

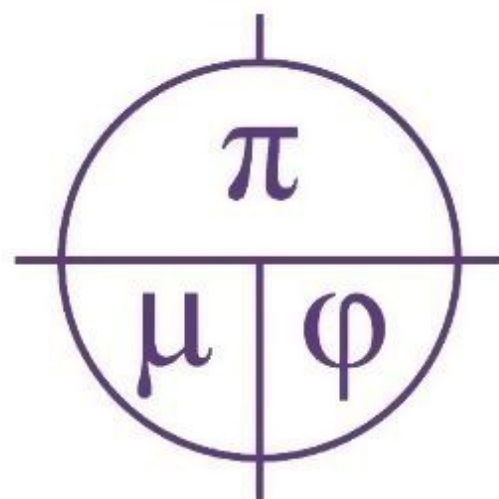


Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)

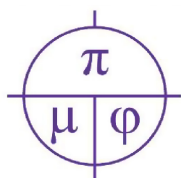
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2025. Том 57, № 2





Прикладная математика & Физика

2025. Том 57, № 2

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

- 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

С. М. Ситник, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;
Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;
Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Глушак А. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;
Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;
Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;
Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;
Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;
Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 8,8

Дата выхода 30.06.2025.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Лапин К. С., Грицай И. О.

Эквиограниченность по Пуассону и эквиосциллируемость множеств всех решений систем дифференциальных уравнений 75

Гилев А. В.

Об одной задаче с нелокальными интегральными условиями первого рода для уравнения второго порядка 82

Гринько А. П.

Локализованная и локальная дробная производные функции Такаги 93

Ощепкова С. Н., Пенкин О. М.

Задача с препятствием на стратифицированном множестве 111

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Кудяева Ф. Х.

Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани 117

Сохань К. С.

Изучение влияния температуры на параметры насыщения и стабильность легированных образцов GaN:Si 125

Папин А. В.

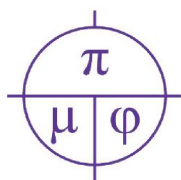
Исследование волнового теплообмена в тонких металлических пленках на основе гиперболического уравнения 131

Kamanda-Bongay A. B., Vasilyev V. B.

Multidimensional Discrete Transformations and Their Applications to Discrete Equations 142

ПЕРСОНАЛИИ

К 80-летию профессора Михаила Львовича Гольдмана 148



Applied Mathematics & Physics

2025. Volume 57, No 2

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

S. M. Sitnik, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Glushak A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 8,8

Date of publishing 30.06.2025.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

CONTENTS

MATHEMATICS

Lapin K. S., Gritsay I. O.

Poisson Equiboundedness and Equioscillability of Sets of all Solutions of Systems of Differential Equations 75

Gilev A. V.

On a Problem With Nonlocal Integral Conditions of the First Kind for a Second-order Equation 82

Grinko A.P.

Localized and Local Fractional Derivative of the Takagi Function 93

Oshchepkova S. N., Penkin O. M.

The Obstacle Problem on the Stratified Set 111

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Kudayeva F. Kh.

A Mathematical Model of Low-temperature Effects on Biological Tissues 117

Sokhan K. S.

Study of the Effect of Temperature on Saturation Parameters and Stability of Alloyed GaN:Si Samples 125

Pashin A. V.

Study of Wave Heat Transfer in Thin Metal Films Based on the Hyperbolic Equation 131

Kamanda-Bongay A. B., Vasilyev V. B.

Multidimensional Discrete Transformations and Their Applications to Discrete Equations 142

PERSONNEL

To the 80th anniversary of Professor Mikhail Lvovich Goldman 148

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 51-7, 519.6, 517
MSC 92B05
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-75-81
EDN XZOFDY

Эквиограниченность по Пуассону и эквиосциллируемость множеств всех решений систем дифференциальных уравнений

Лапин К. С.¹, Грицай И. О.²

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева,
Россия, 430007, г. Саранск, ул. Студенческая, 11 А
klapin@mail.ru, ilya.gritsay1337@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуются осциллирующие движения динамических систем, а именно, движения, которые не являются ограниченными и, кроме того, обладают тем свойством, что не стремятся к бесконечности при стремлении времени к плюс бесконечности. Такие движения играют важную роль в различных задачах математической физики, небесной механики, термодинамики и астрофизики. В работе вводятся в рассмотрение новые понятия, связанные с осциллируемостью множества всех решений системы дифференциальных уравнений, а именно, введены понятие эквиосциллируемости множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. На основе принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова и найденной автором связи между ограниченностью по Пуассону и осциллируемостью решений получены достаточные условия эквиосциллируемости множества всех решений, а также частичные аналоги этих условий. Работа продолжает исследования автора по изучению ограниченности и осциллируемости множеств всех решений дифференциальных систем с использованием функций Ляпунова и вектор-функций Ляпунова. Полученные теоретические результаты могут быть использованы для анализа сложных динамических систем в различных областях науки.

