrypchenko M., Wei F. Higher Derivations of Finitary Incidence Algebras. *Algebras and Representation Theory*. 2019;22:1331–1341. <https://doi.org/10.1007/s10468-018-9822-4>
11. Khrypchenko M. Derivations of Finitary Incidence Rings. *Communications in Algebra*. 2012;40(7):2503–2522. <http://doi.org/10.1080/00927872.2011.580441>
12. Khrypchenko M. Isomorphisms and derivations of partial flag incidence algebras. *International Journal of Algebra and Computation*. 2022;32(1):193–209. <https://doi.org/10.1142/S0218196722500084>
13. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Rings: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2305.02984*. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.02984>
14. Xiao Z. Jordan derivations of incidence algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 2015;45(4):1357–1368. <http://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-4-1357>
15. Yang Y., Wei F. Nonlinear Lie-Type derivations of finitary incidence algebras and related topics. *arXiv:2105.10685*. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.10685>
16. Leroux P., Sarraillé J. Structure of incidence algebras of graphs. *Communications in Algebra*. 1981;9(15):1479–1517.
17. Tapkin DT. Isomorphisms of formal matrix incidence rings. *Russian Mathematics*. 2017;61:73–79. <https://doi.org/10.3103/S1066369X1712009X>
18. Krylov P., Tuganbaev A. Incidence Coalgebras: Automorphisms and Derivations. *arXiv:2312.05504*. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2312.05504>
19. Krylov P., Tuganbaev A. Formal Matrices. Berlin: Springer-Verlag; 2017. 156 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53907-2>

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.09.2024

Поступила после рецензирования 01.11.2024

Принята к публикации 07.11.2024

Received September 15, 2024

Revised November 1, 2024

Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кайгородов Евгений Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информатики, Горно-Алтайский государственный университет, г. Горно-Алтайск, Россия

Крылов Петр Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры, Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск, Россия

Туганбаев Аскар Аканович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS


Evgeniy V. Kaigorodov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Computer Science, Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, Russia

Piotr A. Krylov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Algebra, National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia

Askar A. Tuganbaev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором

Орешина М. Н. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Липецкий государственный технический университет,
Россия, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30
m_oreshina@mail.ru

Аннотация. В гильбертовом пространстве рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка, в котором коэффициент при неизвестной функции является неограниченным нормальным оператором. Точное решение такой задачи выражается через операторную экспоненту. Предлагается спектральный метод построения приближенного решения, основанный на вычислении линейной комбинации значений резольвенты оператора в различных точках его резольвентного множества. Для этого берется скалярная рациональная функция, приближающая экспоненту на спектре оператора, полученная рациональная функция раскладывается в сумму элементарных дробей, и затем в нее подставляется оператор. Доказаны теоремы об оценке абсолютной и относительной точности приближения. Приводятся результаты численных экспериментов.


Ключевые слова: спектральный метод, нормальный оператор, операторная экспонента, рациональная функция от оператора, аппроксимация Паде, оценки погрешности

Для цитирования: Орешина М. Н. 2024. Приближенное решение линейного дифференциального уравнения с нормальным оператором. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 286–295.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-286-295

Original Research

Approximate Solution of a Linear Differential Equation with a Normal Operator

Maria N. Oreshina 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Lipetsk State Technical University,
30 Moskovskaya St., Lipetsk 398055, Russia
m_oreshina@mail.ru

Abstract. In a Hilbert space, we consider the Cauchy problem for a first-order linear differential equation. The coefficient at the unknown function in the equation is an unbounded normal operator. The exact solution of such a problem is expressed in terms of an operator exponential. We suggest a spectral method for constructing an approximate solution based on the calculation of some rational function of the normal operator. Namely, we take a scalar rational function approximating the exponential function on the spectrum of the operator, then we expand the obtained rational function into the sum of elementary fractions and substitute the operator into it. As a result we obtain a linear combination of values of the resolvent of the normal operator at various points of its resolvent set. Theorems on the estimation of the absolute and relative accuracy of the approximation are proved. A variant of the proposed approach for a non-homogeneous equation with a special free term is also discussed. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: Spectral Method, Normal Operator, Operator Exponential, Rational Function of Operator, Padé Approximation, Error Estimates

For citation: Oreshina M. N. 2024. Approximate Solution of a Linear Differential Equation with a Normal Operator. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 286–295. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-286-295

1. Введение. В статье обсуждается решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + f(t) \quad (1)$$

с точки зрения функционального исчисления от оператора N . Предполагается, что оператор N является нормальным и может быть неограниченным. Как известно, для нормального оператора в гильбертовом пространстве справедлива [1, 2, 3] спектральная теорема, сопоставляющая каждому такому оператору спектральное разложение – семейство операторов, представляющих собой разложение единицы, сосредоточенное на его спектре. Это позволяет представлять функции от оператора N в виде интегралов по спектральной мере. Основными для нас примерами таких функций являются операторная экспонента e^{Nt} ,

возникающая в формулах для точного решения уравнения (1), а также вспомогательная функция $\theta_t(N)$, которую мы будем использовать при решении уравнения (1) в случае правой части вида $f(t) = bv(t)$, где b – фиксированный вектор, а v – заданная скалярная функция.

В настоящей работе предлагается численный метод нахождения таких функций от оператора N , позволяющий получить приближенное решение уравнения (1). Для этого оператор e^{Nt} или $\theta_t(N)$ заменяется рациональной функцией $r_t(N)$. Отметим, что для вычисления $r_t(N)$ достаточно уметь находить линейную комбинацию значений резольвенты оператора N в корнях знаменателя функции r_t и использовать интегральное представление не требуется. Тем не менее спектральное разложение нормального оператора позволяет получить априорные оценки точности приближения.

Отметим, что использование такого подхода для решения уравнений в частных производных, записанных в абстрактной форме (1), позволяет не переходить в конечномерное пространство по пространственной переменной и получить численно-аналитическое решение. Это отличает его от проекционных методов, основанных на методе Галеркина [4, 5, 6], и неявных разностных схем [7, 8, 9]. Кроме того, в случае однородного уравнения и неоднородного уравнения с правой частью вида $f(t) = bv(t)$ метод позволяет сразу вычислить решение в точке t , без нахождения решения в предыдущих точках.

Подобный подход для решения уравнения первого порядка с самосопряженным операторным коэффициентом и скалярной выходной функцией $y(t) = \langle x(t), l \rangle$, где l – заданный вектор, обсуждался в [10], а для уравнений второго порядка специального вида с самосопряженным операторным коэффициентом – в [11] и [12].

Изложение статьи построено следующим образом. В п. 2 уточняется постановка задачи и приводятся формулы для представления точного решения с использованием разложения единицы, порожденного оператором N . В п. 3 излагается основная идея метода, формулируются и доказываются теоремы об оценке абсолютной и относительной погрешности приближения. В п. 4 приводится пример решения дифференциального уравнения в частных производных предложенным методом.

2. Точное решение. Пусть \mathbf{H} – гильбертово пространство, а $N: D(N) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$ – линейный неограниченный оператор. Будем предполагать, что оператор N является нормальным [1], то есть, что он плотно определен, замкнут и удовлетворяет условию $NN^* = N^*N$, где N^* – сопряженный оператор. Кроме того, будем предполагать, что для некоторого действительного числа $\gamma < +\infty$ спектр оператора N лежит слева от прямой $\lambda = \gamma$, то есть

$$\forall \lambda \in \sigma(N) \quad \operatorname{Re} \lambda \leq \gamma. \quad (2)$$

Пусть $a \in \mathbf{H}$ – заданный вектор, а $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{H}$ – заданная непрерывная функция. Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Nz(t) + f(t), \\ z(0) &= a, \end{aligned} \quad (3)$$

и соответствующую ей задачу Коши для однородного уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Nx(t), \\ x(0) &= a. \end{aligned} \quad (4)$$

Хорошо известно, что решение задачи (3) можно представить в виде $z(t) = x(t) + y(t)$, где x – решение однородной задачи (4), а y – решение неоднородной задачи с нулевым начальным условием:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ny(t) + f(t), \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Мы будем также обсуждать вариант задачи (3) или (5) с правой частью специального вида $f(t) = bv(t)$, где $b \in \mathbf{H}$ – заданный вектор, а $v: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – заданная (скалярная) непрерывная функция, то есть нам понадобится решение задачи

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= Ny(t) + bv(t), \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как оператор N является нормальным, для него существует [1, 2] единственное разложение единицы E на борелевских подмножествах его спектра $\sigma(N)$ такое, что для оператора N справедливо представление

$$N = \int_{\sigma(N)} \xi dE(\xi).$$

Разложение единицы E , порожденное оператором N , позволяет определить функциональное исчисление, которое каждой измеримой по Борелю функции g сопоставляет плотно определенный замкнутый оператор

$$g(N) = \int_{\sigma(N)} g(\xi) dE(\xi)$$

с областью определения

$$D(g(N)) = \left\{ \varphi \in \mathbf{H} : \int_{\sigma(N)} |g(\xi)|^2 dE_{\varphi\varphi}(\xi) < \infty \right\},$$

где $E_{\varphi\varphi}(\xi) = \langle E(\xi)\varphi, \varphi \rangle$. При этом для всех $\varphi \in D(g(N))$ выполняется [1] соотношение

$$\|g(N)\varphi\|^2 = \int_{\sigma(N)} |g(\xi)|^2 dE_{\varphi\varphi}(\xi). \quad (7)$$

Если функция g является ограниченной на $\sigma(N)$, то оператор $g(N)$ ограничен, при этом справедливо [1] неравенство

$$\|g(N)\| \leq \sup_{\xi \in \sigma(N)} |g(\xi)|. \quad (8)$$

Если функция g является ограниченной и непрерывной на $\sigma(N)$, то в (8) имеет место равенство.

Определение 2.1. Операторным фундаментальным решением однородной задачи (4) будем называть функцию

$$U(t) = \exp_t(N) = \int_{\sigma(N)} e^{\xi t} dE(\xi),$$

где $\exp_t(\xi) = e^{\xi t}$.

Заметим, что так как функция $\xi \mapsto e^{\xi t}$ ограничена и непрерывна на $\sigma(N)$, а в силу (2) справедливо неравенство $|e^{\xi t}| \leq e^{\gamma t}$ для всех $\xi \in \sigma(N)$, то операторы $U(t)$ ограничены и

$$\|U(t)\| = \sup_{\xi \in \sigma(N)} |e^{\xi t}| \leq e^{\gamma t}. \quad (9)$$

Определение 2.2. Функцию $x(t) = U(t)a = \exp_t(N)a$ будем называть обобщенным решением однородной задачи (4), функцию

$$y(t) = \int_0^t U(t-\tau)f(\tau) d\tau \quad (10)$$

обобщенным решением неоднородной задачи (5), а функцию

$$z(t) = U(t)a + \int_0^t U(t-\tau)f(\tau) d\tau \quad (11)$$

обобщенным решением неоднородной задачи (3).

Для неоднородной задачи (6) введем в рассмотрение вспомогательную скалярную функцию

$$\theta_t(\xi) = \int_0^t e^{\xi(t-\tau)}v(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Теорема 2.1. Обобщенное решение задачи (6) можно представить в виде

$$y(t) = \theta_t(N)b. \quad (13)$$

Доказательство. Из формулы (10) в случае $f(t) = bv(t)$ следует, что

$$y(t) = \int_0^t U(t-\tau)bv(\tau) d\tau = \int_0^t \int_{\sigma(N)} e^{\xi(t-\tau)} dE(\xi) bv(\tau) d\tau = \int_0^t \int_{\sigma(N)} e^{\xi(t-\tau)}v(\tau) dE(\xi) d\tau b.$$

Поменяем пределы интегрирования. В результате получим

$$y(t) = \int_{\sigma(N)} \int_0^t e^{\xi(t-\tau)}v(\tau) d\tau dE(\xi) b = \int_{\sigma(N)} \theta_t(\xi) dE(\xi) b = \theta_t(N)b.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в силу ограниченности функции $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$ на $\sigma(N)$ операторы $\theta_t(N)$ также ограничены.

3. Приближенное решение. Для построения приближенного решения при каждом фиксированном $t > 0$ приблизим на $\sigma(N)$ функцию $\xi \mapsto \exp_t(\xi)$ рациональной функцией

$$r_t^1(\xi) = p_0^1 + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{p_k^1}{\xi - q_k^1}$$

с корнями знаменателя q_k^1 вне $\sigma(N)$. В качестве приближенного операторного фундаментального решения возьмем функцию

$$\tilde{U}(t) = r_t^1(N) = p_0^1 \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{K_1} p_k^1 (N - q_k^1 \mathbf{1})^{-1}, \quad (14)$$

в качестве приближенного решения однородной задачи (4) — функцию

$$\tilde{x}(t) = \tilde{U}(t)a = r_t^1(N)a, \quad (15)$$

а в качестве приближенного решения неоднородной задачи (5) — функцию

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t \tilde{U}(t-\tau)f(\tau) d\tau = \int_0^t r_{t-\tau}^1(N)f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

В случае неоднородной задачи (6) можно при каждом фиксированном $t > 0$ дополнительно использовать еще одну рациональную функцию

$$r_t^2(\xi) = p_0^2 + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{p_k^2}{\xi - q_k^2}, \quad q_k^2 \notin \sigma(N),$$

приближающую функцию $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$ на $\sigma(N)$. Теперь в качестве приближенного решения неоднородной задачи (6) возьмем функцию

$$\tilde{y}(t) = r_t^2(N)b. \quad (17)$$

Для оценки абсолютной точности полученного приближения предлагается использовать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Зафиксируем $t > 0$. Пусть функция $\xi \mapsto r_t^1(\xi)$ приближает функцию $\xi \mapsto \exp_t(\xi)$ на $\sigma(N)$ с абсолютной точностью $\varepsilon(t) \geq 0$, т. е.*

$$|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leq \varepsilon(t), \quad \xi \in \sigma(N). \quad (18)$$

Тогда

(а) для приближенного операторного фундаментального решения (14) справедлива оценка

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| \leq \varepsilon(t);$$

(б) для приближенного решения (15) однородной задачи (4) справедлива оценка

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon(t)\|a\|;$$

(с) для приближенного решения (16) неоднородной задачи (5) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\|f(\tau)\| d\tau.$$

Если известна функция $\xi \mapsto r_t^2(\xi)$, приближающая функцию $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$ на $\sigma(N)$ с абсолютной точностью $\varepsilon_2(t) \geq 0$, т. е.

$$|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leq \varepsilon_2(t), \quad \xi \in \sigma(N), \quad (19)$$

то для приближенного решения (17) неоднородной задачи (6) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \varepsilon_2(t)\|b\|. \quad (20)$$

Доказательство. (а) Возьмем $g_t(\xi) = r_t^1(\xi) - \exp_t(\xi)$. Очевидно, функция g_t ограничена на $\sigma(N)$. Воспользуемся оценками (8) и (18), в результате получим

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| = \|r_t^1(N) - \exp_t(N)\| = \|g_t(N)\| \leq \sup_{\xi \in \sigma(N)} |g_t(\xi)| \leq \varepsilon(t).$$

(b) Следует из (а): $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| = \|\tilde{U}(t)a - U(t)a\| \leq \|\tilde{U}(t) - U(t)\| \cdot \|a\| \leq \varepsilon(t)\|a\|$.

(c) Из формул (10) и (16) с учетом (а) следует, что

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| = \left\| \int_0^t (\tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau))f(\tau) d\tau \right\| \leq \int_0^t \left\| \tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau) \right\| \|f(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau) \|f(\tau)\| d\tau.$$

Докажем теперь оценку (20). Возьмем $g_t(\xi) = r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)$. Очевидно, функция g_t ограничена на $\sigma(N)$. Воспользуемся оценками (8) и (19), в результате получим

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| = \|r_t^2(N)b - \theta_t(N)b\| = \|g_t(N)b\| \leq \|g_t(N)\| \cdot \|b\| \leq \varepsilon_2(t)\|b\|.$$

Теорема доказана.

Перейдем к обсуждению относительной точности приближения.

Теорема 3.2. Зафиксируем $t > 0$. Пусть функция $\xi \mapsto r_t^1(\xi)$ приближает функцию $\xi \mapsto \exp_t(\xi)$ на $\sigma(N)$ с относительной точностью $\varepsilon(t) \geq 0$, т. е.

$$|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leq \varepsilon(t)|e^{\xi t}|, \quad \xi \in \sigma(N). \quad (21)$$

Тогда

(а) для приближенного операторного фундаментального решения (14) справедлива оценка

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| \leq \varepsilon(t)\|U(t)\|;$$

(b) для приближенного решения (15) однородной задачи (4) справедлива оценка

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq \varepsilon(t)\|x(t)\|;$$

(c) для приближенного решения (16) неоднородной задачи (5) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\|U(t-\tau)f(\tau)\| d\tau \leq e^{\gamma t} \int_0^t \varepsilon(t-\tau)e^{-\gamma\tau}\|f(\tau)\| d\tau.$$

Если известна функция $\xi \mapsto r_t^2(\xi)$, приближающая функцию $\xi \mapsto \theta_t(\xi)$ на $\sigma(N)$ с относительной точностью $\varepsilon_2(t) \geq 0$, т. е.

$$|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leq \varepsilon_2(t)|\theta_t(\xi)|, \quad \xi \in \sigma(N), \quad (22)$$

то для приближенного решения (17) неоднородной задачи (6) справедлива оценка

$$\|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq \varepsilon_2(t)\|y(t)\|. \quad (23)$$

Доказательство. (а) Возьмем $g_t(\xi) = r_t^1(\xi) - \exp_t(\xi)$. Воспользуемся оценками (8), (9) и (21). В результате получим

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\| = \|g_t(N)\| \leq \sup_{\xi \in \sigma(N)} |g_t(\xi)| \leq \varepsilon(t) \sup_{\xi \in \sigma(N)} |e^{\xi t}| = \varepsilon(t)\|U(t)\|.$$

(b) Возьмем $g_t(\xi) = r_t^1(\xi) - \exp_t(\xi)$. Воспользуемся формулой (7) и оценкой (21), в результате получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(t) - x(t)\|^2 &= \|\tilde{U}(t)a - U(t)a\|^2 = \|g_t(N)a\|^2 = \int_{\sigma(N)} |g_t(\xi)|^2 dE_{aa}(\xi) \leq \int_{\sigma(N)} (\varepsilon(t))^2 |e^{\xi t}|^2 dE_{aa}(\xi) = \\ &= (\varepsilon(t))^2 \|U(t)a\|^2 = (\varepsilon(t))^2 \|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

(c) Из формул (9), (10), (16) и (21) следует, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| &= \left\| \int_0^t (\tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau))f(\tau) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^t \left\| \tilde{U}(t-\tau) - U(t-\tau) \right\| \|f(\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \varepsilon(t-\tau)e^{\gamma(t-\tau)} \|f(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Докажем теперь оценку (23). Возьмем $g_t(\xi) = r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)$. Воспользуемся формулой (7) и оценкой (22), в результате получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t) - y(t)\|^2 &= \|g_t(N)b\|^2 = \int_{\sigma(N)} |g_t(\xi)|^2 dE_{bb}(\xi) \leq \int_{\sigma(N)} (\varepsilon_2(t))^2 |\theta_t(\xi)|^2 dE_{bb}(\xi) = \\ &= (\varepsilon_2(t))^2 \|\theta_t(N)b\|^2 = (\varepsilon_2(t))^2 \|y(t)\|^2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4. Численные эксперименты. Продемонстрируем применение предложенного в п. 3 метода для приближенного решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(t, s) + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial s} u(t, s) + \alpha_2 u(t, s) + b(s)v(t) \quad (24)$$

с начальным условием

$$u(0, s) = a(s) \quad (25)$$

и периодическими краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= u(t, 2\pi), \\ \frac{\partial}{\partial s} u(t, s)|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s} u(t, s)|_{s=2\pi}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $a, b \in L_2[0, 2\pi]$, а $v: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция.

В гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = L_2[0, 2\pi]$ со скалярным произведением

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_1(s) \overline{z_2(s)} ds$$

рассмотрим оператор

$$N = \frac{d^2}{ds^2} + \alpha_1 \frac{d}{ds} + \alpha_2$$

с областью определения $D(N) = \{z \in W_2^2[0, 2\pi] : z(0) = z(2\pi), z'(0) = z'(2\pi)\}$. Положим $z(t)(s) = u(t, s)$ и запишем задачу (24)–(26) в виде

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Nz(t) + bv(t), \\ z(0) &= a. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что оператор N является нормальным. Отметим, что собственные функции этого оператора имеют вид $\psi_k(s) = e^{iks}$, $k \in \mathbb{Z}$, а его спектр есть множество $\sigma(N) = \{\xi_k = -k^2 + ia_1k + a_2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Таким образом, используя разложение по собственным функциям, можно получить точные решения основной и вспомогательных задач для последующего сравнения с приближенными решениями.

В соответствии с п. 2 представим искомую функцию в виде $z(t) = x(t) + y(t)$, где $x(t) = \exp_t(N)a$ – решение задачи (4), а $y(t) = \theta_t(N)b$ – решение задачи (6). Для $t > 0$ возьмем две рациональные функции

$$r_t^1(\xi) = p_0^1 + \sum_{k=1}^{K_1} \frac{p_k^1}{\xi - q_k^1} \approx \exp_t(\xi), \quad r_t^2(\xi) = p_0^2 + \sum_{k=1}^{K_2} \frac{p_k^2}{\xi - q_k^2} \approx \theta_t(\xi), \quad \xi \in \sigma(N), \quad q_k^1, q_k^2 \notin \sigma(N),$$

в результате получим приближенное решение

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \tilde{x}(t) = r_t^1(N)a = p_0^1 a + \sum_{k=1}^{K_1} p_k^1 (N - q_k^1 \mathbf{1})^{-1} a, \\ y(t) &\approx \tilde{y}(t) = r_t^2(N)b = p_0^2 b + \sum_{k=1}^{K_2} p_k^2 (N - q_k^2 \mathbf{1})^{-1} b, \\ z(t) &\approx \tilde{z}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, для нахождения $\tilde{z}(t)$ необходимо посчитать линейные комбинации значений резольвенты оператора N в нулях знаменателей выбранных рациональных функций, примененных к векторам a и

b. Для резольвенты $(N - \lambda 1)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(N)$, входящей в эти линейные комбинации, справедлива явная формула

$$(N - \lambda 1)^{-1}w(s) = \frac{C_1(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_0^s e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1+C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi + \frac{C_2(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_s^{2\pi} e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1+C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi + \frac{C_3(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_0^s e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1-C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi + \frac{C_4(\lambda, s)}{C_0(\lambda)} \int_s^{2\pi} e^{\frac{1}{2}\xi(\alpha_1-C_0(\lambda))} w(\xi) d\xi, \quad (28)$$

где

$$C_1(\lambda, s) = \frac{e^{(\pi-\frac{s}{2})(C_0(\lambda)+\alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda)+\alpha_1)}}, \quad C_2(\lambda, s) = \frac{e^{-\frac{s}{2}(C_0(\lambda)+\alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda)+\alpha_1)}}, \quad C_3(\lambda, s) = \frac{e^{\frac{s}{2}(C_0(\lambda)-\alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda)-\alpha_1)}},$$

$$C_4(\lambda, s) = \frac{e^{(\pi+\frac{s}{2})(C_0(\lambda)-\alpha_1)}}{1 - e^{\pi(C_0(\lambda)-\alpha_1)}}, \quad C_0(\lambda) = \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2 + 4\lambda}.$$

Подчеркнем, что при использовании предложенного метода для фиксированного $t > 0$ строится приближение для вектора $z(t) \in \mathbb{H}$. При этом из формул (27) и (28) видно, что в результате приближение для $u(t, s) = z(t)(s)$ получается в виде аналитической функции от s .

Зададим входные параметры уравнения: $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -\frac{1}{4}, a(s) = (2\pi s - s^2) \sin 2s + \cos 10s, b(s) = 20 \sin \frac{s}{2}, v(t) = e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \mu = 1, \sigma = 1/5$, см. рис 1.

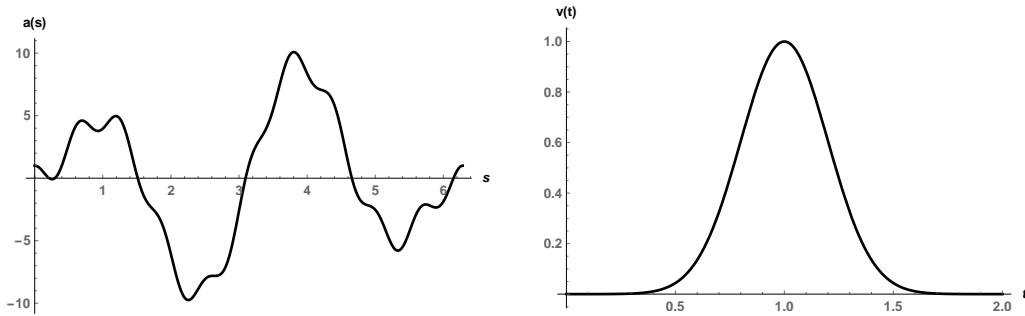


Рис. 1. Графики начальной функции $u(0, s) = a(s)$ (слева) и входной функции $v(t)$ (справа)
 Fig. 1. Graphs of the initial function $u(0, s) = a(s)$ (left) and the input function $v(t)$ (right)

На рис. 2 приведены графики приближенных решений \tilde{x} и \tilde{y} , в которых для $\tilde{x}(t)$ в качестве рациональной функции r_t^1 использовалась аппроксимация Паде [13, 14] в нуле степени (3, 9) для функции $\exp_t(\xi)$, а для $\tilde{y}(t)$ в качестве рациональной функции r_t^2 — аппроксимация Паде в нуле степени (2, 6) для функции $\theta_t(\xi)$. Перед применением формул (27) полученные аппроксимации Паде раскладывались в сумму элементарных дробей.

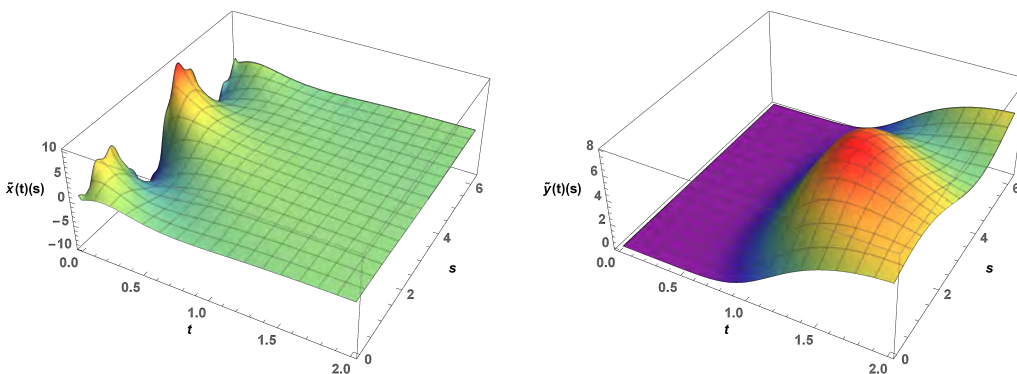


Рис. 2. Графики приближенных решений вспомогательных задач (4) (слева) и (6) (справа)
 Fig. 2. Graphs of the approximate solutions of auxiliary problems (4) (left) and (6) (right)

На рис. 3 представлены графики зависимостей $\|\tilde{x}(t) - x(t)\|$ и $\|\tilde{y}(t) - y(t)\|$ абсолютной точности полученных приближений от $t \in [0, 2]$, при этом максимальные значения абсолютной погрешности составили

$$\max_{t \in [0,2]} \|\tilde{x}(t) - x(t)\| = 9.46652 \cdot 10^{-4}, \quad \max_{t \in [0,2]} \|\tilde{y}(t) - y(t)\| = 1.28625 \cdot 10^{-3}. \quad (29)$$

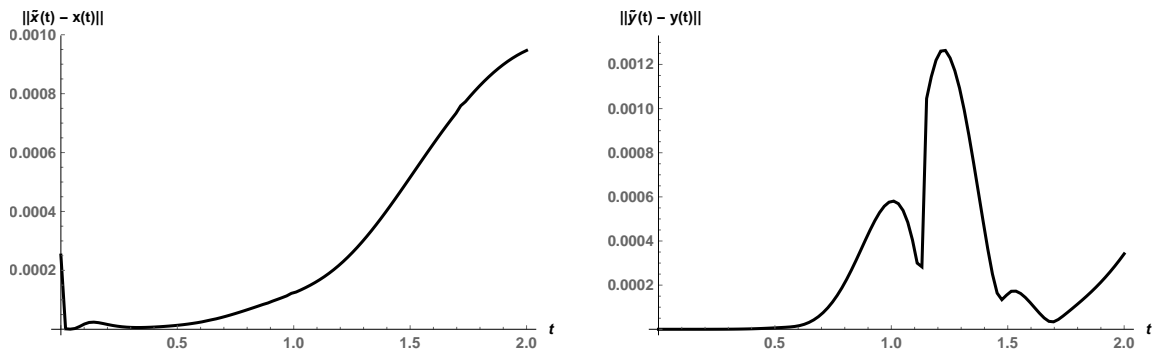


Рис. 3. Графики абсолютной точности приближенных решений задач (4) (слева) и (6) (справа)
 Fig. 3. Graphs of the absolute errors for the approximate solutions of problems (4) (left) and (6) (right)

Для $\xi \in \sigma(N)$, $t \in [0, 2]$, выполняются скалярные оценки $|r_t^1(\xi) - e^{\xi t}| \leq 2 \cdot 10^{-4}$ и $|r_t^2(\xi) - \theta_t(\xi)| \leq 1.89 \cdot 10^{-2}$, при этом $\|a\| \approx 5.15$, $\|b\| \approx 14.14$, поэтому из теоремы 3.1 получаем оценки

$$\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \leq 2 \cdot 10^{-4} \cdot 5.15 = 1.03 \cdot 10^{-3}, \quad \|\tilde{y}(t) - y(t)\| \leq 1.89 \cdot 10^{-2} \cdot 14.14 = 2.67246 \cdot 10^{-1}.$$

Видно, что полученные максимальные значения абсолютной погрешности (29) укладываются в теоретические оценки, полученные с помощью теоремы 3.1.

