

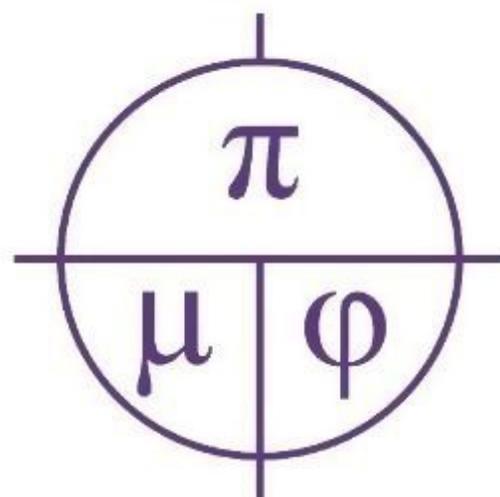


БелГУ
Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)

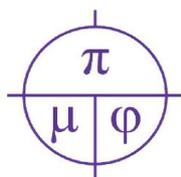
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2025. Том 57, № 1





Прикладная математика & Физика

2025. Том 57, № 1

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

- | | |
|---|--|
| Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан; | Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия; | Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия; |
| Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; | Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия; |
| Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия; |
| Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; |
| Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика; | Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия; | Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия; | Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия; | Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия; |
| Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия; |
| Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; | Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия. |

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 7,4

Дата выхода 30.03.2025.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Алдашев С. А.

Критерий однозначной разрешимости спектральной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе 5

Кабанцова Л. Ю.

Периодические в среднем решения мультипликативно возмущенной гауссовым случайным шумом системы дифференциальных уравнений 11

Архипов В. П., Глушак А. В.

Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка 27

Пискарев С. И.

Затенение в окрестности гиперболической стационарной точки для дробных уравнений 41

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Барабаш О. П.

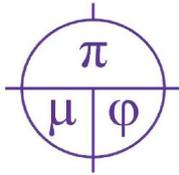
Численный метод решения уравнения «реакция – диффузия» 52

Носков А. В., Блажевич С. В., Чуева А. И., Мачукаев Д. Д., Киперша В. К.

Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре 59

ПЕРСОНАЛИИ

К 80-летию доктора физико-математических наук, профессора, академика АН Республики Узбекистан Шавката Арифджановича Алимова 68



Applied Mathematics & Physics

2025. Volume 57, No 1

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 7,4

Date of publishing 30.03.2025.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2025

CONTENTS

MATHEMATICS

Aldashev S. A.

Criterion for Unique Solvability of the Spectral Mixed Problem for the Multidimensional Lavrentiev – Bitsadze Equation 5

Kabantsova L. Yu.

Periodic on the Mean Differential Equations Systemsolutions Multiplicatively Perturbed by Gaussian Random Noise 11

Arkhipov V. P., Glushak A. V.

Power Asymptotics of Solutions of the Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations 27

Piskarev S. I.

Shadowing in the Neighborhood of a Hyperbolic Equilibrium Point for Fractional Equations 41

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Barabash O. P.

Numerical Method for Solving the Reaction-Diffusion Equation 52

Noskov A. V., Blazhevich S. V., Chueva A. I., Machukaev D. D., Kipersha V. K.

The Influence of Asymmetric Diffraction on the Spectral-Angular Density of the CRI of a Relativistic Electron in a Three-Layer Structure 59

PERSONNEL

To the 80th anniversary of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Shavkat Arifjanovich Alimovof 68

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.9, 519.6
MSC 35K20, 35K58, 35K59
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-5-10

Критерий однозначной разрешимости спектральной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе

Алдашев С. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. П. Солдатовым)

Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки,
Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Пушкина, 125
aldash51@mail.ru

Аннотация. Многомерные гипербола-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать многомерным волновым уравнением. Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа. Так, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. Теория краевых задач для гипербола-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена, а их многомерные аналоги интенсивно исследуются. Двумерные спектральные задачи для уравнений гипербола-эллиптического типа достаточно хорошо изучены, однако их многомерные аналоги исследованы мало. В данной работе рассматривается спектральная смешанная задача для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе и устанавливается ее критерий однозначной разрешимости. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этой задачи.

Ключевые слова: критерий, спектральная смешанная задача, собственные значения, собственные функции, сферические функции

Для цитирования: Алдашев С. А. 2025. Критерий однозначной разрешимости спектральной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 5–10. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-5-10

Original Research

Criterion for Unique Solvability of the Spectral Mixed Problem for the Multidimensional Lavrentiev – Bitsadze Equation

Serik A. Aldashev 

(Article submitted by a member of the editorial board A. P. Soldatov)

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Ministry of Education and Science,
125 Pushkina St., Almaty 050010, Kazakhstan
aldash51@mail.ru

Abstract. Multidimensional hyperbolic-elliptic equations describe important physical, astronomical, and geometric processes. It is known that vibrations of elastic membranes in space according to Hamilton's principle can be modeled by a multidimensional wave equation. Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, we also obtain the multidimensional Laplace equation from Hamilton's principle. Thus, vibrations of elastic membranes in space can be modeled as a multidimensional Lavrent'ev-Bitsadze equation. The theory of boundary value problems for hyperbolic-elliptic equations on a plane is well-explored, and their multidimensional analogues are intensively analyzed. Two-dimensional spectral problems for equations of hyperbolic-elliptic type have been well researched, but their multidimensional analogues have been relatively under-studied. In this paper, we consider the spectral mixed problem for the multidimensional Lavrent'ev-Bitsadze equation and establish a criterion for its unique solvability. We also determine the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions of this problem.

Keywords: Criterion, Spectral Mixed Problem, Eigenvalues, Eigenfunctions, Spherical Functions

For citation: Aldashev S. A. 2025. Criterion for Unique Solvability of the Spectral Mixed Problem for the Multidimensional Lavrentiev – Bitsadze Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 5–10. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-5-10

1. Введение. Многомерные гипербола-эллиптические уравнения описывают важные физические, астрономические и геометрические процессы. Известно, что колебания упругих мембран в пространстве

моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному гиперболическому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе [1, 2].

Теория краевых задач для гиперболо-эллиптических уравнений на плоскости хорошо изучена, а их многомерные аналоги интенсивно исследуются (см. например, монографии [2, 3] и приведенную в них библиографию).

Двумерные спектральные задачи для уравнений гиперболо-эллиптического типа изучены в [4, 5, 6, 7, 8, 9], однако, насколько известно автору, их многомерные аналоги мало исследованы [10, 11, 12, 13].

В данной работе рассматривается спектральная смешанная задача для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе и устанавливается ее критерий однозначной разрешимости. Найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции этой задачи.

2. Постановка задачи и результат. Пусть Ω_α – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная при $t > 0$ сферической поверхностью $\sigma: |x|^2 + t^2 = 1$, а при $t < 0$ цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ и плоскостью $t = \alpha < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω_α , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$, через S – общую часть границ Ω^+ , Ω^- , представляющих собой множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m .

Пусть, далее, Γ_α есть часть цилиндра Γ , ограничивающая область Ω^- .

В области Ω_α рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева – Бицадзе со спектральным действительным параметром μ :

$$\Delta_x u + (\text{sgnt})u_{tt} = \mu u, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

Рассмотрим спектральную смешанную задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega_\alpha}) \cap C^1(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, удовлетворяющее краевому условию

$$u \Big|_\sigma = 0, \quad u \Big|_{\Gamma_\alpha} = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим

$$r, \quad \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, \quad t, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad i = 2, \dots, m-1, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}).$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Задача 1 однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $\mu \neq -\gamma_s^2$.

Следствие. Задача 1 имеет собственные значения $\mu = -\gamma_s^2$ и соответствующие им собственные функции. Здесь γ_s – положительные нули функции Бесселя первого рода $J_s(z)$ целого порядка $s \geq \frac{m+1}{2}$.

3. Доказательство теоремы. Искомое решение задачи 1 в сферических координатах в области Ω^+ будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Тогда, как показано в [13], функция (3) представляется следующим образом

$$u_\mu(r, \theta, t) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \quad s = 0, 1, \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=p}^{\infty} n^{-l} J_s(\sqrt{-\mu(r^2+t^2)}) (r^2+t^2)^{\frac{n}{2} + \frac{(m-3)s}{4}} r^{2-m-n} \\ \left[F\left(-\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} + \frac{s}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{3-m}{4} - \frac{s}{2}, \frac{1}{2}; \frac{t^2}{r^2+t^2}\right) - \right. \\ \left. \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} + \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{m-3}{4} + \frac{s}{2}\right)} t (r^2+t^2)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. F\left(-\frac{n}{2} + \frac{5-m}{4} + \frac{s}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{5-m}{4} - \frac{s}{2}, \frac{3}{2}; \frac{t^2}{r^2+t^2}\right) \right] Y_{n,m}^k(\theta), \quad \mu = -\gamma_s^2. \end{cases} \quad (4)$$

При этом она принадлежит классу

$$C(\bar{\Omega}^+) \cap C^1(\Omega^+ \cup S) \cap C^2(\Omega^+), \quad \text{если } p \geq \frac{m+1}{2}, l > \frac{3m}{2},$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, а $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Из (4) при $t \rightarrow +0$ будет иметь

$$u_\mu(r, \theta, 0) = \tau_\mu(r, \theta) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=p}^{\infty} n^{-l} r^{(1-m)/2} J_s(\sqrt{-\mu}r) Y_{n,m}^k(\theta), & \mu = -\gamma_s^2. \end{cases} \quad (5)$$

$$u_{\mu t}(r, \theta, 0) = v_\mu(r, \theta) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=p}^{\infty} n^{-l} r^{-(3+m)/2} J_s(\sqrt{-\mu}r) Y_{n,m}^k(\theta), & \mu = -\gamma_s^2. \end{cases}$$

Таким образом, из (5) следует, что задача 1 сводится к смешанной задаче в области Ω_α^- для гиперболического уравнения

$$\Delta_x u - u_{tt} = \mu u, \quad (6)$$

с условием

$$u|_S = \tau_\mu(r, \theta), \quad u_t|_S = v_\mu(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = 0. \quad (7)$$

Пусть $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$, а $\bar{\tau}_{\mu,n}^k(r)$, $\bar{v}_{\mu,n}^k(r)$ – коэффициенты разложения ряда (3) функции $\tau_\mu(r, \theta)$, $v_\mu(r, \theta)$ по сферическим функциям

$$Y_{n,m}^k(\theta), \quad \lambda_n = n(n+m-2), \quad \bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}.$$

Решение задачи (6), (7) будем искать в виде (3). Подставляя (3) в (6), получим

$$u_{nrr}^k - u_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \mu u_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

При этом краевые условия (7) имеют вид

$$u_n^k(r, 0) = \tau_{\mu,n}^k(r) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum_{s=p}^{\infty} n^{-l} J_s(\sqrt{-\mu}r), & \mu = -\gamma_s^2. \end{cases}$$

$$u_{nt}^k(r, 0) = v_{\mu,n}^k(r) = \begin{cases} 0, & \mu \neq -\gamma_s^2, \\ \sum_{s=p}^{\infty} n^{-1} r^{-1} J_s(\sqrt{-\mu}r), & \mu = -\gamma_s^2. \end{cases} \quad (9)$$

$$u_n^k(r, \alpha) = 0. \quad (10)$$

Решение задачи (8) – (10) будем искать в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r) T_l(t), \quad (11)$$

при этом пусть

$$\tau_{\mu,n}^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{n,l}^k R_l(r), \quad v_{\mu,n}^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{n,l}^k R_l(r). \quad (12)$$

Подставляя (11) в (8) – (10), с учетом (12), получим

$$R_{lrr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_l + (\gamma - \mu) R_l = 0, \quad 0 < r < 1, \quad R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty. \quad (13)$$

$$T_{l,t,t} + \gamma T_l(t) = 0, \quad \alpha < t < 0, \quad T_l(0) = a_{e,n}^k, \quad T_{l,t}(0) = b_{i,n}^k. \quad (14)$$

Ограниченным решением задачи (13) является функция [14]

$$R_l(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{l,n} r), \quad 0 < r < 1, \quad (15)$$

$\nu = n + \frac{m-2}{2}$, $\mu_{l,n}$ – нули функции Бесселя $J_\nu(z)$, $\gamma = \mu + \mu_{l,n}^2$.

Подставляя (15) в (12), получим ряды

$$r^{-\frac{1}{2}}\tau_{\mu,n}^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l,n}^k J_\nu(\mu_{l,n}r), r^{-\frac{1}{2}}v_{\mu,n}^k(r) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{l,n}^k J_\nu(\mu_{l,n}r), \quad 0 < r < 1,$$

которые являются рядами Фурье – Бесселя [15], если

$$\begin{aligned} a_{l,n}^k &= 2 [J_{\nu+1}(\mu_{l,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tau_{\mu,n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{l,n}\xi) d\xi, \\ b_{l,n}^k &= 2 [J_{\nu+1}(\mu_{l,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} v_{\mu,n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{l,n}\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mu_{l,n}$ – положительные нули функции Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Далее, произведя замену $V_l(t) = T_l(t) - a_{l,n}^k - tb_{l,n}^k$, задачу (14) приведем к следующей задаче:

$$V_{l,tt} + \gamma V_l(t) = g_{l,n}^k(t), \quad V_l(0) = 0, \quad V_{l,t}(0) = 0, \quad (17)$$

$$g_{l,n}^k(t) = -\gamma(a_{l,n}^k + tb_{l,n}^k). \quad (18)$$

Задача (17), (18) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $V_l(t)$ [2]

$$V_l(t) + \gamma \int_0^t (t - \xi) V_l(\xi) d\xi = \int_0^t (t - \xi) g_{l,n}^k(\xi) d\xi, \quad (19)$$

которое имеет решение, и притом единственное.

Следовательно, из (11), (15), (19) следует, что решением задачи (6), (7) в области Ω_α^- является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{r} [a_{l,n}^k + tb_{l,n}^k + V_l(t)] J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{l,n}r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (20)$$

где $a_{l,n}^k, b_{l,n}^k$ определяются из (16).

Аналогично, как в [16], можно показать, что решение (20) принадлежит классу

$$C(\bar{\Omega}_\alpha^-) \cap C^1(\Omega_\alpha^- \cup S) \cap C^2(\Omega_\alpha^-).$$

Таким образом, решение задачи 1 записывается в виде (4) и (20), при этом из класса

$$C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_\alpha^-).$$

При $\mu \neq -\gamma_s^2$ из представления решения (4), (20), а также из формул (9), (16) вытекает, что решение задачи 1 тривиальное.

Пусть теперь решение задачи 1 $u(r, \theta, t) \equiv 0$. Покажем, что $\mu \neq -\gamma_s^2$.

Предположим противное, т. е. $\mu = -\gamma_s^2$. Если $\mu = -\gamma_s^2$, то из видов решений (4), (20) следует, что задача 1 имеет ненулевые решения. Приходим к противоречию.

Теорема установлена. Ее следствие вытекает из вышеприведенных фактов.

Отметим, что доказанная теорема анонсирована в [17].

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука. 1966.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука. 1981.
3. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М., Наука. 2006.
4. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., Изд.-во МГУ. 1988.
5. Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах и их спектре для уравнений гиперболического и смешанного типа. Автореф. дисс. док. физ.-мат. наук. М., МГУ. 1982.
6. Пономарев С.М. К задаче на собственные значения для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. ДАН СССР. 1977; 233, 39–40.
7. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром, Ташкент, ФАН. 1977.
8. Сабитов К.Б. О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе со спектральным параметром. Дифференциальные уравнения. 1986; 22(11): 1977–1984.

9. Пономарев С.М. Некоторые теоремы единственности решения задачи Геллерстедта для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. *Дифференциальные уравнения*. 2021; 57(4): 488–495.
10. Моисеев Е.И., Нефедов П.Х., Холومهева А.А. Аналогии задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. *Дифференциальные уравнения*. 2014; 50(12): 1672–1675.
11. Алдашев С.А. Спектральная задача Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. *Известия НАН РК, серия “Физико-математические науки”*. 2010, 6: 3–6.
12. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева – Бицадзе. *Известия ВУЗов, математика*. 2011; 4: 3–7.
13. Алдашев С.А. Собственные значения и собственные функции задач Геллерстедта для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. *Украинский математический журнал*. 2011; 63(6): 827–832.
14. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., Наука. 1965.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М., Наука. 1974.
16. Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором. *Украинский математический журнал*. 2017; 69(7): 992–999.
17. Алдашев С.А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе. Мат-лы науч. конф. «Уфимская осенняя математическая школа», ч.2, Уфа, 8–9. 2020.

References

1. Tikhonov AN, Samarskiy AA. *Urvneniya matematicheskoy fiziki*. [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka. 1966.
2. Bitsadze AV. *Nekotorye klassy urvneniy v chastnykh proizvodnykh*. [Some classes of partial differential equations]. Moscow, Nauka. 1981.
3. Nakhushev AM. *Zadachi so smeshcheniem dlya urvneniya v chastnykh proizvodnykh*. [Shift problems for partial differential equations.] Moscow, Nauka. 2006.
4. Moiseev EI. *Urvneniya smeshannogo tipa so spektralnym parametrom*. [Mixed type equations with a spectral parameter.] Moscow, MGU. 1988.
5. Kalmenov TSh. *O regulyarnykh kraevykh zadachakh i ikh spektre dlya urvneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipa*. [On regular boundary value problems and their spectrum for equations of hyperbolic and mixed type.] Avtoref. diss. dok. fiz.-mat. nauk. Moscow, MGU. 1982.
6. Ponomarev SM. *K zadache na sobstvennye znacheniya dlya urvneniya Lavrenteva – Bitsadze*. [On the eigenvalue problem for the Lavrentiev – Bitsadze equation.] DAN SSSR. 1977; 233, 39–40.
7. Salakhitdinov MS, Urinov AK. *Kraevye zadachi dlya urvneniya smeshannogo tipa so spektral’nym parametrom*. [Boundary value problems for a mixed-type equation with a spectral parameter.] Tashkent, FAN. 1977.
8. Sabitov KB. *O zadache Triкоми dlya urvneniya Lavrent’eva-Bitsadze so spektral’nym parametrom*. [On the Tricomi problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation with a spectral parameter.] *Differential equations*. 1986; 22(11): 1977–1984.
9. Ponomarev SM. *Nekotorye teoremy edinstvennosti resheniya zadachi Gellerstedta dlya urvneniya Lavrent’eva-Bitsadze*. [Some theorems on the uniqueness of the solution of the Gellerstedt problem for the Lavrentiev-Bitsadze equation.] *Differentsialnye urvneniya*. [Differential equations]. 2021; 57(4): 488–495.
10. Moiseev EI, Nefedov PKh., Kholomeeva A.A. *Analogues of the Tricomi and Frankl problems in three-dimensional domains for the Lavrentiev-Bitsadze equation*. *Differentsialnye urvneniya*. [Differential equations]. 2014; 50(12): 1672–1675.
11. Aldashev SA. *Spektral’naya zadacha Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo urvneniya Lavrent’eva – Bitsadze*. [Spectral problem of Dirikhle in the tsilindricheskoy region for multidimensional equation Lavrenteva – Bitsadze.] *Izvestiya NAN RK, seria “Fiziko-matematicheskie nauki”*. 2010; 6: 3–6.
12. Aldashev SA. *Kriteriy odnoznachnoy razreshimosti spektral’noy zadachi Dirikhle v tsilindricheskoy oblasti dlya mnogomernogo urvneniya Lavrent’eva – Bitsadze*. [A criterion for the unique solvability of the Dirichlet spectral problem in a cylindrical domain for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation.] *Izvestiya VUZov, matematika*. 2011; 4: 3–7.
13. Aldashev SA. *Eigenvalues and eigenfunctions of the Gellerstedt problems for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation*. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*. [Ukrainian mathematical journal]. 2011; 63(6): 827–832.
14. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym urvneniyam*. [Handbook of ordinary differential equations.] Moscow: Nauka; 1965.
15. Beytmen G, Erdeyi A. *Vysshie transtsendentnye funktsii*. [Higher transcendental functions]. Vol. 2. Moscow: Nauka; 1974.
16. Aldashev SA. *Well-posedness of a mixed problem for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator*. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal*. [Ukrainian mathematical journal]. 2017; 69(7): 992–999.
17. Aldashev SA. *Kriteriy odnoznachnoy razreshimosti spektral’noy zadachi dlya mnogomernogo urvneniya Lavrent’eva-Bitsadze*. [A criterion for the unique solvability of the spectral problem for the multidimensional Lavrentiev-Bitsadze equation.] *Proc. sci. conf. “Ufa Autumn Mathematical School”*, part 2, Ufa, 8–9. 2020.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.06.2024

Received June 1, 2024

Поступила после рецензирования 02.12.2024

Revised December 2, 2024

Принята к публикации 10.12.2024

Accepted December 10, 2024

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Алдашев Серик Аймурзаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования Министерства образования и науки, г. Алматы, Казахстан

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Serik A. Aldashev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Ministry of Education and Science, Almaty, Kazakhstan

[К содержанию](#)

Периодические в среднем решения мультипликативно возмущенной гауссовым случайным шумом системы дифференциальных уравнений

Кабанцова Л. Ю. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии И. П. Половинкиным)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
dlju@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений первого порядка со случайным гауссовым возмущением и случайной неоднородностью. Построена вспомогательная детерминированная линейная система дифференциальных уравнений, содержащая обычную и вариационную производные, с детерминированным начальным условием. Решение детерминированной задачи Коши позволяет получить формулу математического ожидания решения исходной задачи Коши. Найлены условия существования периодических в среднем решений системы и явная формула для периодического математического ожидания. Кроме того, получены условия периодичности второй моментной функции решения и явная формула для периодической второй моментной функции.

Ключевые слова: системы линейных дифференциальных уравнений, вариационная производная, математическое ожидание, периодическое в среднем решение, вторая моментная функция

Для цитирования: Кабанцова Л. Ю. 2025. Периодические в среднем решения мультипликативно возмущенной гауссовым случайным шумом системы дифференциальных уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 11–26. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-11-26

Original Research

Periodic on the Mean Differential Equations Systemsolutions Multiplicatively Perturbed by Gaussian Random Noise

Larisa Yu. Kabantsova 

(Article submitted by a member of the editorial board I. P. Polovinkin)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
dlju@yandex.ru

Abstract. The Cauchy problem for a first-order differential equations linear inhomogeneous system of with a random Gaussian perturbation and random inhomogeneity considered. Constructed an auxiliary deterministic differential equations linear system, containing ordinary and variational derivatives, with a deterministic initial condition. The deterministic Cauchy problem solution allows one to obtain a formula for the solution mathematical expectation to the original Cauchy problem. We found periodic on the mean system solutions existence conditions and an explicit formula for the periodic mathematical expectation. A similar technique is used to obtain a deterministic problem that allows finding an explicit formula for the second moment function solution to the original Cauchy problem. Second moment function solution periodicity conditions and an explicit formula for the periodic second moment function are also obtained.

Keywords: Linear Differential Equations Systems, Variational Derivative, Mathematical Expectation, Periodic on Mean Solution, Second Moment Function

For citation: Kabantsova L. Yu. 2025. Periodic on the Mean Differential Equations Systemsolutions Multiplicatively Perturbed by Gaussian Random Noise. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 11–26. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-11-26

1. Введение. Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения и неоднородность являются детерминированными периодическими функциями, то хорошо известны условия существования периодического решения уравнения (например, [1, с. 90–98]). Однако, если рассматривать линейное дифференциальное уравнение со случайными коэффициентами, проблема нахождения периодического решения становится гораздо труднее. Вопросы существования периодических решений для дифференциальных уравнений со случайной правой частью были рассмотрены в [2, с. 69–90, 238–244]. При этом предполагается представление коэффициентов в виде суммы детерминированной функции и белого шума. В работах [3, 4] получены условия, гарантирующие периодичность математического ожидания и второй моментной функции решения скалярного линейного дифференциального уравнения первого порядка со случайным коэффициентом и случайной неоднородностью. В указанных работах

предполагается, что коэффициент уравнения является гауссовым случайным процессом или имеет равномерное распределение, при этом коэффициент уравнения и неоднородность являются статистически независимыми.

Определение 1.1. Решение дифференциального уравнения со случайными коэффициентами называется периодическим в среднем [2, с. 70], если его математическое ожидание является периодической функцией.

В работах [5, 6] приведены условия существования периодического в среднем решения скалярного линейного уравнения теплопроводности со случайными коэффициентами, коэффициенты уравнения предполагаются статистически независимыми гауссовыми процессами. В статье [7] рассмотрены условия существования периодического в среднем решения векторного линейного уравнения со случайным коэффициентом $\varepsilon(t)$ и случайной неоднородностью f вида

$$x' = Ax + \varepsilon(t)x + f(t),$$

коэффициент $\varepsilon(t)$ предполагается гауссовым случайным процессом или имеет равномерное распределение и не зависит от векторного случайного процесса f .

2. Постановка задачи. Пусть $T = [t_0, \infty] \subset \mathbb{R}$, где \mathbb{R} – вещественное множество, X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Рассмотрим задачу Коши для векторного линейного дифференциального уравнения

$$x' = \varepsilon(t, \omega)Ax + f(t, \omega), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где $\varepsilon(t, \omega)$ – случайный процесс (при дальнейших записях зависимость от случайного события ω отражаться не будет), функция $x : T \rightarrow X$ искомое отображение, A – линейный ограниченный оператор, действующий в X , $f : T \rightarrow X$ – векторный случайный процесс, $x_0 \in X$ – заданный случайный вектор.

Уравнение (1) носит название мультипликативно возмущенное случайным шумом линейное дифференциальное уравнение.

Будем предполагать, что процессы ε и f являются независимыми и заданы своими характеристическими функционалами

$$\varphi_\varepsilon(u) = E[\exp(i \int_T \varepsilon(s)u(s) ds)],$$

$$\varphi_f(v) = E[\exp(i \int_T \langle f(s), v(s) \rangle ds)],$$

где $\langle f(s), v(s) \rangle = \sum_{i=1}^n f_i(s)v_i(s)$ – скалярное произведение. Символ E обозначает математическое ожидание, вычисляемое по функции распределения случайных процессов $\varepsilon(t)$ и $f(t)$ соответственно, функция u из пространства суммируемых функций $L_1(T, \mathbb{R})$, v – векторная суммируемая функция из пространства $L_1(T, X)$.

Целью настоящей работы является нахождение условий существования периодических в среднем и периодических вторых моментных функций решений задачи Коши (1), (2) и получение явных формул для периодического математического ожидания и второй моментной функции решения задачи (1), (2).

3. Переход к детерминированной задаче. В дальнейшей работе понадобится понятие вариационной производной [8]. Напомним её определение

Определение 3.1. Если

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, v)h(t) dt + o(h),$$

где $o(h)$ – бесконечно малая высшего порядка относительно h и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h , тогда отображение $\varphi : \mathbb{R} \times L_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ называется вариационной производной функционала ψ в точке v и обозначается $\frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}$. Подробно техника дифференцирования изложена в [8].