Ключевые слова: эквиограниченность по Пуассону, эквиосциллируемость, вектор-функция Ляпунова

Для цитирования: Лапин К. С., Грицай И. О. 2025. Эквиограниченность по Пуассону и эквиосциллируемость множеств всех решений систем дифференциальных уравнений. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 75–81.
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-75-81 EDN XZOFDY

Original Research

Poisson Equiboundedness and Equioscillability of Sets of all Solutions of Systems of Differential Equations

Kirill S. Lapin¹, Ilya O. Gritsay²

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev,
11 A Studencheskaya St., Saransk 430007, Russia
klapin@mail.ru, ilya.gritsay1337@gmail.com

Abstract. In this paper we study oscillating motions of dynamic systems, namely, motions that are not bounded and, in addition, have the property that they do not tend to infinity as time tends to plus infinity. Such motions play an important role in various problems of mathematical physics, celestial mechanics, thermodynamics and astrophysics. In this paper we introduce new concepts related to the oscillability of the set of all solutions of a system of differential equations, namely, the concept of equioscillability of the set of all solutions and partial analogues of this concept. Based on the principle of comparison of Matrosov with Lyapunov vector functions and the connection between Poisson boundedness and oscillability of solutions found by the author, sufficient conditions for the equioscillability of the set of all solutions are obtained, as well as partial analogues of these conditions. The paper continues the author's research on the study of boundedness and oscillability of sets of all solutions of differential systems using Lyapunov functions and Lyapunov vector functions. The obtained theoretical results can be used for the analysis of complex dynamic systems in various fields of science.

Keywords: Poisson Equiboundedness of Solutions, Equioscillation of Solutions, Lyapunov Vector Function

For citation: Lapin K. S., Gritsay I. O. 2025. Poisson Equiboundedness and Equioscillability of Sets of all Solutions of Systems of Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 75–81. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-75-81 EDN XZOFDY

1. Введение. Осциллирующие движения динамических систем представляют собой важный класс решений, занимающий промежуточное положение между ограниченными и неограниченными траекториями. Впервые данный феномен был предложен в исследованиях Ж. Шази [1] при анализе возможных движений в классической задаче трех тел. Характерной особенностью таких движений является отсутствие их стремления к бесконечности при неограниченном возрастании времени, несмотря на неограниченность этих решений. Значительный вклад в изучение этого явления внесли исследования К. А. Ситникова [2], где было установлено существование осциллирующих решений в модели Колмогорова, и исследования А. М. Леонтовича [3], обнаружившего аналогичные траектории в билиардных системах, связанных с эргодической теорией. Дальнейшее развитие теория получила в трудах В. М. Алексеева (см., например, [4]), который выявил осциллирующие режимы в квазислучайных динамических системах небесной механики. Особого внимания заслуживает цикл работ Л. Д. Пустыльников (см., например, [5]), в которых осциллирующие движения использовались как ключевой инструмент для решения многих важных задач современной физики. Параллельно развивалась теория ограниченных по Пуассону или, более кратко, $\mathcal{P}$ -ограниченных решений, основные понятия которой были введены в работах автора (см., например, [6]–[11]). Эти понятия обобщают классическое представление об ограниченности, допуская нахождение решения в заданной области лишь на специальной последовательности временных интервалов. На основе различных модификаций метода вектор-функций Ляпунова были получены достаточные условия различных типов $\mathcal{P}$ -ограниченности множеств всех решений дифференциальных систем. В последующих исследованиях на основе синтеза методов вектор-функций Ляпунова, канонических областей Красносельского и направляющих функций были установлены достаточные условия существования $\mathcal{P}$ -ограниченных решений. Важным этапом стала финальная характеристика понятия $\mathcal{P}$ -ограниченности, позволившая выявить глубокую связь между этим понятием и осциллирующими решениями. Это привело к обнаружению достаточных условий различных видов осциллируемости множеств всех решений – равномерной, равномерной в пределе и тотальной. В настоящем исследовании вводятся новые классы осциллирующих множеств всех решений, а именно, введены понятие эквиосциллируемости множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. Введенные понятия представляют собой специализированные случаи $\mathcal{P}$ -эквиограниченности множества все решений дифференциальной системы. На основе применения принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова получены достаточные условия различных типов эквиосциллируемости множества всех решений. В качестве следствий получены достаточные условия соответствующих типов эквиосциллируемости множества всех решений на языке классических функций Ляпунова. Предлагаемый подход открывает новые возможности для анализа сложных динамических систем в различных областях математической физики.