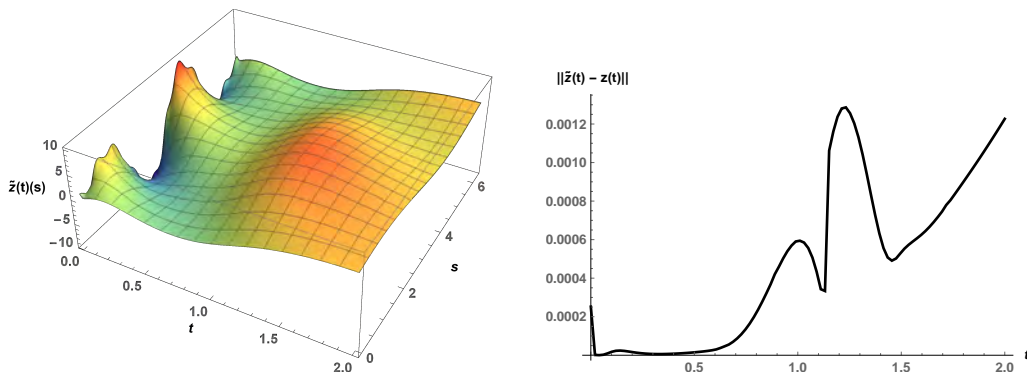


Рис. 4. Графики приближенного решения задачи (24)–(26) (слева) и абсолютной точности (справа)
 Fig. 4. Graphs of the approximate solution of problem (24)–(26) (left) and the absolute accuracy (right)

На рис. 4 представлен график приближенного решения $\tilde{z}(t)(s) = \tilde{u}(t, s)$ исходной задачи (24)–(26), а также график зависимости $\|\tilde{z}(t) - z(t)\|$ абсолютной точности полученного приближения для $t \in [0, 2]$, при этом максимальное значение абсолютной погрешности составило $\max_{t \in [0, 2]} \|\tilde{z}(t) - z(t)\| = 1.28625 \cdot 10^{-3}$.

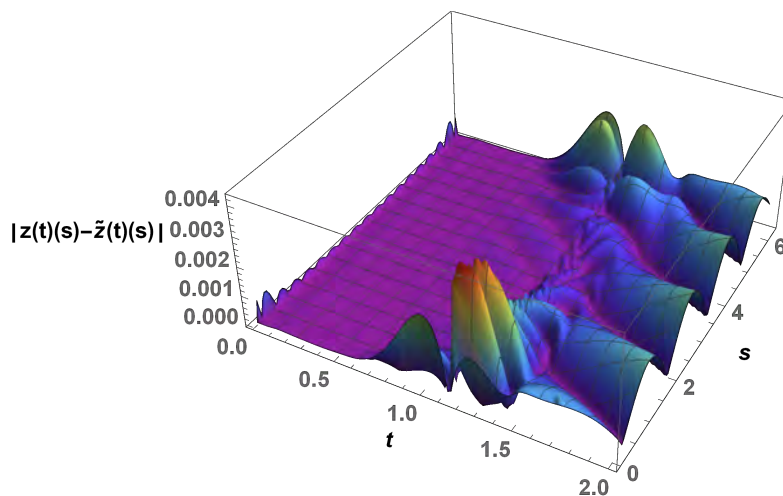


Рис. 5. График поточечной абсолютной ошибки
 Fig. 5. Graph of the pointwise absolute error

Для удобства сравнения на рис. 5 изображен также график поточечной абсолютной ошибки, то есть модуля разности между полученным приближением и точным решением. Максимум поточечной абсолютной ошибки приближения составил $\max_{s \in [0, 2\pi], t \in [0, 1]} |\tilde{u}(t, s) - u(t, s)| = 4.28 \cdot 10^{-3}$.

5. Заключение. Предложен операторный метод построения приближенного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка с нормальным операторным коэффициентом, позволяющий выписать априорные оценки точности приближения. Для этого используется вычисление рациональных функций от нормального оператора, в качестве которых можно использовать, например, аппроксимации Паде. Для повышения точности можно увеличить степени аппроксимации Паде или заменить их на рациональные функции наилучшего приближения. Однако нахождение наилучших рациональных приближений, особенно в случае комплексного спектра, является существенно более трудоемкой задачей. Тем не менее, если необходимо решать несколько задач с одним и тем же оператором, но разными начальными условиями, такой подход может быть оправдан. В этом случае можно заранее вычислить рациональные функции для данного оператора при различных значениях t , которые затем многократно использовать для решения задач с этим оператором. В частности, для однородного уравнения с оператором, спектр которого лежит на отрицательной действительной полуоси, удобно использовать функции, приведенные в [15].

Список литературы

1. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир; 1975. 444 с.
2. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО; 2004. 552 с.
3. Орешина М.Н. Спектральное разложение нормального оператора в действительном гильбертовом пространстве. *Уфимский математический журнал*. 2017;9(4):87–99. English translation: Spectral decomposition of normal operator in real Hilbert space. *Ufa Mathematical Journal*. 2017;9(4):85–96. DOI: 10.13108/2017-9-4-85
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир; 1988. 352 с.
5. Разгулин А.В. Весовая оценка скорости сходимости проекционно-разностной схемы для параболического уравнения и ее применение для аппроксимации задачи управления начальными данными. *Журнал вычислительной математики и математической физики*; 2010;50(6):1023–1037.
6. Макаренков А.М., Серегина Е.В., Степович М.А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области. *Журнал вычислительной математики и математической физики* 2017;57(5):801–813.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука; 1977. 440 с.
8. Дробышев В.И., Каткова Л.Н. Метод Кранка–Николсон с различными временными шагами в подобластях для решения параболических задач. *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2001;4(2):137–150.
9. Смагин В.В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений. *Журнал вычислительной математики и математической физики* 2000;40(6):908–919.
10. Орешина М.Н. Приближенное решение параболического уравнения с использованием рациональной аппроксимации операторной экспоненты. *Дифференциальные уравнения*. 2017;53(3):407–417. English translation: Approximate solution of a parabolic equation with the use of a rational approximation to the operator exponential. *Differential Equations*. 2017;53(3):398–408. DOI: 10.1134/S0012266117030107
11. Oreshina M.N. A spectral method for approximate solving a second-order linear differential equation. *Journal of Physics: Conference Series* 2018;973(1):012057. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012057
12. Oreshina M.N. Spectral method for approximate solving of linear differential equations with self-adjoint coefficients. *2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)* 2020;9280753:125–127. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280753
13. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир; 1986. 502 с.
14. Аптекарев А.И., Буслаев В.И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С.П. Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены. *Успехи математических наук*. 2011;66(6):37–122. English translation: Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials. *Russian Math. Surveys*. 2011;66(6):1049–1131. DOI: 10.1070/RM2011v066n06ABEH004770
15. Carpenter A.J., Ruttan A., Varga R.S. Extended numerical computations on the "1/9"conjecture in rational approximation theory. *Rational Approximation and Interpolation. Series: Lecture notes in mathematics*. 1983;1105:383-411.

References

1. Rudin W. Functional analysis. New York: McGraw-Hill Book Company; 1973. 397 p. (Funkcional'nyj analiz. Moscow: Mir; 1975. 444 p.)
2. Helemskii AY. Lectures and exercises on functional analysis [Lekcii po funkcional'nomu analizu]. Moscow: MCzNMO; 2004. 552 p.
3. Oreshina MN. Spectral decomposition of normal operator in real Hilbert space. *Ufa Mathematical Journal*. 2017;9(4):85–96. DOI: 10.13108/2017-9-4-85
4. Fletcher CAJ. Computational Galerkin methods. Springer Science & Business Media; 2012. 310 p. (Chislennyye metody na osnove metoda Galyorkina. M.: Mir; 1988. 352 p.)

5. Razgulin AV, A weighted estimate for the rate of convergence of a projection-difference scheme for a parabolic equation and its application to the approximation of the initial-data control problem. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2010;50(6):1023–1037 (In Russian)
6. Makarenkov AM, Seregina EV, Stepovich MA. The projection Galerkin method for solving the time-independent differential diffusion equation in a semi-infinite domain. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2017;57(5):801–813. (In Russian)
7. Godunov SK., Ryaben'kii VS. Difference Schemes: An Introduction to the Underlying Theory. Amsterdam: North-Holland; 1987. 489 p.
8. Drobyshevich VI, Katkova LN. Crank–Nicolson's scheme with different time-step in subdomains for the solution of parabolic problems. *Sib. Zh. Vych. Mat.* 2001;4(2):137–150. (In Russian)
9. Smagin, V.V. Mean-square error estimates for a projection-difference method for parabolic equations *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2000;40(6):908–919. (In Russian)
10. Oreshina MN. Approximate solution of a parabolic equation with the use of a rational approximation to the operator exponential. *Differential Equations*. 2017;53(3):398–408. DOI: 10.1134/S0012266117030107
11. Oreshina MN. A spectral method for approximate solving a second-order linear differential equation. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018;973(1):012057. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012057
12. Oreshina MN. Spectral method for approximate solving of linear differential equations with self-adjoint coefficients. *2nd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)* 2020;9280753:125–127. DOI: 10.1109/SUMMA50634.2020.9280753
13. Baker GA and Graves-Morris P. Padé Approximants. Cambridge: Cambridge Univ. Press; 1996. 746 p. (Апроксимации Падэ. М.: Мир; 1986. 502 p.)
14. Aptekarev AI, Buslaev VI, Martinez-Finkelshtein A, Suetin SP. Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials. *Russian Math. Surveys*. 2011;66(6):1049–1131. DOI: 10.1070/RM2011v066n06ABEH004770
15. Carpenter AJ., Ruttan A, Varga RS. Extended numerical computations on the "1/9"conjecture in rational approximation theory. *Rational Approximation and Interpolation. Series: Lecture notes in mathematics*. 1983;1105:383–411.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.10.2024

Поступила после рецензирования 18.11.2024

Принята к публикации 21.11.2024

Received October 4, 2024

Revised November 18, 2024

Accepted November 21, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Орешина Мария Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Maria N. Oreshina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

[К содержанию](#)

Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности

Гринько А. П. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Барановичский государственный университет,
Беларусь, 225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21
agrinko_1999@yahoo.com

Аннотация. В статье рассматриваются локализованные производные типа Римана – Лиувилля, Маршо и локализованные интегралы типа Римана – Лиувилля функций с заданным модулем непрерывности. Для локализованного интеграла введён левый обратный оператор и доказана теорема о изоморфизме в гёльдеровских пространствах. Получены условия, связывающие модуль непрерывности функции, ограниченность винеровской р-вариации и выполнения условия гёльдеровости. Доказана возможность представления гёльдеровской функции в виде разности двух почти возрастающих гёльдеровской функции.

Ключевые слова: локализованная дробная производная, локальная дробная производная, модуль непрерывности функции, изоморфизм

Для цитирования: Гринько А. П. 2024. Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 296–313.

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

Original Research

Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity

Alexander P. Grinko 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Baranovichi State University,
21 Voikova St., Baranovichi 225404, Belarus
agrinko_1999@yahoo.com

Abstract. The article considers localized derivatives of the Riemann – Liouville, Marchaud type and localized integrals of the Riemann – Liouville type of functions with a given modulus of continuity. For the localized integral, a left inverse operator is introduced and a theorem on isomorphism in Holder spaces is proved. Conditions are obtained that connect the modulus of continuity of a function, the boundedness of the Wiener p-variation and the fulfillment of the Holder condition. The possibility of representing a Holder function as a difference of two almost increasing Holder functions is proved.

Keywords: Localized Fractional Derivative, Local Fractional Derivative, Modulus of Continuity of a function, Isomorphism

For citation: Grinko A.P. 2024. Localized and Local Derivatives of Fractional Order of Functions with a Given Modulus of Continuity. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 296–313. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-296-313

1. Введение. В настоящей статье исследуется действие правосторонних усечённых локализованных дробных производных ([1]) типа Маршо

$$\begin{aligned} (D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f \right)(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \frac{\phi(x) - \phi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}} d\tau \right) \end{aligned} \quad (1)$$

и правосторонних локализованных дробных интегралов ([2]) типа Римана – Лиувилля

$$(I^{\alpha, -\varepsilon} \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \quad (2)$$

в пространстве функций с заданным модулем непрерывности ([3]).

В работе получены условия, связывающие модуль непрерывности функции (3), ограниченность винеровской p -вариации (12) и выполнения условия гёльдеровости (4). Доказана возможность представления гёльдеровской функции порядка λ в виде разности двух почти возрастающих гёльдеровской функции порядка λ или возможность представления гёльдеровской функции в виде разности двух монотонных ломанных и гёльдеровской функции с модулем меньшим любого сколь угодно малого ε , $\varepsilon > 0$. Для локализованного интеграла (2) введён левый обратный оператор

$$D_{[a,b]}^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \rfloor} \left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x) = 0$$

и доказана теорема о изоморфизме фактор-пространства пространства $H^{\lambda}([a; b])$ по одномерному пространству, состоящему из констант и весового гёльдеровского пространства $H^{\lambda-\alpha}([a; b])$.

Целью данной работы является изучение свойств операторов локализованного дробного интегродифференцирования (1), (2) в пространствах функций с заданным модулем непрерывности. Библиографию по аналогичным результатам для операторов дробного интегродифференцирования содержит [3]. В работе обобщается известный факт, что функции с ограниченным изменением могут быть представлены в виде разности двух неубывающих функций с ограниченным изменением. Среди близких к настоящей статье работ, описывающих структуру гёльдеровских пространств, отметим работу [4] и работу [5], в которой авторы показывают, что функция имеет ограниченную p -вариацию тогда и только тогда, когда она является композицией ограниченной неубывающей функции с функцией Гельдера. В работе [6] рассматривались пространства с модулем непрерывности, удовлетворяющим условию Дини. В качестве приближающих объектов применялись гармонические в стягивающихся к кривой областях функции. Мы рассматриваем более узкие пространства, пространства, в которых модуль непрерывности содержит ненулевую степенную составляющую. Полученные результаты дополняют исследования автора в этом направлении [1, 2, 7, 8].

2. Основные результаты. Рассмотрим класс непрерывных функций с заданными модулями непрерывности или характеристиками $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$, соответствующими разбиению $\pi = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$, $\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$ отрезка $[a; b]$ на конечное количество отрезков $[x_k; x_{k+1}]$, $x_{k+1} - x_k < 1$, см. [3], §13.6:

$$\omega(f, [x_k; x_{k+1}], h) = \sup_{0 < t < h} \sup_{x, x-t \in [x_k; x_{k+1}]} |f(x) - f(x-t)| \leq \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(\pi, h) \equiv \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h), \quad (3)$$

$\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$ – заданные, непрерывные, неубывающие по h функции, для которых $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(0) = 0$, $k = \overline{0, n-1}$. Обозначим класс функций с заданными модулями непрерывности $H^{\omega(\pi, h)}([a; b])$. В классе функций с заданными модулями непрерывности, соответствующими разбиению π , можно ввести норму:

$$\|f\|_{H^{\omega(\pi, h)}} = \max_{x \in [a; b]} |f(x)| + \sup_{\pi, h, k} \frac{\omega(f, [x_k; x_{k+1}], h)}{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}.$$

Частным случаем класса функций с заданными модулями непрерывности является класс функций с переменным порядком гёльдеровости $\lambda(x)$ и множителем $\sigma(h)$. Пусть t_k произвольная точка отрезка $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, $0 < \lambda(t_k) \leq 1$. Функция $f(x) \in H^{\lambda(x), \sigma(h)}([a; b]) \equiv H^{\lambda, \sigma}([a; b])$, если существует $\sigma(h) : [0; 1] \rightarrow R^+$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{\lambda}}{\sigma(h)} = 0$, что для всех $x_k, x_{k+1} \in [a; b]$ выполнено условие

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |\sigma(h)| |h|^{\lambda}, |h| < \frac{1}{2}, \quad (4)$$

$C > 0$ – константа. В этом классе можно ввести норму:

$$\|f\|_{H^{\lambda, \sigma}} = \|f\| + \sup_{\substack{x, x+h \in [a; b] \\ |h| < 0,5}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|\sigma(h)| |h|^{\lambda}}.$$

В работах [7], [8] были получены следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$(I^{\alpha,-\varepsilon} D^{\alpha,-\varepsilon} f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(I^{\alpha,-\varepsilon} D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} f \right) (x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s, \alpha) f(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds,$$

где $\int_0^1 K(s, \alpha) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int_0^1 \frac{s^{-\alpha-s\alpha}}{s+1} ds \right) = 1$ имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^{\lambda}([a; b])$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x)$, тогда для любого $x \in [a + 2\varepsilon, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$(D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) = \phi(x) - \phi(x - \varepsilon), 0 < \delta < \varepsilon,$$

имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, $0 < \alpha < \lambda < 1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a, b)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.3. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Интегральное уравнение

$$I^{\alpha, -\varepsilon} (D^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x))(x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s, \alpha) f(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds = 0$$

где

$$\int_0^1 K(s, \alpha) ds = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int_0^1 \frac{s^{\alpha} - s^{-\alpha}}{s+1} ds \right) = 1,$$

в пространстве $H^{\lambda}(a; b)$, для $a > -\infty$, имеет единственное решение $\phi(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, заданное следующими рекуррентными соотношениями:

1. $a < x < a + 2\varepsilon$, $\phi(x) = \phi_0(x)$ – задана произвольно;
2. $a + 2\varepsilon < x < a + 3\varepsilon$,

$$\phi(x) = \phi_1 = \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} + \int_0^1 \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)(\tau + 1)};$$

...

$n. n > 2, a + n\varepsilon < x < b$,

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi_{n-1}(x) &= \int_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} + \int_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)(\tau + 1)} + \\ &+ \int_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)} + \int_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon\tau) d\tau}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha)(\tau + 1)}. \end{aligned}$$

Введём в пространстве функций с заданными модулями непрерывности порядок гёльдеровости. Если

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(t)| - |f(x) - f(x)|}{x - t} = 0,$$

для всех $x \in (x_k, x_{k+1})$, то производные по t функции $|f(x) - f(t)|$ равны нулю и, следовательно, $f(x) = \text{const}$, на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Если

$$\lim_{t \rightarrow x_+} \frac{|f(t) - f(x)|}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x_-} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} = \text{const} > 0,$$

для всех $x \in (x_k, x_{k+1})$, то односторонние производные по t функции $|f(x) - f(t)|$ в точке x равны константе, и следовательно, $|f(x) - f(t)| = \text{const} |x - t|$, т. е. липшицевы на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$. Если функция $f(x)$ -непрерывна, но

$$\lim_{t \rightarrow x_+} \frac{|f(t) - f(x)|}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x_-} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} = +\infty.$$

Тогда существует $h < 1, N > 1$, такие, что для всех $|t - x| < h$ выполняется:

$$\frac{|f(t) - f(x)|}{t - x} > N, t > x \text{ или } \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} > N, t < x.$$

Поэтому имеем:

$$\log_{|t-x|} \frac{|f(t) - f(x)|}{|t-x|} < \log_{|t-x|} N, \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| \leq 1.$$

По предположению $0 < |f(x) - f(t)| \leq 1$, следовательно получаем:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| \leq 1. \quad (5)$$

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция. В случае, если выполнено условие (5), в качестве порядка гёльдеровости $\lambda_a^b(x)$ в точке $x \in [a; b]$ можно взять

$$\lambda_a^b(x) = \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)|. \quad (6)$$

Определённый в (6) порядок гёльдеровости в точке x означает, что поскольку

$$|f(t) - f(x)| \leq \frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)} (|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}} |t-x|^{\lambda_x^t(x)}, \quad x, t \in [a; b],$$

множитель $\frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)} (|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}}$ может стремиться к бесконечности, но $\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sigma_{\min(t;x)}^{\max(t;x)} (|t-x|)}{|t-x|^{\lambda_x^t(x)}} |t-x|^\varepsilon = 0$, для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$\lim_{t \rightarrow x_+} \log_{t-x} |f(t) - f(x)| = \lim_{t \rightarrow x_+} \log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \quad \lim_{t \rightarrow x_-} \log_{x-t} |f(x) - f(t)| = \lim_{t \rightarrow x_-} \log_{x-t} \omega_t^x(x-t),$$

то в качестве порядка гёльдеровости $\lambda_a^b(x)$, $x \in [a; b]$ можно взять

$$\lambda_a^b(x) = \min \left(\lim_{h \rightarrow 0, x+h \in [a;b]} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \lim_{h \rightarrow 0, x-h \in [a;b]} \log_h \omega_{x-h}^x(h) \right). \quad (7)$$

По предположению $\omega_x^t(t-x) \leq 1$, следовательно, получаем:

$$0 \leq \min \left(\lim_{t \rightarrow x_-} \log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \lim_{t \rightarrow x_+} \log_{x-t} \omega_t^x(x-t) \right);$$

$$\log_{t-x} \omega_x^t(t-x), \log_{x-t} \omega_t^x(x-t) \leq 1, |t-x| < h. \quad (8)$$

Пусть на некотором отрезке $[x_k; x_{k+1}] \subset [a; b]$, $0 < c < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) \leq 1$, $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Из определения порядка гёльдеровости $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, имеющего множитель в точке (7), следует, что для любого выбора точек x_k, x_{k+1} , существует такое ε , $0 < \varepsilon < c$, для которого можно ввести кусочно постоянный порядок гёльдеровости на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$:

$$\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) - \varepsilon > 0.$$

Лемма 2.1. Пусть $\lambda_a^b = \inf_{x \in [a;b]} \lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| > c > 0$. Тогда класс $H^{\omega(h)}([a, b]) \subset H^{\lambda_a^b - \varepsilon}([a, b])$, для любого ε , $0 < \varepsilon < c$.

Доказательство. Действительно, если $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такой $x \in [x_k; x_{k+1}]$, что $\lim_{t \rightarrow x} \log_{|t-x|} |f(t) - f(x)| < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$, т. е. существует такая последовательность $\{t_n\} \in [x_k; x_{k+1}]$, что $\lim_{t_n \rightarrow x} \log_{|t_n-x|} |f(t_n) - f(x)| = \lambda$, $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \lambda < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1$. Далее, для всех достаточно малых ε_2 таких, что $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon_2 > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, n > n_0$ будет выполняться:

$$\left| \log_{|x-t_n|} |f(x) - f(t_n)| - \lambda \right| < \varepsilon_2;$$

$$|x - t_n|^{\lambda + \varepsilon_2} < |f(x) - f(t_n)| < |x - t_n|^{\lambda - \varepsilon_2}.$$

Если последнее неравенство выполнено для всех точек $t_n, n > n_0$, в которых график функции $f(x)$ приближается на минимальное расстояние к графикам функций $\pm |x - t|^{\lambda - \varepsilon_2}$, оставаясь внутри площади, ограниченной сверху $|x - t|^{\lambda - \varepsilon_2}$ и снизу $-|x - t|^{\lambda + \varepsilon_2}$, то и для всех $t, |x - t| < \delta, 0 < \delta < |x - t_{n_0}|$ будет иметь место:

$$|f(x) - f(t)| < |x - t|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2}. \quad (9)$$

Класс $H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a, b])$ компактен в $H^{\omega(h)}([a, b])$. Действительно, по предположению класс $H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a, b])$ равномерно ограничен $0 \leq |f(x)| \leq 1, x \in [a; b]$ и равномерно непрерывен. Для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $f(x) \in H^{\omega(h)h^{\frac{\varepsilon}{2}}}([a, b])$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \omega_a^b(x_2 - x_1) < \varepsilon_1, x_1, x_2 \in [a; b], |x_2 - x_1| < \delta$. Следовательно, по теореме Арцела класс $H^{\omega(h)}([a, b])$ предкомпактен в пространстве непрерывных функций, а значит полон и компактен (см., [9] стр. 173) в $H^{\omega(h)}([a, b])$. Поэтому δ может быть выбрано независимо от $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, функция гёльдерова порядка $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2$ с константой равной единице на отрезках $[x; x + \delta], [x + \delta; x]$, а значит с константой $C_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta}$ на

всём $[x_k; x_{k+1}]$. Поэтому δ может быть выбрано независимо от $x \in [x_k; x_{k+1}]$. Следовательно, функция Гёльдера порядка $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_2$ с константой равной единице на отрезках $[x; x + \delta]$, $[x + \delta; x]$, а значит с константой $C_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{\delta}$ на всём $[x_k; x_{k+1}]$.

Оценка (9) имеет место и для $\omega_x^t(t-x)$, $\omega_t^x(x-t)$. Если $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda(x)$, где $\lambda(x)$ вычисляется по формуле (7), то для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $x \in [x_k; x_{k+1}]$ такой, что

$$\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \min \left(\lim_{h \rightarrow 0, x, x+h \in [x_k; x_{k+1}]} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \lim_{h \rightarrow 0, x, x-h \in [x_k; x_{k+1}]} \log_h \omega_x^x(h) \right) < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1.$$

Т. е. всегда существует такая последовательность $\{h_n\} \in [0; x_{k+1} - x_k]$, что

$$\min \left(\lim_{h_n \rightarrow 0, x, x+h_n \in [x_k; x_{k+1}]} \log_{h_n} \omega_x^{x+h_n}(h_n); \lim_{h_n \rightarrow 0, x, x-h_n \in [x_k; x_{k+1}]} \log_{h_n} \omega_x^x(h_n) \right) = \lambda_k, \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} \leq \lambda_k < \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} + \varepsilon_1.$$

Далее, для всех достаточно малых ε_2 таких, что $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon_2 > 0$, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, n > n_0$ будет выполняться:

$$\left| \min \left(\log_{h_n} \omega_x^{x+h_n}(h_n); \log_{h_n} \omega_x^x(h_n) \right) - \lambda_k \right| < \varepsilon_2;$$

$$h_n^{\lambda_k + \varepsilon_2} < \max \left(\omega_x^{x+h_n}(h_n); \omega_x^x(h_n) \right) < h_n^{\lambda_k - \varepsilon_2}.$$

Если последние неравенства выполнены для всех точек $h_n, n > n_0$, в которых график функций $\omega_x^{x+t}(t)$, $\omega_x^x(x-t)$ приближается на минимальное расстояние к графикам функций $\pm t^{\lambda_k - \varepsilon_2}$, оставаясь внутри площади, ограниченной сверху $t^{\lambda_k - \varepsilon_2}$ и снизу $-t^{\lambda_k + \varepsilon_2}$, то и для всех $t, |x-t| < \delta, 0 < \delta < |x-t_{n_0}|$ будет иметь место:

$$\max \left(\omega_x^{x+h_n}(h_n); \omega_x^x(h_n) \right) < h_n^{\lambda_k - \varepsilon_2}.$$

Следовательно, на отрезках $[x_k; x_{k+1}] \subset [a; b]$ функции $\frac{\omega_x^{x+t}(t)}{t^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_k}}, \frac{\omega_x^x(x-t)}{t^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon_k}}, k = \overline{1; n-1}$ непрерывны и равномерно ограничены. Имеет место следующее свойство:

$$\begin{aligned} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| &\leq \omega_{x_k}^{x_{k+1}}(t_{k+1} - t_k) \leq \max_{h \in [0; t_{k+1} - t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}} \right\} h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon} \\ &\leq \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \left(\max_{h \in [0; t_{k+1} - t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}} \right\} \right) |t_{k+1} - t_k|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon} = C_{x_k}^{x_{k+1}} |t_{k+1} - t_k|^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}, \\ C_{x_k}^{x_{k+1}} &= \sup_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \left(\max_{h \in [0; t_{k+1} - t_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} - \varepsilon}} \right\} \right) < \infty, t_k, t_{k+1} \in [x_k; x_{k+1}], \lambda_{x_k}^{x_{k+1}} > \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x)$, введённую в работе [10].
Определение 2.1. Пусть $f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) : [a; b] \rightarrow [1, \infty)$, π – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ вместе с произвольным выбором точек $t_k, x_k \leq t_k \leq x_{k+1}, k = \overline{1, N}$. Функция $f(x)$ называется функцией с ограниченным винеровским изменением с переменным показателем степени $p(x)$ на отрезке $[a; b]$, если существует такая константа $C > 0$, что выполнено неравенство:

$$\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \leq C. \quad (11)$$

Определение 2.2. Пусть $f(x) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) : [a; b] \rightarrow [1, \infty)$, π – произвольное разбиение отрезка $[a; b]$ точками $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ вместе с произвольным выбором точек $t_k, x_k \leq t_k \leq x_{k+1}, k = \overline{1, N}$. Точная верхняя грань сумм (12) по всевозможным конечным разбиениям π отрезка $[a; b]$ называется полным винеровским изменением с переменным показателем степени $p(x)$ (винеровской вариацией с переменной экспонентой $p(x)$) и обозначается

$$V_a^{b, p(x)}[f] = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_k) - f(x_{k+1})|^{p(t_k)} \right). \quad (12)$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что функции равномерно ограничены, т. е. $0 \leq f(x) \leq 1$ и $|b-a| \leq 1$. Если $f(x) = const$ такие условия не выполняются, то можно рассмотреть функцию $\bar{f}(x)$, где $\bar{f}(t) = f^*(t) - \min_t f^*(t)$, $f^*(t) = \frac{f(t)}{\max_t f(t) - \min_t f(t)}$, $t = \frac{x}{b-a}$, поскольку в неравенстве Гёльдера (4) для преобразованных функций значение множителя $\sigma(h)$ изменится на константу.