Введем в рассмотрение обозначение

$$w = \exp(i \int_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s) \rangle ds)$$

и вспомогательное отображение, построенное на его основе w и отображения x

$$y(t, u, v) = E[x(t)w].$$

Легко заметить, что

$$y(t, 0, 0) = E[x(t)]. \quad (3)$$

Умножим уравнение (1) и начальное условие (2) на w и усредним по функциям распределения ε, f, x_0 . Получим

$$E\left[\frac{dx}{dt}w\right] = E[\varepsilon(t)Ax(t)w] + E[f(t)w], \quad (4)$$

$$E[x(t_0)w] = E[x_0w]. \quad (5)$$

Используем введенное отображение $y(t, u, v)$ и соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(t, u, v)}{\partial t} &= E\left[\frac{dx}{dt} \exp\left(i \int_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s) \rangle) ds\right)\right], \\ \frac{\delta_p y(t, u, v)}{\delta u(t)} &= iE\left[\varepsilon(t)x(t) \exp\left(i \int_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s) \rangle) ds\right)\right], \\ \frac{\delta \varphi_f(v)}{\delta v(t)} &= iE\left[f(t) \exp\left(i \int_T \langle f(s), v(s) \rangle ds\right)\right], \end{aligned}$$

где $\frac{\delta_p y(t, u, v)}{\delta u(t)}$ – частная вариационная производная по переменной u [8, с. 14].

С учетом предположения о независимости случайных процессов ε и f равенство (4) можно записать следующим образом

$$\frac{\partial y(t, u, v)}{\partial t} = -iA \frac{\delta_p y(t, u, v)}{\delta u(t)} - i\varphi_\varepsilon(u) \frac{\delta \varphi_f(v)}{\delta v(t)}. \quad (6)$$

Если считать, что случайный вектор x_0 не зависит от ε и f , то равенство (5) можно переписать в виде

$$y(t_0, u, v) = E[x_0] \varphi_\varepsilon(u) \varphi_f(v). \quad (7)$$

Таким образом, было формально получено детерминированное дифференциальное уравнение (6) первого порядка с обычной и вариационной производными и детерминированное начальное условие для этого уравнения (7).

Решением задачи (6), (7) называется отображение $y : T \times L_1(T, \mathbb{R}) \times L_1(T, X) \rightarrow X$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (6) и начальному условию (7).

Задача (6), (7) была получена формально, однако равенство (3) дает возможность сформулировать следующее определение:

Определение 3.2. Математическим ожиданием $E[x(t)]$ решения задачи (1), (2) называется функция $y(t, 0, 0)$, где $y(t, u, v)$ является решением задачи (6), (7).

4. Оператор $U(s, t)$ и его свойства. Рассмотрим функцию переменной τ $\chi(s, t, \tau)$, равную $\text{sign}(\tau - s)$, при τ , принадлежащем отрезку с концами t, s , и равную нулю в противном случае, I – единичный оператор в пространстве X . Заметим, что функция χ обладает свойством $\chi(s, t_1 + t_2) = \chi(s, t_1) + \chi(s, t_2)$ при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Построим операторнозначную функцию на основе заданного функционала [9, 10, 11]. Пусть $\varphi : L_1(T, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ – аналитический функционал

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T c_k(s_1, \dots, s_k) u(s_1) \dots u(s_k) ds_1 \dots ds_k,$$

где c_k – симметричные по любым двум переменным функции. Тогда можно определить матричное отображение $\varphi(uI)$, где I – единичный оператор, как $\varphi(uI) = \varphi(u)I$.

На множестве аналитических операторных функций зададим оператор $U(s, t)$ по следующему правилу:

$$U(s, t)\varphi(uI) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T c_k(s_1, \dots, s_k) (u(s_1)I - i\chi(s_1, t)A) \dots (u(s_k)I - i\chi(s_k, t)A) ds_1 \dots ds_k.$$

Эту сумму будем обозначать $\varphi(uI - i\chi(s, t)A)$.

Таким образом,

$$U(s, t)\varphi(uI) = \varphi(uI - i\chi(s, t)A).$$

Свойства оператора $U(s, t)$ подробно изучены в работах [9, 10]. Перечислим его свойства:

1. $U(t_0, t_0)\varphi(uI) = \varphi(uI) = \varphi(u)I$,
2. $U(t, \tau)U(\tau, s) = U(t, s)$,
3. $AU(t, s) = U(t, s)A$,
4. $U(t + \tau, s) = U(t, s)U(t + \tau, t)$,
5. $U(t, s)[\alpha\varphi_1(uI) + \beta\varphi_2(uI)] = \alpha U(t, s)\varphi_1(uI) + \beta U(t, s)\varphi_2(uI)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
6. $U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0)$,
7. $\frac{\delta}{\delta u(t)}U(t, s)\varphi(uI) = U(t, s)\frac{\delta\varphi(uI)}{\delta u(t)}$.

Рассмотрим характеристический функционал гауссова случайного процесса ε , он имеет вид [8, с. 206]

$$\psi_\varepsilon(u) = \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)ds - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2\right), \quad (8)$$

где $E[\varepsilon(s)]$ – математическое ожидание, $b(s_1, s_2) = E[\varepsilon(s_1)\varepsilon(s_2)] - E[\varepsilon(s_1)]E[\varepsilon(s_2)]$ – ковариационная функция случайного процесса ε .

Лемма 4.1. Если $\psi_\varepsilon(u)$ имеет вид (8) и при этом $E[\varepsilon(s)]$ – ω -периодическая функция, $b(s_1, s_2)$ – ω -периодическая функция по обоим переменным, то

1. $U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI) = U(0, t)U(0, \omega)\varphi_\varepsilon(uI) = U(0, \omega)U(0, t)\varphi_\varepsilon(uI)$,
2. $U(t + \omega, 0)\varphi_\varepsilon(uI) = U(t, 0)U(\omega, 0)\varphi_\varepsilon(uI) = U(\omega, 0)U(t, 0)\varphi_\varepsilon(uI)$.

Доказательство. Докажем первое свойство. Отметим, что ковариационная функция $b(s_1, s_2)$ симметрична по двум своим переменным, применяя теорему Фубини, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI) &= \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(0, t + \omega)A) = \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)dsI + \int_0^t E[\varepsilon(s)]dsA + \int_t^{t+\omega} E[\varepsilon(s)]dsA - \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2I + i \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2A + i \int_0^t \int_t^{t+\omega} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2A + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_t^{t+\omega} b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} \int_t^{t+\omega} b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right). \end{aligned}$$

Отметим, что если функция $a(\cdot)$ – ω -периодическая при любом $t \in \mathbb{R}$, то справедливо следующее равенство:

$$\int_t^{t+\omega} a(s)ds = \int_0^\omega a(s)ds.$$

С учетом предположения леммы о ω -периодичности $E[\varepsilon(s)]$ и $b(s_1, s_2)$ приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI) &= \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)dsI + \int_0^t E[\varepsilon(s)]dsA + \int_0^\omega E[\varepsilon(s)]dsA - \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2I + i \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2A + i \int_0^t \int_0^\omega b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2A + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 U(0, t)U(0, \omega)\varphi_\varepsilon(uI) &= \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(0, t)A - i\chi(0, \omega)A) = U(0, \omega)U(0, t)\varphi_\varepsilon(uI) = \\
 &= \exp\left(i\int_{\mathbb{R}} E[\varepsilon(s)]u(s)dsI + \int_0^\omega E[\varepsilon(s)]dsA + \int_0^t E[\varepsilon(s)]dsA - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} b(s_1, s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2I + \right. \\
 &\quad + i\int_{\mathbb{R}}\int_0^t b(s_1, s_2)u(s_1)ds_1ds_2A + i\int_{\mathbb{R}}\int_0^\omega b(s_1, s_2)u(s_1)ds_1ds_2A + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int_0^\omega\int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \frac{1}{2}\int_0^\omega\int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right).
 \end{aligned}$$

Последнее выражение полностью совпадает с выражением, полученным ранее для $U(0, t + \omega)\varphi_\varepsilon(uI)$. Их совпадение говорит о справедливости первой формулы леммы. Вторая формула доказывается аналогично.

5. Математическое ожидание решения задачи (1), (2). Формула для математического ожидания и смешанных моментных функций получена в работе [9, 11] для случая, когда случайный коэффициент ε задан гауссовым характеристическим функционалом и может быть статистически зависим с случайным процессом f .

По нашему предположению процессы ε и f независимы, тогда справедлива следующая теорема

Теорема 5.1. Если процессы ε и f независимы и ε – гауссов процесс с характеристическим функционалом (8), кроме того существуют вариационные производные $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}$ и $\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(t_0, t)A)}{\delta u(t)}$, тогда решение задачи (6), (7) имеет вид

$$\begin{aligned}
 y(t, u, v) &= U(t_0, t)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] - i\int_{t_0}^t U(s, t)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = \\
 &= \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(t_0, t)A)\varphi_f(v)E[x_0] - i\int_{t_0}^t \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(s, t)A)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Легко убедиться, что формула (9) удовлетворяет начальному условию (7). Покажем, что она определяет решение уравнения (6). Для этого найдем $\frac{\partial y(t, u, v)}{\partial t}$ от формулы (9)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y(t, u, v)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(t_0, t)A)\varphi_f(v)E[x_0] - i\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^t \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(s, t)A)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = \\
 &= -iA\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(t_0, t)A)}{\delta u(t)}\varphi_f(v)E[x_0] - i\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)} - A\int_{t_0}^t \frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(s, t)A)}{\delta u(t)}\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds,
 \end{aligned}$$

и вариационную производную $\frac{\delta_p y(t, u, v)}{\delta u(t)}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta_p y(t, u, v)}{\delta u(t)} &= U(t_0, t)\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI)}{\delta u(t)}\varphi_f(v)E[x_0] - i\int_{t_0}^t U(s, t)\frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI)}{\delta u(t)}\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = \\
 &= \frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(t_0, t)A)}{\delta u(t)}\varphi_f(v)E[x_0] - i\int_{t_0}^t \frac{\delta\varphi_\varepsilon(uI - i\chi(s, t)A)}{\delta u(t)}\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds.
 \end{aligned}$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\frac{\partial y(t, u, v)}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y(t, u, v)}{\delta u(t)} - i\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}.$$

Следовательно, $y(t, u, v)$, определяемая формулой (9), является решением уравнения (6).

Замечание 5.1. С подробным обоснованием теоремы 5.1 можно ознакомиться в статье [9, 11].

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, тогда математическое ожидание решения задачи (1), (2) определяется формулой

$$E[x(t)] = \varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0, t)A)E[x_0] + \int_{t_0}^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A)E[f(s)]ds \quad (10)$$

или с учетом вида функционала $\varphi_\varepsilon(u)$ (8) получаем

$$E[x(t)] = \exp\left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon(s)]dsA + \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right)E[x_0] + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_s^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2}\int_s^t \int_s^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right\}E[f(s)]ds. \quad (11)$$

Доказательство. В силу определения $E[x(t)] = y(t, 0, 0)$. Полагая в равенстве (9) $u = 0, v = 0$, так как $\varphi_f(0) = 1$, а $\left.\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}\right|_{v=0} = iE[f(s)]$ [8, с. 30], получаем формулы (10) и (11).

6. Существование периодических решений уравнения (6).

Теорема 6.1. Пусть выполнено условие леммы 4.1, кроме того $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}$ есть ω -периодическая функция и определен оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$, тогда

$$y(t, u, v) = -iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_t^{t+\omega} U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds \quad (12)$$

является ω -периодическим решением уравнения (6).

Доказательство. Отметим, что в случае ω -периодичности функции $y(t, u, v)$ по переменной t , всегда справедливо равенство $y(\omega, u, v) = y(0, u, v)$. Запишем это равенство для $y(t, u, v)$, определяемого формулой (9), при условии, что $t_0 = 0$.

$$\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] = U(0, \omega)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] - i \int_0^\omega U(s, \omega)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds.$$

Преобразуем полученное равенство

$$U(0, \omega)(U(\omega, 0) - I)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] = -i \int_0^\omega U(s, \omega)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds.$$

По условию теоремы существует оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$, что позволяет из последнего равенства получить уравнение для нахождения начального условия (7)

$$\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0] = -i(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_0^\omega U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds.$$

Подставим найденное выражение в формулу (9) в случае $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} y(t, u, v) &= -iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_0^\omega U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds - i \int_0^t U(s, t)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds = \\ &= -iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \left[\int_0^\omega U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds + \int_0^t U(\omega, 0)U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds \right] = -iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \left[\int_t^\omega U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t U(\omega, 0)U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} ds \right]. \end{aligned}$$

Преобразуем второй интеграл с учетом леммы 4.1 и предположения теоремы о ω -периодичности по t функции $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(t)}$

$$\begin{aligned} \int_0^t U(\omega, 0)U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds &= \int_0^t U(s + \omega, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = |s + \omega = s_1| = \\ &= \int_\omega^{t+\omega} U(s_1, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1 - \omega)}ds_1 = \int_\omega^{t+\omega} U(s_1, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}ds_1. \end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в формулу для $y(t, u, v)$ и объединяя интегралы, получаем формулу (12).

Осталось установить, что $y(t, u, v)$, определяемая формулой (12), является ω -периодической функцией переменной t . Вычислим $y(t + \omega, u, v)$

$$\begin{aligned} y(t + \omega, u, v) &= -iU(0, t + \omega)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_{t+\omega}^{t+2\omega} U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds = |s_1 = s - \omega| = \\ &= -iU(0, t)U(0, \omega)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_t^{t+\omega} U(s_1 + \omega, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1 + \omega)}ds_1 = \\ &= -iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1}U(0, \omega) \int_t^{t+\omega} U(\omega, 0)U(s_1, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}ds_1 = \\ &= -iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_t^{t+\omega} U(s_1, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)}ds_1 = y(t, u, v). \end{aligned}$$

7. Периодические в среднем решения уравнения (1).

Теорема 7.1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1, тогда периодическое в среднем решение уравнения (1) представимо в виде

$$E[x(t)] = U(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(i\chi(0, s)A)E[f(s)]ds. \quad (13)$$

Доказательство. В силу теоремы 6.1 математическое ожидание $E[x(t)] = y(t, 0, 0)$ является ω -периодической функцией. Полагая в формуле (12) $u = 0$ и $v = 0$, и так как $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}\Big|_{v=0} = iE[f(s)]$, получаем формулу (13).

Замечание 7.1. Полученная формула (13) имеет один существенный недостаток, это трудность вычисления оператора $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$.

Найдем другую форму представления периодического в среднем решения уравнения (1).

Теорема 7.2. Пусть справедливы условия леммы 4.1, существует оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$, математическое ожидание $E[f(t)]$ является ω -периодическим, кроме того выполнено условие $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) \neq I$, тогда периодическое в среднем решения уравнения (1) задается формулой

$$E[x(t)] = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) - I)^{-1} \int_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A)E[f(s)]ds.$$

Доказательство. На основании формулы (12) математическое ожидание $E[x(t)]$ имеет вид

$$E[x(t)] = \left(-iU(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \int_t^{t+\omega} U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}ds \right) \Bigg|_{\substack{u=0 \\ v=0}}.$$

Заметим, что

$$(U(\omega, 0) - I)^{-1}\varphi_\varepsilon(uI)\Big|_{u=0} = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) - I)^{-1}\varphi_\varepsilon(uI)\Big|_{u=0}.$$

Основываясь на лемме 4.1, можно утверждать, что операторы $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$ и $U(s, 0)$ перестановочны. Тогда

$$U(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1}U(s, 0)\varphi_\varepsilon(uI)\Big|_{u=0} = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) - I)^{-1}\varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A),$$

что и приводит к необходимому результату.

Теорема 7.3. Если справедливы условия теоремы 5.2 и $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) = I$, тогда для существования ω -периодического математического ожидания решения уравнения (1) необходимо выполнение условия

$$\int_0^\omega \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, 0)A)E[f(s)]ds = 0. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $E[x(t)]$ ω -периодическая функция. Тогда справедливо $E[x(0)] = E[x(\omega)]$. Запишем данное равенство, основываясь на формуле (10) в предположении, что $t_0 = \omega$

$$\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A)E[x_0] + \int_\omega^0 \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, 0)A)E[f(s)]ds = E[x_0].$$

Отсюда легко сделать вывод о справедливости теоремы.

Используя вид функционала $\varphi_\varepsilon(u)$, напомним, что он определяет характеристический функционал гауссова случайного процесса ε (8), мы можем получить уточнённые версии теорем 7.2 и 7.3.

Теорема 7.4. Пусть $E[\varepsilon(s)], E[f(s)]$ – ω -периодические функции по s , $b(t, s)$ – ω -периодическая по обоим переменным. Кроме того, существует оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$ и оператор $-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2$ не имеет собственных значений вида $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$E[x(t)] = \left(\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) - I \right)^{-1} \times \\ \times \int_t^{t+\omega} \exp\left[\int_s^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right] E[f(s)]ds$$

является ω -периодическим математическим ожиданием решения уравнения (1).

Доказательство. Отметим, что требование отсутствия в спектре оператора $-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2$ собственных значений вида $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$, равносильно выполнению условия теоремы 7.2 $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) \neq I$ с учетом вида характеристического функционала (8). Убедимся непосредственно в ω -периодичности $E[x(t)]$. Выпишем $E[x(t + \omega)]$

$$E[x(t + \omega)] = \left(\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) - I \right)^{-1} \times \\ \times \int_{t+\omega}^{t+2\omega} \exp\left[\int_s^{t+\omega} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^{t+\omega} \int_s^{t+\omega} b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right] E[f(s)]ds = |s = \xi + \omega| = \\ = \left(\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) - I \right)^{-1} \int_t^{t+\omega} \exp\left[\int_{\xi+\omega}^{t+\omega} E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\xi+\omega}^{t+\omega} \int_{\xi+\omega}^{t+\omega} b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right] E[f(\xi + \omega)]d\xi = \left(\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) - I \right)^{-1} \times \\ \times \int_t^{t+\omega} \exp\left[\int_\xi^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_\xi^t \int_\xi^t b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right] E[f(\xi)]d\xi = E[x(t)].$$

Пусть теперь не выполнено условие теоремы 7.4, т. е. спектр оператора $-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2$ содержит хотя бы одно собственное значение вида $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$, тогда справедливо

$$\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) = I. \quad (15)$$

Согласно теореме 7.3, если существует ω -периодическое математическое ожидание $E[x(t)]$, то должно выполняться условие (14). В нашем случае

$$\int_0^\omega \exp \left[- \int_0^s E[\varepsilon(\tau)] d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^s b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2 \right] E[f(s)] ds = 0.$$

Выясним, существует ли при выполнении условия (15) ω -периодическое математическое ожидание $E[x(t)]$.

Лемма 7.1. Пусть $f(t, s)$ – ω -периодическая функция по s и t , A – линейный ограниченный оператор. Тогда интеграл $\int_a^t f(t, s) ds$ является ω -периодической функцией по t тогда и только тогда, когда выполнено условие $\int_a^\omega f(t, s) ds = 0$ для любого $t \in [0, \omega)$. Кроме того, функция $\exp(\int_a^t f(t, s) ds A)$ является ω -периодической по t тогда и только тогда, когда выполнено условие $\exp\left[\int_a^\omega f(t, s) ds A\right] = I$ для любого $t \in [0, \omega)$.

Доказательство. Справедливость первого утверждения леммы следует из равенства

$$\int_a^{t+\omega} f(t, s) ds = \int_a^t f(t, s) ds + \int_t^{t+\omega} f(t, s) ds = \int_a^t f(t, s) ds + \int_0^\omega f(t, s) ds.$$

Второе утверждение показывается аналогично.

Теорема 7.5. Если выполнено условие (15) и $E[f(s)] \equiv 0$, то для существования ненулевого ω -периодического в среднем решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)] d\tau A\right) = I, \quad \int_0^\omega b(t, \tau) d\tau = 0. \quad (16)$$

Если условия (16) выполняются, и кроме того выполнено условие при всех $t \in [0, \omega)$

$$\int_0^\omega \exp\left(\int_s^0 E[\varepsilon(\tau)] d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^0 \int_s^0 b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2 + \int_s^0 \int_0^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2\right) E[f(s)] ds = 0, \quad (17)$$

то все решения уравнения (1) являются ω -периодическими в среднем и $E[x(t)]$ имеет вид

$$E[x(t)] = \left[\exp\left(\int_0^t E[\varepsilon(\tau)] d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2\right) E[x_0] \right] + \left\{ \int_0^t \exp\left(\int_s^t E[\varepsilon(\tau)] d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2\right) E[f(s)] ds \right\}. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $E[f(s)] \equiv 0$. Предположим, что уравнение (1) имеет ω -периодическое в среднем решение $E[x(t)] \neq 0$. Формула (10) для случая $t_0 = 0$ принимает вид

$$E[x(t)] = \exp\left(\int_0^t E[\varepsilon(\tau)] d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2\right) E[x_0],$$

а

$$\begin{aligned} E[x(t+\omega)] &= \exp\left(\int_0^{t+\omega} E[\varepsilon(\tau)] d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^{t+\omega} \int_0^{t+\omega} b(s_1, s_2) ds_1 ds_2 A^2\right) E[x_0] = \\ &= \exp\left(\int_t^{t+\omega} \left[E[\varepsilon(s)] A + \int_0^t b(s_1, s) ds_1 A^2 + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(s_1, s) ds_1 A^2 \right] ds\right) E[x(t)]. \end{aligned}$$

Учитывая предположение о существовании ω -периодического в среднем решения $E[x(t)] = E[x(t + \omega)]$, получаем

$$\exp\left(\int_t^{t+\omega} \left[E[\varepsilon(s)]A + \int_0^t b(s_1, s)ds_1A^2 + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(s_1, s)ds_1A^2 \right] ds\right) = I.$$

Продифференцируем полученное равенство по t , имеем

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_t^{t+\omega} \left[E[\varepsilon(s)]A + \int_0^t b(s_1, s)ds_1A^2 + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(s_1, s)ds_1A^2 \right] ds\right) & \left\{ E[\varepsilon(t + \omega)]A - E[\varepsilon(t)]A + \right. \\ & + \int_0^t b(s_1, t + \omega)ds_1A^2 - \int_0^t b(s_1, t)ds_1A^2 + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(s_1, t + \omega)ds_1A^2 - \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(s_1, t)ds_1A^2 + \int_t^{t+\omega} b(t, s)dsA^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(t + \omega, s)dsA^2 - \frac{1}{2} \int_t^{t+\omega} b(t, s)dsA^2 \right\} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая предположения о периодичности $E[\varepsilon(s)]$ и $b(t, s)$, получаем условие $\int_t^{t+\omega} b(t, s)ds = 0$, что эквивалентно требованию $\int_0^\omega b(t, s)ds = 0$. Тогда очевидно, что $\int_0^\omega \int_0^\omega b(t, s)dt ds = 0$. С учетом этого условие (15) принимает вид

$$\exp\left(-\int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A\right) = I.$$

Таким образом, условия (16) получены и необходимость доказана.

Покажем достаточность условий (16) для существования ω -периодического в среднем решения уравнения (1) в случае $E[f(s)] \equiv 0$. Из равенства (10) легко получить представление (18) для математического ожидания задачи (1), (2). Из равенств (16) с применением леммы 7.1 можно установить ω -периодичность первого слагаемого для $E[x(t)]$ в формуле (18), записанного в квадратных скобках. Следовательно, при $E[f(s)] \equiv 0$ из условий (16) вытекает ω -периодичность математического ожидания $E[x(t)]$ решения задачи (1), (2).

Осталось доказать вторую часть теоремы для случая $E[f(s)] \neq 0$. Для этого достаточно установить, что выполнение условий (16) и (17) приведет к ω -периодичности второго слагаемого в выражении (18), записанного в фигурных скобках.

Перепишем функцию, стоящую в фигурных скобках из выражения (18) следующим образом

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp\left(\int_s^0 E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \int_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^0 \int_s^0 b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2 + \int_s^0 \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) E[f(s)]ds = \exp\left(\int_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) \times \\ \times \int_0^t \exp\left(\int_s^0 E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^0 \int_s^0 b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2 + \int_s^0 \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1 ds_2 A^2\right) E[f(s)]ds. \end{aligned}$$

Тогда из условий (16) и (17) на основании леммы 7.1 делаем вывод о ω -периодичности последнего выражения.

8. Вторая моментная функция решения уравнения (1). Найдем вторую моментную функцию решения задачи (1), (2) в тех же предположениях, т. е. будем считать процессы ε и f независимыми и заданными характеристическими функционалами $\varphi_\varepsilon(u)$ и $\varphi_f(v)$, а случайный вектор x_0 независимым от ε и f .

Умножим уравнение (1) на $x^T(\tau)w$ и возьмем математическое ожидание полученного равенства

$$E\left[\frac{dx(t)}{dt}x^T(\tau)w\right] = E[\varepsilon(t)Ax(t)x^T(\tau)w] + E[f(t)x^T(\tau)w]. \tag{19}$$

Введем обозначение

$$\zeta(t, \tau, u, v) = E[x(t)x^T(\tau)w].$$

Тогда уравнение (19) формально можно переписать в виде

$$\frac{\partial \zeta(t, \tau, u, v)}{\partial t} = -iA \frac{\delta_p \zeta(t, \tau, u, v)}{\delta u(t)} - i \frac{\delta_p y(\tau, u, v)}{\delta v(t)}. \quad (20)$$

Умножим начальное условие (2) на $x^T(t_0)w$ и вычислим математическое ожидание полученного равенства с учетом предположения

$$E[x(t_0)x^T(t_0)w] = E[x_0 \cdot x_0^T] \varphi_\varepsilon(u) \varphi_f(v).$$

Тогда получаем

$$\zeta(t_0, t_0, u, v) = E[x_0 \cdot x_0^T] \varphi_\varepsilon(u) \varphi_f(v). \quad (21)$$

Определение 8.1. Второй моментной функцией $E[x(t)x^T(\tau)]$ решения задачи Коши (1), (2) называется $\zeta(t, \tau, 0, 0)$, где $\zeta(t, \tau, u, v)$ – симметричное по переменным t, τ решение уравнения (20), удовлетворяющее условию $\zeta(t_0, \tau, u, v) = E[x(t_0)x^T(\tau)w]$, в некоторой окрестности точки $u = 0, v = 0$.

Нам необходимо в первую очередь получить начальное условие для уравнения (20). Запишем уравнение (20) при $\tau = t_0$

$$\frac{\partial \zeta(t, t_0, u, v)}{\partial t} = -iA \frac{\delta_p \zeta(t, t_0, u, v)}{\delta u(t)} - i \frac{\delta_p y(t_0, u, v)}{\delta v(t)}. \quad (22)$$

Задача (22), (21) имеет вид задачи (6), (7). Запишем ее решение по формуле (9)

$$\zeta(t, t_0, u, v) = U(t_0, t) \varphi_\varepsilon(uI) \varphi_f(v) E[x_0 \cdot x_0^T] - i \int_{t_0}^t U(s, t) \frac{\delta_p y(t_0, u, v)}{\delta v(s)} ds.$$

Так как $\zeta(t, \tau, u, v)$ должна быть симметрична по переменным t и τ , то

$$\zeta(t_0, \tau, u, v) = U(t_0, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \varphi_f(v) E[x_0 \cdot x_0^T] - i \int_{t_0}^{\tau} U(s, \tau) \frac{\delta_p y(t_0, u, v)}{\delta v(s)} ds.$$

Подставим вид $y(t_0, u, v)$ из формулы (9), получаем начальное условие для уравнения (20)

$$\zeta(t_0, \tau, u, v) = U(t_0, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \varphi_f(v) E[x_0 \cdot x_0^T] - i \int_{t_0}^{\tau} U(s, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta \varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds. \quad (23)$$

Задача (20), (23) имеет вид задачи (6), (7). Выпишем ее решение по формуле (9)

$$\begin{aligned} \zeta(t, \tau, u, v) = & U(t_0, t) U(t_0, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \varphi_f(v) E[x_0 \cdot x_0^T] - i U(t_0, t) \int_{t_0}^{\tau} U(s, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta \varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \\ & - i \int_{t_0}^t U(s, t) \frac{\delta_p y(\tau, u, v)}{\delta v(s)} ds. \end{aligned}$$

Подставляя в последний интеграл представление для $y(\tau, u, v)$ из формулы (9), окончательно получаем

$$\begin{aligned} \zeta(t, \tau, u, v) = & U(t_0, t) U(t_0, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \varphi_f(v) E[x_0 \cdot x_0^T] - i U(t_0, t) \int_{t_0}^{\tau} U(s, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta \varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \\ & - i \int_{t_0}^t U(s, t) U(t_0, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta \varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} U(s, t) U(s_1, \tau) \varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2 \varphi_f(v)}{\delta v(s) \delta v(s_1)} ds_1 ds. \quad (24) \end{aligned}$$

Заметим, что функция $\zeta(t, \tau, u, v)$, определяемая формулой (24), симметрична по переменным t и τ .