1. Предварительные сведения. Пусть задана произвольная дифференциальная система

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

с непрерывной правой частью, где $\mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty)$, все решения которой продолжимы на $\mathbb{R}^+$.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначена стандартная норма в $\mathbb{R}^n$. Для решения $x(t)$ системы (1) используется обозначение $x(t, t_0, x_0)$, если $x_0 = x(t_0)$. Для любого числа $t_0 \in \mathbb{R}^+$ используется обозначение $\mathbb{R}^+(t_0) \equiv [t_0; +\infty)$. Числовая последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ называется $\mathcal{P}$ -последовательностью, если эта последовательность неотрицательна, возрастает и, кроме того, удовлетворяет условию $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$. Каждой такой $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ сопоставлено множество $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$. Наконец, для любых $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leq k \leq n$ используется обозначение $y = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Вспомним сначала необходимые базовые определения, связанные с понятиями ограниченности, $\mathcal{P}$ -ограниченности (ограниченности по Пуассону) и осциллируемости данного решения системы (1).

Определение 1. [12] Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y -ограниченным (ограниченным [13]), если для этого решения существует такая константа $\beta > 0$, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство

$$\|y(t, t_0, x_0)\| \leq \beta \quad (\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta).$$

В противном случае решение системы (1) называется y -неограниченным (неограниченным).

Определение 2. [12] Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y - $\mathcal{P}$ -ограниченным ($\mathcal{P}$ -ограниченным), если для этого решения существуют такая константа $\beta > 0$ и такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство

$$\|y(t, t_0, x_0)\| \leq \beta \quad (\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta).$$

Из определений 1 и 2 видно, что любое y -ограниченное (ограниченное) решение системы (1) является y - $\mathcal{P}$ -ограниченным ($\mathcal{P}$ -ограниченным).

В работе [9] получен следующий признак, дающий финальную характеристику y - $\mathcal{P}$ -ограниченного ($\mathcal{P}$ -ограниченного) решения системы (1).

Предложение 1. Необходимым и достаточным условием y - $\mathcal{P}$ -ограниченности ($\mathcal{P}$ -ограниченности) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является выполнение следующего требования:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t_0, x_0) \neq \infty \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) \neq \infty \right). \quad \blacksquare$$

Определение 3. [9], [10] Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y -осциллирующим (осциллирующим [1] (см. также [5])), если это решение является y -неограниченным (неограниченным) и, кроме того, выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t_0, x_0) \neq \infty \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) \neq \infty \right).$$

Из данного определения, пользуясь предложением 1, получаем, что каждое y - $\mathcal{P}$ -ограниченное ($\mathcal{P}$ -ограниченное) решение системы (1) является либо y -ограниченным (ограниченным) либо y -осциллирующим (осциллирующим). Как следствие имеем следующее утверждение.

Предложение 2. [9], [10] Необходимым и достаточным условием y -осциллируемости (осциллируемости) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является одновременное выполнение следующих требований: 1) решение $x(t, t_0, x_0)$ является y - $\mathcal{P}$ -ограниченным ($\mathcal{P}$ -ограниченным); 2) решение $x(t, t_0, x_0)$ является y -неограниченным (неограниченным). $\blacksquare$

Вспомним теперь необходимые базовые определения, которые связаны с понятиями эквиограниченности и $\mathcal{P}$ -эквиограниченности (эквиограниченности по Пуассону) множества всех решений системы (1). Далее для любых $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leq k \leq m \leq n$ будем употреблять следующие обозначения:

$$y = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k \quad \text{и} \quad z = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Определение 4. [11] Множество всех решений системы (1) называется y - z_0 -эквиограниченным, если для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$, $\|z_0\| \leq \alpha$, системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, x_0)\| \leq \beta$. В случае, когда $m = n$, y - z_0 -эквиограниченность множества всех решений системы (1) называется [12] y -эквиограниченностью множества всех решений этой системы. В случае же, когда $k = m = n$, y - z_0 -эквиограниченность множества всех решений системы (1) называется [13] эквиограниченностью множества всех решений этой системы.