Для полной вариация порядка $p(x)$ имеют место следующие свойства:

$$1) V_a^{b,p(x)} [f - const] = V_a^{b,p(x)} [f], \quad (13)$$

$$2) V_a^{b,p(x)} [Af] \leq \begin{cases} \sup_{A \in [a,b]} p(x) V_a^{b,p(x)} [f], A \geq 1, \\ \inf_{A \in [a,b]} p(x) V_a^{b,p(x)} [f], A < 1. \end{cases} \quad (14)$$

$$3) \text{ Если } f(x) \in V_a^{b,p(x)}, \text{ то } V_a^{b,p_1(x)} [f] \leq V_a^{b,p(x)} [f], 1 \leq p(x) \leq p_1(x). \quad (15)$$

$$4) \text{ Если } V_a^{b,p(x)} [f^{p_0}] < +\infty, 1 \leq p(x) < +\infty, \text{ то } V_a^{b,p(x)} [f^{p_1}] \leq V_a^{b,p(x)} [f^{p_0}], 0 \leq f(x) \leq 1, 1 \leq p_0 \leq p_1. \quad (16)$$

$$5) \text{ Если } V_a^{b,p(x)} [f^{p_0}] < +\infty, 1 \leq p(x), p_0 < +\infty, \text{ то } V_a^{b,p_0 p(x)} [f] < +\infty. \quad (17)$$

$$6) V_a^{b,p(x)} [f_1 + f_2] \geq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2], V_a^{b,p(x)} [f_1 - f_2] \leq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2]. \quad (18)$$

7) Если $f(x)$ – непрерывная и кусочно монотонная функция на $[a; b]$ и $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_N = b$ – не более чем счётное число всех точек локальных экстремумов, $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq 1, k = \overline{0; N-1}, N \leq +\infty$, то

$$V_a^{b,p(x)} [f] = \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x)}, 1 \leq p(x). \quad (19)$$

Также в работе [5] были получены свойства:

8) $V_a^{b,p(x)} [f]$ – неотрицательная неубывающая функция;

$$9) |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x)} \leq V_a^{b,p(x)} [f], x_{k+1}, x_k \in [a, b], x \in [x_k, x_{k+1}];$$

$$10) V_a^{b,p(x)} [f] + V_b^{c,p(x)} [f] \leq V_a^{c,p(x)} [f], a \leq b \leq c.$$

Обозначим $p(t_k) = p(x_k; x_{k+1}), t_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Имеют место неравенства:

$$|a^p - b^p| \geq |a - b|^p, b, a \geq 0, p \geq 1; \quad (20)$$

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p, b, a \geq 0, p \geq 1; \quad (21)$$

$$|a|^p + |b|^p \geq |a - b|^p, ab \geq 0, p \geq 1. \quad (22)$$

Доказательство свойства (15):

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p_1(x_k; x_{k+1})} \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})}.$$

Доказательство (16):

$$\begin{aligned} |f(x_{k+1})^{p_0} - f(x_k)^{p_0}| &= \left| \int_0^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt - \int_0^{f(x_k)} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt \right| = \left| \int_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_0-1}}{p_0} dt \right| \geq \left| \int_{f(x_k)}^{f(x_{k+1})} \frac{t^{p_1-1}}{p_1} dt \right| = \\ &= |f(x_{k+1})^{p_1} - f(x_k)^{p_1}|, 0 \leq f(x_k), f(x_{k+1}) \leq 1, 1 \leq p_0 \leq p_1. \end{aligned}$$

Доказательство (17). Из неравенства (21) следует, что

$$\left| \overline{f}^{p_0}(x_{k+1}) - \overline{f}^{p_0}(x_k) \right|^{p(x_1, x_2)} \geq \left| \overline{f}(x_{k+1}) - \overline{f}(x_k) \right|^{p_0 p(x_1, x_2)}.$$

Доказательство (18). Из неравенства (21) следует, что

$$\begin{aligned} |(f_1(x_{k+1}) + f_2(x_{k+1})) - (f_1(x_k) + f_2(x_k))|^{p(x_k; x_{k+1})} &= ((f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)) + \\ &+ (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)))^{p(x_k; x_{k+1})} \geq (f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})} + (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})}. \end{aligned}$$

т. е. $V_a^{b,p(x)} [f_1 + f_2] \geq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2]$. Из неравенства (22) следует, что

$$\begin{aligned} |(f_1(x_{k+1}) - f_2(x_{k+1})) - (f_1(x_k) - f_2(x_k))|^{p(x_k; x_{k+1})} &= ((f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k)) - \\ &- (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k)))^{p(x_k; x_{k+1})} \leq (f_1(x_{k+1}) - f_1(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})} + (f_2(x_{k+1}) - f_2(x_k))^{p(x_k; x_{k+1})}. \end{aligned}$$

т. е. $V_a^{b,p(x)} [f_1 - f_2] \leq V_a^{b,p(x)} [f_1] + V_a^{b,p(x)} [f_2]$.

Доказательство (19). Покажем, что если функция непрерывная и кусочно монотонна на отрезках $[x_k; x_{k+1}]$, то винеровская вариация по всему отрезку $[a; b]$ равна сумме винеровских вариаций по отрезкам $[x_k; x_{k+1}]$. Пусть в точке $c \in [a; b]$ функция $f(x)$ имеет единственный локальный экстремум на отрезке $f(x)$, тогда $|f(c) - f(a)|^p + |f(c) - f(b)|^p \geq |f(x) - f(a)|^p$, т. к. либо $|f(c) - f(a)|^p \geq |f(x) - f(a)|^p$, либо $|f(c) - f(b)|^p \geq |f(x) - f(a)|^p$. Следовательно, разбиение π всегда содержит точки локальных экстремумов и наоборот внутри промежутков монотонности разбиение π не содержит точек. Поскольку если $f(x)$ -монотонная на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $d \in [x_k; x_{k+1}]$, то из свойства (21) следует

$$\begin{aligned} & |f(d) - f(x_k)|^{p(x_k;d)} + |f(x_{k+1}) - f(d)|^{p(d;x_{k+1})} \leq \\ & \leq |f(d) - f(x_k)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} + |f(x_{k+1}) - f(d)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} \leq \\ & \leq \left(|f(d) - f(x_k)| + |f(x_{k+1}) - f(d)| \right)^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})} \leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} p(x_k;x_{k+1})}. \end{aligned}$$

Значит разбиение π не будет содержать точек монотонности. Следовательно $\pi = \{x_k, k = 0; N-1\}$.

Для функций $f(x)$ из пространства $H^{\omega(x)}([a; b])$ с $\lambda_a^b > c > \varepsilon > 0$ рассмотрим винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x) \geq 1$. Пусть $\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ -произвольное разбиение отрезка $[a; b]$. Учитывая (8) и свойство $\frac{1}{\log_h \omega(h)^{-\varepsilon}} = \frac{\log_h h}{\log_h \omega(h)^{-\varepsilon}} = \log_{\omega(h)h^{-\varepsilon}} h$, введём переменную экспоненту:

$$p(x) = \max \left(\overline{\lim}_{t \rightarrow x-} \log_{\omega_x^t} (t-x)^{(t-x)^{-\varepsilon}} (t-x), \overline{\lim}_{t \rightarrow x+} \log_{\omega_x^t} (x-t)^{(x-t)^{-\varepsilon}} (x-t) \right), 1 \leq p(x) < \infty, x \in [a; b].$$

Из свойства (13) следует, что $V_a^{b,p(x)} [const] = 0$. Если $f(x) = const$, то $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = 0$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, и $p(x_k) = \log_{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)}(x_{k+1} - x_k)$ не определено. В тоже время $|f(x_k) - f(x_{k-1})|^{p(x)} = 0$, для любого $p(x) > 0$. Поскольку для константы $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) \leq |x_{k+1} - x_k|$, то $\log_{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)}(x_{k+1} - x_k) \leq \log_{(x_{k+1} - x_k)}(x_{k+1} - x_k) = 1$ и $p(x)$ примем равным единице. Можно также при вычислении $V_a^{b,p(x)} [f(x)]$ вместо функции $f(x)$ рассматривать функцию $\bar{f}(x)$ с уменьшенной областью определения на интервалы $[x_k, x_{k+1}]$, для которых $f(x) = const$.

Лемма 2.2. Пусть для произвольного разбиения $\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ $f(x) \in H^{\omega(x)}([a; b])$ с заданными модулями непрерывности $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)$ и с $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x) = \min_{x+h, x-h \in [x_k; x_{k+1}]} \left(\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \log_h \omega_x^{x+h}(h); \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \log_h \omega_x^{x-h}(h) \right)$, $h > 0$, $\lambda_{x_k}^{x_{k+1}} = \inf_{x \in [x_k; x_{k+1}]} \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}(x)$, $0 < c \leq \lambda_{x_k}^{x_{k+1}}$. Тогда, для всех ε , удовлетворяющих условиям $0 < \varepsilon < c$, функции $f(x)$ имеют ограниченную винеровскую вариацию кусочно переменного порядка $p(t_k) = p_{x_k}^{x_{k+1}}(t_k) = \bar{p}_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}$, $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$ вида:

$$V_a^{b,p(x)} [f] = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \right) = \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right), t_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Доказательство. Из оценки (10) имеем:

$$\begin{aligned} V_a^{b,p(x)} [f] &= \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(t_k)} \right) \leq \sup_{\pi} \left(\sum_{k=0}^N \left(C_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x_k)^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) = \\ &= (b-a) \sup_{\pi} \left(\max_{k=1, n-1} \left(C_{x_k}^{x_{k+1}} \right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) = (b-a) \sup_{\pi} \left(\max_{k=1, n-1} \left(\max_{h \in [0; x_{k+1} - x_k]} \left\{ \frac{\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h)}{h^{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right\} \right)^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) \leq \\ &\leq (b-a) \sup_{\pi} \left(\max_{k=1, n-1} C_{x_k}^{\frac{1}{\lambda_{x_k}^{x_{k+1}-\varepsilon}}} \right) < \infty, \varepsilon < c. \end{aligned} \quad (23)$$

Следующая лемма показывает, что для непрерывных функций ограниченность винеровской вариации с переменным порядком $p(x) \geq 1$ совпадает с принадлежностью пространству $H^{\omega}([a; b])$ с характеристиками $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = V_{x_k}^{x_{k+1}, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x)}}$ и кусочно постоянным порядком вариации $p(x) = p_{x_k}^{x_{k+1}} = \sup_{t \in [x_k; x_{k+1}]} (p(t))$.

Лемма 2.3. Если непрерывная функция $f(x)$ имеет ограниченную винеровскую вариацию с переменным непрерывным порядком $p(x)$, $1 \leq p(x) \leq P < \infty$, то $f(x) \in H^{\omega}([a; b])$. Для любых $x_{k+1}, x_k \in [a, b]$ непрерывные, монотонные характеристики $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)$ на отрезках $[x_k; x_{k+1}]$ могут быть вычислены

по формуле $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1} - x_k) = V_{x_k}^{x_{k+1}, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(z)}}$. Переменный порядок гёльдеровости функции $f(x)$ в точке x равен $\frac{1}{p(x)}$.

Доказательство. Покажем, что из непрерывности $f(x)$ следует непрерывность винеровской вариации $\phi(x) = V_a^{x, p(x)} [f]$ на $[a, b]$. Предположим противное, $f(x)$ имеет разрыв в точке x . В силу ограниченности $f(x)$ это разрыв первого рода. Для определённости будем считать, что $V_a^{y, p(x)} [f] = T$, тогда имеем:

$$\lim_{x \rightarrow y-} V_a^{x, p(x)} [f] = M > 0, M < T.$$

Т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $x, y - \delta < x < y$ одновременно будет выполняться

$$V_a^{x, p(x)} [f] \leq M, f(y) - f(x) < \varepsilon.$$

Тогда можем записать:

$$V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] \geq T - M > \varepsilon. \quad (24)$$

С другой стороны, если $V_a^{y, p(x)} [f] = T$, то для $\varepsilon > 0$, существует такое конечное разбиение $\pi = \{x_i\}$, $i = 1, N$, $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = y$ и такой выбор $t_k, x_k \leq t \leq x_{k+1}, p(t_k) = p(x_k; x_{k+1})$, что

$$V_a^{y, p(x)} [f] \leq \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} + \varepsilon \leq T + \varepsilon.$$

В случае, если $x_{N-1} > y - \delta$, возьмём $x = x_{N-1}$, имеем:

$$\begin{aligned} V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] &\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{N-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] = \\ &= \varepsilon + \sum_{k=0}^{N-2} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} + |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] + \\ &+ |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - V_a^{x_{N-1}, p(x)} [f] = \varepsilon + |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} \leq \varepsilon + \varepsilon^{\min_{[a,b]} p(x)} \leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $x_{N-1} < y - \delta$. Тогда учитывая, что $V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] \geq 0$, $||a| - |b|| \leq |a - b|$, существует $\delta > 0$, такое, что если $y - x < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, $\max_{x \in [x_{N-1}, x], y \in [x_{N-1}, y]} |p(x_{N-1}; y) - p(x_{N-1}; x)| < \varepsilon$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] &\leq \\ V_a^{y, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] &\leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{N-2} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{p(x_k; x_{k+1})} + |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; x)} + \\ &+ |f(y) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} + |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; y)} - \\ &- |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; x)} - V_a^{x, p(x)} [f] \leq \varepsilon + V_a^{x, p(x)} [f] - V_a^{x, p(x)} [f] + p(x_{N-1}; y) |f(y) - f(x)| \times \\ &\times (|f(x) - f(x_{N-1})| + \theta_1 (|f(y) - f(x_{N-1})| - |f(x) - f(x_{N-1})|))^{p(x_{N-1}; y)-1} + \\ &+ |p(x_{N-1}; y) - p(x_{N-1}; x)| |f(x) - f(x_{N-1})|^{p(x_{N-1}; x) + \theta_1 (p(x_{N-1}; y) - p(x_{N-1}; x))} \leq \varepsilon + \varepsilon 2^{p-1} + \varepsilon 1^1. \end{aligned} \quad (26)$$

Полученные противоречия в неравенствах (24), (25) или (24), (26) показывают, что функция $\phi(x) = V_a^{x, p(x)} [f]$ непрерывна.

Из леммы 2 работы [5] следует, что $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq V_{x_k}^{x_{k+1}, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x_{k+1}; x_k)}}$ для любого порядка $p(x_{k+1}, x_k) = p(z)$, $t \in [x_k, x_{k+1}]$. В качестве характеристики, т. е. непрерывной по $h > 0$, неотрицательной, монотонной на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ функции возьмём $\omega_{x_k}^{x_{k+1}}(h) \equiv V_{x_k}^{x_k+h, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x_{k+1}; x_k)}}$. Из леммы 4.2 [5] следует, что $f(x) = g(\phi(x))$, где $\phi(x) = V_{x_k}^{x, p(x)} [f]$ ограниченная неотрицательная неубывающая функция, а $g(y) \in H^{\frac{1}{p(x_{k+1}; x_k)}}([\phi(x_k), \phi(x_{k+1})])$. Поскольку $\phi(x)$ непрерывна, т. е. гёльдера порядка $\theta(x)$, $0 \leq \theta(x) \leq 1$, а $g(y)$ гёльдера порядка $\frac{1}{p(x_{k+1}; x_k)}$, то из [9] следует, что порядок гёльдеровости композиции $g(\phi(x)) = f(x)$ равен произведению $\frac{1}{p(x_k; x_{k+1})} \theta(x) \leq \frac{1}{p(x_k; x_{k+1})}$. С другой стороны, поскольку мы показали, что $V_x^{y, p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x; y)}}$ – характеристика, то из леммы 2.2 оценка (23) следует, что для полного винеровского изменения имеет место оценка:

$$V_x^{y, p(x)} [f] \leq G(y - x),$$

а значит

$$V_x^{y,p(x)} [f]^{\frac{1}{p(x;y)}} \leq G^{\frac{1}{p(x;y)}} (y-x)^{\frac{1}{p(x;y)}} \leq C |y-x|^{\frac{1}{p(x;y)}}.$$

Т. е. переменный порядок гёльдеровости больше либо равен $\frac{1}{p(x;y)}$. Следовательно, функция $f(x)$ имеет порядок гёльдеровости $\frac{1}{p(x;y)}$. Лемма доказана.

Поскольку неограниченное изменение даёт осцилляция функции с модулем меньшим любого наперёд заданного числа, то введём понятие почти монотонной функции.

Определение 2.3. Функция $f(x, \varepsilon) \in D(f), E(f) \subset R$ называется почти возрастающей (почти убывающей) с показателем ε , если $f(x_1, \varepsilon) - f(x_2, \varepsilon) \leq \varepsilon, (f(x_2, \varepsilon) - f(x_1, \varepsilon) \leq \varepsilon)$ для $x_1 < x_2, x_1, x_2 \in D(f)$.

Лемма 2.4. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную винеровскую вариацию с переменной экспонентой $p(x), 1 \leq p(x)$ на отрезке $[a; b]$, то функцию $f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ можно представить в виде разности двух почти неубывающих функций с показателем ε .

Доказательство. Построим для любой функции с ограниченным винеровским изменением $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ почти возрастающие функции $f_1(x, \varepsilon) = f_1(x), f_2(x, \varepsilon) = f_2(x)$, для которых $V_a^{x,p(x)} [f_1], V_a^{x,p(x)} [f_2] < \infty$ и $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. По определению, если функция имеет ограниченную винеровскую вариацию, то для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное разбиение $\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_N = b$ и такой выбор точек $t_i \in [x_i; x_{i+1}]$, что

$$V_a^{x,p(x)} [f] - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{N-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{p(t_i)} \leq V_a^{x,p(x)} [f]. \quad (27)$$

Для того, чтобы при переходе к соседнему интервалу знаки $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})$ были различны, объединим соседние интервалы, если $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ и $f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})$ имеют одинаковый знак. В силу свойства (21), новая сумма $\sum_{i=1}^{M-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|^{p(t_i)}$ не уменьшится и неравенство (27) будет иметь место. Полученное разбиение обозначим $\pi' : a = x_1 < x_2 < \dots < x_k < \dots < x_M = b, M \leq N$. Для определённости будем считать, что $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$. Рассмотрим последовательность функций

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(x) &= f(x_1) - (f(x) - f(x_1)) = 2f(x_1) - f(x), x \in [a; b]; \\ \bar{f}_2(x) &= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f_1(x_2) - \bar{f}_1(x), x \in [x_2; b]; \end{cases} = \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2; b]; \end{cases} \\ \bar{f}_3(x) &= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2; x_3], \\ 2(2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3)) - 2f(x_1) + 2f(x_2) - f(x), x \in [x_3; b]; \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2f(x_1) - f(x), x \in [x_1; x_2], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + f(x), x \in [x_2; x_3], \\ 2f(x_1) - 2f(x_2) + 2f(x_3) - f(x), x \in [x_3; b]; \end{cases} \end{aligned}$$

и т. д.

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} \bar{f}_{k-1}(x), x \in [x_1; x_k], \\ 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(x), x \in [x_k; b]; \end{cases}$$

и т. д.

$$\bar{f}_{M-1}(x) = \begin{cases} \bar{f}_{M-2}(x), x \in [x_1; x_{M-1}], \\ 2 \sum_{j=1}^{M-1} (-1)^{j+1} f(x_j) - (-1)^{M-1} f(x), x \in [x_{M-1}; b]. \end{cases} \quad (28)$$

Покажем, что $\bar{f}_{M-1}(x)$ – почти возрастающая. На частичных отрезках разбиения π' не может быть локального максимума в точке $t_k \in [x_k; x_{k+1}]$, для которого $f(t_k) > \max(f(x_k); f(x_{k+1})) + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; x_{k+1}]} p(t)}}$, или локального минимума, для которого $f(t_k) < \min(f(x_k); f(x_{k+1})) - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; x_{k+1}]} p(t)}}$. В противном случае добавляя точку t_k к разбиению π мы увеличим $V_a^{b,p(x)} [f_{N-1}]$ более чем на ε . Действительно, пусть t_k локальный максимум на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ и $\max(f(x_k); f(x_{k+1})) = f(x_{k+1})$, тогда, используя оценку (21) и учитывая то, что $0 < |f(x)| < 1$, можем записать:

$$\begin{aligned} &|f(t_k) - f(x_k)|^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; t_k]} p(t)}} + |f(t_k) - f(x_{k+1})|^{\frac{1}{\inf_{t \in [t_k; x_{k+1}]} p(t)}} - |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; x_{k+1}]} p(t)}} = \\ &= (f(t_k) - f(x_{k+1}) + f(x_{k+1}) - f(x_k))^{\frac{1}{\inf_{t \in [x_k; t_k]} p(t)}} + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{\frac{1}{\inf_{t \in [t_k; x_{k+1}]} p(t)}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (f(x_{k+1}) - f(x_k))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} \geq (f(x_{k+1}) - f(x_k))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} + \\
& + (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} - (f(x_{k+1}) - f(x_k))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} = 2 (f(t_k) - f(x_{k+1}))^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} > \varepsilon.
\end{aligned}$$

Доказательство для минимума аналогично. Мы доказали, что $\bar{f}_{N-1}(x)$ – почти возрастающая с показателем $\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$. Покажем, что $f_1(x) = \bar{f}_{N-1}(x) - f(x)$ – почти возрастающая с показателем $2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)} > 0$. Используя представление (28), для $t_1 < t_2, t_1, t_2 \in [x_k; x_{k+1}]$ имеем:

$$\begin{aligned}
f_1(t_1) - f_1(t_2) &= \bar{f}_k(t_1) - f(t_1) - \bar{f}_k(t_2) + f(t_2) = 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(t_1) - \\
& - 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) - (-1)^k f(t_2) - f(t_1) + f(t_2) = (f(t_2) - f(t_1)) \left(1 - (-1)^k\right).
\end{aligned}$$

Следовательно, $f_1(t_1) - f_1(t_2) = 0$, для промежутков $[x_k; x_{k+1}]$, где $f(t)$ почти возрастает и $f_1(t_1) - f_1(t_2) = 2(f(t_2) - f(t_1)) \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$, для промежутков, где $f(t)$ почти убывает. Окончательно, $f_1(t_1) - f_1(t_2) \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$, т. е. $f_1(t)$ – почти возрастающая с показателем $2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$. Пусть $t_1 < t_2, t_1 \in [x_s; x_{s+1}], t_2 \in [x_k; x_{k+1}], s < k$, тогда можем записать:

$$\begin{aligned}
f_1(t_1) - f_1(t_2) &= \bar{f}_s(t_1) - f(t_1) - \bar{f}_k(t_2) + f(t_2) = -2 \sum_{j=s+1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + \\
& + (-1)^s f(t_1) - (-1)^k f(t_2) - f(t_1) + f(t_2).
\end{aligned}$$

Если s, k – чётные, то, по предположению, для чётных j $f(x_j) - f(x_{j+1}) \leq 0, -f(x_{s+1}) \leq 0$, имеем:

$$f_1(t_1) - f_1(t_2) = 2(-f(x_{s+1}) + f(x_{s+2}) - f(x_{s+3}) + f(x_{s+4}) - f(x_{s+5}) + \dots + f(x_{k-1}) - f(x_k)) \leq 0.$$

Если s – нечётная, k – чётная, то поскольку для чётных k функция $f(x)$ – почти возрастающая, то $f(x_k) - f(t_2) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$ и можем записать:

$$\begin{aligned}
& f_1(t_1) - f_1(t_2) = \\
& = 2(f(x_{s+1}) - f(x_{s+2}) + \dots + f(x_{k-2}) - f(x_{k-1}) + f(x_k) - f(t_2)) \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}.
\end{aligned}$$

Если s – чётная, k – нечётная, по предположению $-f(x_{s+1}) \leq 0$, то функция $f(x)$ – почти убывающая и $-f(x_k) + f(t_2) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$, имеем:

$$\begin{aligned}
& f_1(t_1) - f_1(t_2) = \\
& = 2(-f(x_{s+1}) + f(x_{s+2}) - \dots - f(x_{k-2}) + f(x_{k-1}) - f(x_k) + f(t_2)) \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}.
\end{aligned}$$

Если s – нечётная, k – нечётная, то можем записать:

$$\begin{aligned}
& f_1(t_1) - f_1(t_2) = 2(-f(t_1) + f(x_{s+1}) - f(x_{s+2}) + \\
& + f(x_{s+3}) - f(x_{s+4}) + \dots + f(x_{k-3}) - f(x_{k-2}) + f(x_{k-1}) - f(x_k) + f(t_2)) \leq 2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}.
\end{aligned}$$

Мы доказали, что функция $f_1(x)$ – почти возрастающая с показателем $2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{t \in [x_k; x_{k+1}]} \inf^{p(t)}$. Лемма доказана.

Из леммы 2.4 следует, что каждую функцию $f(x)$ с ограниченным винеровским изменением, для любого $\varepsilon > 0$, можно представить в виде

$$f(x) = \omega[f](x) - (\omega[f](x) - f(x) + \psi(x)) + \psi(x),$$

где $\omega[f](x)$ – монотонно неубывающая ломанная, проходящая через точки

$\left(x_k; 2 \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} f(x_j) + (-1)^k f(x_k)\right)$, $k = \overline{1, M-1}$, $(\omega[f](x) - f(x) + \psi(x))$ – монотонно неубывающая функция, $\psi(x)$ – функция с ограниченным винеровским изменением, для которой $|\psi(x)| < \varepsilon$. В случае, если $f(x) \in H^{w(x)}([a, b])$, тогда $\omega[f](x), \psi(x) \in H^{w(x)}([a, b])$, $|\psi(x)| < \varepsilon$.

Лемма 2.5. Пусть $0 < \varepsilon, 0 < \alpha < \lambda < 1$, функция $f(x) \in H^\lambda([a, b])$ продлена нулём вне отрезка $[a, b]$, тогда оператор локализованного дифференцирования $D^{\alpha, -\varepsilon}$ ограниченно действует из пространства $H^\lambda([a, b])$ в пространство $H^{\lambda-\alpha}([a, b])$ и

$$D^{\alpha, -\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha}.$$

Для любого $\delta > 0$ существует такое ε_0 , что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} - \delta \leq D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) \leq \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \delta. \quad (29)$$

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что для любого $\delta > 0$, $f(x)$ может быть представлена в виде:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + \psi(x),$$

где $f_1(x), f_2(x), \psi(x) \in H^\lambda[a, b]$, $|\psi(x)| < \delta$ и $f_1(x), f_2(x)$ неубывающие. Обозначим $f_1(x) - f_2(x) = \phi(x)$. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} D^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x) &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{c(x-t) dt}{(x-t)^{1+\alpha}} = \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha c \varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = \\ &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha(\phi(x) - \phi(x-\varepsilon))}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} = \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha)\varepsilon^\alpha}. \end{aligned} \quad (30)$$

Для функции $\psi(x)$ можем записать:

$$\begin{aligned} |D^{\alpha, -\varepsilon} \psi(x)| &\leq \frac{2\delta}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\delta}^x \frac{c dt}{(x-t)^{\alpha+1-\lambda}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \frac{2\delta dt}{(x-t)^{\alpha+1}} = \\ &= \frac{\alpha \delta^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(\lambda-\alpha)} + \frac{2\delta^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\delta^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} + 2\delta^{1-\lambda} \right) \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из оценок (30), (31) следует утверждение леммы (29).

Поскольку

$$\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]) \subset H^{\lambda-\alpha}([a, b]),$$

то докажем, что

$$\psi_1(x) = \int_{x-\varepsilon}^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt = \int_0^\varepsilon \frac{f(x) - f(x-s)}{s^{\alpha+1}} ds \in H^{\lambda-\alpha}([a, b]).$$

Используя подстановку $t|_0^\varepsilon = h + s|_{-h}^{\varepsilon-h}$ в $\psi_1(x+h)$, можем записать:

$$\begin{aligned} \psi_1(x+h) - \psi_1(x) &= \int_{-h}^{\varepsilon-h} \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt + \int_0^\varepsilon \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt = \\ &= \int_0^\varepsilon (f(x) - f(x-t)) ((t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}) dt + \int_{-h}^0 (f(x+h) - f(x-t)) (t+h)^{-\alpha-1} dt + \\ &+ \int_0^\varepsilon (f(x+h) - f(x)) (t+h)^{-\alpha-1} dt - \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

В случае, если $x-a < \varepsilon$ $D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$ и $|\psi_1(x)| \leq c \int_0^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1} dt < \infty$. Поэтому $|\psi_1(a)| = 0$ и $D^{\alpha, -\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha}$. Результат действия оператора $D^{\alpha, -\varepsilon} f(x)$ следует из леммы 13.1 ([3]).

Пусть $x - a \geq \varepsilon$, тогда, используя лемму 13.1 ([3]), можем записать:

$$|J_1| \leq \int_0^{x-a} |f(x) - f(x-t)| (t^{-\alpha-1} - (t+h)^{-\alpha-1}) dt \leq c_1 h^{\lambda-\alpha};$$

$$|J_2| \leq c_2 h^{\lambda-\alpha};$$

$$|J_3| \leq \int_0^{x-a} |f(x+h) - f(x)| (t+h)^{-\alpha-1} dt \leq c_3 h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1, c_2, c_3 < \infty$. Оценим J_4 . Используя (3.8) из [3], имеем:

$$|J_4| \leq c_4 \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (t+h)^{\lambda-\alpha-1} dt = \frac{c_4}{\lambda-\alpha} \left((\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha} - \varepsilon^{\lambda-\alpha} \right) \leq c_5 h (\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha-1} \leq c_5 h^{\lambda-\alpha}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.6. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \varepsilon$, тогда оператор локализованного дробного интегрирования $I^{\alpha, -\varepsilon}$ для $\alpha + \lambda < 1$ ограничен из $H^\lambda[a; b]$, в $H^{\alpha+\lambda}[a; b]$ и для $\alpha + \lambda \leq 1$ ограничен из $H^{\lambda, 1}[a; b]$ в $H^{\alpha+\lambda, 1}[a; b]$.

Доказательство. Представим оператор локализованного дробного интегрирования в виде:

$$\begin{aligned} I^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t) - f(a)) dt + \frac{f(a) \varepsilon^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t) - f(a)) dt - \int_a^{x-\varepsilon} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (f(t) - f(a)) dt + \frac{f(a) \varepsilon^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = M + N(x). \end{aligned}$$

Воспользуемся подстановками $x - t|_a^{x-\varepsilon} = s|_{x-a}^\varepsilon$ и $g(x) = f(x) - f(a)$, тогда можем записать:

$$\begin{aligned} N(x+h) - N(x) &= \int_\varepsilon^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds + \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds + \\ &+ \frac{g(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_\varepsilon^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) ds + \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha)} ds = \\ &= \int_\varepsilon^{x-a} \frac{((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)} (g(x-s) - g(x)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} (g(x-s) - g(x)) ds + \\ &+ \frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)} ((x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha - (\varepsilon+h)^\alpha + \varepsilon^\alpha + (\varepsilon+h)^\alpha - \varepsilon^\alpha) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\varepsilon^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) (g(x-s) - g(x)) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} (g(x-s) - g(x)) ds + \\ &+ \frac{g(x)}{\Gamma(1+\alpha)} ((x-a+h)^\alpha - (x-a)^\alpha) = N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Для слагаемых N_1 и N_3 известны оценки (см. [3], теорема 3.1.):

$$|N_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-a} ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) (g(x-s) - g(x)) ds \leq \begin{cases} ch^{\lambda+\alpha}, \lambda + \alpha < 1; \\ ch \ln \frac{1}{h}, \lambda + \alpha = 1; \end{cases} \quad (32)$$

$$|N_3| \leq ch^{\lambda+\alpha}. \quad (33)$$

Оценим слагаемое N_2 . Для этого вычислим максимум подынтегрального выражения:

$$\left((s+h)^{\alpha-1} s^\lambda \right)' = 0, s = \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}.$$

Поскольку знак производной положителен для $s \in \left(0, \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}\right)$ и отрицателен для $s > \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}$, то $s = \frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda}$ точка максимум. Тогда можем записать:

$$|N_2| \leq \frac{Ah}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda} + h \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\lambda h}{1-\alpha-\lambda} \right)^\lambda = \frac{Ah^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\lambda} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{\lambda}{1-\alpha-\lambda} \right)^\lambda. \quad (34)$$

Собирая оценки (32) – (34), получаем доказательство леммы.