Замечание 8.1. Все приведенные выше рассуждения по нахождению решения задачи (20), (23) сделаны в следующих предположениях: характеристический функционал φ_ε имеет вариационную производную

$$\frac{\delta \varphi_\varepsilon(uI - i\chi(\sigma, t)A - i\chi(\xi, \tau)A)}{\delta u(\xi)},$$

кроме того существуют вариационные производные

$$\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} \quad \text{и} \quad \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}.$$

Теорема 8.1. В условиях замечания 8.1 формула вида

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0, t)A - i\chi(t_0, \tau)A)E[x_0 \cdot x_0^T] + \int_{t_0}^{\tau} \varphi_\varepsilon(-i\chi(t_0, t)A - i\chi(s, \tau)A)E[f(s)]dsE[x_0] + \\ + \int_{t_0}^t \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A - i\chi(t_0, \tau)A)E[f(s)]dsE[x_0] + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A - i\chi(s_1, \tau)A)E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds$$

является второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Отметим, что

$$\left. \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} \right|_{v=0} = iE[f(s)], \quad \text{а} \quad \left. \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} \right|_{v=0} = E[f(s)f^T(s_1)].$$

Подставляя в (24) $u = 0$ и $v = 0$, получаем требуемое равенство.

9. Существование периодического решения уравнения (20).

Теорема 9.1. Пусть справедливы предположения леммы 4.1, существует оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$, кроме того, $\frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)}$ является ω -периодической функцией и $\frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)}$ является ω -периодической функцией по s и s_1 , тогда уравнение (20) имеет ω -периодическое симметричное по t и τ решение вида

$$\zeta(t, \tau, u, v) = U(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \left\{ -i \int_t^{t+\omega} U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} dsE[x_0] - \right. \\ \left. - \int_t^{t+\omega} \int_0^\tau U(s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1ds \right\}. \quad (25)$$

Доказательство. Запишем решение (24) в предположении, что $t_0 = 0$

$$\zeta(t, \tau, u, v) = U(0, t)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0 \cdot x_0^T] - iU(0, t) \int_0^\tau U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \\ - i \int_0^t U(s, t)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \int_0^t \int_0^\tau U(s, t)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1ds. \quad (26)$$

Если предположить, что уравнение (20) имеет ω -периодическое по t решение, то должно выполняться условие $\zeta(\omega, \tau, u, v) = \zeta(0, \tau, u, v)$. Запишем данное равенство, используя представление (26)

$$U(0, \omega)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0 \cdot x_0^T] - iU(0, \omega) \int_0^\tau U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \\ - i \int_0^\omega U(s, \omega)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \int_0^\omega \int_0^\tau U(s, \omega)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1ds = \\ = U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0 \cdot x_0^T] - i \int_0^\tau U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds.$$

Перепишем полученное равенство в виде

$$U(0, \omega)(U(\omega, 0) - I) \left\{ U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0 \cdot x_0^T] - i \int_0^\tau U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds \right\} = \\ = -i \int_0^\omega U(s, \omega)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \int_0^\omega \int_0^\tau U(s, \omega)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1ds.$$

По предположению теоремы существует обратный оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$, тогда

$$U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI)\varphi_f(v)E[x_0 \cdot x_0^T] - i \int_0^\tau U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds = (U(\omega, 0) - I)^{-1}U(\omega, 0) \times \\ \times \left\{ -i \int_0^\omega U(s, \omega)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \int_0^\omega \int_0^\tau U(s, \omega)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds \right\}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (26), получаем

$$\zeta(t, \tau, u, v) = U(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1}U(\omega, 0) \left\{ -i \int_0^\omega U(s, \omega)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \right. \\ \left. - \int_0^\omega \int_0^\tau U(s, \omega)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds \right\} - i \int_0^t U(0, t)U(s, 0)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \\ - \int_0^t \int_0^\tau U(0, t)U(s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds = U(0, t)(U(\omega, 0) - I)^{-1} \times \\ \times \left\{ -i \int_0^\omega U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \int_0^\omega \int_0^\tau U(s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds - \right. \\ \left. - i \int_0^t U(\omega, 0)U(s, 0)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds + i \int_0^t U(s, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds - \right. \\ \left. - \int_0^t \int_0^\tau U(\omega, 0)U(s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds + \int_0^t \int_0^\tau U(s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds \right\}.$$

Преобразуем третий и пятый интеграл последней суммы, используя лемму 4.1 и предположение теоремы, имеем

$$-i \int_0^t U(\omega, 0)U(s, 0)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds = \\ -i \int_0^t U(\omega+s, 0)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s)} E[x_0] ds = -i \int_\omega^{t+\omega} U(s_1, 0)U(0, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1 - \omega)} E[x_0] ds_1 = \\ = -i \int_\omega^{t+\omega} U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta\varphi_f(v)}{\delta v(s_1)} E[x_0] ds_1,$$

а

$$- \int_0^t \int_0^\tau U(\omega, 0)U(s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds = - \int_0^t \int_0^\tau U(\omega+s, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(s)\delta v(s_1)} ds_1 ds = \\ = - \int_\omega^{t+\omega} \int_0^\tau U(\sigma, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(\sigma - \omega)\delta v(s_1)} ds_1 d\sigma = - \int_\omega^{t+\omega} \int_0^\tau U(\sigma, 0)U(s_1, \tau)\varphi_\varepsilon(uI) \frac{\delta^2\varphi_f(v)}{\delta v(\sigma)\delta v(s_1)} ds_1 d\sigma.$$

Подставляя эти выражения в соотношение для $\zeta(t, \tau, u, v)$ и объединяя интегралы, получаем равенство (25).

Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что $\zeta(t, \tau, u, v)$, определяемая формулой (25), является ω -периодической функцией переменных t и τ . Для этого достаточно вычислить $\zeta(t+\omega, \tau, u, v)$ и по аналогии с теоремой 7.1 убедиться в том, что $\zeta(t+\omega, \tau, u, v) = \zeta(t, \tau, u, v)$.

Так как вторая моментная функция симметрична по переменным t и τ , то получаем периодичность второй моментной функции по обоим переменным.

10. Периодическая вторая моментная функция решения уравнения (1).

Теорема 10.1. Пусть выполнены условия теоремы 9.1, тогда

$$E[x(t)x^T(\tau)] = (U(\omega, 0) - I)^{-1} \left\{ \int_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(-i\chi(0, t)A - i\chi(s, \tau)A)E[f(s)]dsE[x_0] + \int_t^{t+\omega} \int_0^\tau \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A - i\chi(s_1, \tau)A)E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds \right\}$$

определяет ω -периодическую по t и τ вторую моментную функцию решения уравнения (1).

Доказательство. Доказывается по аналогии с теоремой 8.1.

Теорема 10.2. Если в случае выполнения условия теоремы 10.1 выполнено соотношение $\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) \neq I$, тогда

$$E[x(t)x^T(\tau)] = (\varphi_\varepsilon(-i\chi(\omega, 0)A) - I)^{-1} \left\{ \int_t^{t+\omega} \varphi_\varepsilon(-i\chi(0, t)A - i\chi(s, \tau)A)E[f(s)]dsE[x_0] + \int_t^{t+\omega} \int_0^\tau \varphi_\varepsilon(-i\chi(s, t)A - i\chi(s_1, \tau)A)E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds \right\}.$$

определяет ω -периодическую по t и τ вторую моментную функцию решения уравнения (1).

Используя вид функционала $\varphi_\varepsilon(u)$ – характеристического функционала гауссова случайного процесса ε (8), можно получить уточнение теоремы 10.2.

Теорема 10.3. Пусть $E[\varepsilon(s)], E[f(s)]$ – ω -периодические функции по s , $a b(t, s)$ – ω -периодическая функция по обоим переменным. Кроме того, существует оператор $(U(\omega, 0) - I)^{-1}$ и оператор

$$- \int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2$$

не имеет собственных значений вида $2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \left(\exp\left(- \int_0^\omega E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^\omega \int_0^\omega b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2\right) - I \right)^{-1} \times \\ \times \left\{ \int_t^{t+\omega} \exp\left[\int_0^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \int_s^\tau E[\varepsilon(\sigma)]d\sigma A + \frac{1}{2} \int_s^\tau \int_s^\tau b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 \right] \times \right. \\ \times E[f(s)]dsE[x_0] + \int_t^{t+\omega} \int_0^\tau \exp\left[\int_s^t E[\varepsilon(\tau)]d\tau A + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 + \int_{s_1}^\tau E[\varepsilon(\sigma)]d\sigma A + \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \int_{s_1}^\tau \int_{s_1}^\tau b(s_1, s_2)ds_1ds_2A^2 \right] E[f(s)f^T(s_1)]ds_1ds \right\}$$

является ω -периодической по t и τ второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Замечание 10.1. Используя теоремы 8.2 и 10.3 в случае $\tau = t$, можно найти периодическую дисперсионную функцию $E[x(t)x^T(t)] - (E[x(t)])^2$ и тем самым получить условия существования периодического в широком смысле [2, с. 70] решения задачи (1), (2).

11. Заключение. В предположении, что коэффициент уравнения (1) $\varepsilon(t)$ является гауссовым случайным процессом и при этом статистически не зависит от векторного случайного процесса f , получены условия существования периодического в среднем решения и периодической второй моментной функции решения, а также явные формулы периодического математического ожидания и периодической второй моментной функции. В работе были рассмотрены две ситуации, когда однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), не имеет отличных от нуля ω -периодических в среднем решений и более сложная ситуация, когда линейное однородное уравнение со случайными коэффициентами имеет ненулевое периодическое в среднем решение.

Список литературы

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами и их приложения. Москва: Наука; 1972. 720 с.
2. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Москва: Наука; 1969. 368 с.
3. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Периодические в среднем решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка со случайными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2014;50(6):726–744. DOI: 10.1134/S0374064114060028
4. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Периодические в среднем решения линейного дифференциального уравнения первого порядка. *Доклады академии наук*. 2013;450(5):505–510. DOI: 10.7868/S0869565213170076
5. Задорожний В.Г., Курина Г.А. Управление системой, обеспечивающее периодическое в среднем решение. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2018;3:23–32.
6. Kurina G., Zadorozhniy V. Mean periodic solutions of a inhomogeneous heat equation with random coefficients. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*. 2020;13(5):1543–1551. DOI: 10.3934/dcdss.2020087
7. Кабанцова Л.Ю. Периодические в среднем решения линейных систем дифференциальных уравнений со случайным возмущением. В сборнике: *Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики*. 2024;73-89.
8. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. Москва-Ижевск: РХД; 2006. 316 с.
9. Задорожний В.Г. Влияние мультипликативного случайного шума на устойчивость линейных систем. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2016;4:68–83.
10. Задорожний В.Г., Коновалова М.А. Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2017;63(4):599–614. DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614
11. Zadorozhniy V.G., Konovalova M.A. Differential equations in banach spaces multiplicatively perturbed by random noise. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021;259(6):817–832. DOI: 10.1007/s10958-021-05664-0

References

1. Yakubovich VA, Starzhinskii VM. Lineinye differentsial'nye uravneniya s peremennymi koefffitsientami i ikh prilozheniya [Linear differential equations with variable coefficients and their applications]. Moscow: Nauka; 1972. 720 p.
2. Khas'minskii RZ. Ustoichivost' sistem differentsial'nykh uravnenii pri sluchainykh vozmushcheniyakh ikh parametrov [Stability of systems of differential equations under random perturbations of their parameters]. Moscow: Nauka; 1969. 368 p.
3. Zadorozhniy VG, Kurina GA. Mean periodic solutions of a linear inhomogeneous first-order differential equation with random coefficients. *Differential Equations*. 2014;50(6):722–741. DOI: 10.1134/S0012266114060020 (In Russ.)
4. Zadorozhniy VG, Kurina GA. Mean-periodic solutions of a first-order linear differential equation. *Doklady Mathematics*. 2013;87(3):325–330. DOI: 10.1134/S1064562413030277 (In Russ.)
5. Zadorozhniy VG, Kurina GA. System control, providing mean periodic solution. *Proceedings of Voronezh state university. Series: Systems analysis and information technologies*. 2018;3:23–32. (In Russ.)
6. Kurina G, Zadorozhniy V. Mean periodic solutions of a inhomogeneous heat equation with random coefficients. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*. 2020;13(5):1543–1551. DOI: 10.3934/dcdss.2020087
7. Kabantsova LYu. Periodicheskie v srednem resheniya lineinykh sistem differentsial'nykh uravnenii so sluchainym vozmushcheniem [Periodic average solutions of linear systems of differential equations with random perturbation]. V sbornike: *Vestnik fakul'teta prikladnoi matematiki, informatiki i mekhaniki*. 2024;73-89.
8. Zadorozhniy VG. Metody variatsionnogo analiza [Methods of variational analysis]. Moscow-Izhevsk: RKHD; 2006. 316 p.
9. Zadorozhniy VG. He influence of the multiplicative random noise on the stability linear systems. *Proceedings of Voronezh state university. Series: Systems analysis and information technologies*. 2016;4:68–83. (In Russ.)
10. Zadorozhniy VG, Konovalova MA. Differential equation in a banach space multiplicatively perturbed by random noise. *Contemporary mathematics. Fundamental directions*. 2017;63(4):599–614. (In Russ.) DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614
11. Zadorozhniy VG, Konovalova MA. Differential equations in banach spaces multiplicatively perturbed by random noise. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021;259(6):817–832. DOI: 10.1007/s10958-021-05664-0

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.09.2024

Поступила после рецензирования 03.02.2025

Принята к публикации 07.02.2025

Received September 13, 2024

Revised February 3, 2025

Accepted February 7, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кабанцова Лариса Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Larisa Yu. Kabantsova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of System Analysis and Management, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка

Архипов В. П.¹ , Глушак А. В.² ,

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орёл, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка получены представления решения двусторонней задачи Коши с условиями в точке вырождения. Приведён алгоритм построения степенных асимптотик решений. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, двусторонняя задача Коши, степенные асимптотики решений

Для цитирования: Архипов В. П., Глушак А. В. 2025. Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 27–40. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-27-40

Original Research

Power Asymptotics of Solutions of the Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations

Viktor P. Arkhipov¹ , Alexander V. Glushak² ,

¹ Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For ordinary linear degenerate differential equations of the second order, representations of the solution of the two-sided Cauchy problem with conditions at the degeneracy point are obtained. An algorithm for constructing power asymptotics of solutions is given. Examples are considered.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Two-Sided Cauchy Problem, Power Asymptotics of Solutions

For citation: Arkhipov V. P., Glushak A. V. 2025. Power Asymptotics of Solutions of the Two-Sided Cauchy Problem for Degenerate Second-Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 27–40. (in Russian)
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-27-40

1. Введение. Основные свойства линейных дифференциальных уравнений определяются слагаемыми со старшей производной. Вырождение их в отдельных точках приводит к серьёзным изменениям локального характера решений. В настоящей работе исследуется поведение решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t) \quad (1)$$

с действительными достаточно гладкими коэффициентами и такими, что $a(0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq 0$, $b(0) \neq 0$.

Изучение уравнений с обращающимся в ноль коэффициентом при старшей производной проводилось широким кругом исследователей. К ним относятся, в частности, уравнения Эйлера, Бесселя и ряд других. К таким уравнениям приводит рассмотрение уравнений в частных производных переменного типа (см. обзорную работу [1]), а также изучение нелинейных [2] и бисингулярных задач [3]. Двухточечные краевые задачи для уравнения (1) исследованы в [4, 5, 6, 7]. Вырождающимся дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве посвящены работы [8, 9]. Наряду с нахождением точных решений, важное значение в теории дифференциальных уравнений имеют также методы построения приближённых решений, в том числе и асимптотические методы (см., например, [10]).

Вопросы существования решений уравнения (1) при определённых условиях и их применение к нелинейным уравнениям исследовалось в [2]. Результаты по асимптотическим представлениям решений уравнения (1) были получены в [11] и развиты в [12, 13]. В статье [14] построены двусторонние асимптотические разложения решений, а в [15, 16] были получены первые асимптотики решений односторонней задачи Коши вблизи точки вырождения. Двусторонняя задача Коши рассматривалась в [2] и [17], где были построены первые асимптотики её решений. Настоящая работа является продолжением исследований, проведённых авторами в [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], а полученные в указанных статьях результаты позволяют предложить несложный алгоритм построения степенных асимптотик решений в окрестности точки вырождения.

2. Существование решений задачи Коши и асимптотика решений. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка (1) с вырождающимся старшим коэффициентом в точке $t = 0$ и гладкими действительными коэффициентами. Поскольку нами исследуется локальная разрешимость и асимптотика решений вблизи точки вырождения, то будем рассматривать это уравнение на отрезке $[-\delta, \delta]$ при некотором $\delta > 0$. Двусторонней задачей Коши будем называть задачу нахождения непрерывного на $[-\delta, \delta]$ решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\lim_{t \rightarrow 0\pm} u(t) = u_0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) подробно исследовалась в статье [17], в которой доказана её разрешимость и построены первые асимптотики решений. Приведем здесь соответствующие результаты в необходимой для нас форме.

Условие 1. Коэффициенты уравнения (1) и правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые в окрестности точки $t = 0$ функции, причём $a(0) = 0$, $a(t) \neq 0$ при $t \neq 0$ и $b(0) = b_0 \neq 0$.

Для некоторого $\delta > 0$ на отрезке $[-\delta, \delta]$ определим функции:

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)},$$

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad h(t) = \frac{1}{4d(t)} \left(a(t) \left(\frac{d'(t)}{d(t)} \right)^2 - 2 \left(\frac{a(t)d'(t)}{d(t)} \right)' - 2b'(t) \right). \quad (3)$$

Если выполнено условие 1, то всегда можно выбрать достаточно малое $\delta > 0$ так, чтобы на $[-\delta, \delta]$ выполнялось следующее условие.

Условие 2. Существует такое $\delta > 0$, что на отрезке $t \in [-\delta, \delta]$ справедливы неравенства

$$d(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}, \quad b(t) \neq 0, \quad \int_{-\delta}^{\delta} |h(t)| dt < \frac{1}{2}.$$

Решения задачи (1), (2) существенно зависят от распределения знаков коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ на отрезке $[-\delta, \delta]$. Этот факт подробнее сформулируем в виде нижеследующих теорем, доказательство которых приводится в [17]. В этой же статье приведено и представление в виде абсолютно сходящихся асимптотических рядов используемых в следующей теореме функций $w_1(t)$, $w_2(t)$, $u_2^+(t)$, $u_2^-(t)$.

Теорема 1. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2 и $a(t) > 0$ при $t \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений $u(t, C) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ этого уравнения, каждая функция которого удовлетворяет условию (2). Для $b_0 < 0$ это семейство имеет вид

$$u(t, C) = w_1(t) + Cu_2^+(t), \quad (4)$$

где $w_1(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$, C — произвольная постоянная, $u_2^+(t) \in C^\infty[0, \delta]$ — продолженное на $[-\delta, 0)$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(u_2^+)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$, и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0\pm} w_1(t) = u_0, \quad u'(0, C) = \frac{1}{b_0} (f(0) - c(0)u_0).$$

А для $b_0 > 0$ это семейство имеет вид

$$u(t, C) = w_2(t) + Cu_2^-(t), \quad (5)$$

где $w_2(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$, C — произвольная постоянная, $u_2^-(t) \in C^\infty[-\delta, 0]$ — продолженное на $(0, \delta]$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(u_2^-)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$, и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0\pm} w_2(t) = u_0, \quad u'(0, C) = \frac{1}{b_0} (f(0) - c(0)u_0).$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы 1 имеет место равенство $a'(0) = 0$, а в следующей теореме 2 это равенство, вообще говоря, не выполнено.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнены условия 1, 2 и $ta(t) < 0$ при $t \in [-\delta, 0) \cup (0, \delta]$. Тогда при $b_0 < 0$ существует единственное непрерывное решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ этого уравнения, удовлетворяющее условию (2), и при этом

$$u'(0) = \frac{1}{b_0 + a'(0)}(f(0) - c(0)u_0).$$

Если $b_0 > 0$, то существует двухпараметрическое семейство

$$u(t, C^-, C^+) \in C^{k_0}[-\delta, \delta], \quad k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : b_0 + ka'(0) > 0\},$$

решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2). Это семейство имеет вид

$$u(t, C^-, C^+) = w_3(t) + C^- u_2^-(t) + C^+ \tilde{u}_2^+(t), \tag{6}$$

где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_3(t) \in C^{k_0}[-\delta, \delta], \quad \lim_{t \rightarrow 0^\pm} w_3(t) = u_0,$$

$u_2^-(t) \in C^{k_0}[-\delta, 0]$ — продолженное на $(0, \delta]$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(u_2^-)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \leq k_0$, $\tilde{u}_2^+(t) \in C^{k_0}[0, \delta]$ — продолженное на $[-\delta, 0)$ нулём решение однородного уравнения (1) такое, что $(\tilde{u}_2^+)^{(k)}(0) = 0$ для любых $k \leq k_0$.

Замечание 1. Если в условиях теоремы 2 $a'(0) = 0$, то полагаем $k_0 = +\infty$. Кроме того, используемые в этой теореме представления в виде абсолютно сходящихся асимптотических рядов функций $u(t)$, $w_3(t)$, $\tilde{u}_2^+(t)$, $u_2^-(t)$ также приведены в [17].

Отметим, что первые асимптотики решений в [15], [16], [17] построены в предположении степенного порядка вырождения коэффициента $a(t)$ и постоянства $b(t) = b_0$. Результатами этих работ и обусловлено следующее условие.

Условие 3. Коэффициенты уравнения (1) и его правая часть $f(t)$ — действительные бесконечно дифференцируемые при $t \in [-\delta, \delta]$ функции, причём $a(t) = (-t)^{m+1}a_0(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $a_0(t) > 0$ при $t \in [-\delta, \delta]$ и $b(t) = b = \text{const} \neq 0$.

Укажем, что в силу условия 3 при $t \rightarrow 0$ справедливы следующие асимптотические представления, определяемых равенством (3) функций:

$$a(t) = t^{m+1}O(1), \quad d(t) = |b|(1 + t^{m+1}O(1)), \quad h(t) = t^{2m}O(1), \quad s(t) = t^{2m+1}O(1).$$

Покажем далее, что при выполнении условия 3 можно установить первые асимптотики главных членов решений в теоремах 1 и 2. Результат сформулируем в виде следующих двух теорем, в которых будут использованы функции

$$\Phi_0(t) = 1 + s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} + \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)', \quad \Psi_0(t) = 1 - s(t) + \frac{a(t)h(t)}{d(t)} - \frac{a(t)}{d(t)} \left(\frac{a(t)h(t)}{d(t)} \right)'. \tag{7}$$

Теорема 3. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $m = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует однопараметрическое семейство решений $u(t, C) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2). При $b < 0$ функции этого семейства могут быть записаны в виде (4), где C — произвольная постоянная,

$$w_1(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp\left(\int_t^0 \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_\star^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_\star^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases}$$

$$u_\star^-(t) = \Phi_0(t) \int_t^0 \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(\tau)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b + d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau -$$

$$-\Psi_0(t) \int_t^0 \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(\tau)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b - d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1),$$

$$\begin{aligned}
u_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_0^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau - \\
&- \Psi_0(t) \int_t^\delta \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1).
\end{aligned} \tag{8}$$

При $b > 0$ функции этого семейства могут быть записаны в виде (5), где C — произвольная постоянная,

$$\begin{aligned}
w_2(t) &= \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(\int_t^0 \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases} \\
u_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_0^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + \\
&+ \Psi_0(t) \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1), \\
u_*^-(t) &= -\Psi_0(t) \int_t^0 \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau - \\
&- \Phi_0(t) \int_{-\delta}^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1).
\end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 4. Пусть выполнены условие 2 и условие 3 при $t = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда при $b < 0$ существует единственное ограниченное решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2) и оно имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp\left(\int_t^0 \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{|b|}{d(t)}} \Phi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + \tilde{u}_*^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases}$$

где функция $u_*^-(t)$ определена в (8),

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_0^t \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + \\
&+ \Psi_0(t) \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1).
\end{aligned} \tag{10}$$

При $b > 0$ существует двухпараметрическое семейство решений $u(t, C^-, C^+) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2). Функции этого семейства могут быть записаны в виде (6), где C^-, C^+ — произвольные постоянные,

$$w_3(t) = \begin{cases} u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + u_*^-(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [-\delta, 0], \\ u_0 \sqrt{\frac{b}{d(t)}} \Psi_0(t) \exp\left(-\int_0^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) + \tilde{u}_*^+(t) + t^{4m+2}O(1), & t \in [0, \delta], \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_*^+(t) &= -\Phi_0(t) \int_t^\delta \frac{\Psi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b+d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + \\ &+ \Psi_0(t) \int_0^t \frac{\Phi_0(\tau)f(\tau)}{\sqrt{d(t)d(\tau)}} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b-d(\xi)}{2a(\xi)} d\xi\right) d\tau + s^2(t)O(1), \end{aligned}$$

а функция $u_*^-(t)$, определена в формуле (9).

3. Построение степенных асимптотик фундаментальной системы решений однородного уравнения. Теоремы 1–4 и формулы (7)–(11) уже позволяют получать степенные асимптотики решений, так как в функции $\Phi_0(t)$, $\Psi_0(t)$ входят только известные функции и достаточно использовать их разложение в точке $t = 0$ по формуле Тейлора. Однако эти же формулы и результаты работ [15, 16, 17], в которых установлено существование хотя бы одного бесконечно дифференцируемого в нуле решения двусторонней задачи Коши (1), (2), позволяют найти простой алгоритм прямого построения степенного представления решений с любой заданной точностью.

Поставим задачу определения фундаментальной системы решений уравнения (1). В дальнейшем нам потребуется установить преобразование, связывающее следующие дифференциальные выражения с переменными коэффициентами

$$L(u(t)) = (a(t)u'(t))' + b(t)u'(t), \quad L^*(u(t)) = (a(t)u'(t))' - (b(t)u(t))'.$$

Введём в рассмотрение функцию

$$q(t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_{-\delta}^t \frac{b(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t \in [-\delta, 0), \\ \exp\left(\int_t^\delta \frac{b(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) & \text{при } t \in (0, \delta]. \end{cases} \quad (12)$$

Следует отметить, что в зависимости от соотношения знаков коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ справа и слева от точки вырождения $t = 0$, в точке $t = 0$ функция $q(t)$ имеет ноль или бесконечность произвольного порядка. Функция $q(t)$ была использована в [17] при рассмотрении весовой задачи Коши.

Лемма 1. Пусть $a(t), b(t) \in C^1[-\delta, \delta]$ и $a(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. Тогда для любой функции $v(t) \in C^2[-\delta, \delta]$ при $t \neq 0$ справедливо равенство

$$L(q(t)v(t)) = q(t)L^*(v(t)).$$

Доказательство. Действительно, элементарная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} L(q(t)v(t)) &= (a(t)(q(t)v(t))')' + b(t)(q(t)v(t))' = \\ &= (a(t)(q'(t)v(t) + q(t)v'(t)))' + b(t)(q'(t)v(t) + q(t)v'(t)) = \\ &= (a(t)q'(t)v(t))' + a(t)q'(t)v'(t) + b(t)q'(t)v(t) + q(t)(a(t)v'(t))' + b(t)q(t)v'(t) = \\ &= ((a(t)q'(t))' + b(t)q'(t))v(t) + 2a(t)q'(t)v'(t) + q(t)((a(t)v'(t))' + b(t)v'(t)) = \\ &= ((a(t)q'(t))' + b(t)q'(t))v(t) + 2(a(t)q'(t) + b(t)q(t))v'(t) + q(t)((a(t)v'(t))' - b(t)v'(t)) = \\ &= (a(t)q'(t) + b(t)q(t))'v(t) + 2(a(t)q'(t) + b(t)q(t))v'(t) + q(t)L^*(v(t)) = q(t)L^*(v(t)), \end{aligned}$$

поскольку, учитывая определение (12) функции $q(t)$, легко проверить, что при $t \neq 0$ справедливо равенство $a(t)q'(t) + bq(t) = 0$. Лемма доказана.

При $b = \text{const} \neq 0$ в окрестности точки $t = 0$ рассмотрим соответствующее уравнению (1) однородное уравнение с бесконечно гладкими коэффициентами

$$(a(t)u'(t))' + bu'(t) + c(t)u(t) = 0, \quad (13)$$

для которого выполнены условия 1–3 и, следовательно, для любого сколь угодно большого $N \in \mathbb{N}$ его коэффициенты могут быть представлены в виде

$$a(t) = \sum_{j=m}^N a_j t^j + t^{N+1}O(1), \quad a_m \neq 0, \quad m-1 \in \mathbb{N}, \quad c(t) = \sum_{j=0}^N c_j t^j + t^{N+1}O(1). \quad (14)$$

Перейдём к построению асимптотик при $t \rightarrow 0 \pm$ для фундаментальной системы решений уравнения (13). Как следует из теорем 1, 2, при любых соотношениях знаков коэффициентов уравнения в окрестности точки $t = 0$ и $k \in \mathbb{N}$, существует хотя бы одно бесконечно гладкое решение уравнения (13) с асимптотикой вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1) \quad (15)$$

и подлежащими определению коэффициентами u_j .

Первое решение для фундаментальной системы решений будем искать именно в таком виде, выбирая $u_0 = 1$. Подставив в уравнение (13) асимптотические разложения (14), (15) для решения и для коэффициентов уравнения и, приравняв коэффициенты при t^n нулю, получим рекуррентные формулы для вычисления всех коэффициентов u_n , $1 \leq n \leq k$.

Если доопределить коэффициенты $a_j = 0$ при $j \leq m - 1$, то асимптотические представления коэффициентов (14) можно записать в виде

$$a(t) = \sum_{j=m}^{k+1} a_j t^j + t^{k+2} O(1) = \sum_{j=0}^{k+1} a_j t^j + t^{k+2} O(1), \quad c(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (16)$$

при этом решение уравнения (13) запишем в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k+2} u_j t^j + t^{k+3} O(1). \quad (17)$$

Чтобы подставить разложения (16), (17) в уравнение (13), проведём следующие предварительные вычисления:

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{k+2} j u_j t^{j-1} + t^{k+2} O(1), \quad b u'(t) = b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1) u_{n+1} t^n + t^{k+2} O(1). \quad (18)$$

В дальнейшем зависящие от u_n коэффициенты будем обозначать греческими буквами.

$$c(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j \left(\sum_{i=0}^{k+1} u_i t^i \right) + t^{k+1} O(1) = \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n + t^{k+1} O(1), \quad \text{где } \gamma_n = \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (a(t)u'(t))' &= \left(\left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j t^j + t^{k+2} O(1) \right) \left(\sum_{n=0}^{k+1} (n+1) u_{n+1} t^n + t^{k+2} O(1) \right) \right)' = \\ &= \left(\left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i t^i \right) \left(\sum_{j=0}^{k+1} (j+1) u_{j+1} t^j \right) + t^{k+2} O(1) \right)' = \left(\sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j t^j + t^{k+2} O(1) \right)' = \\ &= \sum_{j=m}^{k+1} j \alpha_j t^{j-1} + t^{k+1} O(1) = \sum_{n=m-1}^k (n+1) \alpha_{n+1} t^n + t^{k+1} O(1), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\alpha_j = 0$ при $j \leq m - 1$, а при остальных

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^j a_i (j-i+1) u_{j-i+1} = \sum_{i=m}^j a_i (j-i+1) u_{j-i+1}.$$

После подстановки разложений (16)–(20) в уравнение (13) получим

$$\begin{aligned} L(u(t)) + c(t)u(t) &= (a(t)u'(t))' + b u'(t) + c(t)u(t) = \sum_{n=m-1}^k (n+1) \alpha_{n+1} t^n + t^{k+1} O(1) + \\ &+ b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1) u_{n+1} t^n + t^{k+2} O(1) + \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n + t^{k+1} O(1) = \\ &= \sum_{n=m-1}^k (n+1) \alpha_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^k (b(n+1) u_{n+1} + \gamma_n) t^n + t^{k+1} O(1) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведя в уравнении (21) подобные и приравняв коэффициенты при t^n нулю, считая $u_0 = 1$, получим рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов u_n .

Если $0 \leq n \leq m - 2$, то $b(n+1)u_{n+1} + \gamma_n = 0$ и тогда

$$u_{n+1} = -\frac{\gamma_n}{b(n+1)} = -\frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}. \quad (22)$$

Если $m - 1 \leq n \leq k$, то $b(n+1)u_{n+1} + (n+1)\alpha_{n+1} + \gamma_n = 0$ и тогда

$$u_{n+1} = -\frac{(n+1)\alpha_{n+1} + \gamma_n}{b(n+1)} = -\frac{1}{b(n+1)} \left((n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i(n-i+2)u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right). \quad (23)$$

Отметим, что в отличие от предыдущих значений, значение u_{k+1} , вычисленное по формуле (23), не может рассматриваться как точное, а функция

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j$$

с коэффициентами, вычисленными по формулам (22), (23), даёт решение уравнения (13) с точностью до $t^{k+1}O(1)$ при $t \rightarrow 0\pm$.

При $t \neq 0$ второе решение $w(t)$, линейно независимое с первым, будем искать в виде

$$w(t) = q(t)v(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j,$$

где функция $q(t)$ определена в (12), а $v_0 = 1$.

Подставляя $w(t)$ в уравнение (13) и учитывая лемму 1, получим уравнение

$$L(w(t)) + c(t)w(t) = L(q(t)w(t)) + c(t)q(t)w(t) = q(t) (L^*(v(t)) + c(t)v(t)) = 0$$

и, следовательно, функция $v(t)$ может быть выбрана из равенства $L^*(v(t)) + c(t)v(t) = 0$. Коэффициенты v_k могут быть рассчитаны по формулам (22), (23) с заменой в них коэффициента b на $-b$. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5. Пусть коэффициенты $a(t)$, $c(t)$ уравнения (13) удовлетворяют условию 1, причем для $j \leq m - 1 \in \mathbb{N}$ производные $a^{(j)}(0) = 0$, $a^{(m)}(0) \neq 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Тогда образующие фундаментальную систему решений этого уравнения функции $u(t)$ и $w(t)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0\pm$ допускают асимптотические представления вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1}O(1), \quad w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1}O(1), \quad (24)$$

и коэффициенты u_j , v_j этих разложений вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq m - 2,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{b(n+1)} \left((n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i(n-i+2)u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right), \quad m - 1 \leq n \leq k, \quad (25)$$

$$v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq m - 2,$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left((n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i(n-i+2)v_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i} \right), \quad m - 1 \leq n \leq k, \quad (26)$$

где a_i , c_i — коэффициенты разложения функций $a(t)$, $c(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$, функция $q(t)$ определена в (12) и, в зависимости от соотношения знаков коэффициентов $a(t)$ и b справа и слева от точки вырождения $t = 0$, в этой точке она имеет ноль или бесконечность произвольного порядка.

4. Построение степенных асимптотик решения двусторонней задачи Коши для неоднородного уравнения. Результаты теорем 1–4 о разрешимости двусторонней задачи Коши позволяют использовать методику теоремы 5 и для построения решения неоднородного уравнения (1), которая приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 6. Пусть коэффициенты $a(t)$, $c(t)$ уравнения (13) удовлетворяют условию 1, причем для $j \leq m - 1 \in \mathbb{N}$ производные $a^{(j)}(0) = 0$, $a^{(m)}(0) \neq 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Тогда существует решение $\hat{u}(t) \in$

$C^\infty[-\delta, \delta]$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), которое для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0 \pm$ допускает асимптотическое представление

$$\tilde{u}(t) = \sum_{j=0}^k \tilde{u}_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (27)$$

где коэффициенты \tilde{u}_j вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\tilde{u}_0 = u_0, \quad \tilde{u}_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left(f_n - \sum_{i=0}^n c_i \tilde{u}_{n-i} \right), \quad 0 \leq n \leq m-2, \quad (28)$$

$$\tilde{u}_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left(f_n - (n+1) \sum_{i=m}^{n+1} a_i (n-i+2) \tilde{u}_{n-i+2} - \sum_{i=0}^n c_i \tilde{u}_{n-i} \right), \quad m-1 \leq n \leq k, \quad (29)$$

a_i, c_i, f_i — коэффициенты разложения функций $a(t), c(t), f(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$.

Доказательство. Как уже отмечалось ранее в теоремах 1–4, при любых соотношениях знаков коэффициентов уравнения (1) в окрестности точки $t = 0$ существует хотя бы одно бесконечно дифференцируемое решение двусторонней задачи Коши (1), (2). Запишем для него, для коэффициентов и правой части уравнения (1) представления вида (16), (17) и подставим в уравнение (1). Получим

$$\begin{aligned} L(\tilde{u}(t)) + c(t)\tilde{u}(t) &= \sum_{n=m-1}^k (n+1)\alpha_{n+1}t^n + t^{k+1}O(1) + \\ &+ b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1)\tilde{u}_{n+1}t^n + t^{k+2}O(1) + \sum_{n=0}^k \gamma_n t^n + t^{k+1}O(1) = \\ &= \sum_{n=m-1}^k (n+1)\alpha_{n+1}t^n + \sum_{n=0}^k (b(n+1)u_{n+1} + \gamma_n) t^n + t^{k+1}O(1) = \sum_{n=0}^k f_n t^n + t^{k+1}O(1). \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично доказательству теоремы 5, приравняв в равенстве (30) коэффициенты при t^n , получим требуемые представления (27)–(29) для решения задачи (1), (2). Полученные представления и завершают доказательство теоремы.

5. Асимптотика решений двусторонней задачи Коши в случае сверхбыстрого вырождения.

В теоремах 3–5 асимптотические представления решений уравнения (1) получены для степенного вырождения его старшего коэффициента. Покажем, что аналогичные результаты могут быть установлены и при «сверхбыстрых» вырождениях. Для бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(t)$, такой, что $\varphi^{(k-1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, будем использовать обозначение $\varphi(t) = o(t^\infty)$ при $t \rightarrow 0$ и называть бесконечно малой произвольного порядка малости. Таковы, например, функции $\varphi(t) = \exp(-t^{-2k})$, $k \in \mathbb{N}$, доопределённые нулём при $t = 0$.

Теорема 7. Пусть коэффициенты $a(t), c(t)$ и правая часть $f(t)$ уравнения (1) удовлетворяют условию 1, причём $a(t) = o(t^\infty)$ при $t \rightarrow 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Тогда справедливы утверждения:

1°. Существует решение задачи Коши (1), (2), которое для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0 \pm$ допускает асимптотическое представление

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^k \hat{u}_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (31)$$

где

$$\hat{u}_0 = u_0, \quad \hat{u}_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \left(f_n - \sum_{i=0}^n c_i \hat{u}_{n-i} \right), \quad 0 \leq n \leq k,$$

c_i, f_i — коэффициенты разложения функций $c(t), f(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$;

2°. При $t \rightarrow 0 \pm$ образующие фундаментальную систему решений этого уравнения функции $u(t)$ и $w(t)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ допускают асимптотические представления вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (32)$$

где коэффициенты u_j, v_j этих разложений вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq k,$$

$$v_0 = 1, \quad v_{n+1} = \frac{1}{b(n+1)} \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i}, \quad 0 \leq n \leq k,$$

c_i — коэффициенты разложения функции $c(t)$ по формуле Тейлора в точке $t = 0$, функция $q(t)$ определена в (12) и в зависимости от соотношения знаков коэффициентов $a(t)$ и b справа и слева от точки вырождения $t = 0$, в этой точке она имеет ноль или бесконечность произвольного порядка.

Доказательство 1°. Существование решения задачи Коши (1), (2) установлено в теоремах 1 и 2. Как и при доказательстве теоремы 5, асимптотические представления решения $\hat{u}(t)$ и коэффициентов уравнения запишем в виде

$$\hat{u}(t) = \sum_{j=0}^{k+2} \hat{u}_j t^j + t^{k+3} O(1), \quad c(t) = \sum_{j=0}^k c_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad f(t) = \sum_{j=0}^k f_j t^j + t^{k+1} O(1). \quad (33)$$

Из условия теоремы следует, что при $t \rightarrow 0$

$$(a(t)\hat{u}'(t))' = o(t^{+\infty}) \quad \text{и} \quad a_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (34)$$

поэтому после подстановки разложений (33) в уравнение (1) получим

$$\begin{aligned} & (a(t)\hat{u}'(t))' + b\hat{u}'(t) + c(t)\hat{u}(t) = \\ & = (a(t)\hat{u}'(t))' + b \sum_{n=0}^{k+1} (n+1)\hat{u}_{n+1} t^n + t^k O(1) + \sum_{n=0}^k \left(\sum_{i=0}^n c_i \hat{u}_{n-i} \right) t^n + t^{k+1} O(1) = \\ & = \sum_{n=0}^k \left(b(n+1)\hat{u}_{n+1} + \sum_{i=0}^n c_i \hat{u}_{n-i} \right) t^n + t^{k+1} O(1) = \sum_{n=0}^k f_n t^n + t^{k+1} O(1). \end{aligned} \quad (35)$$

Приведа в уравнении (35) подобные и приравняв коэффициенты при t^n в левой и правой частях, получим рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов \hat{u}_n , которые и приводят к (31).

Доказательство 2° вытекает из теоремы 5, если учесть асимптотику (34). Теорема доказана.

Замечание 2. Как показывают лемма 1 и ход доказательства теорем 5–7, требование постоянства коэффициента $b(t)$ уравнения (1) в этих теоремах не существенно, а лишь сокращает необходимые преобразования.

6. Степенные асимптотики фундаментальной системы решений однородного уравнения в случае слабого вырождения. В предыдущих пунктах при построении асимптотик рассматривался случай так называемого сильного вырождения коэффициента $a(t)$, когда $a(0) = a'(0) = 0$. Процесс построения степенных асимптотик фундаментальной системы решений однородного уравнения в случае слабого вырождения, когда $a(0) = 0$, $a'(0) \neq 0$, таков же, как и в п. 3, поэтому в этом пункте мы укажем лишь окончательные результаты проведённого исследования.

Рассмотрим однородное уравнение (13) в случае слабого вырождения, когда

$$a(t) = \sum_{j=0}^{N+1} a_j t^j + t^{N+2} O(1), \quad \text{где} \quad a_0 = 0, \quad a_1 < 0, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Далее во всех формулах a_i и c_i — коэффициенты разложения в ряд Тейлора в точке $t = 0$ функций $a(t)$ и $c(t)$.

Согласно теореме 2, при $b > 0$ существует решение $u(t) \in C^{k_0}[-\delta, \delta]$ уравнения (13), где $k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : b + ka_1 > 0\}$, а при $b < 0$ у этого уравнения существует решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$.

В рассматриваемом случае слабого вырождения определяемую равенством (12) функцию $q(t)$ с точностью до постоянной можно записать в виде

$$q(t) = \begin{cases} (-t)^{-b/a_1} (1 + t \cdot O(1)) & \text{при } t \in [-\delta, 0), \\ t^{-b/a_1} (1 + t \cdot O(1)) & \text{при } t \in (0, \delta]. \end{cases} \quad (36)$$

Действительно, при $t \in (0, \delta]$ имеем

$$\begin{aligned} q(t) & = \exp\left(\int_t^\delta \frac{b \, d\xi}{a(\xi)}\right) = \exp\left(\int_t^\delta \frac{b \, d\xi}{a_1 \xi (1 + \xi O(1))}\right) = \exp\left(\frac{b}{a_1} \int_t^\delta \frac{(1 + \xi O(1)) \, d\xi}{\xi}\right) = \\ & = \exp\left(\frac{b}{a_1} \left(\int_t^\delta \frac{d\xi}{\xi} + \int_t^\delta O(1) \, d\xi\right)\right) = \exp\left(\frac{b}{a_1} \left(\ln \frac{\delta}{t} + t O(1)\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\delta}{t}\right)^{b/a_1} \exp\left(\frac{b}{a_1} t O(1)\right) = q_1 t^{-b/a_1} (1 + t \cdot O(1))$$

с некоторой постоянной $q_1 > 0$. Аналогично рассматривается функция $q(t)$ и при $t \in [-\delta, 0)$. Степенные асимптотики фундаментальной системы решений однородного уравнения в случае слабого вырождения устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 8. Пусть коэффициенты уравнения (13) удовлетворяют условию 1, причём $a_0 = 0$, $a_1 < 0$, $b = \text{const} \neq 0$. Функции $u(t)$ и $w(t)$, образующие фундаментальную систему решений этого уравнения, для любого $k \in \mathbb{N}$ допускают при $t \rightarrow 0 \pm$ асимптотические представления вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (37)$$

где функция $q(t)$ определена равенством (36) при некотором $\delta > 0$.

1°. При $b < 0$ функция $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты u_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -\frac{c_0}{a_1 + b} u_0,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(a_1(n+1) + b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k.$$

Функция $v(t) \in C^{k_1}[-\delta, \delta]$, где $k_1 = \max\{k \in \mathbb{N} : -b + ka_1 > 0\}$ и для любого $n \leq k_1 - 2$ коэффициенты v_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$v_0 = 1, \quad v_1 = -\frac{c_0}{a_1 - b} v_0,$$

$$v_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(a_1(n+1) - b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) v_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k_1 - 2,$$

и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0 \pm} q(t) = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} w(t) = +\infty.$$

2°. При $b > 0$ функция $u(t) \in C^{k_0}[-\delta, \delta]$, где $k_0 = \max\{k \in \mathbb{N} : b + ka_1 > 0\}$ и для любого $n \leq k_0 - 2$ коэффициенты u_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -\frac{c_0}{a_1 + b} u_0,$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)(a_1(n+1) + b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) u_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i u_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k_0 - 2.$$

Функция $v(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ коэффициенты v_j в представлении (37) вычисляются по рекуррентным формулам

$$v_0 = 1, \quad v_1 = -\frac{c_0}{a_1 - b} v_0,$$

$$v_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(a_1(n+1) - b)} \left((n+1) \sum_{i=2}^{n+1} a_i (n-i+2) v_{n-i+2} + \sum_{i=0}^n c_i v_{n-i} \right), \quad 1 \leq n \leq k,$$

и при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0 \pm} q^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0 \pm} w^{(k)}(t) = 0, \quad k \leq k_0,$$

а доопределённая нулём при $t = 0$ функция $w(t)$ принадлежит пространству $C^{k_0}[-\delta, \delta]$.

7. Примеры.

Пример 1. При $m \geq 2$, $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ рассмотрим однородное уравнение

$$(t^m u'(t))' + bu'(t) + cu(t) = 0. \quad (38)$$

По теореме 5 одно решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ из фундаментальной системы решений имеет вид (см. (24))

$$u(t) = \sum_{j=0}^k u_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad (39)$$

а коэффициенты вычисляются по формулам (см. (25))

$$u_0 - \text{произвольно, } u_{n+1} = \left(-\frac{c}{b}\right)^{n+1} \frac{u_0}{(n+1)!}, \quad 0 \leq n \leq m-2,$$

$$u_{n+1} = -\frac{(n+1)(n-m+2)u_{n-m+2} + cu_n}{b(n+1)}, \quad m-1 \leq n \leq k. \quad (40)$$

Другое решение $w(t)$ из фундаментальной системы решений имеет вид (см. (24))

$$w(t) = q(t) \sum_{j=0}^k v_j t^j + t^{k+1} O(1), \quad q(t) = \exp\left(\frac{bt^{1-m}}{m-1}\right), \quad (41)$$

а коэффициенты вычисляются по формулам (см. (26))

$$v_0 - \text{произвольно, } v_{n+1} = \left(\frac{c}{b}\right)^{n+1} \frac{v_0}{(n+1)!}, \quad 0 \leq n \leq m-2,$$

$$v_{n+1} = \frac{(n+1)(n-m+2)v_{n-m+2} + cv_n}{b(n+1)}, \quad m-1 \leq n \leq k. \quad (42)$$

В частности, при $m = 2$, как следует из (40) и (42), одно решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ имеет вид (39), где u_0 – произвольно,

$$u_1 = -\frac{c}{b}u_0, \quad u_{n+1} = -\frac{n(n+1)+c}{b(n+1)}u_n, \quad 1 \leq n \leq k,$$

а другое решение $w(t)$ имеет вид (41), где v_0 – произвольно,

$$q(t) = \exp\left(\frac{b}{t}\right), \quad v_1 = \frac{c}{b}v_0, \quad v_{n+1} = \frac{n(n+1)+c}{b(n+1)}v_n, \quad 1 \leq n \leq k.$$

Как следует из этих формул, при значениях $m = 2$, $c = -l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$ функции $u(t)$ и $w(t)$ могут быть выписаны в явном виде. Например, при $l = 1$, $c = -2$ фундаментальная система решений имеет вид

$$u(t) = u_0 \left(\frac{2}{b}t + 1\right), \quad w(t) = v_0 \left(-\frac{2}{b}t + 1\right) \exp\left(\frac{b}{t}\right),$$

а при $l = 2$, $c = -6$

$$u(t) = u_0 \left(\frac{12}{b^2}t^2 + \frac{6}{b}t + 1\right), \quad w(t) = v_0 \left(\frac{12}{b^2}t^2 - \frac{6}{b}t + 1\right) \exp\left(\frac{b}{t}\right).$$

Отметим также, что при $m = 2$ точные значения функций $u(t)$ и $w(t)$ выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c}, 1 - \sqrt{1-4c}; \frac{b}{t}\right),$$

которая, как известно, становится полиномом при

$$c = -l(l+1), \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4c} = -l, \quad l \in \mathbb{N},$$

что подтверждает полученные ранее в явном виде асимптотические решения.

Пример 2. Пусть $a(t) = o(t^\infty)$ при $t \rightarrow 0\pm$, а коэффициенты $b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Тогда по теореме 7 одно решение $u(t) \in C^\infty[-\delta, \delta]$ из фундаментальной системы решений уравнения

$$(a(t)u'(t))' + bu'(t) + cu(t) = 0$$

имеет вид (32), и коэффициенты вычисляются по формулам

$$u_{n+1} = \left(-\frac{c}{b}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}, \quad 0 \leq n \leq k.$$

Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$u(t) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(-\frac{c}{b}t\right)^n + t^{k+1} O(1) = \exp\left(-\frac{c}{b}t\right) + t^{k+1} O(1).$$

Аналогично, также по теореме 7, для любого $k \in \mathbb{N}$ асимптотическое представление для другого решения $w(t)$ из фундаментальной системы решений имеет вид

$$w(t) = q(t) \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \left(\frac{c}{b}t\right)^n + t^{k+1}O(1) = q(t) \exp\left(\frac{c}{b}t\right) + t^{k+1}O(1),$$

где функция $q(t)$ определена равенством (12) при некотором $\delta > 0$.

Пример 3. Пусть $f(t)$ является действительной бесконечно дифференцируемой на отрезке $[-\delta, \delta]$ функцией. Определим решение неоднородного уравнения

$$(t^2 u'(t))' + u'(t) - 2u(t) = f(t), \quad (43)$$

удовлетворяющего условию (2).

Общее решение уравнения (43) имеет вид

$$u(t) = C_1(2t + 1) + C_2(2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) + u_f(t), \quad (44)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные,

$$u_1(t) = 2t + 1, \quad u_2(t) = (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right)$$

есть фундаментальная система решений уравнения (43) (см. пример 2), а частное решение $u_f(t)$ можно выбрать в виде

$$u_f(t) = \begin{cases} (2t + 1) \int_t^0 (2\xi - 1)f(\xi)d\xi + (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_{-\delta}^t (2\xi + 1) \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) f(\xi)d\xi, & t < 0, \\ -(2t + 1) \int_0^t (2\xi - 1)f(\xi)d\xi + (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^t (2\xi + 1) \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) f(\xi)d\xi, & t > 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^t (2\xi + 1) \exp\left(-\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^\pm} u_f(t) = 0,$$

что позволяет доопределить $u_f(0) = 0$ и обеспечить нужную гладкость решения.

Для выполнения начального условия (2) следует выбрать $C_1 = u_0, C_2 = 0$.

В рассматриваемом примере предел при $t \rightarrow 0^-$ функций $u_2^{(k)}(t)$, $k \in \mathbb{N}_0$ равен нулю. Поэтому функция

$$u_2^-(t) = \begin{cases} (2t - 1) \exp\left(\frac{1}{t}\right), & t < 0, \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

является бесконечно малым при $t \rightarrow 0$ решением однородного уравнения (13), а указанное в формуле (5) теоремы 1 семейство решений уравнения (1), каждая функция которого удовлетворяет условию (2), имеет вид

$$u(t) = u_0(2t + 1) + u_f(t) + C u_2^-(t).$$

Заметим, что асимптотика функции $u_f(t)$ для конкретных $f(t)$ может быть получена с помощью различных пакетов математических вычислений.

Список литературы

1. Глушко В.П., Савченко Ю.Б. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи. *Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ»* 1985;23:125–218.
2. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998.4(3):1063–1095.
3. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. 1989. 336 с.
4. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. *Дифференц. уравнения*. 1968;4(9):1584–1597.

5. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференц. уравнения*. 1968;4(11):1956–1966.
6. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. III. *Дифференц. уравнения*. 1969;5(3):443–455.
7. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. IV. *Дифференц. уравнения*. 1969;5(4):599–611.
8. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж. 1972. 193.
9. Глушак А.В. О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. *Дифференц. уравнения*. 2021;57(1):61–75.
10. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1968. 464.
11. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференц. уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
12. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления решений. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016;20(241)44:5–22.
13. Архипов В.П., Глушак А.В. Вырождающиеся дифференциальные уравнения второго порядка. Асимптотические представления спектра. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016; 27(248)45: 45–59.
14. Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотические представления решений дифференциальных уравнений второго порядка около точки вырождения. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2013;5(148)30:5–18.
15. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика и Физика*. 2023;55(3):197–206.
16. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика и Физика*. 2024;56(2):87–96.
17. Архипов В.П., Глушак А.В. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика и Физика*. 2024;56(4):245–260.