Докажем, что $I^{\alpha, -\varepsilon}$ ограничен из $H^{\lambda, 1}[a; b]$ в $H^{\alpha+\lambda, 1}[a; b]$, для $\alpha + \lambda \leq 1$. Воспользуемся подстановками

$$x - t \Big|_{x+h-\varepsilon}^{x+h} = s \Big|_{\varepsilon-h}^{-h}, \quad x - t \Big|_{x-\varepsilon}^x = s \Big|_{\varepsilon}^0$$

и обозначая $g(x) = f(x) - f(a)$, можем записать:

$$\begin{aligned} I^{\alpha, -\varepsilon} f(x+h) - I^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon ((s+h)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}) (g(x-s) - g(x)) ds + \\ &- \int_{-h}^0 \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha) (s+h)^{1-\alpha}} ds - \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon \frac{g(x-s) - g(x)}{\Gamma(\alpha) (s+h)^{1-\alpha}} ds = N_1 + N_2 + N_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое $N_2(x)$. Воспользуемся свойством $g(x-s) - g(x) \leq A|s|^\lambda \ln \left| \frac{1}{s} \right|$, тогда проинтегрируем по частям:

$$\left[\begin{array}{l} \ln \frac{1}{t} = u, \quad -\frac{1}{t} dt = du, \\ h^{\alpha+\lambda-1+1} \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{t}{h}\right)^\lambda d\frac{t}{h} = dv, \quad h^{\alpha+\lambda} \int (1-z)^{\alpha-1} z^\lambda dz = h^{\alpha+\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \int z^{k+\lambda} dz = \\ = \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\lambda+1} \left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1} {}_2F_1\left(1-\alpha, \lambda+1; \lambda+2; \frac{t}{h}\right) = v; \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} |N_2| &\leq c \int_0^h \frac{(h-t)^{\alpha-1} t^\lambda}{\Gamma(\alpha)} \ln \frac{1}{t} dt = c \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha) (\lambda+1)} \left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1} {}_2F_1\left(1-\alpha, \lambda+1; \lambda+2; \frac{t}{h}\right) \ln \left(\frac{1}{t}\right) \Big|_0^h + \\ &+ c \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha) (\lambda+1)} \int_0^h \frac{1}{t} \left(\frac{t}{h}\right)^{\lambda+1} {}_2F_1\left(1-\alpha, \lambda+1; \lambda+2; \frac{t}{h}\right) dt \leq c_1 h^{\alpha+\lambda} \ln \left(\frac{1}{h}\right) + \\ &+ c \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\alpha) (\lambda+1) \Gamma(\lambda+\alpha+1)} h^{\alpha+\lambda} \int_0^1 s^\lambda ds \leq c_2 h^{\alpha+\lambda} \ln \left(\frac{1}{h}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

В случае, если $\frac{1}{2} \geq \varepsilon \geq h, \lambda + \alpha \leq 1$, с учётом оценок

$$\left(x^\lambda \ln \frac{1}{x}\right)' = x^{\lambda-1} \left(\lambda \ln \frac{1}{x} - 1\right) > 0, \ln \frac{1}{x^\lambda} > \ln e, 0 < x < \frac{1}{e^{\frac{1}{\lambda}}}, \quad (36)$$

и того, что

$$\left(x^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{x}\right)' = x^{\lambda+\alpha-2} \left((\lambda+\alpha-1) \ln \frac{1}{x} - 1\right) < 0, 0 < x < 1, \quad (37)$$

имеем:

$$|N_3| \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} (s+h)^\lambda \ln \frac{1}{s+h} ds \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon h^{\alpha+\lambda-1} \ln \frac{1}{h} ds \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} h^{\alpha+\lambda} \ln \frac{1}{h}. \quad (38)$$

В случае, если $\frac{1}{2} \geq h \geq \varepsilon > 0, \lambda + \alpha \leq 1$, с учётом того, что

$$\left(z^a \ln \frac{1}{z} + \frac{z^a}{a}\right)' = az^{a-1} \ln \frac{1}{z}, 0 \leq a \leq 1, 0 < z < 1, \quad (39)$$

имеем:

$$N_3 \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon (s+h)^{\alpha-1} s^\lambda \ln \frac{1}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\varepsilon-h}^0 (s+h)^{\alpha-1} (-s)^\lambda \ln \frac{1}{-s} ds \leq$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon s^\lambda \ln \frac{1}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{h-\varepsilon} (h-t)^{\alpha-1} t^\lambda \ln \frac{1}{t} dt = \\
&= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \ln \frac{1}{s} \Big|_0^\varepsilon + \int_0^\varepsilon \frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \frac{1}{s} ds \right) + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-\alpha)_n}{h^n n!} \int_0^{h-\varepsilon} t^{\lambda+n} \ln \frac{1}{t} dt = \\
&= \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\varepsilon^{\lambda+1}}{\lambda+1} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^2} \right) + \frac{h^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-\alpha)_n}{h^n n!} \left(\frac{(h-\varepsilon)^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \ln \frac{1}{h-\varepsilon} + \frac{(h-\varepsilon)^{\lambda+n+1}}{(\lambda+n+1)^2} \right) \leq \\
&\leq \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{h^{\alpha-1}(1-\alpha)_n}{\Gamma(\alpha)h^n(\lambda+n+1)n!} \left(h^{\lambda+n+1} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\lambda+n+1}}{\lambda+n+1} \right) \leq \\
&\leq \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^\infty \frac{(1-\alpha)_n(\lambda+1)_n h^n}{(\lambda+1)(\lambda+2)_n n!} \left(\ln \frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \leq \\
&\leq \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \ln \frac{1}{h} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)^2} + \frac{h^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+1)} \left(\ln \frac{1}{h} + \frac{1}{\lambda+1} \right) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(1+\lambda+\alpha)} \leq ch^{\alpha+\lambda} \ln \frac{1}{h}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Для $|N_1|$ после подстановки $s|_0^\varepsilon = h t|_0^{\frac{\varepsilon}{h}}$ можем записать:

$$|N_1| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\varepsilon (s^{\alpha-1} - (s+h)^{\alpha-1}) |g(x-s) - g(x)| ds \leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} (t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}) t^\lambda \ln \frac{1}{ht} dt.$$

Пусть $\varepsilon \leq h \leq \frac{1}{2}$, $\alpha + \lambda \leq 1$. С учётом (39) и подстановки

$$\left[\begin{array}{l} \ln \frac{1}{ht} = u, \quad -\frac{1}{t} dt = du, \\ t^{\alpha+\lambda-1} dt = dv, \quad \frac{t^{\alpha+\lambda}}{\alpha+\lambda} = v; \end{array} \right]$$

можем записать:

$$\begin{aligned}
|N_1| &\leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{\varepsilon}{h}} t^{\alpha-1} t^\lambda \ln \frac{1}{ht} dt = \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{(\frac{\varepsilon}{h})^{\lambda+\alpha}}{(\frac{\varepsilon}{h})} - \lim_{A \rightarrow 0} \ln \frac{1}{hA} A^{\lambda+\alpha} + \frac{1}{\lambda+\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^{\alpha+\lambda} \right) \leq \\
&= \frac{c}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^{\lambda+\alpha} + \varepsilon^{\alpha+\lambda} \frac{1}{\lambda+\alpha} \right) \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)(\lambda+\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} h^{\lambda+\alpha} + h^{\alpha+\lambda} \frac{1}{\lambda+\alpha} \right) \leq c_1 h^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Пусть $1 > \varepsilon > h$, $\lambda + \alpha < 1$. С учётом знака производной в (39), имеем:

$$\begin{aligned}
|N_1| &\leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}) t^\lambda \left| \ln \frac{1}{ht} \right| dt + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} (t^{\alpha-1} - (t+1)^{\alpha-1}) t^\lambda \left| \ln \frac{1}{ht} \right| dt \leq \\
&\leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (ht)^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} d(ht) + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\alpha-1} \right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h s^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{s} ds + \\
&\quad + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} (1-\alpha) \frac{1}{t} t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{s} \frac{s^{\lambda+\alpha}}{\lambda+\alpha} \Big|_0^h + \int_0^h \frac{s^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha} ds \right) + \\
&\quad + \frac{ch^{\alpha+\lambda}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{ht} \frac{t^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha-1} \Big|_1^{\frac{\varepsilon}{h}} + \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \frac{t^{\lambda+\alpha-2}}{\lambda+\alpha-1} dt \right) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{h^{\lambda+\alpha}}{\lambda+\alpha} + \frac{h^{\lambda+\alpha}}{(\lambda+\alpha)^2} \right) + \\
&\quad + \frac{ch^{\alpha+\lambda}(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{1}{h} \frac{(\frac{\varepsilon}{h})^{\lambda+\alpha-1}}{\lambda+\alpha-1} - \ln \frac{1}{h} \frac{1}{\lambda+\alpha-1} + \frac{(\frac{\varepsilon}{h})^{\lambda+\alpha-1}}{(\lambda+\alpha-1)^2} - \frac{1^{\lambda+\alpha-1}}{(\lambda+\alpha-1)^2} \right) \leq c_2 h^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{h}.
\end{aligned}$$

Пусть $x - a > \varepsilon \geq h, \lambda + \alpha = 1$. Воспользуемся неравенством $1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1} \leq |\alpha - 1| \frac{1}{t}$, которое следует из [3], отрицательностью производной

$$\begin{aligned} & \left((\varepsilon - h) (h + \theta (\varepsilon - h))^{-1} \ln \frac{1}{h + \theta (\varepsilon - h)} \right)' = - (h + \theta (\varepsilon - h))^{-1} \ln \frac{1}{h + \theta (\varepsilon - h)} - \\ & - \frac{(\varepsilon - h) (1 - \theta)}{(h + \theta (\varepsilon - h))^2} \ln \frac{1}{h + \theta (\varepsilon - h)} - (h + \theta (\varepsilon - h))^{-1} \frac{(\varepsilon - h) (1 - \theta)}{h + \theta (\varepsilon - h)} < 0, 0 < h \leq \varepsilon, 0 < \theta < 1 \end{aligned}$$

и свойствами (37), для $\lambda + \alpha = 1$ и (36), для $\lambda = 1$, тогда можем записать:

$$\begin{aligned} |N_1| & \leq \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt + \frac{ch^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\alpha-1}\right) t^{\lambda+\alpha-1} \ln \frac{1}{ht} dt \leq \\ & \leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h \ln \frac{1}{s} ds + c_3 h \int_1^{\frac{\varepsilon}{h}} \frac{1}{ht} \ln \frac{1}{ht} d(ht) = c_1 h \ln \frac{1}{h} - c_4 h \int_h^{\varepsilon} \ln \frac{1}{s} d\left(\ln \frac{1}{s}\right) = \\ & = c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2} h \left(\ln^2 \frac{1}{h} - \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} \right) \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2} \frac{h(\varepsilon - h)}{h + \theta(\varepsilon - h)} \ln \frac{1}{h + \theta(\varepsilon - h)} \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \\ & + \frac{c_4 h}{2} \frac{\varepsilon}{\theta \varepsilon} \ln \frac{1}{\theta \varepsilon} \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4 h}{2\theta} \left(\ln \frac{1}{\theta \varepsilon} \right) \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4 h}{2\theta} \ln \frac{1}{\theta h} \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2\theta^2} \left(\theta h \ln \frac{1}{\theta h} \right) \leq \\ & \leq c_1 h \ln \frac{1}{h} + \frac{c_4}{2\theta^2} h \ln \frac{1}{h} \leq c_5 h \ln \frac{1}{h}. \end{aligned} \quad (41)$$

Собирая оценки (35), (38)–(41), получаем доказательство леммы.

Рассмотрим фактор-пространство пространства $H^\lambda([a; b])$ по одномерному пространству, состоящему из констант.

Определение 2.4. Классом функций $f_{const}(x) \equiv f(x) \equiv H_{const}^\lambda([a; b])$, назовём множество функций, получаемых из функций $f(x) \in H^\lambda([a; b])$ добавлением констант

$$H_{const}^\lambda([a; b]) = \left\{ \phi(x) \mid \phi(x) = f(x) + const, \phi(x), f(x) \in H^\lambda([a; b]), const \in R \right\}.$$

Доказательство. Аналогично пространству суммируемых функций, в случае, если это не вызывает затруднений, мы будем использовать одинаковые обозначения $f(x)$ для класса и представителя класса. Поскольку отношение принадлежать классу есть отношением эквивалентности, то классы разбивают пространства $H^\lambda([a; b])$ на систему непересекающихся множеств. Для пространства классов $H_{const}^\lambda([a; b])$ с обычными операциями для классов, как операции для произвольных представителей классов, введём норму:

$$\left\| f_{const}^\lambda(x) \right\|_{H_{const}^\lambda([a; b])} = \left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| = \max_{x \in [a; b]} (f(x)) - \min_{x \in [a; b]} (f(x)) + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\lambda}.$$

Действительно, поскольку $f_{const}^\lambda(x) = const$ – это класс, для которого $f(x)$ константа, то для любой функции $\left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| \geq 0$ и $\left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| = 0 \Leftrightarrow f_{const}^\lambda(x) = const$;

$$\begin{aligned} & \left\| f_{const}^\lambda(x) + g_{const}^\lambda(x) \right\| = \max_{x \in [a; b]} (f(x) + g(x)) + \max_{x \in [a; b]} (-f(x) - g(x)) + \\ & + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|f(x_1) + g(x_1) - f(x_2) - g(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \max_{x \in [a; b]} (f(x)) + \max_{x \in [a; b]} (g(x)) + \max_{x \in [a; b]} (-f(x)) + \\ & + \max_{x \in [a; b]} (-g(x)) + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} + \sup_{x_1, x_2 \in [a; b]} \frac{|g(x_1) - g(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = \left\| f_{const}^\lambda(x) \right\| + \left\| g_{const}^\lambda(x) \right\|; \\ & \left\| a f_{const}^\lambda(x) \right\| = |a| \left\| f_{const}^\lambda(x) \right\|, a \in R. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующий оператор:

$$D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left(D_\delta^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x) = 0.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 2.7. Для любого $x \in [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$\left(D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{[a;b], \delta}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) = f(x), \quad 0 < \varepsilon, 0 < \alpha < 1$$

имеет место поточечно для $f(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, $-\infty < a, 0 < \alpha < \lambda < 1$.

Доказательство. Из теоремы 2.2, а также того, что в случае $f(x) \in L_p(-\infty, b)$, $1 \leq p < \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $_{L_p(-\infty, b)}$ следует:

$$\begin{aligned} \left(D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] - 1} \left(D_{a+}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x - \varepsilon k) + \left(D_{a+}^{\alpha} I^{\alpha} f \right) \left(x - \varepsilon \left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] \right) = \\ &+ f(x) - f(x - \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - f(x - 2\varepsilon) + \dots + f \left(x - \varepsilon \left(\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] - 1 \right) \right) - f \left(x - \left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] \varepsilon \right) + \\ &+ f \left(x - \left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right] \varepsilon \right) = f(x), \end{aligned}$$

в случае конечного отрезка и

$$\begin{aligned} \left(D_{[-\infty; b]}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(D_{a+}^{\alpha, -\varepsilon} I^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x - \varepsilon k) = f(x) - f(x - \varepsilon) + \\ &+ f(x - \varepsilon) - f(x - 2\varepsilon) + \dots = f(x), \end{aligned}$$

в случае бесконечного промежутка.

Лемма 2.8. Пусть $f(x), g(x) \in H^{\lambda}([a; b])$, $f(x) = \text{const}_1$, $g(x) = \text{const}_2$, для $x \leq a$.

$$D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} g(x) \quad (D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = D^{\alpha, -\varepsilon} g(x)),$$

тогда и только тогда, когда $f(x) - g(x) = \text{const}$, $x \in [a, b]$.

Доказательство. Заметим, что поскольку $D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = 0$, если $f(x) = \text{const}_1$, то имеем:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{\varepsilon} \right] + 2} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right) (x).$$

Необходимость. Пусть $f(x) - g(x) = \text{const}$, $g(x), f(x) \in H_0^{\lambda}([a; b], \rho)$. В силу того, что $D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} \text{const} = 0$, то $D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} g(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} (f + \text{const})(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} f(x)$.

Достаточность. Докажем, что если $D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} g(x)$, то $f(x) - g(x) = \text{const}_1 - \text{const}_2$. Вычислив локализованный интеграл (2) от локализованной производной, имеем:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} (f - g)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} I^{\alpha, -\varepsilon} \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} (f - g)(x - \varepsilon k) \right) (x) = 0.$$

Из теоремы 2.1 следует, что последнее равенство может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \left(I^{\alpha, -\varepsilon} D_{[a;b]}^{\alpha, -\varepsilon} (f - g) \right) (x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} \left((f - g)(x - \varepsilon k) - \int_0^1 K(s, \alpha) (f - g)(x - \varepsilon k - \varepsilon - \varepsilon s) ds \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon k) - \int_0^1 K(s, \alpha) \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon(k+1) - \varepsilon s) ds = 0. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.3 следует, что такие уравнения с усредняющими ядрами имеют единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $(f - g) = \text{const}_1 - \text{const}_2$, для $x \leq a$. Решение задаётся рекуррентными формулами, например, для $x \in [a, a + \varepsilon]$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon k) = \int_0^1 K(s, \alpha) \sum_{k=0}^{\left[\frac{b-a}{\varepsilon} \right]} (f - g)(x - \varepsilon(k+1) - \varepsilon s) ds =$$

$$= \int_0^1 K(s, \alpha) (f - g)(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds = (const_1 - const_2) \int_0^1 K(s, \alpha) ds = const_1 - const_2.$$

Продолжая вычисления $(f - g)(x)$ последовательно, для отрезков $[a + \varepsilon, a + 2\varepsilon]$, $[a + 2\varepsilon, a + 3\varepsilon]$, . . . , $[b - \varepsilon, b]$ получаем, что $(f - g)(x) = const_1 - const_2$, для $x \in [a, b]$. Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть $f_{const}(x) \in H_{const}^\lambda([a; b])$, $f(x) = 0$, для $x \leq a$. Если выполнены следующие условия: $0 < \varepsilon$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda$, $\alpha + \lambda < 1$, то оператор локализованного интегрирования $I^{\alpha, -\varepsilon}$ осуществляет изоморфизм пространства классов $H_{const}^\lambda([a; b])$ на пространство $H_{const}^{\lambda+\alpha}([a; b])$.

Доказательство. Из лемм 2.5, 2.6 и 2.7 следует, что между пространством $H^\lambda([a; b])$ и, по крайней мере частью пространства $H^{\lambda+\alpha}([a; b])$, т. е. частью пространства функций представимых в виде $(I^{\alpha, -\varepsilon}\phi)(x)$, $\phi(x) \in H_{const}^{\lambda+\alpha}([a; b])$ оператор $I^{\alpha, -\varepsilon}$ осуществляет изоморфизм. Покажем, что каждая функция $f(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a; b])$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha, -\varepsilon}\phi(x)$, $\phi(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a, b])$. Предположим противное, т. е. существует $g(x) \in H^{\lambda+\alpha}([a; b])$ и $g(x) \neq I^{\alpha, -\varepsilon}\psi(x)$, $\psi(x) \in H^\lambda([a, b])$. Поскольку $D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x) \in H^\alpha([a; b])$ и $I^{\alpha, -\varepsilon}D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x) \in H^{\alpha+\lambda}([a; b])$, то в пространстве $H^{\alpha+\lambda}([a; b])$ существуют две неравные функции $g(x)$, $I^{\alpha, -\varepsilon}D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x)$, имеющие равные локализованные производные $D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x)$. Поскольку для функций из пространства $H^{\lambda+\alpha}([a; b])$ такое возможно, только для $I^{\alpha, -\varepsilon}D_{[a; b]}^{\alpha, -\varepsilon}g(x) - g(x) = const$, т. е. функций, принадлежащих одному классу. Наше предположение о существовании классов функций, не представимых в виде локализованного интеграла, ложно.

3. Заключение. Несмотря на то, что локализованные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувилля во многом похожи на дробные производные и интегралы Римана – Лиувилля, дифференциальные уравнения с локализованными дробными производными (теорема 2.2) являются разностными и, следовательно, решения таких уравнений не ограничены в весовых гёльдеровских пространствах. Вторым отличием локализованных дробных производных есть то, что локализованные дробные производные констант равны нулю и, следовательно, изоморфизм локализованные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувилля осуществляют между фактор-пространствами гёльдеровских пространств по пространству констант.

Список литературы

1. Grinko A.P. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019;30(10):817-832.
2. Grinko A.P. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions*. 2018;29(6):489-504.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.; Наука и Техника; 1987. 687с.
4. Chistyakov V.V. and Galkin O.E. On Maps of Bounded p-Variation with $p > 1$. *Positivity*. 1998;2:19-45.
5. Mejia O., Merentes N., Sanchez J.L. The Space of Bounded p(-)-Variation in Wiener's Sense with Variable Exponent. *Advances in Pure Mathematics*. 2015;5(11):703-716.
6. Павлов Д.А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на компактах в \mathbb{R}^3 . *Записки научных семинаров ПОМИ*. 2020;491:119-144.
7. Grinko A.P. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk*;2009;17(1):41-50. (In Russian)
8. Grinko A.P. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions*. 2022;33(8):623-636.
9. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука; 1968. 511 с.
10. Castillo R., Merentes N. and Rafeiro H. Bounded Variation Spaces with p-Variable. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2014;11: 1069-1079.

References

1. Grinko AP. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019;30(10):817-832.
2. Grinko AP. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions*. 2018;29(6):489-504.
3. Samko SG., Kilbas AA., Marichev OI. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Ml.; Science and Technology; 1987. 687с.
4. Chistyakov VV. and Galkin OE. On Maps of Bounded p-Variation with $p > 1$. *Positivity*. 1998;2:19-45.

5. Mejia O., Merentes N., Sanchez JL. The Space of Bounded $p(\cdot)$ -Variation in Wiener's Sense with Variable Exponent. *Advances in Pure Mathematics*. 2015;5(11):703–716.
6. Pavlov DA. Constructive description of Hölder classes on compacta in \mathbb{R}^3 . *Notes scientific seminars POMI*. 2020;491:119–144.
7. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk*;2009;17(1):41-50. (In Russian)
8. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions*. 2022;33(8):623-636.
9. Muskhelishvili NI. Singular integral equations. - M.: Science; 1968. 511 p.
10. Castillo R., Merentes N. and Rafeiro H. Bounded Variation Spaces with p -Variable. *Mediterranean Journal of Mathematics*. 2014;11: 1069–1079.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 17.09.2024

Received September 17, 2024

Поступила после рецензирования 04.11.2024

Revised November 4, 2024

Принята к публикации 07.11.2024

Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гринько Александр Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и физико-математических дисциплин, Барановичский государственный университет, г. Барановичи, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander P. Grinko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines, Baranovichi State University, Baranovichi, Belarus

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 539.21
MSC 74N05; 82D25 ; 82D37
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-314-319

Влияние ориентации монокристаллических игл NiSb на электропроводность монокристаллов композита $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

Захвалинский В. С.¹, Борисенко А. В.¹, Маширов А. В.², Кочура А. В.³, Пиллюк Е. А.¹,
Соболев В. В.⁴

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)

¹ Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
zakhvalinskii@bsuedu.ru, 1491654@bsuedu.ru, pilyuk@bsuedu.ru

² Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук,
Россия, 125009, г. Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7
a.v.mashirov@mail.ru

³ Юго-Западный государственный университет,
Россия, 305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94
akochura@mail.ru

⁴ Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова,
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7
soboleff.val@yandex.ru

Аннотация. Целью работы является проведение исследования электропроводности композитных монокристаллов $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Модифицированным методом Бриджмена были получены монокристаллы композита эвтектической системы $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Используя сканирующий электронный микроскоп JSM-6610LV (Jeol), был определен состав и однородности распределения элементов методом энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии. Определены интервалы прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Эфроса – Шкловского (60 К – 126.1 К) и прыжковой проводимости по ближайшим соседям (88 К – 115 К) у образцов с разной ориентацией игольчатых включений NiSb.

Ключевые слова: InSb-NiSb, монокристалл, прыжковая проводимость, электрические свойства

Для цитирования: Захвалинский В. С., Борисенко А. В., Маширов А. В., Кочура А. В., Пиллюк Е. А., Соболев В. В. 2024. Влияние ориентации монокристаллических игл NiSb на электропроводность монокристаллов композита $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 314–319. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-314-319

Original Research

The Effect of the Orientation of NiSb Single Crystal Needles on the Electrical Conductivity of Composite Single Crystals $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

Vasily S. Zakhvalinskii¹, Alexander V. Borisenko¹, Alexey V. Mashirov², Alexey V. Kochura³,
Evgeniy A. Pilyuk³, Valentin V. Sobolev³

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)

¹ Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
zakhvalinskii@bsuedu.ru, 1491654@bsuedu.ru, pilyuk@bsuedu.ru

² V. A. Kotelnikov IRE of the Russian Academy of Sciences,
11/7 Makhovaya St., Moscow 125009, Russia
a.v.mashirov@mail.ru

³ Southwestern State University,
94 50 years of October St., Kursk 305040, Russia
akochura@mail.ru

⁴ Izhevsk State Technical University named after M. T. Kalashnikov,
7 Studencheskaya St., Izhevsk 426069, Россия
soboleff.val@yandex.ru

Abstract. The aim of the work is to study the electrical conductivity of composite single crystals $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Single crystals of the composite eutectic system $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ were obtained using the modified Bridgman method.

The composition and distribution homogeneity of elements were determined by the energy-dispersive X-ray spectroscopy method using a JSM-6610LV (Jeol) scanning electron microscope. The intervals of hopping conductivity with a variable jump length of the Shklovsky-Efros type and by the nearest neighbors were determined for samples with different orientations of needle-shaped inclusions of NiSb single crystals.

Keywords: InSb-NiSb, Single Crystal, Electrical Properties, Hopping Conductivity

For citation: Zakhvalinskii V. S., Borisenko A. V., Mashirov A. V., Kochura A. V., Pilyuk E. A., Sobolev V. V. 2024. The Effect of the Orientation of NiSb Single Crystal Needles on the Electrical Conductivity of Composite Single Crystals $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 314–319. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-314-319

1. Введение. Исследование свойств полупроводниковых соединений, относящихся к классу $A^{III}B^V$ [1, 2], важно с точки зрения создания новых электронных и оптоэлектронных устройств. InSb представляет собой полупроводник с узкой запрещенной зоной и малой эффективной массой электронов, который обладает высоким потенциалом для применения в инфракрасной оптике, благодаря самой высокой подвижности носителей среди полупроводников $A^{III}B^V$ [3, 4, 5]. Эти отличительные свойства делают InSb особенно интересным для высокоскоростной электроники [6, 7] и в спинтронике [8, 9].

Целью работы является проведение исследования электропроводности композитных монокристаллов $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Для достижения поставленной цели были получены монокристаллы $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ модифицированным методом Бриджмена, представляющие собой матрицу InSb, в которую введены строго ориентированные монокристаллические иглы NiSb [10]. Иглы NiSb расположены параллельно друг другу, равномерно распределены во всем объеме матрицы и ориентированы вертикально (рис. 1, а) и горизонтально (рис. 1, б) относительно большей поверхности образца.

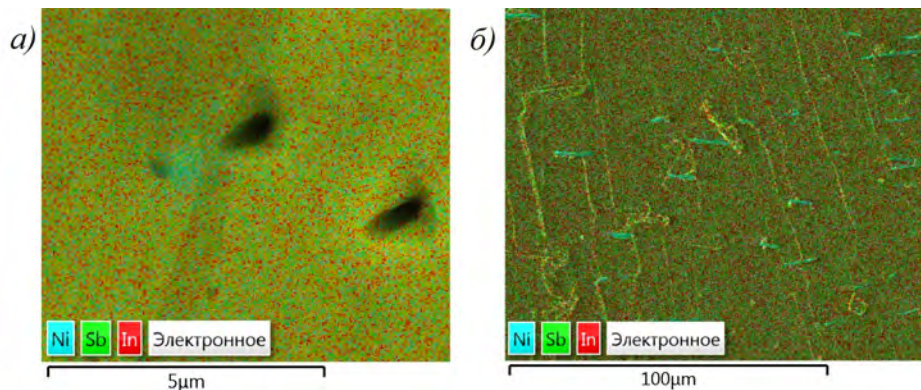


Рис. 1. а – поверхность образца № 1 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$; б – поверхность образца № 2 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

Fig. 1. а – surface of sample No.1 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$; б – surface of sample No.2 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

Исходные материалы измельчали и загружали в ростовые ампулы. Содержание InSb выдерживалось в 6.5 % моль, что соответствует эвтектической области на фазовой диаграмме системы InSb-NiSb.

2. Материалы и методика эксперимента. Использование установки GBC EMMА с излучением $\text{CuK}\alpha$ ($\alpha = 1.5401 \text{ \AA}$) позволило изучить дифракцию рентгеновского излучения при отражении от кристалла $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Были получены дифракционные картины от плоскостей семейства (110) для иголок NiSb (гексагональная структура типа арсенида никеля P63/mmc (п.г. 194)) и InSb (структура цинковой обманки $F43m$ (п.г. 216)). Параметр кристаллической решетки InSb оказался равными $a = 6.469(1) \text{ \AA}$, в свою очередь, параметры решетки игл NiSb ($a = 3.94(1) \text{ \AA}$, $c = 5.14(1) \text{ \AA}$) схожи с табличными значениями: $a = 3.9360(1) \text{ \AA}$, $c = 5.1382(1) \text{ \AA}$.

Были подготовлены два образца: образец № 1 с перпендикулярной ориентацией иголок NiSb относительно большей поверхности параллелепипеда и направления протекающего тока (рис. 2, а) и образец № 2 с параллельной ориентацией иголок NiSb относительно большей поверхности параллелепипеда и направления протекающего тока (рис. 2, б) согласно исследованиям на электронном микроскопе.

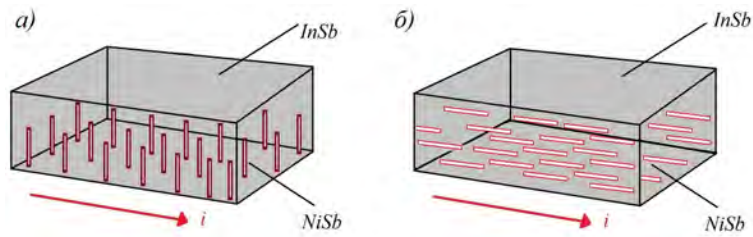


Рис. 2. Схематичная иллюстрация полупроводниковой матрицы InSb с равномерно распределенными иголками NiSb
 Fig. 2. Schematic illustration of InSb semiconductor matrix with uniformly distributed NiSb needles

Состав образцов и их однородность контролировались с помощью порошковой рентгеновской дифрактометрии и энергодисперсионной рентгеновской спектроскопии (EDX). После ориентации в электронном микроскопе были подготовлены образец № 1, имеющий форму параллелепипеда со сторонами $3.7 \times 1.9 \times 0.4$ мм, и образец № 2 со сторонами $3.34 \times 1.52 \times 0.54$ мм. Для изучения распределения химических элементов, используя сканирующий электронный микроскоп JSM-6610LV (Jeol), был получен спектр EDX исследуемого материала (рис. 3.)