References

1. Glushko VP., Savchenko YuB. Higher-order degenerate elliptic equations: Spaces, operators, boundary-value problems. *Journal of Soviet Mathematics*. 1987. 39:6:3088–3148. (In Russ.)
2. Rosov NKh, Sushko VG, Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundam. Prikl. Matem.* 1998;4(3):1063–1095. (In Russ.)
3. Ilyin AM. Coordination of asymptotic expansions of solutions to boundary value problems. М.: Nauka. 1989. 336 p. (In Russ.)
4. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. I. *Differential Equations*. 1968;4:9:1584–1597. (In Russ.)
5. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. II. *Differential Equations*. 1968;4:11:1956–1966. (In Russ.)
6. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. III. *Differential Equations*. 1969;5:3:443–455. (In Russ.)
7. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. IV. *Differential Equations*. 1969;5:4:599–611. (In Russ.)
8. Glushko VP. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh. 193. (In Russ.)
9. Glushak AV. Solvability of degenerating hyperbolic differential equations with unbounded operator coefficients. *Differential Equations*. 2021;57(1):61–75. (In Russ.)
10. Wasow W. Asimptoticheskie razlozheniya resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Moscow: Mir Publ. 1968. 464. (In Russ.)
11. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393. (In Russ.)
12. Arhipov VP, Glushak AV. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of of solutions. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2016;20(241)44:5–22. (In Russ.)
13. Arhipov VP, Glushak AV. 2016. Degenerate differential equations of the second order. Asymptotic representations of spectrum. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2016; 27(248)45: 45–59. (In Russ.)
14. Arhipov VP, Glushak AV. Asymptotic representations of solutions of differential second order equations near the point of degeneration. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics*. 2013;5(148)30:5–18. (In Russ.)
15. Arkhipov VP, Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics and Physics*. 2023;55(3):197–206. (In Russ.)
16. Arkhipov VP, Glushak AV. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics and Physics*. 2024;56(2):87–96. (In Russ.)

17. Arkhipov VP, Glushak AV. Two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations with conditions at the degeneracy point. *Applied Mathematics and Physics*. 2024;56(4): 245 – 260. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.12.2024

Received December 10, 2024

Поступила после рецензирования 20.02.2025

Revised February 20, 2025

Принята к публикации 24.02.2025

Accepted February 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орёл, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Затенение в окрестности гиперболической стационарной точки для дробных уравнений

Пискарев С. И. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Э. Л. Шишкиной)

МГУ имени М. В. Ломоносова,

Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, 1, стр. 4

piskarev@gmail.com

Аннотация. В работе изучается поведение траекторий абстрактных параболических задач с дробной по времени производной в окрестности гиперболической стационарной точки, где дробная производная понимается по Капуто – Джрбашяну. Хорошо известно, что для динамических систем с целой производной фазовое пространство в окрестности гиперболической стационарной точки расщепляется таким образом, что данная начальная задача сводится к начальным задачам с экспоненциально убывающими решениями в противоположных направлениях. В случае с дробной производной ситуация драматически меняется. Во-первых, отсутствует экспоненциальное убывание. Во-вторых, спектр линеаризованного оператора допускает разложение, отличное от классической картины. Тем не менее удается доказать аналоги результатов по затенению. Основные условия наших результатов выполняются, в частности, для операторов с компактной резольвентой и могут быть проверены для метода конечных элементов и разностных методов.

Ключевые слова: дробные уравнения, полулинейные задачи Коши в банаховом пространстве, гиперболическая стационарная точка, компактная сходимости резольвент, общая аппроксимационная схема, затенение

Благодарности: Работа выполнена в НИВЦ МГУ имени М. В. Ломоносова в рамках исследований по теме «Исследование и разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения в области вычислительной математики» ЦИТИС: АААА-А21-121011990147-4 и при поддержке РФФ (грант № 23-21-00005).

Для цитирования: Пискарев С. И. 2025. Затенение в окрестности гиперболической стационарной точки для дробных уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 41–51. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-41-51

Original Research

Shadowing in the Neighborhood of a Hyperbolic Equilibrium Point for Fractional Equations

Sergey I. Piskarev 

(Article submitted by a member of the editorial board E. L. Shishkina)

Lomonosov Moscow State University,

1, str. 4 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russia

piskarev@gmail.com

Abstract. In this paper, we study the behavior of trajectories of abstract parabolic problems with fractional time derivative in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point, where the fractional derivative is understood in the Caputo – Djerbashyan sense. It is well known that for dynamical systems with integer derivative, the phase space in the neighborhood of a hyperbolic equilibrium point splits in such a way that this initial value problem reduces to initial value problems with exponentially decreasing solutions in opposite directions. In the case of a fractional derivative, the situation changes dramatically. First, there is no exponential decay. Second, the spectrum of the linearized operator admits an expansion different from the classical picture. Nevertheless, we manage to prove analogs of the results on shadowing. The main conditions of our results are satisfied, in particular, for operators with a compact resolvent and can be verified for the finite elements method and difference methods.

Keywords: Fractional Equations, Semilinear Cauchy Problems in Banach Space, Hyperbolic Equilibrium Point, Compact Convergence of Resolvents, General Approximation Scheme, Shadowing

Acknowledgements: The paper was carried out at the Research Computing Center of Moscow State University named after M. V. Lomonosov as part of the research work on the topic "Research and development of methods, algorithms and software in the field of computational mathematics" and with the support of the Russian Science Foundation (grant No. 23-21-00005).

For citation: Piskarev S. I. 2025. Shadowing in the Neighborhood of a Hyperbolic Equilibrium Point for Fractional Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 41–51. (in Russian)

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-41-51

1. Введение. Дихотомические оценки. Пусть $B(E)$ обозначает банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов на комплексном банаховом пространстве E . Множество всех линейных замкнутых

плотно определенных операторов в E будем обозначать $\mathbb{C}(E)$. Для $B \in \mathbb{C}(E)$ обозначим через $\sigma(B)$ спектр, через $\rho(B)$ – его резольвентное множество, а через $D(B)$ – область определения оператора B .

Мы напомним как возникают задачи дихотомии для уравнений с целой производной на примере полулинейного уравнения в банаховом пространстве E^β , т. е. $E^\beta := D((-A)^\beta)$ наделено нормой графика $\|x\|_{E^\beta} = \|(-A)^\beta x\|_E$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(u(t)), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u^0 \in E^\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(\cdot) : E^\beta \subseteq E \rightarrow E$, $0 \leq \beta < 1$, предполагается непрерывной, ограниченной и непрерывно дифференцируемой функцией по Фреше. Более точно, предположим, что выполнено условие:

(F1) Для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|f'(w) - f'(z)\|_{B(E^\beta, E)} \leq \epsilon$ при $\|w - z\|_{E^\beta} \leq \delta$ для всех $w, z \in \mathcal{U}_{E^\beta}(u^*; \rho)$, где u^* – гиперболическая стационарная точка задачи (1).

Здесь $\mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$ – замкнутый шар в пространстве E^β с центром в 0 и радиусом $\rho > 0$.

Всюду далее $A : D(A) \subseteq E \rightarrow E$ – замкнутый оператор, такой что

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(E)} \leq \frac{M}{1 + |\lambda|} \quad \text{для всех } \Re \lambda \geq 0. \quad (2)$$

При условии (2) спектр оператора A лежит слева от мнимой оси $\sup\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} < 0$ так, что можно определить дробные степени $(-A)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, (см. [1, 2, 3]) оператора $(-A)$ и пространства E^β .

Делая замену переменных $v(\cdot) = u(\cdot) - u^*$ в задаче (1), где u^* – гиперболическая стационарная точка, мы приходим к задаче

$$\begin{aligned} v'(t) &= (A + f'(u^*))v(t) + f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t), \\ v(0) &= v^0 - u^* = v^0. \end{aligned}$$

Эта задача может быть записана в виде:

$$v'(t) = A_{u^*}v(t) + F_{u^*}(v(t)), \quad v(0) = v^0, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где $A_{u^*} = A + f'(u^*)$, $F_{u^*}(v(t)) = f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t)$. Заметим, что из условия (F1) следует, что функция $F_{u^*}(v(t)) = f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t)$ при малых $\|v^0\|_{E^\beta}$ имеет порядок $o(\|v(t)\|_{E^\beta})$. Поскольку $f'(u^*) \in B(E^\beta, E)$, $0 \leq \beta < 1$, то оператор $A_{u^*} = A + f'(u^*)$ является генератором аналитической C_0 -полугруппы [4]. Рассмотрим случай, когда спектр оператора A_{u^*} расщепляется на две части σ^+ и σ^- .

Предположим, что часть σ^+ спектра оператора $A + f'(u^*)$, которая находится справа от мнимой оси, состоит из конечного числа собственных значений конечной корневой кратности. Такое предположение выполняется, например, для операторов A , у которых резольвента компактна. Условия, при которых оператор A_{u^*} имеет свойство дихотомии, изучались, например, в [5, 6, 7]. В случае гиперболической стационарной точки u^* оператор A_{u^*} не имеет спектра на мнимой оси $i\mathbb{R}$. Пусть $U(\sigma^+) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re \lambda > 0\}$ является открытой связанной окрестностью множества σ^+ с границей $\partial U(\sigma^+)$. Разложим E^β , используя проектор Рисса

$$P(\sigma^+) := P(\sigma^+, A_{u^*}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(\sigma^+)} (\zeta I - A_{u^*})^{-1} d\zeta,$$

определенный по σ^+ . В соответствии с этим определением и аналитичностью C_0 -полугруппы $e^{tA_{u^*}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, существуют такие положительные константы $M_1, \gamma > 0$, что

$$\begin{cases} \|e^{tA_{u^*}} z\|_{E^\beta} \leq M_1 e^{-\gamma t} \|z\|_{E^\beta}, & t \geq 0, \\ \|e^{tA_{u^*}} w\|_{E^\beta} \leq M_1 e^{\gamma t} \|w\|_{E^\beta}, & t \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

для всех $w \in P(\sigma^+)E^\beta$ и $z \in (I - P(\sigma^+))E^\beta$. Поскольку $F_{u^*}(v(t)) = o(\|v(t)\|_{E^\beta})$ при малых $v(\cdot)$ дихотомические оценки (4) являются основными при рассмотрении поведения решения задачи (1) в окрестности гиперболической стационарной точки u^* .

Если элемент v^0 близок к 0, т. е., скажем, $v^0 \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$ при малом $\rho > 0$, тогда обобщенное решение $v(t; v^0)$ задачи (3) будет некоторое время оставаться в шаре $\mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$. Мы обозначим максимальное время нахождения решения $v(t; v^0)$ в шаре $\mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$ через $T = T(v^0) = \sup\{t \geq 0 : \|v(t; v^0)\|_{E^\beta} \leq \rho \text{ или } v(t; v^0) \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)\}$. Возвращаясь к решению задачи (3) для любых $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \rho)$, мы рассмотрим граничную задачу

$$\begin{cases} v'(t) = A_{u^*}v(t) + F_{u^*}(v(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ (I - P(\sigma^+))v(0) = (I - P(\sigma^+))v^0, & P(\sigma^+)v(T) = P(\sigma^+)v^T. \end{cases} \quad (5)$$

Обобщенное решение задачи (5), как было показано в [8], удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t) = e^{(t-T)A_{u^*}} P(\sigma^+)v^T + e^{tA_{u^*}} (I - P(\sigma^+))v^0 + \quad (6)$$

$$+ \int_0^t e^{(t-s)A_{u^*}} (I - P(\sigma^+)) F_{u^*}(v(s)) ds - \int_t^T e^{(t-s)A_{u^*}} P(\sigma^+) F_{u^*}(v(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Предложение 1.1. [8] Пусть $0 < T \leq \infty$ и выполняется условие (F1). Тогда существует $\rho > 0$ такое, что для любых $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E\beta}(0; \rho)$ уравнение (6) имеет единственное решение $v(\cdot) \in C([0, T]; \mathcal{U}_{E\beta}(0; \rho))$. Если $T = \infty$, то $\|v(t)\|_{E\beta} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Итак, если мы дискретизируем задачу (3) по пространственным или временным переменным, то удастся доказать, что оценки типа (4) для аппроксимирующих решений сохраняются. Если оценки типа (4) выполняются равномерно по параметру дискретизации, то эти оценки будут выполняться для аппроксимирующих решений задачи (6) и можно доказать, что имеет место затенение, т. е. близость решений исходной и аппроксимирующих задач равномерно по времени T . Затенение рассматривалось, например, в работах [8, 9, 10, 11, 12, 13].

В настоящей работе мы рассмотрим затенение (shadowing) траекторий для дробных уравнений.

1. Подготовительные сведения. Рассмотрим корректно поставленную задачу Коши

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(u(t)), \quad 0 < t \leq T; \quad u(0) = u^0, \quad (7)$$

где D_t^α – производная Капуто – Джрбашьяна, функция $f(\cdot)$ является достаточно гладкой (см. условие (F1)), а оператор A порождает аналитическое и компактное α -разрешающее семейство $S_\alpha(\cdot, A)$. О разрешимости задач (7) см., например, [15].

Дробный интеграл порядка $\alpha > 0$ определяется как

$$(J^\alpha q)(t) := (g_\alpha * q)(t), \quad t > 0,$$

где $g_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$ а $\Gamma(\alpha)$ есть гамма-функция. Производная Римана–Лиувилля порядка $0 < \alpha \leq 1$ определяется как

$$(D_t^\alpha q)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right) (J^{1-\alpha} q)(t), \quad t > 0,$$

а дробная производная Капуто – Джрбашьяна порядка $0 < \alpha \leq 1$ определяется как

$$(D_t^\alpha q)(t) = (D_t^\alpha q)(t) - \frac{q(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad t > 0.$$

Решение задачи Коши (7) с $f \equiv 0$ дается α -разрешающим семейством операторов $E_\alpha(\cdot)$, которое является операторным обобщением функции Миттаг-Леффлера, и обычно его записывают $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)u^0$. Мы обозначим это семейство операторов через $S_\alpha(t, A) \equiv E_\alpha(t^\alpha A)$.

Решение задачи (7) с неоднородным уравнением записывается в виде

$$u(t) = S_\alpha(t, A)u^0 + \int_0^t P_\alpha(t-s, A)f(u(s))ds, \quad (8)$$

где

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_\alpha(t, A)x dt, \quad \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t, A)x dt$$

для любых $\operatorname{Re} \lambda > \omega, x \in E$.

Общая аппроксимационная схема (см. [14]) может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E – банаховы пространства, а $\{p_n\}$ – последовательность линейных ограниченных операторов $p_n : E \rightarrow E_n, p_n \in B(E, E_n), n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, обладающих следующим свойством:

$$\|p_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{для любого} \quad x \in E. \quad (9)$$

Определение 1.1. Последовательность элементов $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, называется \mathcal{P} -сходящейся к $x \in E$, если $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; это записывается как $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Определение 1.2. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n), n \in \mathbb{N}$, называется \mathcal{PP} -сходящейся к ограниченному оператору $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и для любой последовательности $\{x_n\}, x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}$, такой, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, имеем $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$. Это записывается в виде $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$.

Обозначим $\Sigma_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda) < \theta\}$.

Теорема 1.1. [15] Предположим, что $0 < \alpha \leq 2$ и операторы A, A_n порождают экспоненциально ограниченные аналитические α -разрешающие семейства $S_\alpha(\cdot, A), S_\alpha(\cdot, A_n)$ в банаховых пространствах E, E_n , соответственно. Следующие условия (A) и (B) вместе эквивалентны условию (C).

(A) (согласованность): существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} (\lambda I - A)^{-1};$$

(B) (устойчивость): найдутся такие константы $M \geq 1$, $0 < \varphi \leq \pi/2$ и $\omega \in \mathbb{R}$, не зависящие от n , что сектор $\omega + \Sigma_{\varphi+\pi/2}$ содержится в $\rho(A_n)$ и

$$\left\| \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha I_n - A_n)^{-1} \right\|_{B(E_n)} \leq \frac{M}{|\lambda - \omega|}, \quad \lambda \in \omega + \Sigma_{\varphi+\pi/2},$$

для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \beta < \varphi$;

(C) (сходимость): для некоторого конечного $\omega_1 > 0$ имеем

$$\sup_{z \in \Sigma_\beta} e^{-\omega_1 \Re z} \left\| S_\alpha(z, A_n)x_n - p_n S_\alpha(z, A)x \right\|_{E_n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

если $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ при всех $x_n \in E_n$, $x \in E$ и любого $0 < \beta < \varphi$. При полудискретизации естественно предполагать, что условия (A) и (B) выполняются.

2. Формулировка основных результатов. Следуя конструкциям раздела 1, задаче Коши (7) сопоставим граничную задачу

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha v(t) = A_{u^*} v(t) + F_{u^*}(v(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ (I - P(\sigma^+))v(0) = (I - P(\sigma^+))v^0, & P(\sigma^+)v(T) = P(\sigma^+)v^T. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь u^* – стационарная точка, т. е.

$$A_{u^*} + f(u^*) = 0. \quad (11)$$

В случае $T = \infty$ второе граничное условие исчезает. Обобщенное решение задачи (10), в силу равенства [16, (8.2.16)]

$$u(T) = S_\alpha(T-t, A_{u^*})u(t) + \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*})F_{u^*}(v(s))ds,$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} v(t) = & S_\alpha(t, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))v^0 + \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))F_{u^*}(v(s))ds + \\ & S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1} \left(P(\sigma^+)v^T - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*})P(\sigma^+)F_{u^*}(v(s))ds \right), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (12)$$

В последнем уравнении оператор $S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1} \equiv E_\alpha((t-\tau)^\alpha A_{u^*}^+)^{-1}$ на конечномерном подпространстве $P(\sigma^+)E^\beta$ корректно определен [17], поскольку все корни функции Миттаг-Леффлера имеют аргумент в интервале $(\alpha\pi/2, \alpha\pi)$, см. [18]. В силу теоремы об отображении спектра нули не появятся в спектре оператора $S_\alpha(T-t, A_{u^*})P(\sigma^+)$, если спектр оператора $A_{u^*}P(\sigma^+)$ принадлежит сектору от $-\alpha\pi/2$ до $\alpha\pi/2$.

Заметим, что множество σ^- , т. е. подмножество спектра $\sigma(A_{u^*}) \not\subseteq \Sigma_{\alpha\pi/2}$, в дробном случае может содержать несколько точек $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\Re \lambda \geq 0$. В силу условия (2) оператор A_{u^*} также порождает аналитическую полугруппу и поэтому число таких точек конечно. Обозначим это множество через Σ_α^+ .

Теорема 2.1. Пусть оператор A , имеющий компактную резольвенту, и функция $f(\cdot)$ удовлетворяют условиям (2) и (F1). Тогда найдется такое $\hat{\rho} > 0$, что для любого $0 < \hat{\rho}_2 \leq \hat{\rho}$ можно указать $0 < \hat{\rho}_1 \leq \hat{\rho}_2$ со свойством, что уравнение (12) имеет единственное решение $v(\cdot) = v(v^0, v^T, \cdot) \in C([0, T]; \mathcal{U}_{E^\beta}(0; \hat{\rho}_2))$ для всех $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E^\beta}(0, \hat{\rho}_1)$ и всех $0 < T \leq \infty$. Если $T = \infty$, то $\|v(t)\|_{E^\beta} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

В случае компактных операторов естественно рассмотреть аппроксимацию, сохраняющую указанное свойство.

Определение 2.1. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется \mathcal{P} -компактной, если для любого $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, найдутся $\mathbb{N}'' \subseteq \mathbb{N}'$ и $x \in E$ такие что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ при $n \rightarrow \infty$ из \mathbb{N}'' .

Определение 2.2. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n : E_n \rightarrow E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется компактно сходящейся к оператору $B : E \rightarrow E$, если $B_n \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} B$ и выполняется следующее условие:

$$\|x_n\|_{E_n} = O(1) \implies \{B_n x_n\} \text{ является } \mathcal{P}\text{-компактной.}$$

Определение 2.3. Областью компактной сходимости резольвент Δ_{cc} , где $A_n \in C(E_n)$ и $A \in C(E)$, называется множество всех $\lambda \in \rho(A)$ таких, что $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{P}\mathcal{P}} (\lambda I - A)^{-1}$ компактно.

Определение 2.4. Последовательность линейных замкнутых операторов $A_n \in C(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется согласованной с замкнутым линейным оператором $A \in C(E)$, если для любого $x \in D(A)$ найдется такая

последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in D(A_n) \subseteq E_n$, $n \in \mathbb{N}$, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ и $A_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ax$. Пишут (A_n, A) – согласованы.

Рассмотрим в банаховых пространствах E_n^β задачи Коши

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u_n(t) &= A_n u_n(t) + f_n(u_n(t)), \quad t \geq 0, \\ u_n(0) &= u_n^0 \in E_n^\beta, \end{aligned} \quad (13)$$

где $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^0$, операторы (A_n, A) – согласованы, в функции $f_n(\cdot) : E_n^\beta \rightarrow E_n$ глобально ограничены и глобально Липшицево непрерывны равномерно по $n \in \mathbb{N}$, и непрерывно дифференцируемы по Фреше, причем $f_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}} f(\cdot)$ в подходящем смысле (см. условия (F2)–(F3)).

Эти условия имеют вид:

(F2) Для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|f'_n(w_n) - f'_n(z_n)\|_{B(E_n^\beta, E_n)} \leq \epsilon$ при $\|w_n - z_n\|_{E_n^\beta} \leq \delta$ для всех $w_n, z_n \in \mathcal{U}_{E_n^\beta}(u_n^*, \delta)$, где u_n^* – гиперболические стационарные точки задачи (13).

(F3) Отображения f_n непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{U}_{E_n^\beta}(p_n^\beta u^*, \rho)$ и как только $x_n \in \mathcal{U}_{E_n^\beta}(p_n^\beta u^*, \rho)$ и $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} x$, то $f_n(x_n) \xrightarrow{\mathcal{P}} f(x)$ и $f'_n(x_n) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}} f'(x)$.

Замечание 2.1. Как результат мы получаем $\|F'_{u_n^*, n}(w_n)\| \leq c_\rho \|w_n\|_{E_n^\beta}$ с константами $c_\rho \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Здесь $\rho > 0$ являются радиусами шаров $\mathcal{U}_{E_n^\beta}(0; \rho)$, для которых найдется такое $\delta > 0$, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|w_n\|_{E_n^\beta} \leq \delta} \|f'_n(w_n + p_n^\beta u^*) - f'_n(p_n^\beta u^*)\|_{B(E_n^\beta, E_n)} \leq \rho.$$

Пусть задача (11) имеет гиперболическую стационарную точку u^* и выполняются условия (F2), (F3). Тогда существуют такие $n^* \in \mathbb{N}$ и $\rho^* > 0$, что уравнения $A_n u_n + f_n(u_n) = 0$ имеют единственные решения $u_n^* \in D(A_n) \cap \mathcal{U}_{E_n^\beta}(p_n^\beta u^*, \rho^*)$ для каждого $n \geq n^*$. Более того [8], каждая u_n^* является гиперболической и удовлетворяет $\|u_n^* - p_n^\beta u^*\|_{E_n^\beta} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В случае $\Delta_{cc} \neq \emptyset$ этот факт можно установить, например, так. Определим операторы $M(w) = Iw + A^{-1}f(w)$, $M_n(w_n) = I_n w_n + A_n^{-1}f_n(w_n)$. Производная по Фреше $M'(w) = I + A^{-1}f'(w)$ – это оператор, действующий из E^β в E^β , поскольку A^{-1} отображает E в $D(A) \subset E^\beta$. Из условия (F3) мы получаем $M_n(v_n) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^\beta} M(v)$ при $v_n \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} v$ и $\|M'_n(w_n + p_n^\beta u^*) - M'_n(p_n^\beta u^*)\|_{E_n^\beta} \leq \rho$, если $\|w_n\|_{E_n^\beta} \leq \delta$ с $\rho = \rho(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по n . Из условия (F2) следует, что $M'_n(p_n u^*) \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^\beta} M'(u^*)$ собственно, операторы $M'_n(p_n u^*)$ Фредгольмовы с нулевым индексом и $\mathcal{N}(A + f'(u^*)) = \{0\}$. По теореме 2 из [14] следует сходимость $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^*$.

Рассмотрим теперь гиперболическую стационарную точку u^* задачи (1) и гиперболические стационарные точки $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^*$ задачи (13). В этом случае

$$D_t^\alpha v_n(t) = A_{u_n^*, n} v_n(t) + F_{u_n^*, n}(v_n(t)), \quad v_n(0) = v_n^0, \quad t \geq 0,$$

где $A_{u_n^*, n} = A_n + f'_n(u_n^*)$, $F_{u_n^*, n}(v_n(t)) = f_n(v_n(t) + u_n^*) - f_n(u_n^*) - f'_n(u_n^*)v_n(t)$.

Теорема 2.2. (О затенении) Пусть оператор A порождает экспоненциально убывающую аналитическую C_0 -полугруппу и $0 \leq \beta < \gamma < 1$. Пусть резольвенты операторов A_n, A компактны, $\Delta_{cc} \neq \emptyset$ и выполнены условия (B), (F1), (F2), (F3). Тогда найдется такое $\rho_0 > 0$, что для любого $\epsilon_0 > 0$ существует число $n_0 = n_0(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого обобщенного решения $u(t)$ задачи (1), удовлетворяющего $u(t) \in \mathcal{U}_{E_\gamma}(u^*, \rho_0)$, $0 \leq t \leq T$ при некотором $0 < T \leq \infty$ найдутся такие начальные условия $u_n^0 \in E_n^\beta$, $n \geq n_0$, что обобщенные решения $u_n(t; u_n^0)$ задач (13) существуют на $[0, T]$ и удовлетворяют

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|p_n^\beta u(t) - u_n(t; u_n^0)\|_{E_n^\beta} \leq \epsilon_0 \quad \forall n \geq n_0(\epsilon_0). \quad (14)$$

Теорема 2.3. (О затенении) Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда найдется такое $\rho_0 > 0$, что для любого $\epsilon_0 > 0$ существует число $n_0 = n_0(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ такое, что для любых обобщенных решений $u_n(t)$, $n \geq n_0$ задачи (13), удовлетворяющих $u_n(t) \in \mathcal{U}_{E_\gamma}(u_n^*, \rho_0)$, $0 \leq t \leq T$ для некоторого $0 < T \leq \infty$ существуют такие начальные условия $u^{n,0} \in E^\beta$, $n \geq n_0$, что обобщенные решения $u(t; u^{n,0})$ задачи (1) существуют на $[0, T]$ и удовлетворяют

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u_n(t) - p_n^\beta u(t; u^{n,0})\|_{E_n^\beta} \leq \epsilon_0 \quad \forall n \geq n_0(\epsilon_0).$$

3. Доказательство теоремы 2.1. Дадим некоторые определения.

Определение 3.1. Стационарная точка u^* называется гиперболической, если оператор $A_{u^*} = A + f'(u^*)$ не имеет спектра на границе $\partial\Sigma_{\alpha\pi/2}$.

Определение 3.2. Точки спектра оператора A_{u^*} , лежащие внутри $\Sigma_{\alpha\pi/2} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda) < \alpha\pi/2\}$ и обозначаемые σ^+ , назовем неустойчивым спектром, а точки спектра оператора A_{u^*} , лежащие вне $\Sigma_{\alpha\pi/2}$, и обозначаемые σ^- , назовем устойчивым спектром оператора A_{u^*} .

Заметим, что множество σ^- может содержать несколько (конечное число) точек $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\Re\lambda > 0$. В силу условия (2) оператор A_{u^*} также порождает аналитическую полугруппу и поэтому число таких точек конечно. Обозначим это множество через Σ_α^+ .

Теорема 2.1. имеет следующее

Доказательство. Определим оператор $G(z; v(\cdot))$ как правую часть выражения (12), где $z = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^T \end{pmatrix}$ – вектор с нормой $\|z\| = \|v^0\|_{E^\beta} + \|v^T\|_{E^\beta}$. Во-первых, например, в [19, 20, 21, 15] установлено, что компактность резольвенты $R(\lambda^\alpha; A)$ для некоторого $\lambda^\alpha \in \rho(A)$ эквивалентна компактности семейства $S_\alpha(t, A)$ для любого $t > 0$, а также компактности $P_\alpha(t, A)$ для любого $t > 0$. Во-вторых, рассмотрим уравнение

$$v(t) = G(z; v(\cdot))(t), \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

в пространстве непрерывных функций $\Upsilon = C([0, T]; E^\beta)$. В [22] установлено, что оператор $G(z; \cdot) : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$ непрерывен. Наконец, в силу компактности резольвенты $R(\lambda^\alpha; A)$ в [22] показано, что оператор $G(z; v(\cdot)) : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$ компактен при любом векторе z . Компактность оператора $S_\alpha(t, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))v^0 + \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u^*})(I - P(\sigma^+))F_{u^*}(v(s))ds$ в пространстве Υ установлена в [22], теорема 4.5. Обратим внимание лишь на то, что проектор $P(\sigma^+)$ конечномерен, и, кроме того, часть оператора $A_{u^*}^-$, где $A_{u^*}^-$ – сужение оператора A_{u^*} на подпространство $(I - P(\sigma^+))E^\beta$, отвечающая спектру Σ_α^+ , также действует в конечномерном пространстве, т. к. часть спектра Σ_α^+ состоит из конечного числа точек конечной корневой кратности. Оператор $S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1} \left(P(\sigma^+)v^T - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*})P(\sigma^+)F_{u^*}(v(s))ds \right)$ является компактным в пространстве Υ согласно теореме 4.1 из [23].

Производная оператора $G'_v(z; v(\cdot))$ при $z_0 = 0$ и $v_0(\cdot) = 0$ существует и оператор $I - G'_v(z_0; v_0(\cdot))$ имеет ограниченный обратный. Остается воспользоваться теоремой 54.3 из [24], которая утверждает существование таких $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$, что уравнение (15) имеет при любых $\|z\| \leq \rho_1$ решение $v(\cdot)$ в $C([0, T]; E^\beta)$ с $\|v(\cdot)\|_\Upsilon \leq \rho_2$.

Случай $T = \infty$ вытекает из оценок раздела 3 в [22], леммы 2 в [25] и (11) из [23].

4. Доказательство теорем 2.2 и 2.3. Определим операторы

$$p_n^\beta = (-A_n)^{-\beta} p_n (-A)^\beta \in B(E^\beta, E_n^\beta). \quad (16)$$

Сходимость $x_n \xrightarrow{p_n^\beta} x$ имеет место тогда и только тогда, когда $\|x_n - p_n^\beta x\|_{E_n^\beta} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем $\|x_n - p_n^\beta x\|_{E_n^\beta} = \|(-A_n)^\beta x_n - p_n (-A)^\beta x\|$ и

$$\|p_n^\beta x\|_{E_n^\beta} = \|p_n (-A)^\beta x\|_{E_n} \rightarrow \|(-A)^\beta x\|_E = \|x\|_{E^\beta} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

для любого $x \in D((-A)^\beta)$ и, следовательно, выполняется (9) для пространств E^β, E_n^β .

Кроме связывающих отображений p_n, p_n^β нам понадобятся отображения, согласованные с гиперболической точкой. Заметим, что проекторы $P = P(\sigma^+)$ и $P_n = P_n(\sigma_n^+)$ конечномерны и сходятся $P_n \xrightarrow{PP} P$ компактно. Определим отображения $\tilde{p}_n : E \mapsto E_n$ по формуле

$$\tilde{p}_n = P_n p_n P + (I_n - P_n) p_n (I - P) \quad (17)$$

и отображения $\tilde{p}_n^\beta : E^\beta \mapsto E_n^\beta$ по формуле

$$\tilde{p}_n^\beta x = \begin{cases} (A_{u_n^*, n})^{-\beta} P_n p_n (A_{u^*})^\beta P x, & x \in P E^\beta, \\ (-A_{u_n^*, n})^{-\beta} (I_n - P_n) p_n (-A_{u^*})^\beta (I - P) x, & x \in (I - P) E^\beta. \end{cases} \quad (18)$$

Без потери общности мы можем определить норму в E^β таким образом, что

$$\|v\|_{E^\beta} = \max(\|P(\sigma^+)v\|_{E^\beta}, \|(I - P(\sigma^+))v\|_{E^\beta}). \quad (19)$$

В силу равенства

$$(\tilde{p}_n - p_n)x = 2(P_n p_n - p_n P)P x - (P_n p_n - p_n P)x,$$

получаем, что система отображений $\{\tilde{p}_n\}$ эквивалентна системе отображений $\{p_n\}$ на E , а система $\{\tilde{p}_n^\beta\}$ эквивалентна системе $\{p_n^\beta\}$ на E^β (это показывается как и в [8]).

Доказательство теоремы 2.2. Пусть $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, является обобщенным решением задачи (1), а точнее $u(t) \in \mathcal{U}_{E^Y}(u^*, \rho_0)$ для всех $0 \leq t \leq T$. Тогда $v(t) := u(t) - u^* \in \mathcal{U}_{E^Y}(0, \rho_0)$ является решением уравнения (12) с краевыми условиями

$$v^- = (I - P)v(0), \quad v^+ = Pv(T).$$

В силу выбора нормы (19) имеем

$$\|v^-\|_{E^Y} \leq \rho_0, \quad \|v^+\|_{E^Y} \leq \rho_0.$$

Применим теорему 2.1 с γ вместо β . В силу единственности в $C([0, T], \mathcal{U}_{E^Y}(0, \hat{\rho}_2))$ решение $v(v^-, v^+, \cdot)$ по теореме 2.1 удовлетворяет $v(t) = v(v^-, v^+, t)$, $0 \leq t \leq T$. Определим далее полудискретные граничные задачи с условиями

$$v_n^- = \tilde{p}_n^\beta v^-, \quad v_n^+ = \tilde{p}_n^\beta v^+.$$

По определению (18) имеем $v_n^- = \tilde{p}_n^\beta v^- = (I_n - P_n)\tilde{p}_n^\beta v^-$ и $v_n^+ = \tilde{p}_n^\beta v^+ = P_n\tilde{p}_n^\beta v^+$ и в силу (4.3) из [8]

$$\|v_n^\pm\|_{E_n^\beta} \leq \tilde{C}_\beta \|v^\pm\|_{E^\beta} \leq \tilde{C}_\beta \rho_0.$$

Выбирая сходящиеся стационарные точки $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}} u^*$ и соответствующие единственные решения $v_n(\cdot) = v_n(v_n^-, v_n^+, \cdot) \in C([0, T]; \mathcal{U}_{E_n^\beta}(0, \rho))$ задач

$$\begin{aligned} v_n(t) = & S_\alpha(t, A_{u_n^*})(I_n - P_n)v_n^- + \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u_n^*})(I_n - P_n)F_{u_n^*}(v_n(s))ds + \\ & S_\alpha(T-t, A_{u_n^*})^{-1} \left(P_nv_n^+ - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u_n^*})P_nF_{u_n^*}(v_n(s))ds \right), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (20)$$

мы получаем, что

$$u_n^0 = u_n^* + v_n(0), \quad u_n(t) = v_n(t) + u_n^*$$

удовлетворяют утверждению настоящей теоремы. Выберем ρ_0 так, чтобы для (12) и (20) можно было применить оценку из теоремы о неявной функции см., например, лемма 1 в [14] или лемма 6.1 в [8]. Таким образом, для решения $v_n(t)$ и функции $\tilde{p}_n^\beta v(t)$ получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \|v_n(t) - \tilde{p}_n^\beta v(t)\|_{E_n^\beta} \leq \\ & \leq C^* \|v_n - G_n(v_n^-, v_n^+, v_n) - \tilde{p}_n^\beta v(t) + G_n(v_n^-, v_n^+, \tilde{p}_n^\beta v(t))\|_{C([0, T]; E_n^\beta)} \leq \\ & \leq C^* \sup_{0 \leq t \leq T} \|\eta_n^-(t) + \eta_n^+(t)\|_{E_n^\beta}, \end{aligned} \quad (21)$$

где члены справа заданы равенствами

$$\begin{aligned} \eta_n^-(t) = & \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(t, A_{u^*})(I - P)v^- + \tilde{p}_n^\beta \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u^*})(I - P)F_{u^*}(v(s))ds \\ & - S_\alpha(t, A_{u_n^*, n})(I_n - P_n)v_n^- - \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u_n^*, n})(I_n - P_n)F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds \\ \eta_n^+(t) = & \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1} \left(Pv^+ - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*})PF_{u^*}(v(s))ds \right) \\ & - S_\alpha(T-t, A_{u_n^*, n})^{-1} \left(P_nv_n^+ + \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u_n^*, n})P_nF_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds \right). \end{aligned}$$

Оценим η_n^- , полагая $\tilde{E} = (I - P)E$, $g(t) = (I - P)F_{u^*}(v(t))$, $g_n(t) = (I_n - P_n)F_{u_n^*, n}(\tilde{p}_n^\beta v(t))$, $K_1 = \mathcal{U}_{E^Y}(0, \rho_0)$, $K_2 = \{(I - P)F_{u^*}(w) : w \in \mathcal{U}_{E^Y}(0, \rho_0)\}$, $u^0 = v^-$, $u_n(0) = \tilde{p}_n^\beta u(0) = \tilde{p}_n^\beta v^-$. Заметим, что в силу непрерывности F_{u^*} из E^β в E и компактному вложению пространства E^Y в E^β множество K_1 компактно в E^β , а K_2 компактно в E . Остается заметить, что сильная дискретная сходимость становится равномерной на компакте, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ при $n \geq n_1 = n(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \|g_n(t) - \tilde{p}_n g(t)\|_{\tilde{E}_n} & \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|(I_n - P_n) \left(F_{u_n^*, n}(\tilde{p}_n^\beta v(t)) - p_n F_{u^*}(v(t)) \right)\|_{E_n} \\ & + \sup_{w \in K_2} \|(I_n - P_n)(p_n P - P_n p_n)F_{u^*}(w)\|_{E_n} \\ & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому мы получаем $\|\eta_n^-\|_{E_n^\beta} \leq \varepsilon$ при $n \geq n_1$. Аналогичным образом получаем оценку для $\|\eta_n^+\|_{E_n^\beta}$ при $n \geq n_2$. Наконец, в силу (21) и сходимости стационарных точек $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\beta} u^*$ мы получаем для всех $n \geq c \max(n_1, n_2)$ и всех $0 \leq t \leq T$,

$$\|u_n(t) - p_n^\beta u(t)\|_{E_n^\beta} \leq \|v_n(t) - p_n^\beta v(t)\|_{E_n^\beta} + \|u_n^* - p_n^\beta u^*\|_{E_n^\beta} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказательство теоремы 2.3. Как и в теореме 2.2, возьмем некоторое $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим обобщенные решения $u_n(t)$, $0 \leq t \leq T$, задач (13), которые лежат в $\mathcal{U}_{E_n^\gamma}(u_n^*, \rho_0)$ и определим

$$v_n(t) = u_n(t) - u_n^*, \quad v_n^- = (I_n - P_n)v_n(0), \quad v_n^+ = P_nv_n(T).$$

В силу равномерной ограниченности проекторов имеем для некоторой константы $C_b \geq 1$

$$\|v_n^-\|_{E_n^\gamma} \leq C_b \rho_0, \quad \|v_n^+\|_{E_n^\gamma} \leq C_b \rho_0.$$

Применим теорему 2.1 к данным v_n^\pm с γ вместо β . Пусть $C_b \rho_0 \leq \rho$ так что выполняется $v_n(t) = v_n(v_n^-, v_n^+, t)$, $0 \leq t \leq T$ в силу единственности решений в $C([0, T], \mathcal{U}_{E_n^\gamma}(0, \tilde{\rho}))$. Положим $\beta < \mu < \gamma$ и воспользуемся леммой 4.5 из [8] для утверждения существования граничных условий $v^{n,-} \in (I - P)E^\mu$, $v^{n,+} \in PE^\mu$, $n \geq n_1(\varepsilon_0)$ для исходной задачи (12) таких, что

$$\|v_n^- - \tilde{p}_n^\beta v^{n,-}\|_{E_n^\beta} + \|v_n^+ - \tilde{p}_n^\beta v^{n,+}\|_{E_n^\beta} \leq C^* \varepsilon_0, \quad \|v^{n,\pm}\|_{E^\mu} \leq \hat{C} \rho_0. \quad (22)$$

Напомним вкратце эти рассуждения. Пусть задана последовательность $\{v_n^0\}$, $v_n^0 \in E_n^\gamma$ с $\|(-A_n)^\gamma v_n^0\| \leq b$. Предположим от противного, что найдутся $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$ и $v \in E^\beta$ со свойством $\|v_n^0 - p_n^\beta v\| \geq \varepsilon > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}'$. Понятно, что последовательность $(-A_n)^{-\beta} (-A_n)^\beta v_n^0 = v_n^0$ является \mathcal{P} -компактной, и, значит, для некоторой $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ имеем $v_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{v}$ при $n \in \mathbb{N}''$. Кроме того, $(-A_n)^{\beta-\gamma} (-A_n)^\gamma v_n^0 = (-A_n)^\beta v_n^0$ тоже \mathcal{P} -компактна. Поэтому для $\mathbb{N}''' \subset \mathbb{N}''$ имеем $(-A_n)^\beta v_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} z$ при $n \in \mathbb{N}'''$. Значит, $\bar{v} = (-A)^{-\beta} z \in E^\beta$. Наконец, $\|v_n^0 - p_n^\beta \bar{v}\|_{E_n^\beta} = \|(-A_n)^\beta v_n^0 - p_n z\|_{E_n} \rightarrow 0$ при $n \in \mathbb{N}'''$, что противоречит нашему допущению.

Далее, мы применяем теорему 2.2 с граничными условиями $v^{n,\pm}$. Обозначим единственное решение в $C([0, T]; \mathcal{U}_{E^\gamma}(0; \hat{\rho}_2))$ через $v^n(t)$, $0 \leq t \leq T$. Покажем, что

$$u^{n,0} = v^n(0) + u^*, \quad u(t; u^{n,0}) = v^n(t) + u^*, \quad 0 \leq t \leq T,$$

удовлетворяет (14). Для этой цели мы подставим $v_n(\cdot)$ и $\tilde{p}_n^\beta v^n(\cdot)$ в неравенство (21). Это неравенство выполняется, поскольку $\|v_n(t)\|_{E_n^\beta} \leq \tilde{C} \rho_0$, с должной константой \tilde{C} .

Мы получили оценку

$$\|v_n(\cdot) - \tilde{p}_n^\beta v^n(\cdot)\|_{C([0, T]; E_n^\beta)} \leq \quad (23)$$

$$\|\tilde{p}_n^\beta v^n - G_n(v_n^-, v_n^+, \tilde{p}_n^\beta v^n)\|_{C([0, T]; E_n^\beta)} \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|\eta_n^-(t) + \eta_n^+(t) + \varphi_n^-(t) + \varphi_n^+(t)\|_{E_n^\beta},$$

где члены справа заданы как

$$\eta_n^-(t) = \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(t, A_{u^*})(I - P)v^- + \tilde{p}_n^\beta \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u^*})(I - P)F_{u^*}(v(s))ds$$

$$- S_\alpha(t, A_{u_n^*, n})(I_n - P_n)v_n^- - \int_0^t P_\alpha(t-s, A_{u_n^*, n})(I_n - P_n)F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s))ds$$

$$\eta_n^+(t) = \tilde{p}_n^\beta S_\alpha(T-t, A_{u^*})^{-1} \left(P v^+ - \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u^*}) P F_{u^*}(v(s)) ds \right)$$

$$- S_\alpha(T-t, A_{u_n^*, n})^{-1} \left(P_n v_n^+ + \int_t^T P_\alpha(T-s, A_{u_n^*, n}) P_n F_{u_n^*}(\tilde{p}_n^\beta v(s)) ds \right).$$

$$\varphi_n^-(t) = S_\alpha(t, A_{u_n^*, n})(I_n - P_n)(\tilde{p}_n^\beta v^{n,-} - v_n^-),$$

$$\varphi_n^+(t) = S_\alpha(T-t, A_{u_n^*, n})^{-1} P_n(\tilde{p}_n^\beta v^{n,+} - v_n^+).$$

Мы получили оценку $\|\eta_n^\pm\| \leq C\varepsilon_0$ практически как и в теореме 2.2, см. (21), основное отличие состоит в том, что $v(s)$ заменено на $v^n(s)$, а компактные множества даны как $K_2 = \{(I - P)F_{u^*}(w) : w \in \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \rho_0)\}$ и $K_1 = \mathcal{U}_{E^\gamma}(0, \hat{C}\rho_0)$, см. (22).

Для почти всех n , т. е. при $n \geq n_1(\varepsilon_0)$, мы имеем

$$\|\varphi_n^-(t) + \varphi_n^+(t)\|_{E_n^\beta} \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Используя (23) мы, наконец, получаем для $n \geq \max(n_1(\varepsilon_0), n_2(\varepsilon_0))$

$$\|u_n(t) - p_n^\beta u(t, u^{n,0})\|_{E_n^\beta} \leq \|v_n(t) - p_n^\beta v^n(t)\|_{E_n^\beta} + \|u_n^* - p_n^\beta u^*\|_{E_n^\beta} \leq \varepsilon_0$$

равномерно по $0 \leq t \leq T$.

Список литературы

1. Ashyralyev A. and Sobolevskii P.E. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, vol.69, 1994.
2. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. 1967. 464 с.
4. Пискарев С.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их аппроксимация. М.: издательство МГУ имени М. В. Ломоносова. 2005. 287 с.
5. Kaashoek M.A., Verduyn Lunel S.M. An integrability condition on the resolvent for hyperbolicity of the semigroup. *Differential Equations*. 1994;112(2):374–406.
6. Vu Quoc Phong. A new proof and generalizations of Gearhart's theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2007;135(но.7):2065–2072.
7. Vu Quoc Phong. The spectral radius, hyperbolic operators and Lyapunov's theorem. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 187–194, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.
8. Beyn W.-J., Piskarev S. Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2008;10(1):19–42.
9. Beyn W.-J. Numerical methods for dynamical systems. Advances in numerical analysis, Vol. I (Lancaster, 1990), 175–236, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.
10. Larsson S. Numerical analysis of semilinear parabolic problems. (English) Ainsworth, Mark (ed.) et al., The graduate student's guide to numerical analysis '98. Lecture notes from the 8th EPSRC summer school in numerical analysis. Leicester, GB, July 5-17, 1998. Berlin: Springer. Springer Ser. Comput. Math. 26, 83-117 (1999).
11. Larsson S., Sanz-Serna J.-M. The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1994;31(4):1000–1018.
12. Larsson S., Sanz-Serna J.-M. A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*. 1999;68(225): 55–72.
13. Pilyugin S.Yu. Shadowing in Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
14. Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). *Nonlinear Analysis*. 1978;2:647–687.
15. Piskarev S., Ovchinnikov A. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. World Scientific, 2023. 204 pp. ISBN: 978-981-124-892-4
16. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag – Leffler functions, related topics and applications. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer (2020).
17. Kokurin M.M. The uniqueness of a solution to the inverse Cauchy problem for a fractional differential equation in a Banach space. *Russian Mathematics*. 2013;57:16–30.
18. Popov A.Yu., Sedletskiy A.M. Distribution of the roots of the Mittag – Leffler functions. *Sovremennaja matematika. Fundamental'nye Napravlenija*. 2011;V.40:3–171.
19. Антонюк А.В., Кочубей А.Н., Пискарев С.И. О компактности и равномерной непрерывности разрешающего семейства для уравнения с дробными производными (English summary). Доповіді Національної академії наук України, 2014, №6. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky* 2014; 6:7–12.
20. Fan Z. Characterization of compactness for resolvents and its applications. *Applied Mathematics and Computation*. 2014;232:60–67.
21. Liu R., Li M., Piskarev S.I. Approximation of semilinear fractional Cauchy problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2015;15:203–212.
22. Siegmund S., Piskarev S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics (NODY)* 2019;95(1):685–697.
23. Piskarev S., Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2022;10(3):58–72.

24. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука. 1975. 510 с.
25. Tuan Hoang The, Siegmund Stefan, Son Doan Thai, Cong Nguyen. An instability theorem for nonlinear fractional differential systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2017;22(8):3079–3090.

References

1. Ashyralyev A. and Sobolevskii PE. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations, Operator Theory Advances and Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, vol.69, 1994.
2. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
3. Krein SG. Linear differential equations in Banach space. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by J. M. Danskin, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 29.
4. Piskarev S. Differential equations in Banach space and thier approximation. M.: Lomonosov Moscow States University press. 2005. 287 p. (In Russ.)
5. Kaashoek MA, Verduyn Lunel SM. An integrability condition on the resolvent for hyperbolicity of the semigroup. *Differential Equations*. 1994;112(2):374–406.
6. Vu Quoc Phong. A new proof and generalizations of Gearhart’s theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 2007; 135(7):2065–2072.
7. Vu Quoc Phong. The spectral radius, hyperbolic operators and Lyapunov’s theorem. Evolution equations and their applications in physical and life sciences (Bad Herrenalb, 1998), 187–194, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 215, Dekker, New York, 2001.
8. Beyn W.-J., Piskarev S. Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2008;10(1):19–42.
9. Beyn W.-J. Numerical methods for dynamical systems. Advances in numerical analysis, Vol. I (Lancaster, 1990), 175–236, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.
10. Larsson S. Numerical analysis of semilinear parabolic problems. (English) Ainsworth, Mark (ed.) et al., The graduate student’s guide to numerical analysis ’98. Lecture notes from the 8th EPSRC summer school in numerical analysis. Leicester, GB, July 5-17, 1998. Berlin: Springer. Springer Ser. Comput. Math. 26, 83–117 (1999).
11. Larsson S., Sanz-Serna J.-M. The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1994;31(4):1000–1018.
12. Larsson S, Sanz-Serna J.-M. A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*. 1999;68(225): 55–72.
13. Pilyugin SYu. Shadowing in Dynamical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
14. Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem) *Nonlinear Anal.* 1978. 2: 647–687.
15. Piskarev S., Ovchinnikov A. Attractors, shadowing and approximation of abstract semilinear differential equations. World Scientific, 2023. 204 pp.
16. Gorenflo R, Kilbas AA., Mainardi F., Rogosin SV. Mittag – Leffler functions, related topics and applications. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer (2020).
17. Kokurin MM. The uniqueness of a solution to the inverse Cauchy problem for a fractional differential equation in a Banach space. *Russian Mathematics*. 2013;57:16–30.
18. Popov AYu, Sedletskiy AM. Distribution of the roots of the Mittag – Leffler functions *Sovremennaja matematika. Fundamental’nye Napravlenija*. 2011;40:3–171.
19. Antoniouk AV., Kochubei AN., Piskarev SI. On the compactness and the uniform continuity of a resolvent family for a fractional differential equation. Reports of National Academy of Sciences of Ukraine. (English summary). Доповіді Національної академії наук України, 2014, №6. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky* 2014;6:7–12.
20. Fan Z. Characterization of compactness for resolvents and its applications. *Applied Mathematics and Computation*. 2014;232:60–67.
21. Liu R., Li M., Piskarev SI.: Approximation of semilinear fractional Cauchy problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2015;15:203–212.
22. Siegmund S, Piskarev S. Approximations of stable manifolds in the vicinity of hyperbolic equilibrium points for fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics (NODY)*, 2019;95(1):685–697.
23. Piskarev S, Siegmund S. Unstable manifolds for fractional differential equations. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2022;10(3):58 – 72.
24. Krasnosel’skiĭ MA, Zabreĭko PP. Geometrical methods of nonlinear analysis. Transl. from the Russian by Christian C. Fenske. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 263, Springer, 1984.
25. Tuan Hoang The, Siegmund Stefan, Son Doan Thai, Cong Nguyen. An instability theorem for nonlinear fractional differential systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 2017;22(8):3079–3090.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.
Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.01.2024
Поступила после рецензирования 20.02.2025
Принята к публикации 24.02.2025

Received January 13, 2025
Revised February 20, 2025
Accepted February 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пискарев Сергей Игоревич – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник по специальности акустика, ведущий научный сотрудник, МГУ имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Sergey I. Piskarev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher in Acoustics, Leading Scientific Fellow, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS

УДК 517.9, 519.6
MSC 35K20, 35K58, 35K59
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-52-58

Численный метод решения уравнения «реакция – диффузия»

Барабаш О. П. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. В. Меньших)

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия
имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»,
Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А
navyS9@yandex.ru

Аннотация. В работе рассматривается квазилинейное уравнение «реакция – диффузия», более известное как уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова – Фишера. Для численного решения начально-краевой задачи с данным уравнением была построена двухслойная разностная схема с весами, имеющая порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. Используемая схема позволила свести задачу поиска решения нелинейного уравнения к решению системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки. Приведены результаты численной реализации схемы на нескольких модельных примерах с точным решением типа «бегущей волны». Демонстрируемые расчеты показали высокую точность предложенной разностной схемы.

Ключевые слова: уравнение «реакция – диффузия», уравнение Фишера, уравнение КПП, разностная схема, схема с весами, конечно-разностная аппроксимация, вычислительный эксперимент

Для цитирования: Барабаш О. П. 2025. Численный метод решения уравнения «реакция – диффузия». *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 52–58. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-52-58

Original Research

Numerical Method for Solving the Reaction-Diffusion Equation

Olga P. Barabash 

(Article submitted by a member of the editorial board V. V. Menshikh)

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy,
64A Stary'x Bol'shevikov St., Voronezh 394064, Russia
navyS9@yandex.ru

Abstract. Mathematical models with this equation are widely used in ecology, physiology, combustion, crystallization, plasma physics, and in general phase transition problems. In this article, we are interested in the finite-difference approximation of the initial-boundary value problem with the KPP-F equation. For this, a two-layer difference scheme "with weights" was built, having an approximation order of $O(h^2 + \tau)$. The used scheme made it possible to reduce the problem of finding a solution to a nonlinear equation to solving a system of linear algebraic equations using the sweep method. If n is the dimension of the system, then the sweep method provides a solution in approximately $8n$ arithmetic operations, and therefore is a more economical method than others. The results of numerical implementation of the scheme on several model examples with an exact "traveling wave" solution.