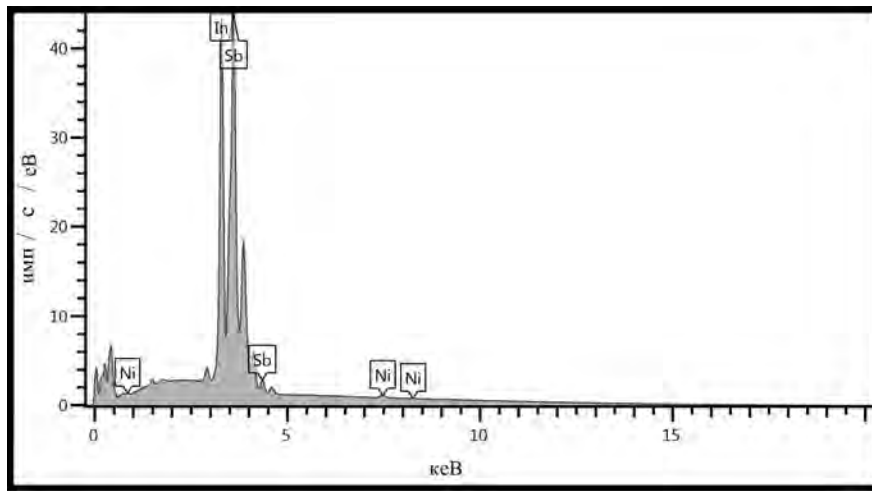


Рис. 3. Спектр EDX с поверхности образца №1 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$
 Fig. 3. EDX spectrum from the surface of sample No. 1 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$

3. Результаты и обсуждение. Проведены измерения электрических свойств удельного сопротивления в интервале температур от 320 К до температур 1.5 К. Поведение удельного сопротивления образцов № 1 (рис. 4, вставка) и № 2 (рис. 5, вставка) имеет схожий вид, однако значения ρ для разных направлений игольчатых включений NiSb отличны: так, при температуре 2 К для образца №1 $\rho = 0.02 \cdot \text{см}$; для образца №2 $\rho = 0.037 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Переход в сверхпроводящую фазу в области гелиевых температур, аналогичный наблюдавшемуся в композитном монокристалле системы CdSb-NiSb в [11], не обнаружен. Максимальное значение удельное сопротивление принимает при 22 К: для образца №1 $\rho = 0.021 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, для образца №2 $\rho = 0.043 \text{ Ом} \cdot \text{см}$. Для определения наличия механизмов прыжковой проводимости в образцах был использован универсальный закон [12], характеризующий сопоставление механизмов прыжковой проводимости и температурной зависимости удельного сопротивления (1):

$$\rho(T) = DT^m(T_0/T)^p, \quad (1)$$

где T_0 – это характеристическая температура, p и m параметры, которые зависят от типа прыжковой проводимости, параметр D – это постоянная величина.

Для нахождения интервалов прыжковой проводимости необходимо переписать уравнение (1) в виде:

$$\ln\left(\frac{E_A}{k_B \cdot T} + m\right) = \ln \rho + \rho \cdot \ln T_0 + \rho \cdot \ln \frac{1}{T}, \quad (2)$$

где E_A – это локальная энергия активации.

Для образца № 1, если в уравнении (2) задать значение подгоночному параметру $m = 1/2$, угол наклона линейной зависимости p примет значение также $1/2$, что указывает на возможное наличие прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка типа Эфроса – Шкловского (ЭШ) [13]. По

графику, приведенному на рис. 4, рассматриваемый линейный участок начинается при $T = 60$ К и заканчивается при $T_0 = 126.1$ К. Такая высокая температура начала прыжковой проводимости нетипична для полупроводников с мелкими примесными состояниями, например, такими как германий и др. [14]. Напротив, в твердых растворах индия примесные состояния сильно локализованы, поэтому прыжковая проводимость наблюдается при значительно более высоких температурах [15]. Из экспериментальной кривой, представленной на рис. 4, следует, что участок температурной зависимости с прыжковой проводимостью при понижении температуры обрывается и сопротивление образцов опять начинает уменьшаться.

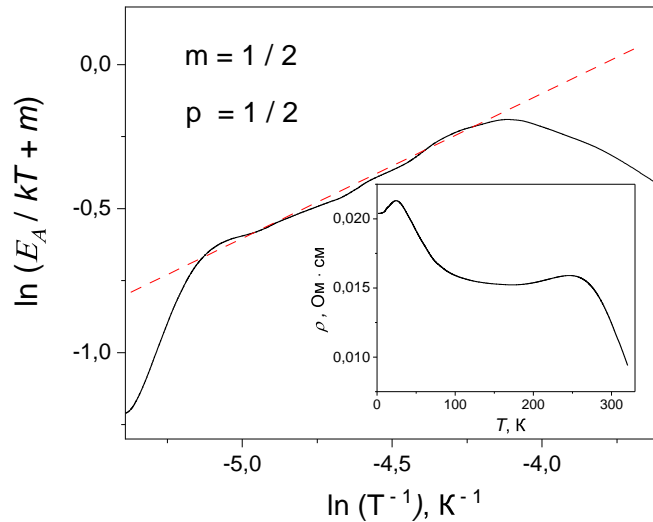


Рис. 4. Зависимость $\ln(E_A / k_B \cdot T + m)$ от $\ln(1/T)$ образца № 1 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Вставка: зависимость $\rho(T)$ образца № 1

Fig. 4. Dependency $\ln(E_A / k_B \cdot T + m)$ от $\ln(1/T)$ of sample No. 1 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Insert: dependency $\rho(T)$ of sample No. 1

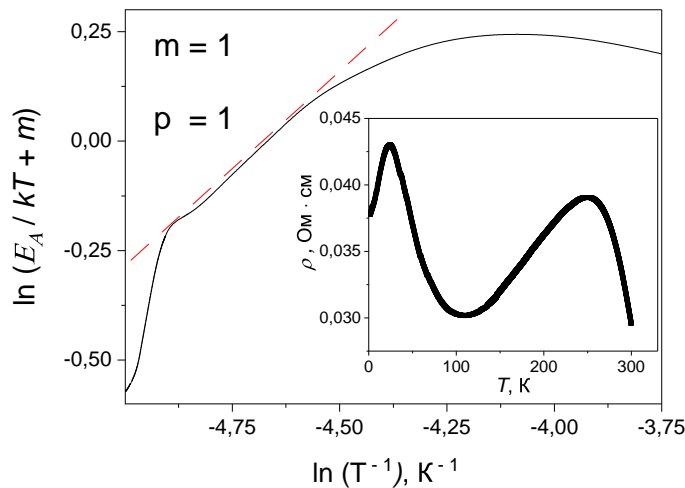


Рис. 5. Зависимость $\ln(E_A / k_B \cdot T + m)$ от $\ln(1/T)$ образца № 2 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Вставка: зависимость $\rho(T)$ образца № 2

Fig. 5. Dependency $\ln(E_A / k_B \cdot T + m)$ от $\ln(1/T)$ of sample No. 2 $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$. Insert: dependency $\rho(T)$ of sample No. 2

Такое поведение $\rho(T)$ представлено в ряде работ, посвященных композитам с игольчатыми включениями магнитных монокристаллов, где наблюдалось резкое падение сопротивления в области низких температур после участка прыжковой проводимости. Например, в работе, посвященной исследованию композитного монокристалла CdSb-NiSb [11], наблюдалось резкое снижение удельного сопротивления при низких температурах после участка с прыжковой проводимостью, с дальнейшим переходом в сверхпроводящее состояние.

Для образца № 2, принимаем значение параметра $m = 1$, параметр $p = 1$ (рис. 5), что указывает на наличие прыжковой проводимости по ближайшим соседям [13]. Тогда интервал прыжковой проводимости начинается с $T = 88$ К, а заканчивается при $T_D = 115$ К. Локальная энергия активации механизма прыжковой проводимости по ближайшим соседям E_N равна 9.3 мэВ.

4. Заключение. Таким образом, исследованы композитные монокристаллические образцы эвтектического состава игольчатого типа $(\text{InSb})_{98.2} - (\text{NiSb})_{1.8}$ с перпендикулярной и параллельной ориентацией протекающему току монокристаллических игольчатых включений NiSb. Проведено исследование характеристик удельного сопротивления в диапазоне температур от 300 К до 1.5 К. В образце № 1 наблюдалась прыжковая проводимость с переменной длиной прыжка типа Эфроса – Шкловского. Определен интервал прыжковой проводимости: 60 К – 126.1 К. Для образца № 2 обнаружен участок прыжковой проводимости по ближайшим соседям, определен температурный диапазон прыжковой проводимости 88 К – 115 К. Локальная энергия активации проводимости прыжков по ближайшим соседям E_N равна 9.3 мэВ.

References

1. Razeghi M. Overview of antimonide based III-V semiconductor epitaxial layers and their applications at the center for quantum devices. *The European Physical Journal-Applied Physics*. 2003;23(3):149-205. DOI:10.1051/epjap:2003056
2. Weiss H. Structure and Application of Galvanomagnetic Devices: International Series of Monographs on Semiconductors. New York; 2014. 362 p.
3. Su M, Li J, He K, Fu K. NiSb/nitrogen-doped carbon derived from Ni-based framework as advanced anode for lithium-ion batteries. *Journal of Colloid and Interface Science*. 2023;629(48):83-91.
4. Zhao J, Li N, Cheng Y. All-dielectric InSb metasurface for broadband and high-efficient thermal tunable terahertz reflective linear-polarization conversion. *Optics Communications*. 2023;536:129372.
5. Luo F, Wang J, Zhu C, He X, Zhang S, Wang J, Liu H, Sun Z. 18-Electron half-Heusler compound $\text{Ti}_{0.75}\text{NiSb}$ with intrinsic Ti vacancies as a promising thermoelectric material. *Journal of Materials Chemistry A*. 2022;10(17):9655-9669. DOI: 10.1039/d2ta00461e
6. Zheng XM, You JH, Fan JJ, Tu GP, Rong WQ, Li WJ, Wang YX, Tao S, Zhang PY, Zhang SY, Shen SY, Li JT, Huang L, Su S. Electrodeposited binder-free Sb/NiSb anode of sodium-ion batteries with excellent cycle stability and rate capability and new insights into its reaction mechanism by operando XRD analysis. *Nano Energy*. 2020;77(5):105123. DOI:10.1016/j.nanoen.2020.105123
7. Friedrich J, Muller G. Erlangen - An Important Center of Crystal Growth and Epitaxy: Major Scientific Results and Technological Solutions of the Last Four Decades. *Crystal Research and Technology*. 2020;55(2): 1900053. DOI:10.1002/crat.201900053
8. Pendharkar M, Zhang B, Wu H, Zarassi A, Zhang P, Dempsey C, Lee J, Harrington S, Badawy G, Gazibegovic S, Veld R, Rossi M, Jung J, Chen A, Verheijen M, Hocoavar M, Bakkers E, Palmstrom CJ, Frolov SM. Parity-preserving and magnetic field-resilient superconductivity in InSb nanowires with Sn shells. *Science*. 2021;372(6541):508-511. DOI:10.1126/science.aba5211
9. Jesenovec J, Zawilski KT, Alison P, Meschter S, Saha SK, Sepelak AJ, Schunemann PG. Controlling Morphology of NiSb Needles in InSb through Low Temperature Gradient Horizontal Gradient Freeze. *Journal of Crystal Growth*. 2023;626:127440. DOI:10.1016/j.jcrysgro.2023.127440
10. Mamedov IKh, Arasly D, Khalilova A, Rahimov RN. Anisotropic electrical properties of a eutectic InSb + MnSb composite. *Inorganic Materials*. 2016;52(4):423-428. DOI:10.1134/S0020168516040105
11. Ivanov O, Zakhvalinskii V, Pilyuk E, Kochura A, Kuzmenko A, Ril A. Resistivity superconducting transition in single-crystalline $\text{Cd}_{0.95}\text{Ni}_{0.05}\text{Sb}$ system consisting of non-superconducting CdSb and NiSb phases. *Chinese Journal of Physics*. 2021;72(2):223-228. DOI:10.1016/j.cjph.2021.05.004
12. Zakhvalinskii VS, Borisenko AV, Nikulicheva TB, Kochura AV, Htet AZ, Pilyuk EA. Properties of solid solution $(\text{Cd}_{0.69}\text{Zn}_{0.31})_3\text{As}_2$. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 2022;15(3.1): 22. DOI 10.18721/JPM.153.103
13. Laiho R, Lashkul AV, Lisunov KG, Lahderanta E, Shakhov MA, Zakhvalinskii VS. Hopping conductivity of ni-doped p-CdSb. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2008;20(29):295204-295214. DOI:10.1088/0953-8984/20/29/295204
14. Tran TT, Wong-Leung J, Smillie LA, Hallen A. High hole mobility and non-localized states in amorphous germanium. *APL Materials*. 2023;11(4):041115. DOI:10.1063/5.0146424
15. Ravich YuI, Nemov SA. Hopping conduction via strongly localized impurity states of indium in PbTe and its solid solutions. *Semiconductors*. 2002;36(1):3-23.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.09.2024

Received September 10, 2024

Поступила после рецензирования 24.10.2024

Revised October 24, 2024

Принята к публикации 07.11.2024

Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Захвалинский Василий Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Борисенко Александр Васильевич – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Маширов Алексей Викторович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории магнитных явлений, Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова Российской академии наук, г. Москва, Россия

Кочура Алексей Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель директора по научной работе Регионального центра нанотехнологии, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Пилюк Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Соболев Валентин Валентинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, г. Ижевск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vasiliy S. Zakhvalinskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexander V. Borisenko – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexey V. Mashirov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at the Laboratory of Magnetic Phenomena, V. A. Kotelnikov IRE of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Alexey V. Kochura – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Deputy Director of the Regional Center for Nanotechnology, Southwestern State University, Kursk, Russia

Evgeniy A. Pilyuk – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at the Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Valentin V. Sobolev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Physics, Izhevsk State Technical University named after M. T. Kalashnikov, Izhevsk, Russia

[К содержанию](#)

Волновые функции стационарных состояний поперечного движения позитронов с энергиями 5 и 20 ГэВ при каналировании в направлении $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния

Исупов А. Ю.¹, Сыщенко В. В.², Тарновский А. И.², Парахин А. С.²

¹ Лаборатория физики высоких энергий имени В. И. Векслера и А. М. Балдина
Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований,
Россия, 141980, г. Дубна, ул. Академика Балдина, 4

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
syshch@yandex.ru

Аннотация. Движение быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом к одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей с хорошей точностью описывается как движение в непрерывных потенциалах параллельных атомных цепочек, при котором сохраняется параллельная оси цепочки компонента импульса частицы. Фinitное движение частицы в поперечной плоскости называется аксиальным каналированием и может квантоваться. В статье представлены полные каталоги найденных численно уровней энергии поперечного движения позитронов с энергиями 5 и 20 ГэВ, каналирующих в направлении $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния, и соответствующих этим уровням волновых функций стационарных состояний. Дана классификация найденных состояний по неприводимым представлениям группы C_{3v} .

Ключевые слова: каналирование, быстрые частицы, высокие энергии, позитроны, кремний, стационарные состояния, уровни энергии

Для цитирования: Исупов А. Ю., Сыщенко В. В., Тарновский А. И., Парахин А. С. 2024. Волновые функции стационарных состояний поперечного движения позитронов с энергиями 5 и 20 ГэВ при каналировании в направлении $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 320–327. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-320-327

Short Communication

Wave Functions of the Transverse Motion Stationary States of the 5 and 20 GeV Positrons Channeling in $\langle 111 \rangle$ Direction of the Silicon Crystal

Alexander Yu. Isupov¹, Vladislav V. Syshchenko², Arthur I. Tarnovsky², Alexander S. Parakhin²

¹ Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics
International Intergovernmental Organization Joint Institute for Nuclear Research,
4 Baldin St., Dubna 141980, Russia

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
syshch@yandex.ru

Abstract. The fast charged particle's motion in the crystal under small angle to one of the crystallographic axes densely packed with atoms can be described with high accuracy as the motion in the uniform potentials of the parallel atomic strings that conserves the particle's momentum component parallel to the string axis. The finite motion in the transverse plane in this case is called the axial channeling and can be quantized. This paper presents the full catalogue of the transverse motion energy levels and the corresponding wave functions computed numerically for the positrons with energies of 5 and 20 GeV channeling in the $\langle 111 \rangle$ direction of the silicon crystal. The classification of these stationary states according to irreducible representations of the C_{3v} group is given.

Keywords: Channeling, Fast Particles, High Energy, Positrons, Silicon, Stationary States, Energy Levels

For citation: Isupov A. Yu., Syshchenko V. V., Tarnovsky A. I., Parakhin A. S. 2024. Wave Functions of the Transverse Motion Stationary States of the 5 and 20 GeV Positrons Channeling in $\langle 111 \rangle$ Direction of the Silicon Crystal. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 320–327. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-320-327

1. Введение. Быстрая заряженная частица, движущаяся в кристалле вблизи одной из плотно упакованных атомами кристаллографических осей, может захватываться в образованную этими осями потенциальную яму, совершая фinitное движение в плоскости, перпендикулярной соответствующей оси, и аномально глубоко проникая в кристалл. Такое явление называется аксиальным каналированием. Оно было предсказано на основе численного моделирования в [?]; последующие теоретические и экспериментальные исследования отражены в многочисленных монографиях и обзорах (см., например,

[?, ?, ?]). Движение частицы в режиме аксиального каналирования с хорошей точностью может быть описано как движение в непрерывном потенциале атомной цепочки, то есть в потенциале, усредненном вдоль оси цепочки [?]. В таком потенциале сохраняется продольная компонента импульса частицы p_z , и задача о движении частицы сводится к двумерной задаче о движении в поперечной плоскости (x, y) .

При движении положительно заряженных частиц (для определенности – позитронов) вблизи направления $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния финитное движение в поперечной плоскости происходит в неглубокой потенциальной яме (рис. 1), образованной отталкивающими непрерывными потенциалами трех ближайших соседних атомных цепочек $\langle 111 \rangle$ [?, ?]:

$$U(x, y) = U^{(1)}(x, y - a/\sqrt{3}) + U^{(1)}(x + a/2, y + a/2\sqrt{3}) + U^{(1)}(x - a/2, y + a/2\sqrt{3}) - 7.8571 \text{ эВ}, \quad (1)$$

где потенциальная энергия частицы в поле уединенной атомной цепочки принята равной [?]

$$U^{(1)}(x, y) = U_0 \ln \left[1 + \frac{\beta R^2}{x^2 + y^2 + \alpha R^2} \right], \quad (2)$$

(где $U_0 = 58.8$ эВ, $\alpha = 0.37$, $\beta = 2.0$, $R = 0.194 \text{ \AA}$), $a = a_z/\sqrt{6} \approx 2.217 \text{ \AA}$ (где a_z – основной период кристалла кремния, то есть период цепочки $\langle 100 \rangle$), а константа выбрана таким образом, чтобы потенциал в центре треугольника был равен нулю. Глубина центральной ямки (точнее, высота седловой точки потенциала (??)) составляет приблизительно

$$U_{\text{saddle}} = 0.3278 \text{ эВ}. \quad (3)$$

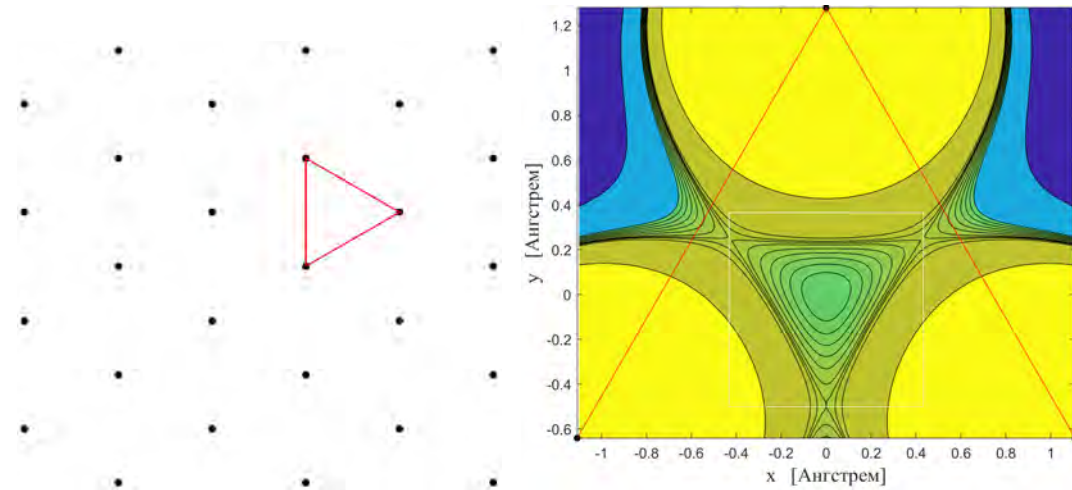


Рис. 1. Слева: проекция решетки кристалла типа алмаза на плоскость (111) . Справа: линии уровня потенциала (??); вблизи начала координат видна потенциальная ямка

Fig. 1. Left: Projection of the diamond-like lattice on the (111) plane. Right: equipotentials of (??); the small potential pit is seen near the origin of coordinates

Состояния поперечного движения релятивистского позитрона в потенциале (??) будут описываться двумерным уравнением Шрёдингера, в котором роль массы частицы играет параметр E_z/c^2 [?], где

$$E_z = \sqrt{m^2 c^4 + p_z^2 c^2} = \text{const} \approx E. \quad (4)$$

Численный метод, позволяющий найти уровни энергии E_{\perp} и волновые функции стационарных состояний в яме (??), подробно описан в [?, ?].

2. Классификация стационарных состояний и выбор затравочных функций. Потенциал (??) обладает симметрией равностороннего треугольника. Из теории групп известно (см., например, [?]), что такая симметрия описывается группой C_{3v} , элементами которой являются тождественное преобразование I , повороты R и R^2 (на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, соответственно), отражение в «вертикальной» плоскости P , а также комбинации PR и PR^2 . Эта группа имеет два одномерных неприводимых представления A_1 и A_2 и одно двумерное неприводимое представление E , по которым будут классифицироваться все стационарные состояния частицы в яме (??).

Для численного нахождения уровней энергии и волновых функций стационарных состояний, относящихся к выбранному представлению, нашему алгоритму требуется задать затравочную функцию, относящуюся к тому же представлению. Графики таких функций представлены на рис. 2.

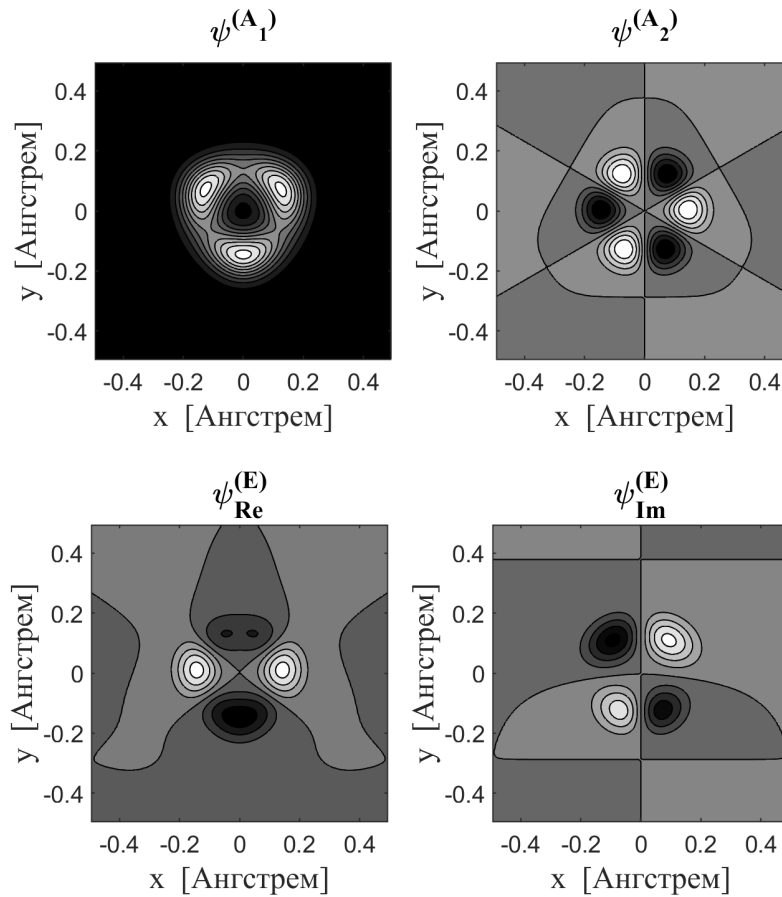


Рис. 2. Затравочные волновые функции, образующие базисы неприводимых представлений группы C_{3v}
 Fig. 2. Initial waveforms with specific symmetry that are the bases of the irreducible representations of C_{3v} group

Функция $\psi^{(A_1)}$, остающаяся неизменной при всех преобразованиях симметрии треугольника, образует базис неприводимого представления A_1 . Функция $\psi^{(A_2)}$, меняющая знак при преобразованиях, содержащих отражение, преобразуется по неприводимому представлению A_2 . Пара функций $\psi_{Re}^{(E)}$ и $\psi_{Im}^{(E)}$ представляют собой вещественную и мнимую части функций, составляющих базис двумерного неприводимого представления E :

$$\psi_1^{(E)} = \psi_{Re}^{(E)} + i\psi_{Im}^{(E)}, \quad \psi_2^{(E)} = \psi_{Re}^{(E)} - i\psi_{Im}^{(E)}. \quad (5)$$

Эти функции переходят друг в друга при отражениях, а при поворотах приобретают фазовый множитель. Соответствующие им уровни энергии будут двукратно вырождены.

3. Стационарные состояния поперечного движения каналированного позитрона с энергией 5 ГэВ. Из квазиклассических соображений следует (см., например, [?, ?, ?]), что число уровней энергии в потенциальной яме возрастает с ростом энергии продольного движения (??), в двумерном случае — линейно. Результаты выполненного нами численного моделирования показывают, что для позитронов с $E_z = 5$ ГэВ в яме (??) не будет ни одного связанного состояния, относящегося по своим свойствам симметрии к представлению A_2 группы C_{3v} (характер симметрии состояний этого типа таков, что даже наинизшее из них обладает тремя линиями узлов, что соответствует достаточно высокой кинетической энергии). Найденные значения энергии поперечного движения стационарных состояний, относящихся к представлениям A_1 и E , перечислены в таблице 1.

Таблица 1
 Table 1

Уровни энергии поперечного движения (в эВ) позитрона с $E_z = 5$ ГэВ в яме (??)
 Transverse motion energy levels (eV) for the $E_z = 5$ GeV positron in the well (??)

A_1	0.08241	0.23490	0.32324
E	0.16267	0.24409	0.30827

На рис. 3 представлены графики волновых функций, соответствующих уровням энергии из таблицы 1, относящиеся к типу симметрии A_1 (верхний ряд), E_{Re} (средний ряд) и E_{Im} (нижний ряд). Белой линией на каждом графике отмечена граница разрешенной для движения с точки зрения классической механики области, определяемая уравнением $U(x, y) = E_{\perp}$.

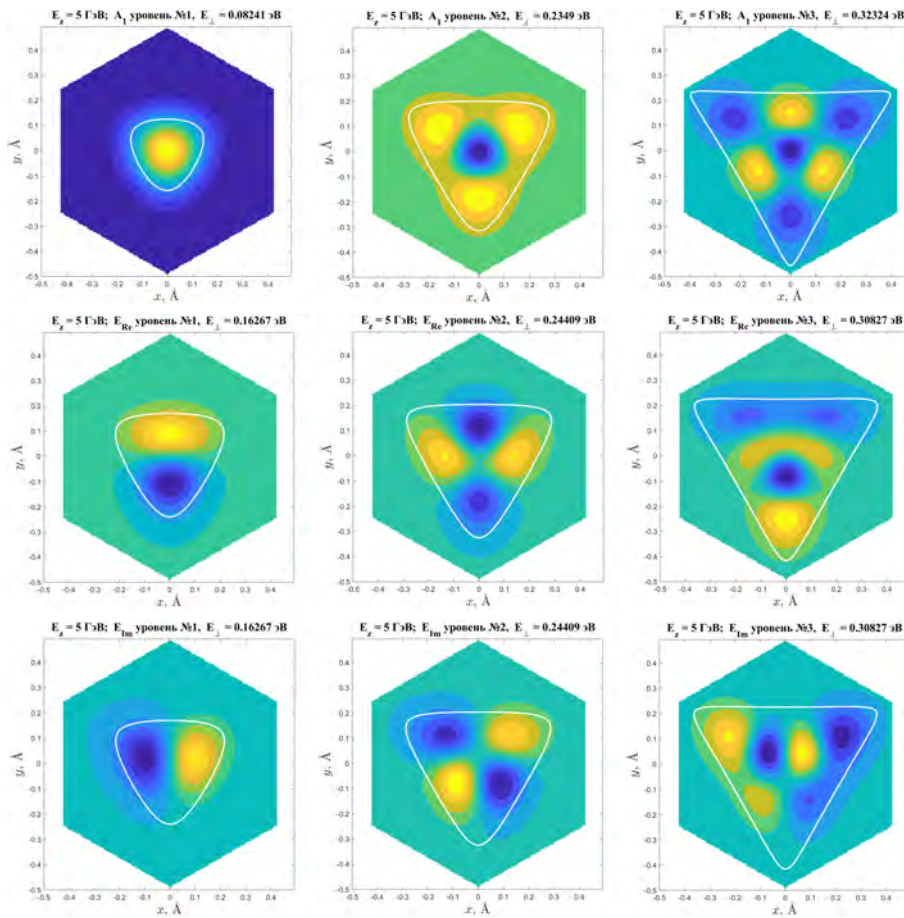


Рис. 3. Волновые функции стационарных состояний дискретного спектра позитронов с $E_z = 5$ ГэВ в потенциале (??)
 Fig. 3. Wave functions of the discrete spectrum stationary states of the $E_z = 5$ GeV positrons in the potential (??)

4. Стационарные состояния поперечного движения каналированного позитрона с энергией 20 ГэВ. Численно найденные для этого случая уровни энергии поперечного движения приведены в таблице 2.

Таблица 2
 Table 2

Уровни энергии поперечного движения (в эВax) позитрона с $E_z = 20$ ГэВ в яме (??)
 Transverse motion energy levels (eV) for the $E_z = 20$ GeV positron in the well (??)

A_1	A_2	E
0.04123		0.08195
0.12070		0.12305
0.16421	0.16477	0.15983
0.19702		0.19915
		0.20625
0.23742	0.23994	0.23437
		0.24817
0.26969		0.27127
0.29014	0.29012	0.27878
0.30581		0.30440
	0.31295	0.31807

Графики соответствующих им волновых функций представлены на рис. 4 (тип симметрии A_1), рис. 5 (тип симметрии A_2), рис. 6 (тип симметрии E_{Re}) и рис. 7 (тип симметрии E_{Im}). Нетрудно заметить, что

структура волновых функций наимизших энергетических состояний совпадает с таковой для случая $E_z = 5$ ГэВ (ср. рис. 3).

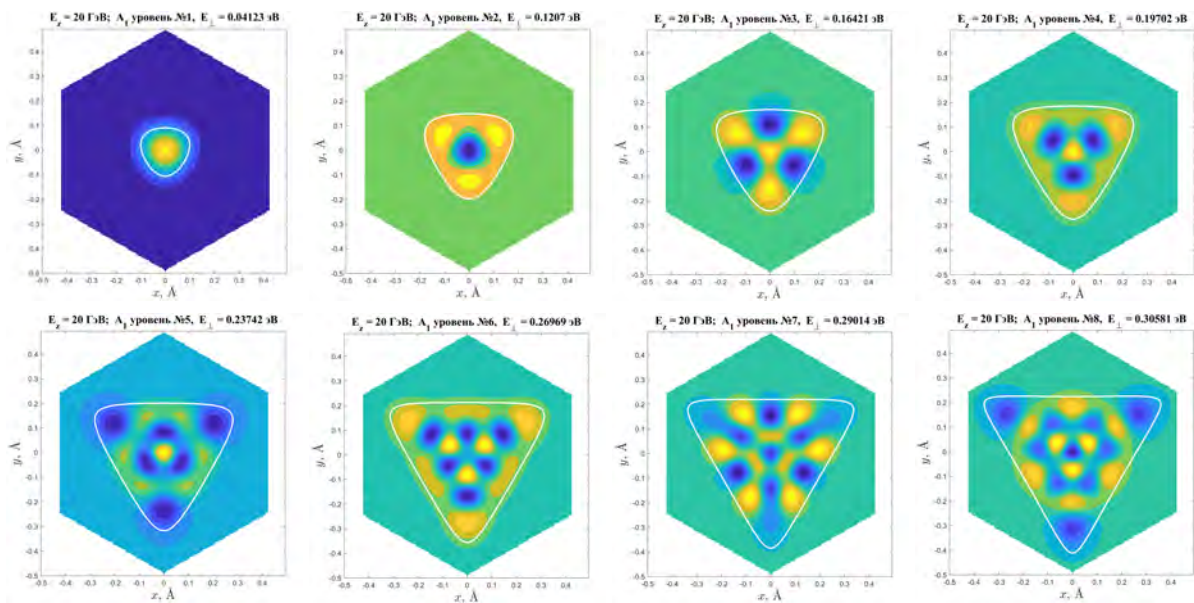


Рис. 4. Волновые функции стационарных состояний дискретного спектра позитронов с $E_z = 20$ ГэВ в потенциале (??), относящиеся к типу симметрии A_1

Fig. 4. Wave functions of the discrete spectrum stationary states of the $E_z = 20$ GeV positrons in the potential (??) that belong to A_1 type of symmetry

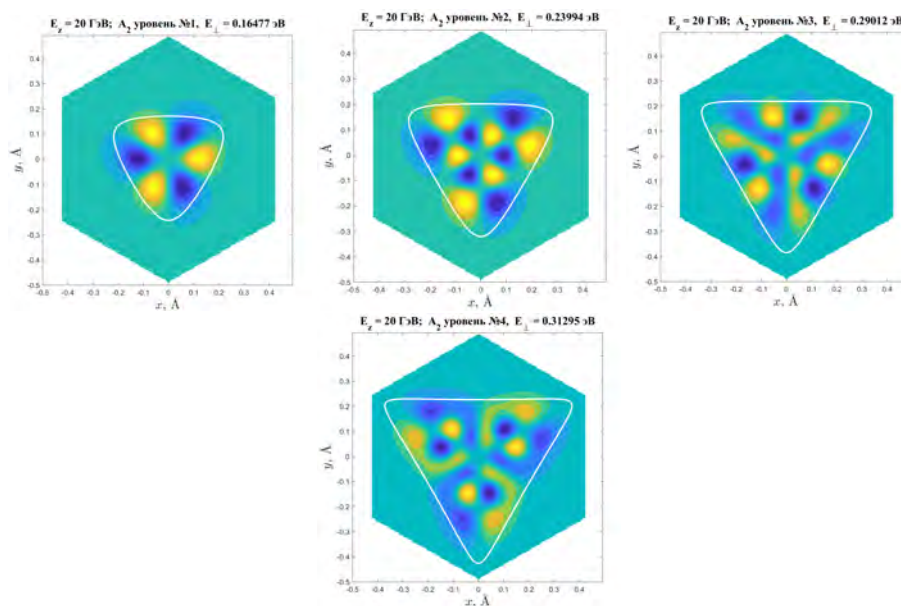


Рис. 5. Волновые функции стационарных состояний дискретного спектра позитронов с $E_z = 20$ ГэВ в потенциале (??), относящиеся к типу симметрии A_2

Fig. 5. Wave functions of the discrete spectrum stationary states of the $E_z = 20$ GeV positrons in the potential (??) that belong to A_2 type of symmetry

5. Заключение. В работе представлены уровни энергии поперечного движения и соответствующие им волновые функции позитронов с энергиями 5 и 20 ГэВ, движущихся в режиме аксиального каналирования вблизи направления $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния. Интерес к данной задаче связан с возможностью исследования проявлений квантового хаоса в структуре волновых функций [?, ?]. Подробное обсуждение особенностей волновых функций каналированных позитронов в условиях данной задачи см. в статье [?], где, в частности, приведен полный набор стационарных состояний каналированных позитронов с энергией 6 ГэВ. Отметим также методическую ценность задачи нахождения собственных значений и собственных функций двумерного гамильтониана. Исследование такого «двумерного атома» существенно дополняет стандартный набор задач курса квантовой механики [?].

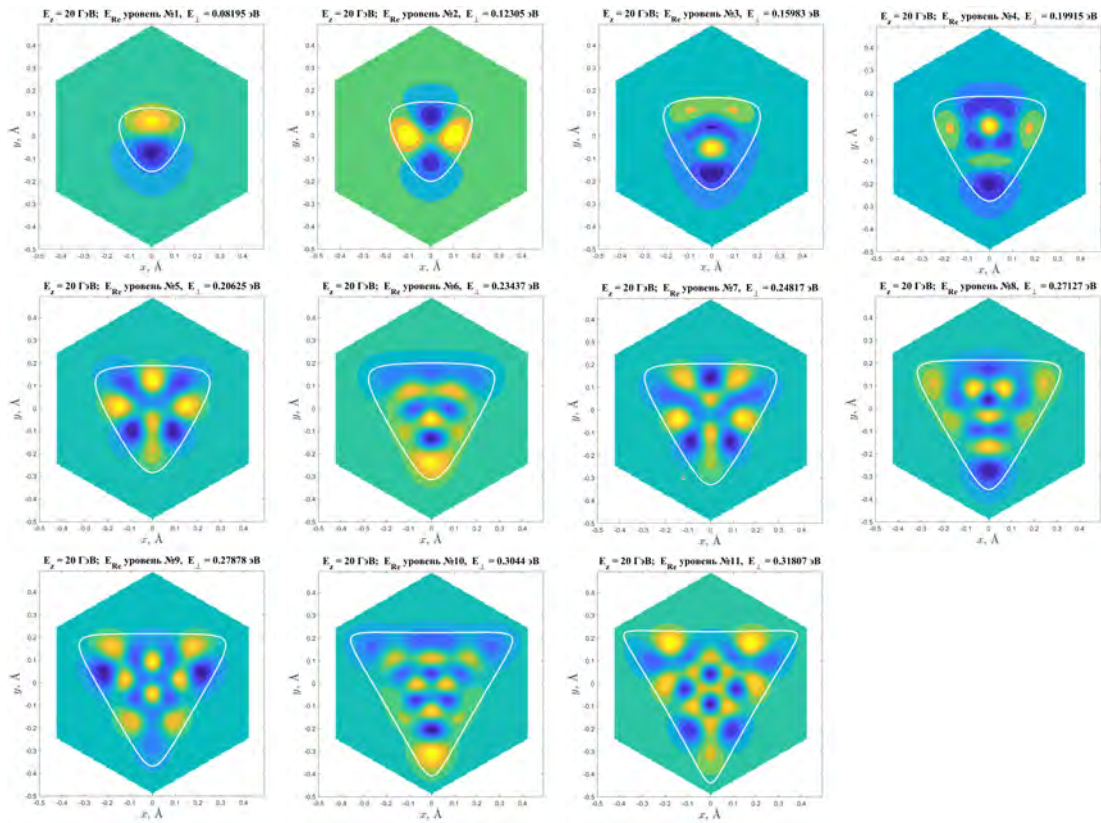


Рис. 6. Волновые функции стационарных состояний дискретного спектра позитронов с $E_z = 20$ ГэВ в потенциале (??), относящиеся к типу симметрии E_{Re}

Fig. 6. Wave functions of the discrete spectrum stationary states of the $E_z = 20$ GeV positrons in the potential (??) that belong to E_{Re} type of symmetry

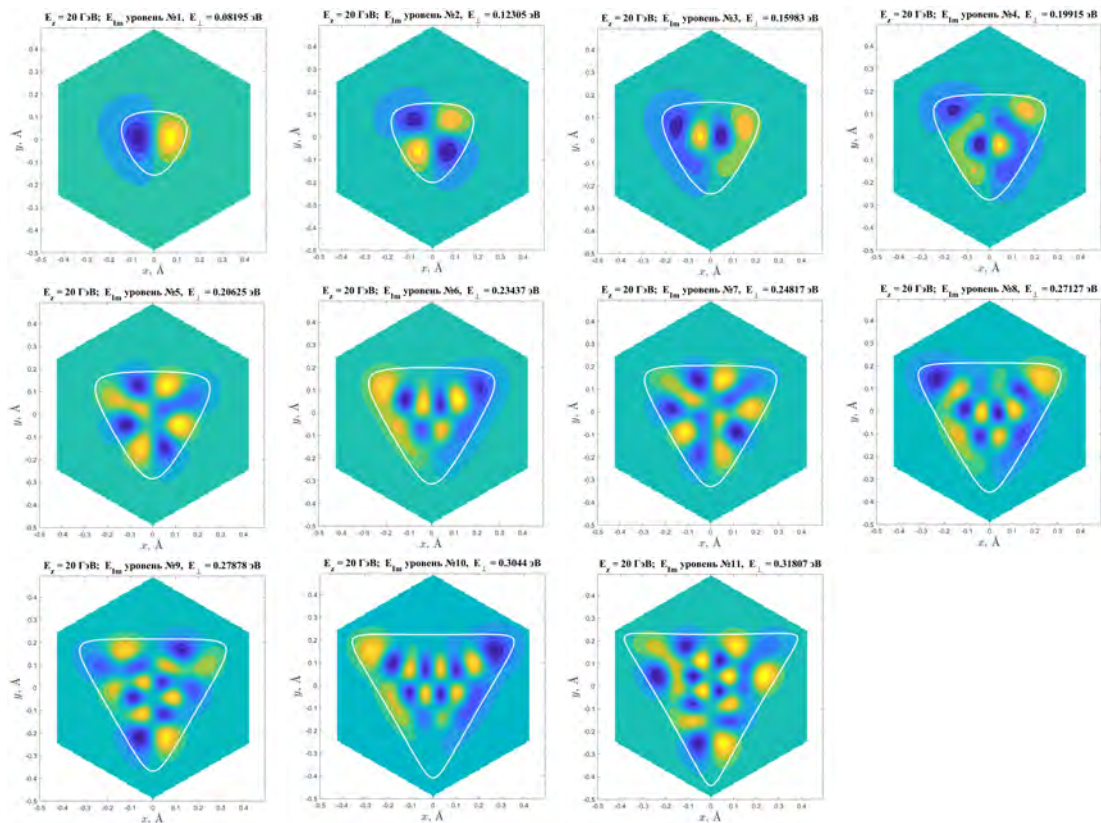


Рис. 7. Волновые функции стационарных состояний дискретного спектра позитронов с $E_z = 20$ ГэВ в потенциале (??), относящиеся к типу симметрии E_{Im}

Fig. 7. Wave functions of the discrete spectrum stationary states of the $E_z = 20$ GeV positrons in the potential (??) that belong to E_{Im} type of symmetry

Список литературы

1. Robinson M.T., Oen O.S. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. *Phys. Rev.* 1963;132(6):2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. М., Наука; 1993. 344 с.
3. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф., Трутень В.И., Гриненко А.А., Сыщенко В.В. Динамика заряженных частиц высоких энергий в прямых и изогнутых кристаллах. *УФН.* 1995;165(10):1165–1192. DOI: 10.3367/UFNr.0165.199510c.1165
4. Gemmel D.S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974;46(1):129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129
5. Uggerhøj U.I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, *Rev. Mod. Phys.* 2005; 77(4):1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131
6. Линдхард Й. Влияние кристаллической решетки на движение быстрых заряженных частиц. *УФН.* 1969;99(2):249–296. DOI: 10.3367/UFNr.0099.196910c.0249
7. Исупов А.Ю., Сыщенко В.В., Парахин А.С. Об устойчивости движения позитронов вблизи направления $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния. *Прикладная математика & Физика.* 2023;55(1):49–56. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56
8. Сыщенко В.В., Парахин А.С. Квантовое описание каналирования позитронов вблизи направления $\langle 111 \rangle$ кристалла кремния. *Прикладная математика & Физика.* 2024;56(1):50–59 DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-50-59
9. Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Parakhin A.S., Isupov A.Yu. Simulating Quantum States of Positively Charged Particles Channeling along the $[111]$ Direction in a Silicon Crystal. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques.* 2024;18(2):274–280. DOI 10.1134/S1027451024020186
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М., Наука; 1989. 768 с.
11. Syshchenko V.V., Tarnovsky A.I., Isupov A.Yu. Mixed (regular and chaotic) dynamics under the channeling of the high energy positrons in $[100]$ direction of the silicon crystal and Podolskiy-Narimanov distribution. *Journal of Instrumentation* 2024;19:C05005. DOI 10.1088/1748-0221/19/05/C05005
12. Gutzwiller M.C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag; 1990. 432 p.
13. Bolotin Y., Tur A., Yanovsky V. Chaos: Concepts, Control and Constructive Use. Springer International Publishing Switzerland; 2017. 281 p. DOI 10.1007/978-3-319-42496-5
14. Сыщенко В.В., Тарновский А.И., Парахин А.С., Исупов А.Ю. Волновые функции позитронов при каналировании в направлении $[111]$ кристалла кремния. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.* 2025 (в печати).
15. Калашников Н.П., Ольчак А.С. Явление каналирования как 1D- и 2D-модели атома в сопутствующей системе координат. *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования.* 2022;8:108–112. DOI 10.31857/S1028096022050132

References

1. Robinson M.T., Oen O.S. Computer Studies of the Slowing Down of Energetic Atoms in Crystals. *Phys. Rev.* 1963;132(6):2385–2398. DOI: 0.1103/PhysRev.132.2385
2. Akhiezer A.I., Shul'ga N.F. High-Energy Electrodynamics in Matter. Gordon and Breach; 1996. 400 p.
3. Akhiezer A.I., Shul'ga N.F., Truten' V.I., Grinenko A.A., Syshchenko V.V. Dynamics of high-energy charged particles in straight and bent crystals. *Physics-Uspeski.* 1995;38:1119–1145. DOI: 10.1070/PU1995v038n10ABEH000114
4. Gemmel D.S. Channeling and related effects in the motion of charged particles through crystals. *Rev. Mod. Phys.* 1974;46(1):129–227. DOI: 10.1103/RevModPhys.46.129
5. Uggerhøj U.I. The interaction of relativistic particles with strong crystalline fields, *Rev. Mod. Phys.* 2005; 77(4):1131–1171. DOI: 10.1103/RevModPhys.77.1131
6. Lindhard J. Influence of Crystal Lattice on Motion of Energetic Charged Particles. *Kongel. Dan. Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* 1965;34(14):1–64.
7. Isupov Alexander, Syshchenko Vladislav, Parakhin Alexander. On the stability of the positron's motion near $\langle 111 \rangle$ direction of the Silicon crystal. *Applied Mathematics & Physics.* 2023;55(1): 49–56. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-1-49-56
8. Syshchenko Vladislav, Parakhin Alexander. Quantum Description of the Positrons Channeling Near $\langle 111 \rangle$ Direction of the Silicon Crystal. *Applied Mathematics & Physics.* 2024; 56(1): 50–59. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-50-59

9. Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Parakhin AS., Isupov AYu. Simulating Quantum States of Positively Charged Particles Channeling along the [111] Direction in a Silicon Crystal. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2024, 18(2): 274–280. DOI 10.1134/S1027451024020186
10. Landau L.D., Lifshitz EM. Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory, Vol. 3 of Course of Theoretical Physics. Oxford, Pergamon Press; 1977. 677 p.
11. Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Isupov AYu. Mixed (regular and chaotic) dynamics under the channeling of the high energy positrons in [100] direction of the silicon crystal and Podolskiy-Narimanov distribution. *Journal of Instrumentation* 2024, 19: C05005. DOI 10.1088/1748-0221/19/05/C05005
12. Gutzwiller MC. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, New York, Springer-Verlag; 1990. 432 p.
13. Bolotin Y., Tur A., Yanovsky V. Chaos: Concepts, Control and Constructive Use. Springer International Publishing Switzerland; 2017. 281 p. DOI 10.1007/978-3-319-42496-5
14. Syshchenko VV., Tarnovsky AI., Parakhin AS., Isupov AYu. Wave Functions of Positrons under Channeling in [111] Direction of the Silicon Crystal. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2025 (in press).
15. Kalashnikov NP., Olchak AS. On the Channeling Phenomenon as 1D and 2D Atomic Models in the Comoving Reference Frame. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2022;14(4):659–662. DOI 10.1134/S1027451022030132

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 23.09.2024

Received September 23, 2024

Поступила после рецензирования 05.11.2024

Revised November 5, 2024

Принята к публикации 07.11.2024

Accepted November 7, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Исупов Александр Юрьевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Лаборатория физики высоких энергий имени В. И. Векслера и А. М. Балдина Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия

Сыщенко Владислав Вячеславович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Тарновский Артур Игоревич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Парахин Александр Сергеевич – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander Yu. Isupov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Associate, Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics International Intergovernmental Organization Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia




Vladislav V. Syshchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Arthur I. Tarnovsky – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Alexander S. Parakhin – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Модификация стеганографического метода неравномерных смещений с учетом особенностей сегментов графического контейнера

Твердохлеб В. В. , Хлопов А. М. , Акиншин Д. И. 
(Статья представлена членом редакционной коллегии Ю. П. Вирченко)

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 85
akinsindani17@icloud.com




Аннотация. Анализируется концепция построения модифицированного стеганографического метода неравномерных смещений, реализуемого в LSB-области контейнера. При этом в качестве контейнера рассматривается изображение формата Jpeg. Разрабатываются механизмы гибкой смены шага смещения и его направления исходя из выявленных статистических характеристик фрагмента контейнера. Описывается возможная проблематика реализации предлагаемых механизмов, а также пути ее устранения.

Ключевые слова: контейнер, хроматические пространства, инкапсуляция, яркостные компоненты

Для цитирования: Твердохлеб В. В., Хлопов А. М., Акиншин Д. И. 2024. Модификация стеганографического метода неравномерных смещений с учетом особенностей сегментов графического контейнера. *Прикладная математика & Физика*, 56(4): 328–336. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-328-336

Original Research

Modification of the Steganographic Method of Irregular Displacements, Taking into Account the Features of the Segments of the Graphic Container

Vitalii V. Tverdokhlebo , Andrey M. Khlopov , Danil I. Akinshino 
(Article submitted by a member of the editorial board Yu. P. Virchenko)

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
85 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia
akinsindani17@icloud.com

Abstract. The concept of constructing a modified steganographic method of irregular displacements implemented in the LSB region of the container is analyzed. At the same time, a Jpeg image is considered as a container. Mechanisms for flexible change of the displacement step and its direction are being developed based on the identified statistical characteristics of the container fragment. The possible problems of the implementation of the proposed mechanisms, as well as ways to eliminate them, are described.

Keywords: Container, Chromatic Spaces, Encapsulation, Brightness Components

For citation: Tverdokhlebo V. V., Khlopov A. M., Akinshino D. I. 2024. Modification of the Steganographic Method of Irregular Displacements, Taking into Account the Features of the Segments of the Graphic Container. *Applied Mathematics & Physics*, 56(4): 328–336. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-4-328-336

1. Введение. Информационная среда в нынешнем виде характеризуется существованием множества рисков, сопряженных с возможностью хищения или несанкционированной модификации конфиденциальных данных. В частности, это замечание актуально для ситуации обмена данными с ограниченным доступом открытыми каналами. Традиционно, для того, чтобы либо минимизировать, либо полностью исключить вероятность получения и дальнейшего использования такой информации посторонними лицами, используются различные криптографические системы. Вместе с тем сейчас складываются условия, когда, с одной стороны, злоумышленник располагает достаточными вычислительными ресурсами, а, с другой стороны, разработчик формально подходит к реализации той или иной шифросистемы. Кроме того, за последние несколько лет в сфере криптографии отсутствуют принципиально новые решения, которые получили бы широкую практическую реализацию. В этом случае возможной альтернативой шифрованию данных является их сокрытие на основе стеганографических алгоритмов. Такой подход имеет неоспоримое преимущество по сравнению с использованием криптографии ввиду отсутствия конкретного объекта атаки [1, 2]. Однако в настоящее время единые стандарты стеганографии отсутствуют, а большинство классических алгоритмов в их базовой реализации не обеспечивают достаточного уровня стойкости. В связи с этим целесообразным является выполнить доработку одной из наиболее

классических разработок в сфере стеганографии, а именно, усовершенствование метода неравномерных смещений [1, 3].

2. Постановка задачи. Стеганографические методы передачи информации обеспечивают построение скрытых каналов обмена данными, что может рассматриваться альтернативой криптографическим методам защиты. Однако, в отличие от зашифрованных каналов, наличие скрытых каналов злоумышленнику заранее неизвестно, что является неоспоримым преимуществом скрытой передачи [1]. При этом основой идеологии скрытой передачи данных является концепция «контейнер-метод». Здесь контейнером является файл (совокупность файлов), в который встраиваются скрываемые данные. В свою очередь, в рамках общей идеологии стеганографии, инкапсуляцией является встраивание фрагментов (бит, байт и т. д.) скрываемого сообщения в контейнер.

В настоящее время одним из перспективных направлений развития методов стеганографии является LSB-стеганография (т. е. стеганография с использованием пространства младших бит символов сообщения в двоичном представлении). При этом классический подход LSB-стеганографии предполагает, что встраивание производится последовательно и побитно начиная либо с начальной координаты (0; 0), либо с произвольной координаты контейнера. Однако в этом случае применяется фронтальный способ встраивания – биты скрываемого сообщения инкапсулируются в LSB-пространство сплошным потоком. В свою очередь, LSB-пространство рассматривается, как совокупность наименее значимых бит (Less Significant Bit) контейнера в его двоичном описании. По умолчанию, это совокупность бит нулевого разряда контейнера.

В рамках реализации LSB-встраивания, согласно методу неравномерных смещений, инкапсуляция i -го бита скрываемого сообщения выполняется путем модификации бита из пространства наименее значимых бит (нулевой разряд) компонент $c_i(x; y)$ (i -я компонента с координатами $(x; y)$ в изображении) [1, 3]. Компонентой $c_i(x, y)$ здесь является десятичное значение яркостного Y , либо хроматического (Cb или Cr) канала, получаемое в результате выполнения процедуры смены цветовой палитры (процедура является стандартной для Jpeg). Вместе с тем процедура модификации выполняется следующим образом:

$$\begin{cases} b_{x,y}^{(0)} := b_{x,y}^{(0)} | b_i = b_{x,y}^{(0)}, \\ b_{x,y}^{(0)} := b_i | b_i \neq b_{x,y}^{(0)}, \end{cases} \quad (1)$$

где $b_{x,y}^{(0)}$ – бит нулевого разряда компоненты $c(x, y)$. Следовательно, согласно системе выражений (1), бит нулевого разряда на позиции $(x; y)$ остается неизменным при условии равенства с i -м битом b_i скрываемого сообщения, и наоборот. В свою очередь, вычисление актуального указателя $s_{(i+1)}$ смещения для этапа $(i + 1)$ встраивания производится согласно следующему принципу:

$$s_{i+1} = \sum_{j=1}^{J-1} (b^{(j)} - 1 | b^{(j)} = 1), \quad (2)$$

где J – количество разрядов, необходимых для описания компоненты $c_i(x, y)$. Анализ выражения (2) показывает, что максимальный шаг Δs_{\max} смещения в этом случае не будет превышать величину $(J - 1)$.

Следовательно, существующая реализация метода предполагает выполнение обхода контейнера в направлении строк/столбцов с шагом $\Delta s_{\max} \leq (J - 1)$ [3, 7]. С учетом того, что рассматриваемый метод не предусматривает наличие механизма выбора стартовой точки, складываются условия, в которых факт наличия контейнера может быть выявлен. Для этого воссоздаются и анализируются цепочки бит, получаемые путем сканирования LSB-последовательностей компонент $c_i(x, y)$ в диапазоне значений и $x = 1; X, y = 1; Y$, учитывая шаг $s_{(i+1)}$ по их месту.

Таким образом, чтобы обеспечить повышение уровня защищенности скрываемых данных, *требуется*:

1. разработать алгоритм выбора стартовой точки обхода контейнера без привязки к абсолютным координатам;
2. построить алгоритм выбора направления d обхода пространства LSB, принимая за основу существующий метод неравномерных смещений;
3. обеспечить возможности смещения шага записи на величину, существенно превышающую максимальное значение Δs_{\max} .

Разрабатываемые алгоритмы должны соответствовать следующим требованиям:

- простота и отсутствие существенной вычислительной нагрузки;
- нетривиальная реализация, что создает условия для возможности обеспечения защищенности стеганограмм;
- отсутствие необходимости или минимизация использования дополнительных служебных данных.

3. Общая концепция модификации метода неравномерных смещений. С учетом перечисленных требований к разрабатываемым алгоритмам: простоты, обеспечения защищенности стеганограмм и сведения к минимуму объема служебных данных, предлагается:

1. В ходе реализации каждого алгоритма учитывать особенности содержания сегментов контейнера. Для этого возможно использовать множество $\{\Theta\}$ статистических характеристик каждого из них.
2. Строить алгоритмы на основе параметрического подхода. В свою очередь, здесь требуется задействовать множества $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ параметрических величин. При этом $\{\eta\}$ предполагается использовать, как набор опций в ходе реализации сценария алгоритмов, тогда как $\{\mu\}$ используется в ходе вычисления элементов множества $\{\Theta\}$.

Множества $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ являются элементами стежоключа.

4. Построение механизма выбора направления обхода пространства контейнера. Контейнер F изначально рассматривается в виде двумерного массива $K \times L$ – размером сегментов $C(a; b)$. Здесь a и b – индексы сегмента в графическом контейнере. В свою очередь, сегмент формируется как двумерный массив компонент $c(m; n)^{(a,b)}$, где $m, n = \overline{1; 8}$ – координаты компоненты в пределах сегмента, находящегося на позиции $a = \overline{1; K/8}$ и $b = \overline{1; L/8}$ [4, 5]. Иначе говоря, сегмент представляет собой матрицу 8×8 компонент.

Для возможности реализации механизма изменения направления обхода вместо шага Δs записи предлагается использовать вектор записи $V_w = (s; d)$. Под вектором записи понимается пара чисел $(s; d)$, где s – указатель смещения на следующую точку записи, d – направление смещения ($d \in Z$). При этом, здесь $d \in \{1, 2, 3, 4\}$, где каждое из чисел соответствует одному из направлений (вниз, влево, вверх, вправо), а согласно базовой реализации метода неравномерных смещений $s = \overline{1; 7}$.

Принимая во внимание вышесказанное, отметим, что задача построения механизма изменения направления обхода пространства младших бит сводится к решению следующих подзадач:

- выбор пространства для реализации механизма;
- определение условий изменения направления смещения.

В рамках решения первой подзадачи необходимо выбрать пространство для реализации механизма. Для этого выполним анализ процесса JPEG-преобразований изображения [3, 4, 5]. При этом отметим, что каскад операций JPEG-базиса предполагает отдельную обработку пространства Y яркостных компонент и хроматических (цветоразностных) пространств – Cb (хроматические синие компоненты) и Cr (хроматические красные компоненты). Одним из технологических этапов обработки здесь является прореживание цветоразностных компонент (цветовая субдискретизация). Вследствие этого результирующая размерность хроматического пространства может быть существенно ниже, чем размерность пространства Y яркости [6, 7].

Таким образом, с точки зрения повышения потенциальной емкости контейнера имеет смысл выполнять встраивание данных в пространство яркостных компонент $c(m; n)^{(a,b)}$.

В рамках решения второй подзадачи предлагается использовать значение одной или ряда характеристик из множества $\{\Theta\}$, исходя из величин которых далее будет приниматься решение относительно направления смещения (значение переменной d).

В то же время смена направления смещения не должна носить детерминированный характер, что потенциально позволяет обеспечить уникальный итоговый маршрут обхода каждого контейнера, тем самым создавая условия для повышения защищенности стеганограмм.

Требуется также учитывать, что должна обеспечиваться возможность извлечения определенных статистических характеристик любого его сегмента $C(a; b)$, т. к. процесс обхода пространства младших бит должен осуществляться в пределах всего контейнера F . В то же время на данном этапе обработки контейнера F (яркостного пространства представления) его возможно рассматривать:

- на уровне совокупности компонент $c(m; n)^{(a,b)}$;
- на уровне массива сегментов $C(a, b)$.

Однако же для любой из компонент $c(m; n)^{(a,b)}$, по сути, являющей собой одно число, сформировать произвольное количество характеристик не представляется возможным. Соответственно, целесообразно выполнять расчет статистических характеристик сегментов контейнера.