Keywords: Reaction-Diffusion Equation, Fisher Equation, KPP Equation, Difference Scheme, Weighted Scheme, Finite Difference Approximation, Computational Experiment

For citation: Barabash O. P. 2025. Numerical Method for Solving the Reaction-Diffusion Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 52–58. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-52-58

1. Введение. Важнейшей моделью среды, допускающей процессы самоорганизации, является уравнение «реакция – диффузия» (УРД):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u + f(u),$$

где D – матрица коэффициентов диффузии, u – неизвестная векторная функция. Реакционно-диффузионные системы широко встречаются в химии, биологии, экологии и физике.

В 1937 г. советские математики А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский и Н. С. Пискунов [1] и Р. Фишер [2] одновременно предложили модель, которая описывает распространение биологических популяций:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u).$$

Уравнение в честь авторов получило название Колмогорова – Петровского – Пискунова. Справедливости ради, стоит отметить, что первоначально уравнение было предложено Хотеллингом [3, 4] в 1921 г. в качестве модели, описывающей популяционный рост и распространение. На основе принципов Мальтуса рост моделировался как логистический процесс. Построение миграционных процессов в пространстве осуществлялось с использованием теории Фурье распространения тепла.

Указанному уравнению посвящено большое количество работ, связанных с распространением в пространстве волн различной природы [5]. В работе [6] получены точные решения двух типов уравнения Фишера. Однако особую роль играет конечно-разностная аппроксимация уравнений рассматриваемого класса. В этой связи необходимо отметить работы П. П. Матуса [7, 8], посвященные численной аппроксимации уравнения Ф-КПП, а также статью [9], в которой приведены и исследованы на устойчивость монотонные разностные схемы для уравнения КПП.

В настоящей работе строится разностная схема с весами, имеющая второй порядок точности по h и первый – по τ . Для рассматриваемой разностной схемы приведены результаты численного эксперимента на разных пространственно-временных сетках, а также для различных значений весовых параметров.

Целью данной работы является получение абсолютных и относительных погрешностей решения.

2. Постановка задачи. Разностная схема. Рассмотрим начально-краевую задачу для одномерного уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au(S - u), 0 < x < 1, 0 < t \leq T, A, S > 0, \quad (1)$$

с неоднородными граничными и начальным условиями:

$$u(0, t) = u_1(t), u(1, t) = u_2(t), 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

В уравнении (1) параметры A и S имеют значения постоянной роста и теоретического максимума для функции u соответственно.

Разобьем отрезки $[0, 1]$ оси x на N частей, отрезок $[0, T]$ оси t M частей. Введем сетку

$$\bar{w}_{h\tau} = \bar{w}_h \times w_\tau = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\} \times \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M\}$$

с постоянными шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/M$.

Значение сеточной функции y в узле (x_i, t_j) будем обозначать y_i^j . Будем использовать шеститочечный шаблон с центром в точке (x_i, t_{j+1}) , состоящий из узлов

$$(x_{i\pm 1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i\pm 1}, t_j), (x_i, t_j).$$

Заменим $\frac{\partial u}{\partial t}$ первой разностной производной, а $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – второй разностной производной и введем произвольные вещественные параметры $\sigma, \eta, \alpha, \beta$. Следуя методике А.А. Самарского [10], рассмотрим семейство разностных схем «с весами»:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + \eta y_i^j) + \alpha(S - y_i^j)y_i^{j+1} + \beta(S - y_i^{j+1})y_i^j, 0 < i < N, 0 \leq j < M, \quad (4)$$

где

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Начальные и краевые условия аппроксимируем точно

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j, \quad (5)$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i). \quad (6)$$

Для дальнейшего удобства перейдем к безындексным обозначениям, принятым в работе [11]:

$$y_i^j = y, y_i^{j+1} = \hat{y}, y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}.$$

Для определения погрешности введенной схемы необходимо оценить разность решения y_i^j задачи (4) – (6) функции и непрерывной функции $u = u(x, t)$ в узлах сетки:

$$z_i^j = y_i^j - u_i^j.$$

Запишем задачу (4) – (6) в безындексном виде

$$\begin{cases} y_t = \Lambda(\sigma\widehat{y} + \eta y) + \alpha(S - y)\widehat{y} + \beta(S - \widehat{y})y, (x, t) \in w_{h\tau}, \\ y(0, t) = u_1(t), y(1, t) = u_2(t), t \in w_\tau, \\ y(x, 0) = u_0(x), x \in \overline{w}_h. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя $y = z + u$ в (7), перейдем к задаче для z :

$$\begin{cases} z_t = \Lambda(\sigma\widehat{z} + \eta z) + \psi, (x, t) \in w_{h\tau}, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0, t \in w_\tau, \\ z(x, 0) = 0, x \in \overline{w}_h, \end{cases}$$

где невязка схемы при решении определяется уравнением:

$$\psi = \Lambda(\sigma\widehat{u} + \eta u) - u_t + \alpha(S - u)\widehat{u} + \beta(S - \widehat{u})u.$$

С учетом линейности оператора Λ запишем:

$$\psi = \sigma\Lambda\widehat{u} + \eta\Lambda u - u_t + \alpha(S - u)\widehat{u} + \beta(S - \widehat{u})u. \quad (8)$$

Считая функцию $u(x, t)$ достаточно гладкой и используя разложение в ряд Тейлора в окрестности точки (x, t) , получаем:

$$\Lambda u = \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{h^2} = u_x'' + \frac{h^2}{12}u_x^{(4)} + O(h^4),$$

$$u_t = \frac{\widehat{u} - u}{\tau} = \frac{1}{\tau}(u + \tau u_t' + O(\tau^2) - u) = \frac{1}{\tau}(\tau u_t' + O(\tau^2)) = u_t' + O(\tau).$$

Обозначим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Lu$ и $u_t' = \dot{u}$, запишем невязку:

$$\psi = \sigma Lu + \eta Lu - \dot{u} + O(h^2 + \tau) + \alpha(S - u)\widehat{u} + \beta(S - \widehat{u})u. \quad (9)$$

Подставим $\dot{u} = Lu + Au(S - u)$ в уравнение (9), тогда приходим к следующему виду невязки:

$$\psi = \dot{u}(\sigma + \eta - 1) - Au(\sigma + \eta)(S - u) + \alpha(S - u)\widehat{u} + \beta(S - \widehat{u})u + O(h^2 + \tau).$$

Далее примем $\sigma + \eta - 1 = 0$, тогда, используя разложение функции $\widehat{u} = u + O(\tau)$, имеем:

$$\begin{aligned} \psi &= -Au(S - u) + \alpha(S - u)u + \beta(S - u)u + O(h^2 + \tau) = \\ &= u(-AS + \alpha S + \beta S) + u^2(A - \alpha - \beta) + O(h^2 + \tau). \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \sigma + \eta = 1, \\ \alpha + \beta = A, \end{cases} \quad (10)$$

погрешность аппроксимации

$$\psi = O(h^2 + \tau).$$

Таким образом, схема обладает первым порядком аппроксимации по τ и вторым по h .

В статье [12] разностная схема (4) представлена в виде системы линейных алгебраических уравнений, решение которых осуществляется методом прогонки.

В рамках настоящей статьи не рассматривается вопрос об устойчивости построенного семейства разностных схем. По этой причине мы придаем существенную роль численному эксперименту, который будет описан далее.

3. Вычислительный эксперимент. В этом разделе приведены результаты численного эксперимента для задачи (1) – (3) для параметров $T = 4, A = 1, S = 1$ и различных сеточных значений.

Численная реализация производилась на языке Python. Результаты расчета сравнивались с точным решением, определенным по формуле [13]:

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + e^{1/\sqrt{6}x - 5t/6})^2}.$$

Первый модельный пример выполнен для значений весовых коэффициентов $\sigma = 0, 5, \beta = 0, 5$ и включает расчеты при количестве разбиений $N = 10, 50$ по оси x и количестве отрезков разбиения $M = 40, 100, 400$ по оси t .

На рисунке 1 изображены графики точного (зеленым цветом) и численного решения (голубым цветом) в различные моменты времени: $t_1 = T/4$ (линия 1), $t_2 = T/2$ (линия 2), $t_3 = T$ (линия 3) при $N = 10, M = 40$.

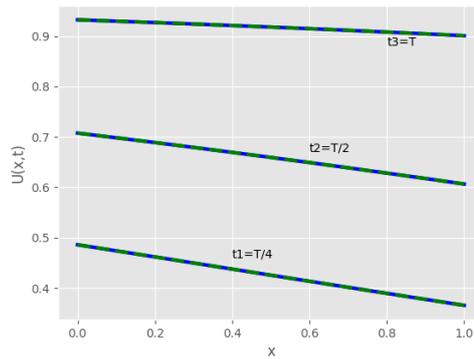


Рис. 1. Численное и точное решения в различные моменты времени для $\sigma = 0,5, \beta = 0,5, N = 10, M = 40$

Fig. 1. Numerical and exact solutions at various points in time for $\sigma = 0.5, \beta = 0.5, N = 10, M = 40$

Как видно из рисунка, графики точного и численного решения совпадают. Кроме того, полученный графический результат соответствует поведению функции на границах интервала:

$$u(0, t) = \frac{1}{(1 + e^{-5t/6})^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1,$$

$$u(1, t) = \frac{1}{(1 + e^{1/\sqrt{6}-5t/6})^2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1.$$

В таблице 1 представлены результаты расчета абсолютных ошибок для первого примера. Сравнение абсолютных ошибок демонстрирует, что предложенный метод позволяет добиться хорошей точности и на грубой сетке.

Таблица 1
Table 1

Абсолютные ошибки в разные моменты времени для двух значений шага пространственной сетки и трех значений шага временной сетки
Absolute errors at different time points for two spatial grid pitch values and three temporary grid spacing values

M	$Error_{t_1}$	$Error_{t_2}$	$Error_{t_3}$
N = 10			
40	2.57065e-05	2.34178e-05	5.53951e-06
100	4.08557e-06	4.22129e-06	8.53315e-07
400	2.24928e-07	7.93971e-07	1.58376e-08
N = 50			
40	9.29992e-06	7.98158e-06	1.90455e-06
100	1.49558e-06	1.2847e-06	3.03764e-07
400	9.43145e-08	8.76976e-08	1.83649e-08

Таблица 2 содержит относительную погрешность численного решения, выраженную в процентах.

Таблица 2
Table 2

Относительные ошибки в разные моменты времени для двух значений шага пространственной сетки и трех значений шага временной сетки, %

Relative errors at different time points for two spatial grid pitch values and three temporary grid spacing, %

M	$Error_{t_1}$	$Error_{t_2}$	$Error_{t_3}$
N = 10			
40	0.00280051	0.00355238	0.00130186
100	0.000445089	0.000640349	0.00020054
400	2.45041e-05	0.000120442	3.72205e-06
N = 50			
40	0.00100039	0.00114312	0.000401929
100	0.00016088	0.000183995	6.41051e-05
400	1.01454e-05	1.25601e-05	3.87565e-06

В таблице 3 приведены абсолютные погрешности расчетов при количестве разбиений $N = 50$ по оси x и количестве отрезков разбиения $M = 40, 400, 1000$ по оси t и различных значениях сеточных параметров σ и β .

Таблица 3
Table 3

Абсолютные ошибки в разные моменты времени для двух значений шага пространственной сетки и трех значений шага временной сетки
Absolute errors at different time points for two spatial grid pitch values and three temporary grid spacing values

M	$Error_{t_1}$	$Error_{t_2}$	$Error_{t_3}$
$\sigma = 0.7, \beta = 0.3$			
40	0.000207816	0.000182228	6.30258e-05
400	1.99601e-05	1.74301e-05	6.06282e-06
1000	7.96264e-06	6.95561e-06	2.41838e-06
$\sigma = 0.9, \beta = 0.1$			
40	0.000405633	0.000358037	0.000125668
400	3.98215e-05	3.47889e-05	1.21221e-05
1000	1.59088e-05	1.38932e-05	4.83675e-06
$\sigma = 1.5, \beta = 0.7$			
40	0.000333032	0.000232901	2.75878e-05
400	3.46869e-05	2.25883e-05	2.60522e-06
1000	1.39021e-05	9.00973e-06	1.03895e-06
$\sigma = 3, \beta = -3$			
40	0.00339879	0.0032342	0.00119964
400	0.00035967	0.00030966	0.000104345
1000	0.000143991	0.000123394	4.13592e-05

Результаты, представленные в таблице 3, свидетельствуют о том, что используемая разностная схема обладает порядком аппроксимации не ниже $O(h^2 + \tau)$.

В следующем модельном примере расширим интервал пространственной переменной. Будем рассматривать задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Au(S - u), \quad -20 < x < 20, 0 < t \leq T, A, S > 0,$$

$$u(-20, t) = u_1(t), u(20, t) = u_2(t), 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), -20 \leq x \leq 20.$$

Расчет произведем для параметров $T = 4, A = 1, S = 1$, значений весовых коэффициентов $\sigma = 0, 5, \beta = 0, 5$ и количестве разбиений $N = 200$ по оси x и количестве отрезков разбиения $M = 400$ по оси t .

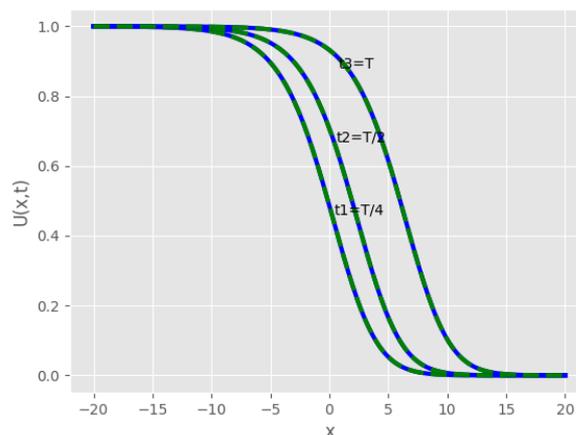


Рис. 2. Численное и точное решения в различные моменты времени
для $\sigma = 0, 5, \beta = 0, 5, N = 200, M = 400, -20 \leq x \leq 20$

Fig. 2. Numerical and exact solutions at various points in time for $\sigma = 0.5, \beta = 0.5, N = 200, M = 400, -20 \leq x \leq 20$

График демонстрирует, что численное решение совпадает с точным решением, имеющим профиль «бегущей волны». В таблице 4 приведены абсолютные и относительные ошибки численного решения на разных временах.

Таблица 4
Table 4

Абсолютные и относительные ошибки в разные моменты времени для двух значений шага пространственной сетки и трех значений шага временной сетки
Absolute and relative errors at different time points for two spatial grid pitch values and three temporary grid spacing values

M	$Error_{t_1}$	$Error_{t_2}$	$Error_{t_3}$
Абсолютная ошибка			
400	2.65924e-08	2.08158e-08	7.09457e-09
1000	2.78334e-08	2.17883e-08	7.42831e-09
Относительная ошибка			
400	2.65932e-06	2.08191e-06	7.09721e-07
1000	2.78342e-06	2.17919e-06	7.43107e-07

4. Заключение. В работе для численного решения начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения Ф–КПП предложена разностная схема, линеаризирующая рассматриваемое уравнение и имеющая порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau)$. При решении методом прогонки системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей число арифметических операций пропорционально количеству узлов сетки, а значит, такая разностная схема является экономичной. Сравнение приведенных в статье результатов численного расчета на разных пространственно-временных сетках с точным решением подтверждает теоретический порядок аппроксимации, а также свидетельствует об устойчивости разностной схемы.

Список литературы

1. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме. *Бюллетень МГУ, Серия А, Математика и механика*. 1937;1(64):1–16.
2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. *The Annals of Human Genetics*. 1937;7:355–369.
3. Hotelling H. A mathematical theory of migration. *Environ Plan A*. 1978;10(11):1223–1239.
4. Мешков В.З., Половинкин И.П., Семенов М.Е. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга. *Обзорное прикладной и промышленной математики*. 2002;9(1):226–227.
5. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov V.P. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*. Dordrecht: Kluwer; 1995. 323 p.
6. Кудряшов Н.А. О точных решениях уравнений семейства Фишера. *Теоретическая и математическая физика*. 1993;2(94):296–306.
7. Matus P.P., Hieu L.M., Vulkov L.G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017;300:186–199.
8. Matus P.P. Stability of Difference Schemes for Nonlinear Time-dependent Problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2003;3(2):313–329.
9. Матус П.П., Утебаев Б.Д. Монотонные разностные схемы повышенного порядка точности для параболических уравнений. *Доклады Национальной академии наук Беларуси*. 2020;64(4):391–398.
10. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука. 1971. 553 с.
11. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука. Физматлит. 1989. 432 с.
12. Barabash O.P., Polovinkina M.V., Polovinkin I.P., Zhadanova M.L. On a difference scheme for the Growth-Propagation Equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(3):989–992.
13. Ильина К.П. Эффективный численный метод решения задачи Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2023;3(129).

References

1. Kolmogorov AN. Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoj s vozrastaniem veshchestva, i ego primenenie k odnoj biologicheskoy probleme [Investigation of the Equation of Diffusion Combined with Increasing of the Substance and Its Application to a Biology Problem]. *Byul. MGU. Ser. A. Matematika i mekhanika [Bulletin of Moscow State University Series A: Mathematics and Mechanics]*. 1937;1(64):1–16.

2. Fisher RA. The wave of advance of advantageous genes. *The Annals of Human Genetics*. 1937;7:355–369.
3. Hotelling H. A mathematical theory of migration. *Environ Plan A*. 1978;10(11):1223–1239.
4. Meshkov VZ, Polovinkin IP, Semenov ME. On the stability of a stationary solution of the Hotelling equation. *Applied and Industrial Mathematics Review*. 2002;9(1):226–227. (In Russ.)
5. Danilov VG, Maslov VP, Volosov VP. *Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes*. Dordrecht: Kluwer; 1995. 323 p.
6. Kudriashov NA. On exact solutions of the Fisher family equations. *Theoretical and Mathematical Physics*. 1993;2(94):296–306. (In Russ.)
7. Matus PP., Hieu LM., Vulkov LG. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017;300:186–199.
8. Matus PP. Stability of Difference Schemes for Nonlinear Time-dependent Problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2003;3(2):313–329.
9. Matus PP, Utebaev BD. Monotonnye raznostnye skhemy povyshennogo poryadka tochnosti dlya parabolicheskikh uravnenij [Monotone difference schemes of higher accuracy for parabolic equations]. *Dokl. Nacional'noj akademii nauk Belarusi [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus]*. 2020;64(4):391–398.
10. Samarskii AA. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the theory of difference schemes]*. M.: Nauka; 1971. 553 p.
11. Samarskii AA., Gulin AB.. *Chislennyye metody [Numerical methods]*. M. : Nauka. Fizmatlit; 1989. 432 p.
12. Barabash OP., Polovinkina MV., Polovinkin IP., Zhadanova ML. On a difference scheme for the Growth-Propagation Equation. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(3):989–992.
13. Ilina KP. An effective numerical method for solving the Fischer – Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov Problem. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal*. 2023;3(129).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 09.09.2024

Поступила после рецензирования 16.01.2025

Принята к публикации 20.01.2025

Received September 9, 2024

Revised January 16, 2025

Accepted January 20, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Барабаш Ольга Павловна – преподаватель кафедры математики и информатики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Olga P. Barabash – Lecturer of the Department of Mathematics and Informatics, Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре

Носков А. В.¹, Блажевич С. В.², Чуева А. И.², Мачукаев Д. Д.³, Киперша В. К.³

¹ Московский технический университет связи и информатики,

Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

³ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,

Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

a.v.noskov@mtuci.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию возможности проявления эффекта асимметрической дифракции в когерентном рентгеновском излучении релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Когерентное рентгеновское излучение рассматривается как сумма параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые плотности когерентного рентгеновского излучения.

Ключевые слова: периодическая слоистая структура, динамическая дифракция, когерентное рентгеновское излучение, асимметрическая дифракция

Для цитирования: Носков А. В., Блажевич С. В., Чуева А. И., Мачукаев Д. Д., Киперша В. К. 2025. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*, 57(1): 59–67. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-59-67

Original Research

The Influence of Asymmetric Diffraction on the Spectral-Angular Density of the CRI of a Relativistic Electron in a Three-Layer Structure

Anton V. Noskov¹, Sergey V. Blazhevich², Anastasia I. Chueva², Deni D. Machukaev³,

Vladislav K. Kipersha³

¹ Moscow Technical University of Communications and Informatics,

8a Aviamotornaya St., Moscow 111024, Russia,

² Belgorod National Research University,

85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

³ Belgorod State Shukhov's Technological University,

46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia

a.v.noskov@mtuci.ru

Abstract. The work is devoted to the study of the possibility of manifestation of the effect of asymmetric diffraction in coherent X-ray radiation of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in the period. Coherent X-ray radiation is considered as the sum of parametric X-ray radiation and diffracted transition radiation. Expressions describing the spectral-angular densities of coherent X-ray radiation are obtained and studied.

Keywords: Periodic Layered Structure, Dynamic Diffraction, Coherent X-ray Radiation, Asymmetric Diffraction

For citation: Noskov A. V., Blazhevich S. V., Chueva A. I., Machukaev D. D., Kipersha V. K. 2025. The Influence of Asymmetric Diffraction on the Spectral-Angular Density of the CRI of a Relativistic Electron in a Three-Layer Structure. *Applied Mathematics & Physics*, 57(1): 59–67. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-59-67

1. Введение. Впервые когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистских электронов, пересекающих мишень из периодической слоистой среды в рамках динамической теории дифракции рентгеновских волн, исследовалось в работе [1]. КРИ рассматривалось в работе [1] как результат интерференции вкладов параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) и дифрагированного переходного излучения (ДПИ). ПРИ генерируется вследствие дифракции псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях периодической среды, аналогично ПРИ в монокристалле на атомных плоскостях [2, 3]. ДПИ возникает вследствие дифракции на слоях мишени переходного излучения, генерируемого вблизи передней поверхности мишени так же, как генерируется ДПИ в монокристалле [4, 5]. Следует отметить, что формулы динамической теории [1] хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [6].

Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [7], а в геометрии рассеяния Брэгга в работе [8]. В работах [7, 8] было показано, что в периодической слоистой среде интенсивность КРИ релятивистских электронов должна быть в несколько раз выше, чем КРИ релятивистского электрона в монокристалле в аналогичных условиях. Также в работах [7, 8] была показана возможность увеличения интенсивности параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения за счет изменения параметров динамического рассеяния, определяющих степень отражения и поглощения рентгеновского излучения в периодической слоистой среде.

Примечательно, что слоистые структуры представляют большой интерес для генерации излучения в мягком рентгеновском диапазоне (100–2000 эВ), текущие исследования активно изучают эту область [9, 10, 11]. Стоит отметить недавние исследования по генерации мягкого рентгеновского излучения электронами низких энергий порядка десятков и сотен кэВ из структур Ван-дер-Ваальса [12, 13, 14]. Такие структуры могут быть использованы для создания настольных квазимонохроматических источников мягкого рентгеновского излучения с перестраиваемой длиной волны. Во всех цитируемых выше работах по излучению релятивистских электронов рассматривалась периодическая слоистая среда с двумя различными слоями в периоде. В недавних работах авторов [15, 16, 17, 18] исследовалось когерентное рентгеновское излучение в периодической слоистой среде и монокристалле в динамической дифракции рентгеновских волн.

В настоящей работе рассматривается когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ, ДПИ релятивистского электрона, пересекающего периодическую слоистую мишень конечной толщины в геометрии рассеяния Брэгга. Исследована возможность влияния асимметрической дифракции на спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ.

2. Спектрально-угловая плотность излучения. Рассмотрим излучение релятивистских электронов, пересекающих в геометрии рассеяния Брэгга периодическую слоистую структуру, состоящую из трех различных чередующихся слоев с толщинами a , b и c на периоде $T = a + b + c$ (рис. 1). Обозначим диэлектрические восприимчивости атомных веществ, из которых состоят слои, соответственно χ_a , χ_b и χ_c . Отражающие слои периодической слоистой структуры расположены под некоторым углом δ к поверхности мишени (рис. 1), что соответствует случаю асимметричного отражения поля излучения ($\delta=0$ – частный случай симметричного отражения).

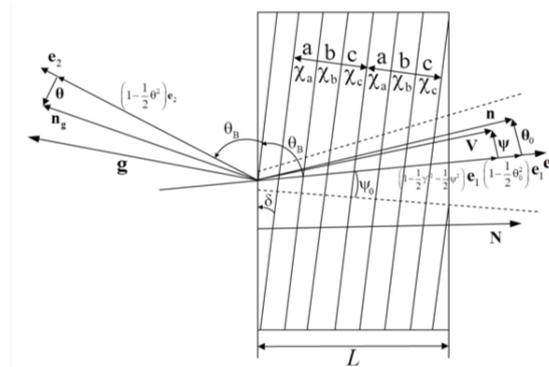


Рис. 1. Геометрия когерентного рентгеновского излучения в многослойной структуре

Fig. 1. Geometry of coherent X-ray radiation in a multilayer structure

Введем угловые переменные Ψ , θ и θ_0 в соответствии с определениями скорости релятивистского электрона V и единичных векторов: \mathbf{n} – в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона, и \mathbf{n}_g – в направлении рассеяния Брэгга:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\Psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \Psi, \quad \mathbf{e}_1 \Psi = 0 \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, \quad \mathbf{e}_2 \theta_0 = 0, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \theta, \quad \mathbf{e}_2 \theta = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где θ – угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения \mathbf{e}_2 , Ψ – угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка \mathbf{e}_1 , θ_0 – угол между направлением

распространения падающего фотона и осью \mathbf{e}_1 , $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка: $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_\parallel + \boldsymbol{\theta}_\perp$, $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_{0\parallel} + \boldsymbol{\theta}_{0\perp}$, $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_\parallel + \boldsymbol{\Psi}_\perp$. Вектор \mathbf{g} (рис. 1) аналогичен вектору обратной решетки в монокристалле, он перпендикулярен слоям мишени и его длина равна $g = \frac{2\pi}{T}$.

Запишем уравнение для фурье-образа напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$, которое следует из системы уравнений Максвелла:

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0)) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}) - \omega^2 \sum_{\mathbf{g}}' \chi_{-\mathbf{g}} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}} = 4\pi i \omega \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (2)$$

Фурье-образ напряженности электрического поля и плотности тока излучающего электрона имеют следующий вид: $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = \int dt d^3r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$, $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}} = 2\pi eV\delta(\omega - \mathbf{k}V)$.

$\chi_0(\omega)$ – средняя диэлектрическая восприимчивость периодической слоистой среды, χ_g и χ_{-g} – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(-i\mathbf{g}\mathbf{x}),$$

где $\chi_{\mathbf{g}} = \chi_{\mathbf{g}}'(\omega) + i\chi_{\mathbf{g}}''(\omega)$.