Рассмотрим случай, когда решение относительно значения величины d принимается на основе одной из характеристик сегмента Θ_1 . Предположим, что на произвольном i -м этапе работы алгоритма данная компонента $c(m; n)^{(a,b)}$ яркости подвергается процедуре встраивания данных. Тогда в процессе определения направления d смещения для фрагмента $C(a; b)$, которому принадлежит данная компонента,

вычисляется значение Θ_1 характеристики этого же сегмента в соответствии со следующей системой соотношений:

$$\begin{cases} d := 1 | \Theta_1 \in [\Theta_1^{(p)}; \eta_1 \Theta_1^{(p)}]; \\ d := 2 | \Theta_1 \in (\eta_1 \Theta_1^{(p)}; \eta_2 \Theta_1^{(p)}]; \\ d := 3 | \Theta_1 \in (\eta_2 \Theta_1^{(p)}; \eta_3 \Theta_1^{(p)}]; \\ d := 4 | \Theta_1 \in (\eta_3 \Theta_1^{(p)}; 0]; \end{cases} \quad (3)$$

где $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$, η_1, η_2 и η_3 – параметрические множители, которые могут принимать значения в диапазоне (0;1), их применение обеспечивает возможность гибкой конфигурации алгоритма. Данные величины предлагается использовать как элементы стеганографического ключа; $\Theta_1^{(p)}$ – пороговая величина характеристики Θ_1 , определяемая по максимальному ее значению в пределах всех сегментов $C(a; b)$ контейнера F , а именно:

$$\Theta_1^{(p)} = \max\{\Theta_1(F)\}.$$

Иначе говоря, здесь величине d присваивается значение в зависимости от условия вхождения характеристики Θ_1 в тот или иной диапазон. Следовательно, исходя из системы соотношений (3), при $d = 1$ и $s = q$ для $(i + 1)$ -го этапа работы алгоритма далее используется компонента, отстоящая от компоненты $c(m; n)^{(a,b)}$ на $(-q)$ позиций по оси y , т. е. $c_{i+1}(m; n - q)^{(a,b)}$. Тогда общий принцип смещения может быть показан следующим образом:

$$c_{i+1}(m'; n') = c_i(m; n) \cup V_w, \quad (4)$$

где $(m'; n')$ – значение смещенной координаты компоненты относительно предыдущего этапа.

Если принять во внимание систему (3), то выражение (4) может быть представлено в более детальном виде, а именно:

$$\begin{cases} c_{i+1}(m'; n') := c_i(m; n - q) | d = 1; \\ c_{i+1}(m'; n') := c_i(m - q; n) | d = 2; \\ c_{i+1}(m'; n') := c_i(m; n + q) | d = 3; \\ c_{i+1}(m'; n') := c_i(m + q; n) | d = 4. \end{cases} \quad (5)$$

После того, как компонента $c_{i+1}(m'; n')$, младший бит которой подлежит модификации, определена, действия, описываемые выражениями 1-3, повторяются для нее и всех последующих компонент, которые задействуются для встраивания бит скрываемого сообщения.

5. Разработка способа задания стартовой точки обхода контейнера. Чтобы создать условия для максимального затруднения выявления возможной стартовой точки встраивания в ходе стегоанализа, необходимо:

- обеспечить возможность установки координат стартовой точки в неявном виде;
- предусмотреть возможность осуществления выбора точки начала инкапсуляции таким образом, чтобы любую из координат $(m; n)$ возможно было выбрать с равной вероятностью;
- гарантировать однозначность определения стартовой точки $(m'; n')$ на стороне приемника без использования дополнительной служебной информации.

С учетом сказанного выше, выбор стартовой точки обхода контейнера предлагается реализовать на основе следующего алгоритма.

Поскольку в роли контейнера рассматривается изображение Jpeg, его можно рассматривать как совокупность отдельных сегментов $C(a; b)$, где каждый сегмент представляет собой двумерный массив компонент. Это позволяет реализовать способ выбора точки старта за два шага, а именно, выполнить выбор сегмента $C(a; b)$, после чего выбрать ту или иную координату внутри ранее выбранного сегмента. В то же время выбор того или иного сегмента $C(a; b)$, а также координат m и n , может быть реализован по аналогии с механизмом выбора направления обхода пространства контейнера. Здесь также предлагается использовать пороговый подход на основе вычисления значений его статистических характеристик. Следовательно, на первом шаге для дальнейшего рассмотрения выбирается сегмент $C(a; b)$, для которого выполняется следующее условие:

$$\Theta_2 \in [\Theta_2^{(p)}; \eta_4 \Theta_2^{(p)}], \quad (6)$$

где η_4 – параметрический множитель, который может принимать значения в диапазоне величин (0;1); Θ_2 – значение одной из характеристик сегмента $C(a; b)$. При этом само значение $\Theta_2^{(p)}$, как и в случае $\Theta^{(p)}$, определяется следующим образом:

$$\Theta_2^{(p)} = \max\{\Theta_2(C(a; b))\}.$$

В свою очередь, в ходе реализации такого способа выбора сегмента может возникать ситуация неопределенности, когда условиям (6) удовлетворяет характеристика Θ_2 более чем одного сегмента. Иначе говоря, справедливо следующее выражение:

$$\{C(a; b)\} \subset [\Theta_2^{(p)}; \eta_4 \Theta_2^{(p)}]. \quad (7)$$

В этом случае из полученного множества $\{C(a; b)\}$ сегментов предлагается принимать к дальнейшему рассмотрению такой, для индексов которого выполняется одно из соотношений:

$$(a = a_{\min}) \vee (b = b_{\min}) \vee ((a = a_{\min}) \wedge (b = b_{\min})), \quad (8)$$

либо

$$(a = a_{\max}) \vee (b = b_{\max}) \vee ((a = a_{\max}) \wedge (b = b_{\max})), \quad (9)$$

т. е. из множества $\{C(a; b)\}$ выбирается сегмент с минимальным (максимальным) значением одного или обоих индексов. Здесь, в случае обеспечения возможности выбора одного из режимов отбора индексов, указанных выражениями (8) и (9), соответственно появляется дополнительный механизм повышения защищенности процесса выбора стартового сегмента. При этом, так как параметрический множитель η_4 известен как на стороне передатчика, так и приемника, а механизм, представленный выражениями (8) и (9), устраняет неопределенность (7), то обеспечивается однозначное определение сегмента $C(a; b)$, в пределах которого далее определяются координаты стартовой точки. В свою очередь, способ выбора координат $(m; n)$ стартовой точки внутри сегмента целесообразно реализовать также с применением порогового подхода, принимая во внимание особенности его содержания. Для этого каждая из координат определяется раздельно. В этом случае координата m определяется в соответствии со следующим принципом:

1. Выполняется расчет статистических характеристик Θ_3, Θ_4 и Θ_5 сегментов $C(a; b)$ в пределах контейнера F .

2. Определяются величины $\Theta_3^{(p)}, \Theta_4^{(p)}$ и $\Theta_5^{(p)}$ аналогично способу вычисления $\Theta_2^{(p)}$ и $\Theta^{(p)}$.

3. Вычисляется битовая последовательность $B = \{b_1; b_2; b_3\}$, в которой расчет значения каждого бита выполняется на основе следующей системы выражений:

$$\begin{cases} \Theta_3 \in [\Theta_3^{(p)}; \eta_5 \Theta_3^{(p)}] \rightarrow b_1 = 1; \\ \Theta_3 \in (\eta_5 \Theta_3^{(p)}; 0] \rightarrow b_1 = 0; \\ \Theta_4 \in [\Theta_4^{(p)}; \eta_6 \Theta_4^{(p)}] \rightarrow b_2 = 1; \\ \Theta_4 \in (\eta_6 \Theta_4^{(p)}; 0] \rightarrow b_2 = 0; \\ \Theta_5 \in [\Theta_5^{(p)}; \eta_7 \Theta_5^{(p)}] \rightarrow b_3 = 1; \\ \Theta_5 \in (\eta_7 \Theta_5^{(p)}; 0] \rightarrow b_3 = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\eta_5, \eta_6, \eta_7 < 0$ – параметрические множители, являющиеся элементами стеганографического ключа.

4. Используя элементы полученной последовательности B , координата m определяется на основе выражения, переводящего последовательность бит в десятичное число:

$$m = b_1 4 + b_2 2 + b_3 + 1.$$

Понятно, что в этом случае $m \in [1; 8]$, что и требуется в нашем случае.

В то же время, процесс вычисления координаты n может быть реализован одним из следующих способов:

- на основе имеющегося значения координаты m путем его последующей обработки;
- аналогично вычислению m на базе численного значения некоего иного массива $\{\Theta'\}$ статистических характеристик сегмента $C(a; b)$ или всего контейнера;
- с использованием ранее вычисленных значений Θ_3, Θ_4 и Θ_5 множества $\{\Theta\}$ для сегментов $C(a; b)$ в пределах контейнера F и дополнительных параметрических величин;

Рассмотрим каждый вариант построения процесса определения n .

В первом случае предполагается, что относительно рассчитанного значения выполняется преобразование вида:

$$n = \varphi(m). \quad (11)$$

Такой подход является наиболее предпочтительным с точки зрения быстродействия, поскольку, в отличие от других вариантов вычисления n , не требует расчетов характеристик сегментов $C(a; b)$ в пределах всего контейнера. В свою очередь, функционал φ преобразования в выражении (11) должен отвечать следующим требованиям:

- простота реализации и низкая вычислительная нагрузка, создаваемая при вычислении;
- обеспечение дополнительного механизма защиты.

Исходя из данных требований, в рамках принятой парадигмы, предлагается значение n определять, как результат сложения m по модулю 2 с параметрической величиной η_8 , т. е:

$$n = m \text{ XOR } \eta_8 .$$

В то же время для реализации процесса определения второй координаты стартовой точки без явной зависимости от полученного значения m на основе вычисленных в ходе предыдущего технологического шага значений Θ_3 , Θ_4 и Θ_5 предлагается рассмотреть следующий метод. В рамках данного подхода, помимо имеющихся значений статистических характеристик, используются принципы, которые представлены выражениями (10) и (). При этом формируется новая последовательность $B = \{b'_1; b'_2; b'_3\}$ бит, однако подлжит изменению логика ее построения. Для этого используется следующая система соотношений:

$$\begin{cases} \Theta_3 \in [\Theta_3^{(p)}; \eta_5 \Theta_3^{(p)}] \rightarrow b'_1 = 1; \\ \Theta_3 \in (\eta_5 \Theta_3^{(p)}; \eta_9 \eta_5 \Theta_3^{(p)}) \rightarrow b'_1 = 0; \\ \Theta_3 \in [\eta_9 \eta_5 \Theta_3^{(p)}; 0] \rightarrow b'_2 = 1; \\ \Theta_4 \in [\Theta_4^{(p)}; \eta_6 \Theta_4^{(p)}] \rightarrow b'_2 = 0; \\ \Theta_4 \in (\eta_6 \Theta_4^{(p)}; \eta_9 \eta_6 \Theta_4^{(p)}) \rightarrow b'_3 = 1; \\ \Theta_4 \in [\eta_9 \eta_6 \Theta_4^{(p)}; 0] \rightarrow b'_2 = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\eta_9 < 0$ – дополнительный параметрический множитель.

Таким образом, система выражений (12) реализует механизм определения значений бит, из которых формируется B' , исходя из принадлежности величин статистических характеристик Θ_3 и Θ_4 одному из трех участков пространства возможных значений. Это достигается за счет введения дополнительного множителя η_9 . При этом на трех таких участках могут определяться значения не для одного, как было при формировании множества B , а сразу для двух бит. Следовательно, формируются условия для устранения явной зависимости между ранее выявленным m и значением второй искомой координаты n . С другой стороны, в этом случае не требуется дополнительных ресурсоемких вычислений. Значение координаты n , аналогично первой координате, определяется следующим образом:

$$n = b'_1 4 + b'_2 2 + b'_3 + 1 . \quad (13)$$

Далее, также рассмотрим случай, когда координата n определяется на основе численных значений прочих статистической характеристик сегментов $C(a; b)$, которые ранее не были получены. Понятно, что их вычисление в случае высокой разрешающей способности контейнера будет негативно влиять на скорость выполнения всего комплекса операций. Тогда, с целью минимизации вычислительных затрат, дополнительные характеристики сегментов предлагается извлекать на уровне одного из разрядов λ их битового представления. Тогда вычисление характеристик будет сведено к операциям над битами $b_{m,n}^{(\lambda)}$, что, в общем случае, можно представить в виде следующей функциональной зависимости:

$$n = \varphi\{b_{m,n}^{(\lambda)}\}, \quad (14)$$

где $b_{m,n}^{(\lambda)}$ – бит с координатами $(m; n)$ в контейнере на уровне разряда λ двоичного описания компоненты $c(m; n)_{(a,b)}$

В свою очередь, система статистических характеристик контейнера является одним из ключевых компонент рассматриваемого метода. В связи с этим требуется разработать требования к таким характеристикам, на основании чего далее предложить определенный их набор, который отвечает сформулированным требованиям.

6. Выбор и вычисление характеристик сегментов. Статистические характеристики сегментов контейнера, способы их получения и интерпретации должны удовлетворять ряду требований, а именно [8]:

- малые вычислительные затраты, что актуально для возможности обработки массивов контейнеров большой разрешающей способности в реальном времени;

- характеристики не должны быть тривиальными, что минимизирует вероятность подбора механизмов их вычисления злоумышленником;
- характеристики должны учитывать статистические и структурные особенности.

Для удовлетворения требований нетривиальности, а также учета структурно-статистических особенностей сегмента $C(a; b)$ и минимизации вычислительной нагрузки в ходе реализации данного процесса, предлагается:

- при разработке характеристик избегать использования таких, которые требуют сложных математических расчетов;
- проводить вычисление характеристик на основе простых алгоритмов;
- вычислять характеристики как на уровне компонентного, так и на уровне битового описания сегментов;
- использовать параметрические множители.

В нашем случае требуется разработать механизмы расчета статистических характеристик $\Theta_1 - \Theta_5$. Соответственно, здесь используются параметрические величины из множества $\{\mu\}$. Тогда, например, в качестве характеристики Θ_1 предлагается использовать модуль разности суммарного количества значимых и нулевых компонент $c(m; n)^{(a,b)}$, выявленных в пределах сегмента, что эквивалентно выражению:

$$\Theta_1 = \mu_1 \left| \sum (c(m; n)^{(a,b)} | c(m; n)^{(a,b)} \neq 0) - \sum (c(m; n)^{(a,b)} | c(m; n)^{(a,b)} = 0) \right|.$$

Соответственно, для вычисления Θ_2 выражение (19) может быть модифицировано к виду:

$$\Theta_2 = \mu_2 \left(\sum (c(m; n)^{(a,b)} | c(m; n)^{(a,b)} \neq 0) + \sum (c(m; n)^{(a,b)} | c(m; n)^{(a,b)} = 0) \right).$$

В этом случае могут быть использованы значения сумм значимых и нулевых компонент, рассчитанные на предыдущем шаге, что создает условия для уменьшения общей вычислительной нагрузки.

В свою очередь, определение значения характеристики Θ_3 может выполняться на основе количества единичных бит, выявленных на уровне разряда λ двоичного описания сегмента $C(a; b)$, локализованных в пределах v строк, расположенных последовательно, начиная с ψ -й, т. е.:

$$\Theta_3 = \mu_3 \sum_{i=\psi}^{\psi+v} \sum_m^8 b(i)_{m,n}^{(\lambda)}. \quad (15)$$

Далее, по аналогии с принципом, использованным для расчета характеристики Θ_3 , для определения характеристики Θ_4 может применяться выражение (15), приведенное к следующему виду:

$$\Theta_4 = \mu_4 \sum_{i=\psi}^{\psi+v} \sum_m^8 b(i)_{m,n}^{(\vartheta)}, \quad \vartheta \neq \lambda. \quad (16)$$

Здесь, на этапе расчета характеристики Θ_4 , согласно формуле (16), используются результаты двоичной декомпозиции компонент сегмента $C(a; b)$, тем самым может быть уменьшен объем необходимых вычислений.

Наконец, характеристику Θ_5 можем рассчитать, изменив в выражении (13) или (14) строки на столбцы, число учитываемых столбцов, а также используя соответствующий множитель μ_5 , например:

$$\Theta_5 = \mu_4 \sum_{i=\psi}^{\psi+v} \sum_n^8 b(i)_{m,n}^{(\lambda)}, \quad v \neq v.$$

Таким образом, все требования к вычислению статистических характеристик сегментов выполнены.

7. Проблематика реализации способа обхода контейнера и способ ее устранения. В процессе обхода контейнера согласно принципам, приведенным выражениями (2) и (5), может возникнуть ситуация неопределенности, связанная с достижением его границы по одному из направлений. В этом случае, выполнение произвольного $(i + \xi)$ -го шага алгоритма формально является невозможным, если выполняется следующее условие:

$$((K - k) < s_{(i+\xi)}) \vee ((L - \ell) < s_{(i+\xi)}), \quad (17)$$

где $(K - k)$ и $(L - \ell)$ – доступные пространства смещения по горизонтальной и вертикальной оси соответственно.

Иначе говоря, необходимая величина смещения может превышать значение $(K - k)$ и/или $(L - \ell)$, что соответствует условной «границе» контейнера. Тогда в случае, когда величина $s_{(i+1)}$ превышает доступное пространство смещения, может быть реализован подход, в рамках которого при выполнении условий (17) предусматривается переход на соседнюю строку/столбец с изменением направления обхода текущего шага на противоположное. Иначе говоря, новая координата $(m'; n')$ компоненты для следующего шага в этом случае определяется на основе системы соотношений:

$$\begin{cases} c_{i+1}(m'; n') := c_i(m - q; n + 1) | ((K - k) \leq s_{(i+1)}) \& ((L - \ell) \geq s_{(i+1)}); \\ c_{i+1}(m'; n') := c_i(m - q; n - 1) | ((K - k) \leq s_{(i+1)}) \& ((L - \ell) \leq s_{(i+1)}); \\ c_{i+1}(m'; n') := c_i(m + 1; n - q) | ((K - k) \geq s_{(i+1)}) \& ((L - \ell) \geq s_{(i+1)}). \end{cases}$$

Такой подход характеризуется простотой реализации и отсутствием дополнительных вычислений, что способствует снижению общего времени работы алгоритма.

В свою очередь, разработанные алгоритмы встраивания данных, с одной стороны, ориентированы на частичное использование доступной емкости контейнера (а именно: пространства LSB), а с другой стороны, не вносят искажений, характерных для базового алгоритма, тем самым нивелируя эффективность методов стегоанализа [9, 10].

В рамках изложенной концепции стеганографический ключ рассматривается как совокупность параметрических величин, полностью определяющих уникальный сценарий обхода пространства компонент яркости контейнера. В общем виде, ключ может быть представлен следующим образом:

$$K = (\{\eta\}; \{\mu\}),$$

где $\{\eta\}$ и $\{\mu\}$ – множества параметрических величин, используемых для построения уникального сценария встраивания бит скрываемого сообщения и вычисления статистических характеристик сегментов контейнера соответственно.

8. Заключение. Сформулирована концепция модификации метода неравномерных смещений за счет:

- внедрения механизмов изменения направления обхода контейнера;
- обеспечения возможности превышения максимального шага смещения, доступного в базовом методе;
- применения разработанного алгоритма выбора стартовой точки встраивания.

При этом процедуры выбора направления обхода для каждого шага смещения, величины шага и выбора стартовой точки инкапсуляции выполняются с учетом значения статистических характеристик сегментов контейнера. Нетривиальность таких характеристик, а также использование параметрических величин, которые являются элементами стегоключа, способствует повышению защищенности стеганограмм.

Применение параметрических величин в ходе выбора шага и направления смещения и при вычислении характеристик сегментов позволяет также гибко модифицировать алгоритм. Тем самым обеспечивается возможность реализации квази-случайного сценария обхода пространства компонент яркости контейнера, учитывающего особенности содержания его сегментов.

В то же время, поскольку предложенные механизмы вычисления характеристик сегментов контейнера не требуют больших объемов сложных математических вычислений, это создает условия для возможности обработки множества контейнеров большой разрешающей способности в реальном времени.

Применение предложенных механизмов модификации метода неравномерных смещений потенциально способствует устранению недостатков, изначально присущих базовому методу. За счет этого создаются условия для увеличения защищенности стеганограмм без существенного увеличения сложности всего алгоритма.

Дальнейшее развитие изложенной концепции предполагает разработку механизма формирования стегоключа путем хеш-преобразования начальной парольной фразы, а также ее адаптацию к условиям, когда носителем скрываемых данных является динамическая видеосреда.

References

1. Fridrich Y. Steganography in Digital Media: Principles, Algorithms and Applications. Cambridge, Cambridge Press; 2010, 462 p.
2. Shelukhin OI., Kanaev SD. Steganography. Algorithms and software implementation. Moscow, Hotline-Telecom, scientific and technical publishing house; 2017, 592 p.
3. Gonzalez R., Woods R. Digital image processing. Moscow, Technosphere, 2012; 110 p.

4. Kobayashi H., Kiya H. Bitstream-Based JPEG Image Encryption with File-Size Preserving. IEEE 7th Global Conference on Consumer Electronics (GCCE), NY; 2018, 1-4.
5. Miano J. Image compression formats and algorithms in action: tutorial. Moscow; 2003, 336 p.
6. Westfeld A., Pfitzmann A. Attacks on Steganographic Systems Breaking the Steganographic Utilities EzStego, Jsteg, Steganos, S-Tools and Some Lessons Learned. Proceedings of The Workshop of Information Hiding. NY. 1999;1:16.
7. Tsai Ch.-L., Chen Ch.-J., Hsu W.-L. Multi-morphological image data hiding based on the application of Rubik's cubic algorithm. IEEE International Carnahan Conference on Security Technology (ICCST). 2012;1:135-139.
8. Moulin P., O'Sullivan J. A. Information-theoretic analysis of information hiding. *IEEE International Symposium on Information Theory*. 2003;49(3):563-593.
9. Qjudong Sun, Wenxin Ma, Wenying Yan, Hong Dai. Information Hiding Method Based on Block DWT Sub-Band Feature Encoding. *Journal of Software Engineering and Applications*. 2009;2(5):256-268.
10. Yanping Zhang, Juan Jiang, Yongliang Zha, Heng Zhang, Shu Zhao. Research on Embedding Capacity and Efficiency of Information Hiding Based on Digital Images. *International Journal of Intelligence Science*. 2013;3(2):248-156.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 07.10.2024

Received October 7, 2024

Поступила после рецензирования 20.11.2024

Revised November 20, 2024

Принята к публикации 23.11.2024

Accepted November 23, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Твердохлеб Виталий Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Хлопов Андрей Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения вычислительной техники, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Акиншин Данил Иванович – аспирант, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vitalii V. Tverdokhle – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Engineering Software, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Andrey M. Khlopov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Engineering Software, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Danil I. Akinshin – Graduate Student, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

ПЕРСОНАЛИИ PERSONNEL

К 75-летию профессора Юрия Петровича Вирченко

23 июля 2024 года исполнилось 75 лет Юрию Петровичу Вирченко, доктору физико-математических наук, профессору Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова, российскому учёному физики и математику, специалисту в области математической физики и математического моделирования.



Юрий Петрович Вирченко родился в 1949 году. В 1972 г. с отличием закончил физико-технический факультет Харьковского государственного университета им. В. Н. Каразина по отделению «Теоретическая физика». Позднее получил дополнительное математическое образование в том же университете. В период с 1972 по 1994 гг. – научный сотрудник Харьковского физико-технического института АН Украины (в этот же период непродолжительное время сотрудничал также в Донецком физико-техническом институте АН Украины). В ХФТИ Юрий Петрович работал в отделе теоретической физики, руководимом акад. А. И. Ахиезером. В 1977 году он защитил под руководством акад. С. В. Пелетминского кандидатскую диссертацию по теоретической физике в Донецком государственном университете, посвященную общей теории кинетических уравнений. Работая в ХФТИ, Юрий Петрович занимался не только чисто теоретическими исследованиями в области статистической математической физики. В связи с тем, что работы в ХФТИ проводились под патронажем Комитета по атомной энергии СССР, он также решал задачи, связанные с оборонной тематикой. Вследствие наступивших в 1993 г. преобразований, Юрий Петрович покинул ХФТИ и перешел ведущим научным сотрудником в Институт монокристаллов НАН Украины, где он проработал с 1994 по 2003 гг. В 2000 г. в этом институте он защитил докторскую диссертацию «Вероятностно-феноменологический подход в статистической физике фрактально неупорядоченных конденсированных сред», связанную с теорией случайных фрактальных множеств в математической физике. В то же время, начиная с 1998 г., Юрий Петрович работает преподавателем в Белгородском государственном университете. В дальнейшем, начиная с 2003 г., он полностью ушел из академической системы научных исследований и стал постоянно работать в г. Белгороде, сначала профессором Белгородского государственного университета, где в период с 2011 по 2015 гг. возглавлял кафедру теоретической и математической физики, а затем с 2022 г. стал работать профессором Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Нужно отметить, что и ранее, в разные годы, Юрий Петрович сочетал академическую деятельность с преподаванием в вузах. Он работал в Харьковском государственном университете, в Харьковском политехническом институте, в Академии бизнеса и банковского дела (г. Тольятти). Юрий Петрович подготовил 15 кандидатов физико-математических наук по различным специальностям: теоретическая физика, математическая физика, теория вероятностей, физика конденсированного состояния, математическое моделирование, дифференциальные уравнения. Наряду с научной и педагогической деятельностью, Юрий Петрович профессионально занимался альпинизмом, совмещая работу в этой области с научной деятельностью. В разные годы он работал горноспасателем

и инструктором альпинизма в различных горных районах СССР. В частности, в 1985 г. он работал в центре горной подготовки МВД СССР в г. Алма-Ата в качестве тренера военнослужащих из состава ограниченного войскового контингента в Афганистане. В 1988 г. он участвовал в спасательных работах в Армении после Спитакского землетрясения. В связи со спортивным достижением Юрия Петровича — покорением им всех семитысячников СССР, ему в 1988 г. был присвоен Федерацией альпинизма СССР титул «Снежный барс».

Юрий Петрович был одним из организаторов издания в БелГУ научного журнала по математике и физике и был его главным редактором с 2003 по 2015 гг. Работая в университете, он написал три монографии:

1. Вирченко Ю. П., Шпилинская О. Л. Случайные фрактальные множества в R с марковскими измельчениями. Белгород: БелГУ, 2007.
2. Вирченко Ю. П. Введение в статистическую теорию фрагментации твердых сред. Белгород: БелГУ, 2008.
3. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Математические задачи в теории квантовой регистрации электромагнитного излучения. Белгород: БелГУ, 2009. – 160 с.

В настоящее время он является членом редколлегии журнала «Прикладная математика & Физика» и членом автономного диссертационного совета БелГУ.22.01.

Юрий Петрович является активно работающим специалистом в области математической физики и математического моделирования. В частности, большинство его научных исследований связаны со статистической математической физикой, теорией перколяции, теориями случайных процессов и случайных множеств. Он является автором более 500 научных работ.

*Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Юрия Петровича Вирченко
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.*

Избранные научные работы профессора Ю. П. Вирченко

1976 год:

1. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. Квантовые вириальные разложения в теории кинетических уравнений // Теор. и мат. физ. – 1976. – 27;1. – С.94-103.
2. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. Вириальные разложения в квантовой теории кинетических уравнений // Укр. физ. жур. – 1976. – 21;8. – С.1237-1246.

1978 год:

3. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. Неравновесная энтропия системы взаимодействующих частиц в приближении малой плотности // Теор. и мат. физ. – 1978. – 34;1. – С.123-136.

1979 год:

4. Вирченко Ю.П., Ласкин Н.В. Огрубленное описание распределения решений уравнения Ланжевена // Теор. и мат. физ. – 1979. – 41;3. – С.406-417.

1980 год:

5. Вирченко Ю.П., Ласкин Н.В. О расходимостях при построении кинетических уравнений // Теор. и мат. физ. – 1980. – 44;2. – С.238-250.

1982 год:

6. Вирченко Ю.П. Описание фазы с нарушенной симметрией в модели Изинга методом квазисредних // Теор. и мат. физ. – 1982. – 52;3. – С.473-490.

1986 год:

7. Вирченко Ю.П., Соболева Т.К. Совпадение порогов просачивания $P(c)$ и $P(n)$ в двумерных моделях теории перколяции // Доклады АН УССР сер.А. – 1986. – 10. – С.38-40.

1988 год:

8. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Одновершинность одного класса распределений, связанных с комплексным процессом Орнштейна-Уленбека // Доклады АН УССР, сер.А. – 1988. – 1. – С.55-57.

9. Вирченко Ю.П., Половин Р.В. Стохастическое разрушение нарастающей волны при прохождении её через электрически активную среду // Укр. физ. жур. – 1988. – 33;12. – С.1863-1868.

10. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Одновершинность распределения числа фотоотсчётов гауссовых оптических полей // Укр. физ. жур. – 1988. – 33;9. – С.1989.

11. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Статистические свойства функционала свёртки от нормального марковского процесса // Доклады АН УССР, сер.А. – 1988. – 1. – С.14-16.

1989 год:

12. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. О решениях уравнений динамики спиральных обменных структур // Теор. и мат. физ. – 1989. – 81;3. – С.441-454.

13. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Флуктуации фотоотсчётов суперпозиции гауссовых мод оптического излучения // Изв. ВУЗов Радиофизика. – 1989. – 32;6. – С.784-786.

14. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение средней мощности в линейной системе, возбуждённой белым шумом // Радотехника и электроника. – 1989. – 35;12. – С.2546-2549.

1990 год:

15. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Метод функционального интегрирования как средство анализа нелинейных инерционных преобразований гармонических случайных процессов // АСУ и приборы автоматики, Харьков. – 1990. – 95. – С.62-69.

16. Вирченко Ю.П., Александров Е.Б., Мазманишвили А.С. Параметрический синтез систем автоматики при случайном внешнем воздействии // АСУ и приборы автоматики, Харьков. – 1990. – 96. – С.41-47.

17. Вирченко Ю.П., Пелетминский С.В. Скобки Пуассона и дифференциальные законы сохранения в теории магнитоупругих сред / Проблемы физической кинетики и физики твёрдого тела – Киев: Наукова думка, 1990. – С.63-77.

18. Virchenko Yu.P., Soboleva T.K., Kivshar Yu.S. Kinks in the nongomogeneous medium / Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. – World Scientific: Singapour, 1990. – P.1343-1351.

19. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение вероятностей случайного функционала свёртки от нормального марковского процесса // Проблемы передачи информации. – 1990. – 26;3. – С.96-101.

20. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Существенная одновершинность распределения вероятностей случайных квадратичных функционалов // ДАН УССР, сер.А. 1990. – 12. – С.3-5.

1991 год:

21. Virchenko Yu.P., Grigoriev Yu.N. Equilibrium distribution of the charged particles in the phase space of a linear accelerators // Ann. of Phys. (USA). – 1991. – 209;1. – P.1-12.

22. Вирченко Ю.П. К теории основного состояния обменной модели Гейзенберга // Проблемы теоретической физики. – Киев: Наукова думка, 1991. – С.80-96.

1992 год:

23. Вирченко Ю.П., Барц Б.И., Моисеев С.С. Устойчивость и стохастический параметрический резонанс осциллятора с мультипликативным шумом // Укр. физ. жур. – 1992. – 37;1. – С.1792-1799.

24. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Существенная одновершинность распределений вероятностей случайных квадратичных функционалов // Кибернетика и системный анализ. – 1992. – 2. – С.172-175.

1995 год:

25. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Одновершинность распределения числа фотоотсчётов гауссовских оптических полей // Проблемы передачи информации. – 1995. – 31;1. – С.84-89.

1996 год:

26. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Статистические свойства кросс-корреляционного функционала от двух марковских нормальных процессов // Изв. ВУЗов Радиофизика. – 1996. – 39;7. – С.916-924.

27. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение кросс-корреляционного функционала от двух процессов Орнштейна-Уленбека // Доклады НАН Украины. – 1996. – 4. – С.27-30.

28. Вирченко Ю.П., Болотин Ю.Л. Статистика квазиэнергий для регулярного и хаотического режимов в квантовомеханических системах с гамильтонианами, периодически изменяющимися во времени // Теорет. и матем. физ. – 1996. – 108;3. – С.431-447.

29. Virchenko Yu.P. Unimodality of photocount distribution for optical noise field // Journal of Physics A. – 1996. – 29;22. – P.7105-7111.

30. Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation. I. General theory // *Functional Materials*. – 1996. – 3;1. – P.5-11.

31. Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Semiconductors materials heat breakdown under action of the penetrating electromagnetic radiation. II. One-dimensional model analysis // *Functional Materials*. – 1996. – 1996. – 3;3. – P.312-319.

1997 год:

32. Virchenko Yu.P. Exact Unimodality of One-Dimensional Stable Distributions // *Доклады НАН Украины*. – 1997. – 11. – С.74-77.

1998 год:

33. Virchenko Yu.P. Correlation inequalities for lattice gas statistical models // *Украинский математический журнал*. – 1998. – 6. – С.765-773.

34. Virchenko Yu.P. Level First Passage Time Distribution Unimodality in Detection Problem // *Доклады НАН Украины*. – 1998. – 12. – P.89-92.

35. Virchenko Yu.P. Percolation Mechanism of Material Ageing and Distribution of the Destruction Time // *Functional Materials*. – 1998. – 5;1. – P.7-13.

1999 год:

36. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. The Formation of Destruction Time Distribution of Material Aging by Statistically Independent Perturbations // *Functional Materials*. – 1999. – 6;1. – P.5-12.

2000 год:

37. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Analysis of Statistical Percolation Electrical Breakdown Model of Enamel-Laque Coatings // *Functional Materials*. – 2000. – 7;1. – P.152-153.

38. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Distribution of Destruction Time in Percolation Picture of Material Ageing // *Укр. фіз. жур.* – 2000. – 45;6. – P.731-737.

39. Virchenko Yu.P., Hadjinova V.V. Linear Lavrentiev's surface wave // *Укр. фіз. жур.* – 2000. – 45;8. – P.949-953.

40. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Точечные случайные поля с марковскими измельчениями и геометрия фрактально неупорядоченных сред // *Теор. и мат. физ.* – 2000. – 124;3. – С.490-505.

41. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. To the Statistical Theory of Brittle Destruction of Solid Media // *Доповіді НАНУ*. – 2000. – 7. – P.92-95.

42. Virchenko Yu.P., Sheremet O.I. Investigation of a One-Dimensional Model in Statistical Theory of Fragmentation // *Доповіді НАН України*. – 2000. – 8. – P.82-86.

2001 год:

43. Virchenko Yu.P., Dulfan A.Ya. Random square coverage dispersion of stochastic fractal // *Functional Materials*. – 2001. – 8;2. – P.386-388.

44. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Стохастические фракталы с марковскими измельчениями // *Теор. и мат. физика*. – 2001. – 128;2. – С.178-192.

45. Вирченко Ю.П., Шеремет О.И. Геометрические модели статистической теории фрагментации // *Теор. и мат. физика*. – 2001. – 128;2. – С.161-177.

46. Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Heat localization and formation of heat breakdown structure in semiconductor materials. I. Nonlinear model // *Functional Materials*. – 2001. – 8;3. – P.428-434.

47. Yu.P.Virchenko, Tolmacheva Yu.A. On the upper limit of percolation threshold in square lattice // *Functional Materials*. – 2001. – 8;4. – P.600-603.

2002 год:

48. Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Heat localization and formation of secondary breakdown structure in semiconductor materials. II. Mathematical analysis of the model // *Functional Materials*. – 2002. – 9;4. – P.601-607.

49. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. On the upper limit of percolation threshold on square lattice // *ArXiv math-ph/0204004* (2002).

50. Virchenko Yu.P., Tolmacheva Yu.A. Revision of upper estimate of percolation threshold on square lattice // *ArXiv math-ph/0204033* (2002).

2003 год:

51. Yu.P.Virchenko, Tolmacheva Yu.A. Revision of the upper estimate of percolation threshold in square lattice // *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya*. – 2003. – 10;1. – P.29-39.
52. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Nonseparable random point sets and probabilistic modeling of fractal unordered solid media. *Доповіди НАНУ*. – 2003. – 1. – С.58-63.
53. Virchenko Yu.P., Shmatkov A.S. About the distribution unimodality of extremums of statistically independent random values sample in destruction materials statistical theory // *Functional Materials*. – 2003. – 10;2. – P.190-196.
53. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. Investigation of final stage of a fragmentation random process // *Functional Materials*. – 2003. – 10;3. – P.378-387.
54. Virchenko Yu.P., Andreyeva N.V. Analysis of the mathematical model of semiconductor material thermal breakdown // *Functional Materials*. – 2003. – 10;4. – P.591- 598.

2004 год:

55. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Распределение вероятностей аддитивного квадратичного функционала от траекторий комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека // *Кибернетика и системный анализ*. – 2004. – 6. – С.134-144.
56. Virchenko Yu.P., Mazmanishvili A.S. Study of statistics of quality control functional in the rough surface treatment theory // *Functional Materials*. – 2004. – 11;1. – P.20-13.
57. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Вероятностное пространство стохастических фракталов // *Украинский математический журнал*. – 2004. – 56;11. – С.1467-1483.
58. Virchenko Yu.P., Vodyanitskii A.A. Heat localization and formation of secondary breakdown structure in semiconductor materials. III. Analysis of the one-dimensional model // *Functional Materials*. – 2004. – 11;2. – P.236-239.
59. Yu.P.Virchenko, Yu.A.Tolmacheva, Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory // *Studies in Mathematical Physics Research*. ed. Charles V. Benton. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2004. P.155-175.
60. Virchenko Yu.P., Vitokhina N.N. Analysis of the probability distribution of photocount number of the onemode stochastic radiation // *ArXiv: math-ph/0411025*, 2004. – 81V80.
61. Andreyeva N.V., Virchenko Yu.P. Stabilization of the thermal breakdown development in semiconductor films // *Problems of Atomic Science and Technology. Series Nuclear Physics Investigations*. – 2004. – 5. – P.126-128.
62. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Плотность распределения вероятностей значений аддитивного квадратичного функционала от траекторий винеровского процесса // *Вестник Воронежского Университета. сер. Физика, Математика*. – 2004. – 2. – С.173-183.

2005 год:

63. Andreyeva N.V., Virchenko Yu.P. Analysis of the secondary breakdown of semiconductor materials on the basis of the nonlinear thermal conductivity equation // *Functional Materials*. – 2005. – 12;2. – P.190-195.
64. Вирченко Ю.П., Толмачёва Ю.А. Мажорантные оценки порога перколяции бернуллиевского поля на квадратной решётке // *Украинский математический журнал*. – 2005. – 57;10. – С.1315-1326.
65. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Метод рекуррентного вычисления распределения вероятностей фотоотсчётов квантового одномодового шумового излучения // *Доповіди НАНУ*. – 2005. – 12. – С.14-18.
66. Virchenko Yu.P., Vitokhina N.N. The probability distribution density of random values of squared functional on Wiener process trajectories // *ArXiv: math-ph/0510028 v1*.
67. Вирченко Ю.П., Яструбенко М.И. Локальная предельная теорема в задаче достижения заданного уровня суммами независимых положительных случайных величин с безгранично-делимым законом распределения // *Вестник Воронежского университета, сер.Физика, Математика*. – 2005. – 2. – С.119-123.
68. Virchenko Yu.P., Vitokhina N.N. Calculation of the photocount probability distribution of the one-mode stochastic radiation // *Functional Materials*. – 2005. – 12;3. – P.416-423.
69. Virchenko Yu.P., Yastrubenko M.I. First passage time problem in the material destruction theory // *The poissonian process of energy absorption*. – *Functional Materials*. – 2005. – 12;4. – P.628-632.
70. Virchenko Yu.P., Vitokhina N.N. The multiplicative decomposition and the infinite divisibility of the Mandel distribution // *Theory of stochastic processes*. – 2005. – 11(27);3-4. – P.131-139.
71. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Marginal probability distributions of random sets in \mathbb{R} with markovian refinements // *Theory of stochastic processes*. – 2005. – 11(27);3-4. – P.121-130.

72. Вирченко Ю.П., Н.Н.Витохина Н.Н. Плотность распределения вероятностей значений квадратичного функционала от траекторий винеровского процесса // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2005. – 2(22);11. – С.16-22.

73. Вирченко Ю.П., Яструбенко М.И. Локальная предельная теорема для случайного числа слагаемых с заданным значением суммы независимых пуассоновских случайных величин // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2005. – 2 (22);11. – С.23-27.

2006 год:

74. Virchenko Yu.P., Yastrubenko M.I. The integral limit theorem in the first passage problem for sums of independent nonnegative lattice variables // Abstract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID56367. – P.1-12.

75. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. The Kolmogorov equation in the stochastic fragmentation theory and branching processes with infinite collection of particle types // Abstract and Applied Analysis. – 2006. – Art.ID 36215. – P.1-10.

76. Virchenko Yu.P., Brodskii R.E. Investigation of the material fragmentation model with the energy uniform distribution on refinement scales // Functional Materials. – 2006. – 13;1. – P.2-13.

77. Андреева Н.В., Вирченко Ю.П. Статистика образования мезоплазменных каналов в тонких полупроводниковых плёнках при стабилизации теплового пробоя // Письма в журнал технической физики. – 2006. – 32;5. – С.8-12.

78. Вирченко Ю.П., Карабутова Т.В. Слабая сходимост случайных процессов и разрешимость уравнения Больцмана // Дифференциальные уравнения. Известия Российской академии естественных наук. – 2006. – 11. – С.57-62.

2007 год:

79. Virchenko Yu.P., Karabutova T.V. Construction of Probabilistic Solutions of the Boltzmann Equation // Problems of Atomic Science and Technology. – 2007. – 3(2). – P.297-300.

80. Brodskii R.E., Virchenko Yu.P. Probabilistic description of Cascade Kinetic Processes // Problems of Atomic Science and Technology. – 2007. – 3(2). – P.343-347.

81. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. The heat radiative conduction problem in semi-transparent media. The small reflection coefficient approximation // Functional Materials. – 2007. – 14;2. – P.164-170.

82. Kolesnikov A.V., Virchenko Yu.P. Radiative Conduction Problem in Thin Layer of Semi-Transparent Media. The Weak Absorbtion case // Functional Materials. – 2007. – 14;4. – P.1-7.

83. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Случайные фрактальные множества с марковскими измельчениями в R. Белгород: БелГУ, 2007.– 180 с.

2008 год:

84. Brodskii R.E., Virchenko Yu.P. Investigation of the kinetic equation of cascade fragmentation theory at not self-similar subdivision // ArXiv 0808.1214v2

85. Андреева Н.В., Вирченко Ю.П. Термодинамика формирования каналов теплового пробоя в полупроводниковых плёнках // Научные ведомости БелГУ. сер. Математика. Физика. – 2008. – 9(49);14. – С.137-145.

86. Антонова Е.С, Вирченко Ю.П. Оценка числа ограниченных заполненных кластеров с фиксированной вершиной на кубической решётке // Научные ведомости. сер. Математика. Физика. БелГУ. – 2008 – 9(49);14. – С.52-57.

87. Вирченко Ю.П. Введение в статистическую теорию фрагментации твердотельных сред / Ю.П.Вирченко. – Белгород: БелГУ, 2008. – 188 с.

88. Бродский Р.Е., Вирченко Ю.П. Финальные распределения вероятностей случайных размеров при самоподобном механизме дробления // Научные ведомости. сер. Математика. Физика. БелГУ. – 2008. – № 13(53); Вып. 15. – С.23-31.

2009 год:

89. Вирченко Ю.П., Карабутова Т.В. Вероятностные решения кинетических уравнений статистической физики // Доклады адыгской (черкесской) международной академии наук. – 2009. – 11;1. –С.9-16.

90. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Кластерное разложение вероятности перколяции на гексагональной решётке // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2009.- № 13(68);17. – С.5-28.

91. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Одномерная задача радиационно-кондуктивного теплообмена. Флуктуационный подход // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика, Математика. – 2009. – 5(60);16. – С.47-67.

92. Antonova E.S., Virchenko Yu.P., Cluster decomposition of percolation probability on the hexagonal lattice // arXiv.0909.1312. – 23 p.

93. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Математические задачи в теории квантовой регистрации электромагнитного излучения / Белгород: БелГУ, 2009. – 160 с.

2010 год:

94. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Построение гауссовской флуктуационной модели равновесного теплового излучения // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.144-156.

95. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Алгебра последовательностей коэффициентов степенных рядов аналитических функций // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);19. – С.28-61.

96. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Экспоненциальное разложение распределения вероятностей значений квадратичного функционала от траекторий процесса Орнштейна-Уленбека // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2010. – 5(76);18. – С.48-70.

97. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Свойство монотонности вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на бесконечных графах // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);20. – С.10-20.

98. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Индикаторные случайные процессы и сепарабельные случайные множества // Научные ведомости БелГУ. Физика. Математика. – 2010. – 11(82);20. – С.124-141.

99. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Непрерывная зависимость вероятности перколяции для однородных марковских ветвящихся процессов с дискретным временем // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 23(44);21. – С.11-22.

100. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Несепарабельность случайных множеств с марковскими измельчениями в одномерном пространстве погружения // Научные ведомости БелГУ. Сер. Физика. Математика. – 2010. – 23(44);21. – С.51-58.

101. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Флуктуационный подход в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // Доповіді НАНУ. – 2010. – 12. – С.63-69.

102. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Случайные множества с марковскими измельчениями в одномерном пространстве погружения. Белгород: БелГУ, 2010. – 180 с.

2011 год:

103. Antonova E.S., Virchenko Yu.P. Monotonicity of the probability of percolation for Bernoulli random fields on periodic graphs // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – 175;1. – P.86-90.

104. Вирченко Ю.П. Плоские стационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 5(100);22. – С.133-139.

105. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 1. Операции склеивания и разрезания // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 5(100);22. – С.140-152.

106. Вирченко Ю.П. Нестационарные решения динамических уравнений идеальной несжимаемой жидкости // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 11(106);23. – С.90-95.

107. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 2. Комбинаторное построение плоских графов // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 11(106);23. – С.179-188.

108. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Монотонность вероятности перколяции бернуллиевских случайных полей на периодических графах / Современная математика и её приложения. т.68, Дифференциальные уравнения с частными производными / М.:ВИНИТИ, 2011. – С.84-88.

109. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Локальная предельная теорема для распределения Манделя // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 17(112);24. – С.41-46.

110. Virchenko Yu.P., Saprykin M.A. Nonequilibrium thermodynamics of heat radiation conduction in dielectric media / Functional Materials. – 2011. – 18;4. – P.504-511.

111. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках. Часть 3. Теорема о внешней границе // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 23(118);25. – С.112-126.

112. Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А. Неравновесная термодинамика радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрических средах // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2011. – 23(118);25. – С.158-167.

2012 год:

113. Вирченко Ю.П. Конечные кластеры на плоских мозаиках // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 11(130);27. – С.116-119.

114. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Топологическое описание одномерных замкнутых сепарабельных множеств // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 11(130);27. – С.67-71.

115. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Новый метод вычисления верхней оценки порога перколяции в задаче узлов на квадратной решетке // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 5(124);26. – С.25-30.

116. Вирченко Ю.П. О вычислении некоторых комбинаторных сумм // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 11(130);28. – С.67-71.

117. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Построение распределения вероятностей случайных множеств. Часть 2. Построение σ -аддитивной меры // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 11(130);28. – С.67-71.

118. Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 23(142);29. – С.54-66.

119. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Полностью вырожденные линейные гамильтоновы системы // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2012. – 23(142);29. – С.215-218.

2013 год:

120. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О спектральном разложении генераторов гамильтоновых систем // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 5(148);30. – С.135-141.

121. Вирченко Ю.П. О нильпотентных элементах операции коммутирования матриц // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 5(148);30. – С.183-185.

122. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 11(154);31. – С.130-146.

123. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О классе гамильтоновых матриц // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 11(154);31. – С.183-185.

124. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. Стохастически однородные и изотропные магнитные поля // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 19(162);32. – С.176-183.

125. Вирченко Ю.П. Приближение самосогласованного поля в векторной модели ферромагнетика // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 19(162);32. – С.187-195.

126. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ фазовой диаграммы в стохастической модели химической кинетики бинарной циклической реакции // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 26(169);33. – С.57-63.

127. Фат Лам Тан, Вирченко Ю.П. О теореме Гельмгольца для почти-периодических в среднем квадратичном векторных полей // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2013. – 26(169);33. – С.99-104.

2014 год:

128. Клюев А.С., Вирченко Ю.П. Основное состояние векторной решеточной модели с парным взаимодействием. Случай вырожденного обменного интеграла // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – 5(176);34. – С.126-133.

129. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Исследование критической поверхности стохастической модели химической кинетики бинарной автокаталитической реакции. Сильно асимметричный случай // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – 5(176);34. – С.103-111.

130. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Гауссовские почти периодические в среднем квадратичном солитоидальные векторные поля // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – 5(176);34. – С.134-141.

131. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Гауссовское флуктуационное электромагнитное поле с почти периодическими в среднем квадратичном реализациями // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – 12(183);35. – С.200-213.

132. Вирченко Ю.П., Яструбенко М.И. Распределение вероятностей времени достижения заданного уровня энергетическим функционалом для дихотомического случайного процесса / Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – № 19(190);36. – С.133-154.

133. Субботин А.В., Вирченко Ю.П. О числе спектральных типов обратимых динамических систем // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – № 19(190);36. – С.126-132.

134. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Анализ критической поверхности стохастической модели бинарной циклической реакции с фазовым переходом // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – № 25(196); 37. – С.108-118.

135. Фат Л.Т., Вирченко Ю.П. Гауссовские модели флуктуационного электромагнитного поля // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2014. – № 25(196); 37 – С.97-107.

2015 год:

136. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Стохастические электромагнитные поля в диэлектрической среде. 1. Построение модели // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 5(202); 38. – С.119-129.

137. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа разложений конечного множества // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 5(202); 38. – С.96-100.

138. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Моменты стационарного распределения вероятностей в стохастической генетической модели // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 5(202); 38. – С.107-111.

139. Вирченко Ю.П., Самойлова Н.Н. Асимптотические разложения решений уравнений газодинамики стационарных потенциальных течений // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 5(202); 38. – С.112-118.

140. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О понятии обратимости динамических систем // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 5(202); 38. – С.138-147.

141. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа древесных графов над конечным множеством вершин // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 11(208); 39. – С.37-43.

142. Антонова Е.С., Вирченко Ю.П. Абстрактные структуры связности на конечных множествах // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 11(208); 39. – С.77-83.

143. Вирченко Ю.П., Дульфан А.Я. Самоподобные случайные процессы // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 11(208); 39. – С.84-88.

144. Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Л. Задача восстановления распределения вероятностей радиусов случайных окружностей по заданному распределению вероятностей их хорд // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 11(208); 39. – С.110-114.

145. Вирченко Ю.П., Самойлова Н.Н. Асимптотические разложения стационарных потенциальных течений в газодинамике // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2015. – № 11(208); 39. – С.141-147.

146. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Корректность стохастического уравнения генетической модели // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 11(208); 39. – С.161-166.

147. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Определение числа связных графов над конечным множеством вершин // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 17(214); 40. – С.28-34.

148. Ключев А.С., Вирченко Ю.П. Оценка близости гамильтонианов векторных решеточных полей со свободными и периодическими граничными условиями // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 17(214); 40. – С.165-170.

149. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Решение задачи переноса излучения в слое полупрозрачного диэлектрика в приближении геометрической оптики // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 17(214); 40. – С.171-181.

150. Самойлова Н.Н., Вирченко Ю.П. Асимптотические разложения стационарных решений уравнения конвекции с малой соленоидальной частью // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2015. – № 17(214); 40. – С.182-192.

2016 год:

151. Virchenko Yu.P., Lam Tan Phat One-dimensional stochastic model of radiative heat transfer in dielectric medium // *Funct. Mater.* – 2016; 23 (1). –P.075-082.

152. Фам Минь Туан, Вирченко Ю.П. Полное исследование индуцированного шумом фазового перехода в стохастической модели автокаталитических реакций // *Теор.мат.физ.* – 2016. – 188. – 2. – С.318–336.

153. Лам Тан Фат, Вирченко Ю.П. Поток энергии электромагнитного поля в стохастической модели радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрической твердотельной среде // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2016. – № 17(214); 44. – С.127-149.

154. Вирченко Ю.П., Остапенко Л.П. Задачи перечисления графов с помеченными вершинами // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2016. – № 17(214); 44. – С.150-180.

2017 год:

155. Данилова Л.П., Вирченко Ю.П. О вириальном разложении уравнения состояния одноатомных газов // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2017. – № 6(255); 46. – С.138-140.

156. Lam Tan Phat, Virchenko Yu.P. Общее феноменологическое уравнение теплопереноса в твердотельной среде // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2017. – № 6(255); 46. – С.145-148.

157. Virchenko Yu.P., Lam Tan Phat, Energy flux of electromagnetic field in stochastic model of radiative heat transfer in dielectric solid medium // arXiv:1703.05941v1 [cond-mat.stat.-mech]. – 2017 (17 March). – 18 p.

158. Lam Tan Phat, Virchenko Yu.P. Energy flux of electromagnetic field in stochastic model of radiative heat transfer in dielectric solid medium // Functional Materials. – 2017; 24 (1). – P.106-116.

159. Данилова Л.П., Вирченко Ю.П. Разложения по длинному радиусу взаимодействия в равновесной статистической механике одноатомных газов // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2017. – № 12(262); 47. – С.62-71.

160. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. О связи между спектрально обратимыми и гамильтоновыми динамическими системами // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2017. – № 27(276); 49. – С.109-117.

161. Данилова Л.П., Вирченко Ю.П. Исследование фазового перехода порядок-беспорядок на основе вириального разложения // Научные ведомости БелГУ, сер. физ.-мат. науки. – 2017. – № 27(276); 49. – С.85-96.

2018 год:

162. Danilova L.P., Virchenko Yu.P. Statistical mechanics study of the thermodynamics of binary alloys with long-rang interaction // Functional Materials. – 2018.– 25 (2).– P.329-336.

163. Вирченко Ю.П., Понамарева А.Э. Построение общего эволюционного уравнения для псевдовекторного соленоидального поля с локальным законом сохранения // Научные ведомости. сер. Физика. Математика. БелГУ. – 2018. – № 50;2. – С.221-228.

2019 год:

164. Вирченко Ю.П., Плесканев А.А. Гиперболические сферически симметричные уравнения первого порядка дивергентного типа для векторного поля // Научные ведомости. сер. Физика. Математика. БелГУ. – 2019.– 51;2.– С.280-286.

165. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Описание класса эволюционных уравнений ферродинамики // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.– 2019.– 170.– С.15–30.

166. Вирченко Ю.П., Данилова Л.П. Графы и симметрические функции // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.– 2020.– 174.– С.20-36.

167. Virchenko Yu.P., Danilova L.P. Diagrammatic approach to gas-liquid phase transition in statistical theory // Journal of Physics. Conference Series .– 2019.– 1203(AMCSM 2018).– 088.

168. Вирченко Ю.П., Новосельцев А.Д. Унимодальность распределений вероятностей для максимумов выборки независимых эрланговских случайных величин // Научные ведомости. сер. Физика. Математика. БелГУ. – 2019.– 51;3.– С.366-373.

2020 год:

169. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A.D. Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables // Journal of Physics: Conf. Series.– 2020.– 1479.– 012104.

170. Вирченко Ю.П., Данилова Л.П. Графы и симметрические функции // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.– 2020.– 174.– С.20-36.

171. Вирченко Ю.П., Московченко Е.Ю. Уравнения Кирквуда-Зальцбурга для решетчатых классических моделей статистической механики // Прикладная математика & Физика.– 2020.– 52;2.– P.62-70.

172. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Ковариантные дифференциальные операторы первого порядка // Геометрия и механика Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.– 187.– М.: ВИНТИ РАН, 2020.– С.19-30.

173. Вирченко Ю.П. Мультипотентные множества в однородных коммутативных моноидах и бинарная проблема Гольдбаха. Прикладная математика & Физика.– 2020.– 52:3.– С.173–184.

2021 год:

174. Virchenko Yu.P., Novoseltsev A.D. Bifurcation of distribution function of electric breakdown voltages of polymer enamel-lacquer coatings // *Journal of Physics: Conf. Series.*– 2021.– V.1902.– 012091.

175. Вирченко Ю.П., Витохина Н.Н. Формула Зигерта для многомерных случайных процессов Орнштейна-Уленбека // *Прикладная математика & физика.*– 2021.– 53;2.– С.97-113.

176. Virchenko Yu.P., Novoseltsev A.D. Distribution function of electric breakdown voltages of polymer coatings // *Functional Materials.*– 2021.– 28; 2.– P.345-352.

177. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Гиперболические квазилинейные ковариантные уравнения первого порядка дивергентного типа для векторного поля на \mathbb{R}^3 // *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.*– 2021.– 191.– 16–28.

178. Вирченко Ю.П., Субботин А.В. Эволюционные уравнения второго порядка дивергентного типа для соленоидального векторного поля на \mathbb{R}^3 // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Тематические обзоры.*– 2021.– 198.– С.41-49.

179. Вирченко Ю.П. Разрешимость системы интегральных уравнений решетчатых моделей статистической механики // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*– 2021.– 195.– С.10–24.

180. Virchenko Yu.P. Subbotin A.V. The class of evolutionary ferrodynamical equations // *Mathematical methods in Applied Sciences.*– 2021.– 44.– 15.– P.11913-11922.

181. Вирченко Ю.П., Шаполова И.М. Распределение вероятностей критических напряжений разрыва образцов пористого материала // *Прикладная математика & Физика.*– 2021.– 53;4.– С.312–316.

2022 год:

182. Vasilyev V.B., Virchenko Yu.P. Hyperbolicity of First-Order Quasilinear Equations// *Symmetry.* – 2022.– 14(5).– P.1024.

183. Вирченко Ю.П., Шаполова И.М. Статистический подход определения предела прочности твердого пористого материала// *Прикладная математика & Физика.*– 2022.– 54(2).– С.131–136.

184. Вирченко Ю.П., Московченко Е.Ю. Свободная энергия векторных решетчатых моделей статистической механики// *Вестник Академии наук Чеченской республики.*– 2022.– № 1(56).– С.6-11.

185. Вирченко Ю.П. Мультипотентные множества в однородных коммутативных моноидах // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*– 2022.– 204.– С.27–36.

186. Вирченко Ю.П., Новосельцева А.Э. Гиперболичность класса квазилинейных ковариантных уравнений первого порядка дивергентного типа // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*– 2022.– 207.– С.16–26.

187. Вирченко Ю.П., Новосельцева А.Э. Гиперболичность ковариантных систем уравнений первого порядка для векторного и скалярных полей, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2022, том 209, С.3–15.

188. Virchenko Yu.P., Subbotin A.V. Description of a class of evolutionary equations in ferrodynamics // *Journal of Mathematical Sciences.*– 2022.– 263(4).– P.475-490.

189. Virchenko Yu.P. Isotropic covariant tensors in \mathbb{R}^n // *Lobachevskii Journal of Mathematics.*– 2022.– 43.– С.1458-1471.

190. Вирченко Ю.П., Новосельцева А.Э. Гиперболические ковариантные эволюционные уравнения первого порядка для векторного поля в \mathbb{R}^3 // *Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*– 2022.– 217.– С.20–28.

2023 год:

191. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Spaces of random sets in \mathbb{R}^d // *Lobachevsky Mathematical Journal.*– 2023.– 44;3.– P.1043-1059.

192. Вирченко Ю.П., Амануэль Мэхэри Теволде Распределение вероятностей напряжений электрического пробоя многослойной полимерной пленки // *Вестник Чеченской Академии наук.*– 2023.– 2(61).– С.5-11.

193. Вирченко Ю.П., Ченцова В.В. Двусторонние оценки решений с обострением режима нелинейного уравнения теплопроводности с квадратичным источником // *Прикладная математика & Физика.*– 2023.– 55; №3.– С.273–284.

194. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Формула Каца-Зигерта для осцилляционного случайного процесса // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2023, том 225, 38–58.

195. Вирченко Ю.П., Мазманишвили А.С. Реконструкция характеристических функций квадратичных функционалов от траекторий гауссовских случайных процессов, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*— 2023.— 227.— С. 20–40.

2024 год:

196. Virchenko Yu.P., Zhiltsova V.V. Two-Sided Estimates of Solutions with a Blow-Up Mode for a Nonlinear Heat Equation with a Quadratic Source // *Mathematical Notes.*— 2024.— 115;5.— P.692-705.

197. Вирченко Ю. П., Черкашин Д. А. Иерархические модели дискретной теории перколяции и марковские ветвящиеся процессы, *Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*— 2024.— 235.— С.15–33.

198. Virchenko Yu.P., Tevolde A.M. Electrical Strength of Polymer Film with Randomly Distributed Air Inclusions // *Journal of Surface Investigation, X-ray.*— 2024.— 18;№3.— P.699-705.

199. Вирченко Ю.П., Теволде А.М. Функция распределения электрической прочности со случайно расположенными воздушными включениями // *Журнал технической физики.*— 2024.— 94;10. — С. 1607-1616.

[К содержанию](#)