Средняя диэлектрическая восприимчивость χ_0 и χ_g в рассматриваемой периодической структуре имеет вид:

$$\chi_0(\omega) = \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b + \frac{c}{T}\chi_c.$$

$$\chi_g = \frac{1}{igT} (\chi_c - \chi_a + (\chi_a - \chi_b)e^{iga} + (\chi_b - \chi_c)e^{-igc}). \quad (3)$$

Излучаемое релятивистским электроном электромагнитное поле в рентгеновском диапазоне частот является практически поперечным, значит фурье-образы напряженностей электрического поля падающего излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ и дифрагированного излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}$ в периодической слоистой среде представим в виде:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)},$$

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}} = E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(1)} \mathbf{e}_g^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(2)} \mathbf{e}_g^{(2)}, \quad (4)$$

где векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_g^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}_g^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация). Векторы поляризации имеют вид:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}_g^{(1)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{g}]}{|\mathbf{k}, \mathbf{g}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{e}^{(1)}]}{k}, \quad \mathbf{e}_g^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}_g, \mathbf{e}^{(1)}]}{k_g}.$$

Подставим выражения (4) в уравнение (2), получим в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции систему уравнений, которая связывает падающее и дифрагированное электромагнитные поля:

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega))) E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} - \omega^2 \chi_{-\mathbf{g}}(\omega) E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)} C^{(s, \tau)} = 8\pi^2 i \omega e \Omega^{(s)} \delta(\omega - \mathbf{k}V),$$

$$((\mathbf{k} + \mathbf{g})^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega))) E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)} - \omega^2 \chi_{\mathbf{g}}(\omega) E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} C^{(s, \tau)} = 0. \quad (5)$$

В (5) введены следующие обозначения:

$$C^{(s, \tau)} = \mathbf{e}_g^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|,$$

$$\Omega^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)} \mathbf{V} = \theta_\perp - \Psi_\perp, \quad \Omega^{(2)} = \mathbf{e}^{(2)} \mathbf{V} = \theta_\parallel - \Psi_\parallel.$$

Поступая аналогично работе [9], найдем спектрально-угловую плотность когерентного рентгеновского излучения. Сначала решаем систему уравнений для падающего и дифрагированного полей в периодической слоистой среде. Затем, используя обычные граничные условия, найдем амплитуду фурье-образа напряженности электрического поля когерентного рентгеновского излучения. Используя выражение, описывающее спектрально-угловую плотность распределения фотонов когерентного рентгеновского излучения:

$$\omega \frac{d^2 N^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \left| E_{\text{Rad}}^{(s)} \right|^2, \quad (6)$$

получим выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ, ДПИ и их интерференцию:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (7)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left| \frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \frac{1 - e^{-iB^{(s)} \Delta_+^{(s)}}}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta_-^{(s)}} \frac{1 - e^{-iB^{(s)} \Delta_-^{(s)}}}{\Delta_-^{(s)}} \right|^2, \quad (8)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0} \right)^2 R_{\text{ДПИ}}^{(s)}, \quad (9)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{(s)} = \varepsilon^2 \left| \frac{e^{-iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - e^{iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Delta^{(s)}} \right|^2, \quad (10)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} - \psi_{\parallel}, \quad \Omega_{\pm}^{(s)} = \varepsilon \left(\left(\sigma^{(s)} - i\rho^{(s)} \right) e^{-iB^{(s)} \Delta_{\pm}^{(s)}} + \Delta_{\pm}^{(s)} \right), \\ \Gamma &= \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \psi_{\parallel})^2, \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{v^{(s)} |\chi'_0|} \left(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} - \psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0| \right), \\ \Delta_{\pm}^{(s)} &= \frac{\xi^{(s)} \pm K^{(s)}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} + i \frac{\rho^{(s)} (\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}, \quad \chi'_0 = \frac{a}{T} \chi'_a + \frac{b}{T} \chi'_b + \frac{c}{T} \chi'_c = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right), \\ P_{\pm}^{(s)} &= \xi^{(s)} \pm K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{2}, \quad B^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta + \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}}, \\ L_{\text{ext}}^{(s)} &= \frac{\pi}{C^{(s)} \omega |\chi'_b| \sqrt{(1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi)}}, \\ K^{(s)} &= \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)} \left((1 + \varepsilon) \xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)} \varepsilon \right) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2} \varepsilon \right)}, \quad \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \\ \xi^{(s)}(\omega) &= \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 + \varepsilon}{2v^{(s)}}, \quad \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{V^2 T^2 \omega_B} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2} - 1} \right) \right), \\ \delta'_1 &= \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c}, \quad I_1 = \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \\ I_2 &= \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \\ \rho_a &= \frac{\chi''_a}{|\chi'_b|}, \quad \rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|}, \quad \rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_b|}, \quad \rho_1 = (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c), \quad \rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c), \\ \rho_3 &= (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b). \end{aligned} \quad (11)$$

Получены выражения для параметров динамического рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде:

$$\begin{aligned} v^{(s)} &= \frac{C^{(s)}}{\pi} \frac{\sqrt{(1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi)}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} \right|}, \\ \rho^{(s)} &= \frac{\pi}{C^{(s)}} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}{\sqrt{(1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi)}}, \\ \kappa^{(s)} &= \frac{C^{(s)}}{\pi} \frac{\sqrt{(\rho_1 \sin^2(I_1 \pi) + \rho_2 \sin^2(I_2 \pi) + \rho_3 \sin^2(I_3 \pi))}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим физический смысл параметров в (12), определяющих процесс распространения рентгеновского излучения в периодической слоистой среде. $\xi^{(s)}(\omega)$ и $\eta^{(s)}(\omega)$ – спектральные функции, быстро изменяющиеся с изменением частоты излучения ω в окрестности частоты Брэгга ω_B . Параметр $\nu^{(s)}$, характеризующий отражение электромагнитных волн на слоистой структуре мишени, может принимать значения из промежутка $0 \leq \nu^{(s)} \leq 1$. Значение параметра $\nu^{(s)}$ показывает степень интерференции рентгеновских волн, отраженных от различных слоев на периоде рассматриваемой мишени. Если $\nu^{(s)} \approx 1$, то интерференция наиболее конструктивна, а при $\nu^{(s)} \approx 0$ интерференция наиболее деструктивна. Параметр $\rho^{(s)}$ определяет степень фотопоглощения рентгеновского излучения в слоистой среде. Фотопоглощение излучения в слоях мишени определено отношениями ρ_a, ρ_b и ρ_c . Чем меньше значение параметра $\rho^{(s)}$, тем меньше фотопоглощение рентгеновского излучения. Этот параметр может быть представлен как отношение $\rho^{(s)} = \frac{L_{ext}^{(s)}}{L_{abs}}$ длины экстинкции рентгеновского излучения $L_{ext}^{(s)}$ в слоистой среде к средней длине его фотопоглощения $L_{abs} = T/\omega(a\chi_a'' + b\chi_b'' + c\chi_c'')$.

Значение параметра $\kappa^{(s)}$ определяет расположение в слоистой среде пучностей стоячей волны, которая образуется в результате интерференции падающей и дифрагированной волн. Параметр $\kappa^{(s)}$ принимает значения из промежутка $0 \leq \kappa^{(s)} \leq 1$. Если максимумы пучностей лежат на слое с большей электронной плотностью, то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к нулю, если максимумы пучностей лежат на слое с меньшей плотностью электронов (меньше фотопоглощение рентгеновского излучения), то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к единице.

Параметр ε определяет асимметрию отражения поля электрона и рентгеновского излучения относительно поверхности мишени. При фиксированном θ_B параметр ε определяет угол между поверхностью мишени и отражающими слоями δ . На рис. 1 показано положительное направление угла δ . В случае симметричного отражения поля электрона и рентгеновских волн относительно поверхности мишени, когда отражающие слои и поверхность мишени параллельны ($\delta = 0$), параметр асимметрии равен единице $\varepsilon = 1$.

Параметр $B^{(s)}$ характеризует толщину мишени L , он равен половине длины пути электрона $L_e = L/\sin(\delta + \theta_B)$, выраженной в длине экстинкции.

3. Численные расчеты. Далее на основе полученных выражений проведем численные расчеты и исследуем зависимость спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ от асимметрии отражения поля электрона относительно поверхности мишени. Положим угол между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями (угол Брэгга) $\theta_B = 2.25^\circ$, при этом частота Брэгга $\omega_B = 8$ кэВ. Период слоистой среды положим равным $T = a + b + c = 0.002$ мкм. Действительную часть диэлектрической восприимчивости положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi_b' = -2.25 \times 10^{-5}$. Вычисления проведем для значения параметра $S = 1$ (σ -поляризация).

На рис. 2 представлена геометрия когерентного рентгеновского излучения при асимметричной дифракции. Из рисунка следует, что при фиксированном пути электрона в мишени, при увеличении параметра асимметрии ε длина пути излученных фотонов уменьшается.

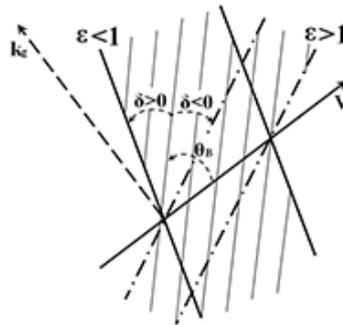


Рис. 2. Асимметричные ($\varepsilon > 1, \varepsilon < 1$) отражения излучения от слоистой структуры в геометрии рассеяния Брэгга.

Случай $\varepsilon = 1$ ($\delta = 0$) соответствует симметричному отражению. Параметр асимметрии: $\varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}$
 Fig. 2. Asymmetric ($\varepsilon > 1, \varepsilon < 1$) reflections of radiation from a layered structure in the Bragg scattering geometry. The case $\varepsilon = 1$ ($\delta = 0$) corresponds to symmetric reflection. The asymmetry parameter: $\varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}$

В случае уменьшения параметра асимметрии ε длина пути излученного фотона растет, и в случае поглощающей среды интенсивность излучения будет падать. На рис. 3 представлены кривые, построенные по формуле (7), описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ при фиксированном угле наблюдения. Отметим, что на следующих рисунках параметры такие же, как на рис. 3, если нет указания к другим значениям параметров на рисунках. Кривые построены для различной асимметрии отражения, которая определяется параметром ε . Из рисунка следует существенное увеличение спектрально-угловой плотности ПРИ при увеличении параметра асимметрии ε , что приводит к значительному росту угловой плотности ПРИ.

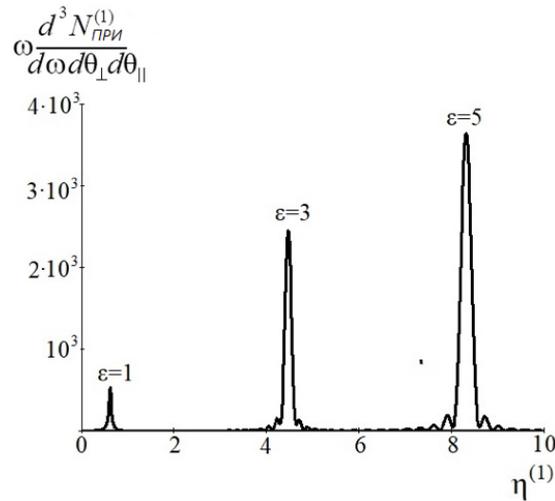


Рис. 3. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных значениях параметра асимметрии ϵ . Параметры: $\delta'_{ab} = 3$, $\delta'_{ac} = 0.5$, $\frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{c} = 1$, $\rho_a = 0.1$, $\rho_b = 0.05$, $\rho_c = 0.08$, $\rho^{(1)} = 0.064$, $\gamma = 500$, $B^{(1)} = 55$, $\theta_{\perp} = 10$ mrad, $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 3. Spectral-angular densities of PXR for different values of the asymmetry parameter ϵ . Parameters: $\delta'_{ab} = 3$, $\delta'_{ac} = 0.5$, $\frac{a}{b} = 1$, $\frac{a}{c} = 1$, $\rho_a = 0.1$, $\rho_b = 0.05$, $\rho_c = 0.08$, $\rho^{(1)} = 0.064$, $\gamma = 500$, $B^{(1)} = 55$, $\theta_{\perp} = 10$ mrad, $\theta_{\parallel} = 0$

Значительный рост спектрально-угловой и угловой плотности ПРИ при увеличении параметра асимметрии ϵ возникает по двум причинам. Первой причиной является то, что при увеличении параметра асимметрии ϵ уменьшается длина пути и, как следствие, фотопоглощение рентгеновского излучения. Если положить, что фотопоглощения нет, то есть параметр поглощения равен нулю $\rho^{(1)} = 0$, то амплитуда спектра будет одинаковой при разных асимметриях, что демонстрируют кривые, представленные на рис. 4.

При этом ширина пиков спектра ПРИ остаётся разной. Таким образом ширина спектра ПРИ увеличивается при увеличении параметра ϵ . Это связано с тем, что резонансное условие $\text{Re}(\Delta_+^{(s)}) \approx \frac{\xi^{(s)}(\omega) + \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \epsilon}}{\epsilon} - \sigma^{(s)} = 0$ зависит от параметра асимметрии ϵ . При увеличении параметра ϵ резонансное условие меняется медленнее с изменением частоты излучения ω , поэтому ширина спектра ПРИ растет.

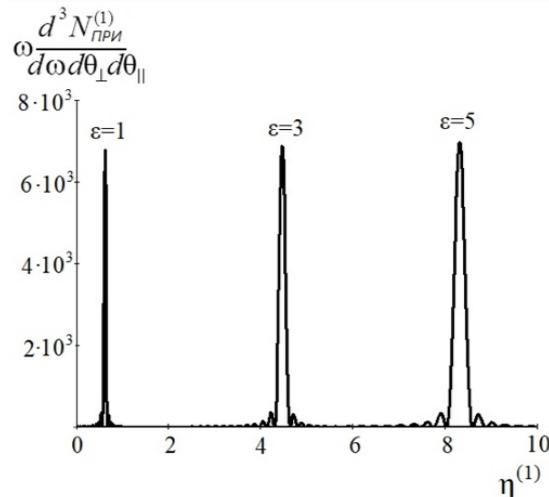


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но при отсутствии фотопоглощения рентгеновского излучения: $\rho^{(1)} = 0$

Fig. 4. Same as in Fig. 3, but in the absence of photoabsorption of X-ray radiation: $\rho^{(1)} = 0$

На рис. 5 представлены кривые, построенные по формуле (9), описывающей спектрально-угловую плотность ДПИ при фиксированном угле наблюдения. Кривые демонстрируют рост спектрально-угловой плотности ДПИ при увеличении параметра асимметрии ϵ .

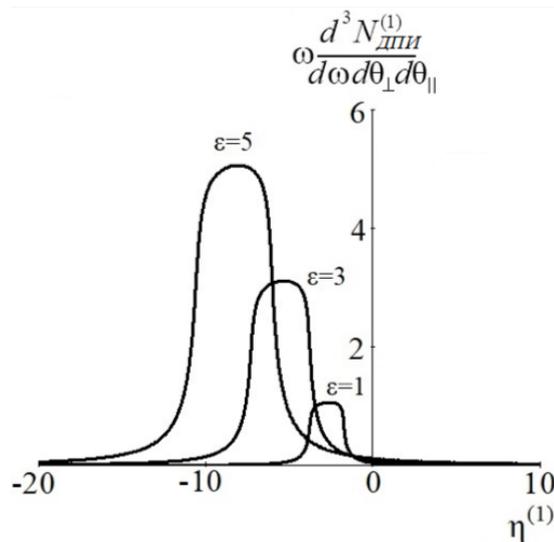


Рис. 5. Спектрально-угловые плотности ДПИ при различных значениях параметра асимметрии ϵ . Угол наблюдения: $\theta_{\perp} = 2$ mrad, $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 5. Spectral-angular densities of the DTR for different values of the asymmetry parameter ϵ . Угол наблюдения: $\theta_{\perp} = 2$ mrad, $\theta_{\parallel} = 0$

3. Заключение. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Получены выражения для параметров динамического рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ релятивистского электрона, пересекающего периодическую слоистую среду. Показано значительное увеличение спектрально-угловой плотности ПРИ при увеличении параметра асимметрии ϵ . Показан значительный рост спектрально-угловой плотности ДПИ при увеличении параметра асимметрической дифракции ϵ .

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504.
2. Garibian G.M. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x-rays. *Physical Review A*. 1989; 40(8):4322.
5. Nasonov N.N. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148.
6. Kaplin V.V. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Applied Physics Letters*. 76. 2000;24:3647-3649.
7. Blazhevich S.V., Kolosova I.V. and Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547-554.
8. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2013;309:70-75.
9. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p.
10. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S. et al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.

14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148.
15. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223–234.
16. Blazhevich S.V., Drygina Yu.A., Shevchuk O.Yu., Noskov A.V. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586-595.
17. Носков А.В., Бондаренко В.А., Блажевич С.В., Юрьева А.А., Федосеев А.Э. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(2):183–192.
18. Носков А.В., Киперша В.К., Блажевич С.В., Плесканев А.А., Ильинский Р.Ю., Волошкина Е.В. Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(1):66–74.

References

1. Nasonov NN, Kaplin VV, Uglov SR, Piestrup MA and Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504.
2. Garibian GM and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky VG, Feranchuk ID. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x-rays. *Physical Review A*. 1989; 40(8):4322.
5. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148.
6. Kaplin VV. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Applied Physics Letters*. 76. 2000;24:3647-3649.
7. Blazhevich SV, Kolosova IV and Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547-554.
8. Blazhevich SV, Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. 2013;309:70-75.
9. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p.
10. Uglov SR, Kaplin VV, Kubankin AS. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S, Duan R, Pramanik N, Herrin JS, Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230.
13. Huang S, Duan R, Pramanik N, Boothroyd C, Liu Z, Wong LJ. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X, Kurman Y, Shentcis M, Wong LJ., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148.
15. Blazhevich SV, Noskov AV. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223–234.
16. Blazhevich SV, Drygina YuA, Shevchuk OYu, Noskov AV. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586-595.
17. Noskov AV., Bondarenko VA., Blazhevich SV., Yuryeva AA., Fedoseev AE. On the influence of multiple scattering on transition radiation in a single crystal. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(2):183–192.
18. Noskov AV., Kipersha VK., Blazhevich SV., Pleskanev AA., Ilyinsky RYu., Voloshkina EV. Spectral-angular densities of transition radiation and diffracted transition radiation of relativistic electrons in a periodic layered medium. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(1):66-74.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.01.2025

Поступила после рецензирования 24.02.2025

Принята к публикации 26.02.2025

Received January 10, 2025

Revised February 24, 2025

Accepted February 26, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Носков Антон Валерьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Блажевич Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Чуева Анастасия Игоревна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Мачукаев Дени Даудович – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Киперша Владислав Константинович – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anton V. Noskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Sergey V. Blazhevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Anastasia I. Chueva – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Deni D. Machukaev – Graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

Vladislav K. Kipersha – Graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

ПЕРСОНАЛИИ PERSONNEL

К 80-летию доктора физико-математических наук, профессора, академика АН Республики Узбекистан Шавката Арифджановича Алимова

Шавкат Арифджанович Алимов – известный ученый в области математической физики и функционального анализа. Академик АН Узбекистана (2000).



Биография

Шавкат Арифджанович Алимов родился в 1945 году в г. Нукусе, Узбекистан. С 1952 по 1962 год учился в школе в г. Ташкенте. Окончив в 1962 году ташкентскую школу № 88 с золотой медалью, поступил на физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, который окончил в 1968 году по кафедре математики, получив диплом с отличием. С 1968 по 1970 год обучался в аспирантуре на кафедре математики под научным руководством профессора В. А. Ильина. Кандидат физико-математических наук (1970, ИПМ АН СССР), доктор физико-математических наук (1973, МГУ), Академик АН Узбекистана (2000). В мае 1970 года начал трудовую деятельность на открывшемся в марте этого же года факультете ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, с 1974 года по 1984 год работал профессором кафедры общей математики данного факультета. В сентябре 1984 года перешел на работу в Ташкентский государственный университет в должности профессора. С 1985 по 1992 год работал заместителем директора Института математики АН Узбекистана, ректором Самаркандского государственного университета, ректором Ташкентского государственного университета, министром высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан.

После провозглашения независимости Узбекистана работал заместителем министра иностранных дел, чрезвычайным и полномочным послом Республики Узбекистан в Китайской Народной Республике. С сентября 2000 года по июнь 2001 года работал исследователем (Visiting Researcher) в Калифорнийском технологическом институте (Caltech), США. С 2012 по 2017 год возглавлял лабораторию прикладной математики Малайзийского института микроэлектронных систем (MIMOS) в технопарке Куала-Лумпура, являясь одновременно главным ученым (Chief Scientist) этого института. В настоящее время профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Научная деятельность

Основная научная деятельность Ш. А. Алимова связана со спектральной теорией дифференциальных уравнений с частными производными и с теорией краевых задач для уравнений математической физики. В семидесятых годах 20-го века Ш. А. Алимовым было проведено исследование вопросов сходимости и суммируемости спектральных разложений, связанных с эллиптическими операторами произвольного

порядка с гладкими коэффициентами. Им был, в частности, построен первый пример функции из L_p , средние Рисса спектрального разложения которой расходятся в каждой точке. Ш. А. Алимовым по предложению А. В. Бицадзе изучались также вырождающиеся краевые задачи с наклонной производной для эллиптических уравнений второго порядка. Им был найден точный порядок потери гладкости решения в зависимости от степени вырождения векторного поля, определяющего граничные условия. Начиная с 2000-х годов Ш. А. Алимовым изучалась проблема граничного управления процессом теплообмена. В частности, им были найдены условия, обеспечивающие получение заданной средневзвешенной температуры в ограниченном объеме, и дана оценка минимально необходимого для этого времени в зависимости от мощности и расположения источников тепла или холода. В работах Шавката Арифджановича исследовались также математические аспекты теории перидинамики, связанные с механикой твёрдого тела. После появления Covid-19 Ш. А. Алимовым проводились исследования, связанные с совершенствованием математических моделей процесса распространения пандемии.

Ш. А. Алимов имеет свыше 150 опубликованных научных и учебно-методических работ. В 1978-1984 годах являлся ученым секретарем комиссии по школьным учебникам и учебным программам Отделения математики Академии наук СССР, которую возглавлял академик А. Н. Тихонов, одним из авторов учебников алгебры и начал анализа для средней школы, публиковавшихся издательством «Просвещение» с 1979 по 2019 гг.

Награды и звания:

- 1973 – лауреат премии Ленинского комсомола за исследования по спектральной теории уравнений математической физики;
- 1984 – член-корреспондент АН Узбекской ССР;
- 1985 – лауреат Государственной премии Узбекской ССР имени Беруни;
- 2000 – академик АН Республики Узбекистан;
- 2019 – Орден «Мехнат шухрати» («Трудовая Слава»).

**Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Шавката Арифджановича Алимова
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.**

Избранные научные публикации академика Ш. А. Алимова

1. S. A. Alimov, V. A. Il'in. Condition exactes de convergence uniforme des developpements spectraux et de leurs moyennes de Riesz pour une extension autoadjoint arbitraire de l'operateur de Laplace. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, Serie A, t.237, 461–464, 1970.
2. Ш. А. Алимов. О суммировании в рядов по собственным функциям. Дифференц. уравнения, 6, № 1, 164–171, 1970.
3. Ш. А. Алимов. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций. Дифференц. уравнения, 8, № 9, 1609–1626, 1972.
4. Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никишин. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. Успехи математ. наук, 31, № 6, 27–82, 1976.
5. Ш. А. Алимов. О спектральных разложениях функций из H_p^α . Математический сборник, 101, № 1, 3–20, 1976.
6. Ш.А. Алимов. О разложимости непрерывных функций из классов Соболева по собственным функциям оператора Лапласа. Сибирский математический журнал, 19, № 4, 721–734, 1978.
7. Ш. А. Алимов. Об одной задаче с наклонной производной, Дифференц. уравнения, 17, № 10, 1738–1751, 1981.
8. Ш. А. Алимов. О принадлежности градиента гармонической функции классу С. М. Никольского. Труды МИАН СССР, т. 180, 25–27, 1987.
9. S. A. Alimov, R. R. Ashurov, A. K. Pulatov. Multiple Fourier Series and Fourier Integrals. Encyclopedia Math. Sci., vol. 42, 1–95. Berlin-Heidelberg, Springer Verlag, 1991.
10. S. A. Alimov. On the spectrum of the Schrodinger operator for some many-particle systems. Journ. of Phys. A: Math. Gen., 25, L615-L616, 1992.

11. S. A. Alimov. On the eigenfunction expansion of a piecewise smooth function. *J. of Fourier Analysis and Applications*, Birkhauser Boston, vol. 9, N.1, 67-76, 2003.
12. S. A. Alimov. Sets of uniform convergence of Fourier expansions of piecewise smooth functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, vol. 10, Number 6, pp.635-644, 2004.
13. Ш. А. Алимов. О зависимости множества сходимости спектральных разложений от геометрии разрывов разлагаемой функции, *Математические заметки*, 79:2 (2006), 178-193.
14. S. Albeverio, S. A. Alimov. On some integral equations in Hilbert space with an application to the theory of elasticity. *Integral Equations and Operator Theory*, 55, 2006, pp. 153-168.
15. S. A. Alimov, Complex powers of the Schrodinger operator with singular potential, *Eurasian Math. Journal*, № 2, 2007, 4-11.
16. S. Albeverio, S. A. Alimov. On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process, *Applied Mathematics and Optimization*, 2008, vol. 57, № 1, 58-68.
17. S. A. Alimov, Y. Cao O. A. Ilhan. On the problems of peridynamics with special convolution kernels. *Journal of Integral Equations and Applications*, Vol. 26, No. 3, 2014, pp. 301-321.
18. S. A. Alimov, M-L. Tham, S. F. Chien, D. W. Holtby. Energy-Efficient Power Allocation for Distributed Antenna Systems With Proportional Fairness. *IEEE Transactions on Green Communications and Networking*, 2017, Volume: 1, Issue: 2, 145-157.
19. S. A. Alimov, S. Sheraliev. On the solvability of the singular equation of peridynamics, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019, 64:5, pp. 873-887.
20. S. A. Alimov, R. R. Ashurov. Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation, *Journal of Inverse and Ill-Posed problems*, 2020, v. 28, No 5, 651-658.
21. S. A. Alimov, R. R. Ashurov. Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 8, No. 4, 1-8 (2022) .
22. Ш. А. Алимов, Н. М. Комилов. Об определении параметров, задающих тепловой режим, по выходным данным, *Дифференциальные уравнения*, 2022, том 58, № 1, с. 23-36.
23. Alimov, S., Yuldasheva. A. Solvability of Singular Equations of Peridynamics on Two-Dimensional Periodic Structures. *J. Peridyn. Nonlocal Model.* 5, 241-259 (2023).
24. S. A. Alimov, Sh. T. Pirmatov. On the Pinsky Phenomenon for B-Elliptic Operators, *Differential Equations*, 2023, Vol. 59, No. 5, pp. 606-617.
25. S. A. Alimov, A. Qudaybergenov. Determination of temperature at the outer boundary of a body, *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 274, No. 2, August, 2023, pp.159-171.
26. S. A. Alimov, S. T. Pirmatov. On the Smoothness of a Function at the Convergence Point of its Spectral Expansion Associated with B-elliptic Operators, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, Vol. 44, No. 8, pp. 3206-3216. 2023.
27. S. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov, On the Cauchy problem for Laplace equation, *Uzbek Mathematical Journal*, 2023, Volume 67, Issue 2, pp. 5-16.
28. S. A. Alimov, Sh. T. Pirmatov. On eigenfunction expansions of continuous functions associated with B-elliptic operators, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2024, Vol. 45, No. 9, pp. 4448-4458.
29. S. A. Alimov, A. K. Qudaybergenov. Determining the steady-state temperature in an infinite layer, *Differential Equations*, 2024, Vol. 60, No. 8, pp. 1028-1041.
30. S. A. Alimov, G. I. Ibragimov. Time optimal control problem with integral constraints for the heat transfer process, *Eurasian Mathematical Journal*, Vol. 15, Number 1, 2024, 08-22.

[К содержанию](#)