Определение 5. [6] Множество всех решений системы (1) называется y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограниченным, если для дифференциальной системы (1) найдется такая $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, и для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \in M(\tau)$ существует такое $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$, $\|z_0\| \leq \alpha$, системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, x_0)\| \leq \beta$. В случае, когда $k \leq m = n$, y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограниченность множества всех решений системы (1) называется y - $\mathcal{P}$ -эквиограниченностью множества всех решений этой системы. В случае же, когда $k = m = n$, y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограниченность множества всех решений системы (1) называется $\mathcal{P}$ -эквиограниченностью множества всех решений этой системы.

Из определений 4 и 5 видно, что если множество всех решений системы (1) является y - z_0 -эквиограниченным, то это множество y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограничено. В частности, если множество всех решений системы (1) y -эквиограничено, то это множество y - $\mathcal{P}$ -эквиограничено. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиограничено, то это множество является $\mathcal{P}$ -эквиограниченным. Кроме того, легко видеть, что без ограничения общности функцию $\beta = \beta(t_0, \alpha)$ из определений 4 и 5 можно считать неубывающей по α при каждом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$.

В некоторых случаях при работе с множеством всех решений системы (1) требуется точно указать нужную $\mathcal{P}$ -последовательность. В таких случаях будем говорить, что множество всех решений системы (1) y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограничено относительно данной $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Аналогично будем говорить для y - $\mathcal{P}$ -эквиограниченности, а также для $\mathcal{P}$ -эквиограниченности множества всех решений системы (1).

Легко видеть, что если множество всех решений системы (1) y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограничено, то любое решение этой системы y - $\mathcal{P}$ -ограничено. Действительно, из определения 5 видно, что каждое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $t_0 \in M(\tau)$, является y - $\mathcal{P}$ -ограниченным. Покажем, что любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), для которого $t_0 \notin M(\tau)$, также является y - $\mathcal{P}$ -ограниченным. Рассмотрим для решения $x(t, t_0, x_0)$ решение $x(t, t'_0, x'_0)$ системы (1), где $t'_0 > t_0$, $t'_0 \in M(\tau)$ и $x'_0 = x(t'_0, t_0, x_0)$. Решение $x(t, t'_0, x'_0)$ является y - $\mathcal{P}$ -ограниченным, поскольку $t'_0 \in M(\tau)$. Из этого, пользуясь предложением 1, имеем $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t'_0, x'_0) \neq \infty$. Так как

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t_0, x_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t'_0, x'_0) \neq \infty,$$

то из предложения 1 следует, что решение $x(t, t_0, x_0)$ является y - $\mathcal{P}$ -ограниченным. В частности, при $k \leq m = n$ получаем, что если множество всех решений системы (1) y - $\mathcal{P}$ -эквиограничено, то любое

решение этой системы y - $\mathcal{P}$ -ограничено. При $k = m = n$ получаем, что если множество всех решений системы является (1) $\mathcal{P}$ -эквиограниченным, то любое решение этой системы $\mathcal{P}$ -ограничено.

Освежим теперь в памяти необходимые сведения о вектор-функциях Ляпунова [14], [15]. Пусть задана некоторая непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $l \geq 1$. Производная $\dot{V}(t, x)$ в силу системы (1) этой вектор-функции определяется обычным способом, т. е. покомпонентно. Далее для любых векторов $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ используется обозначение $\vartheta \leq \psi$, если $\vartheta_i \leq \psi_i$ для каждого $1 \leq i \leq l$. Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ и дифференциальная система

$$\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^l, \quad (2)$$

с непрерывной правой частью называются, соответственно, вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для системы (1), если для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место следующее неравенство:

$$\dot{V}(t, x) \leq g(t, V(t, x)). \quad (3)$$

Далее будем предполагать, что вектор-функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условию Важевского, которое состоит в том, что для каждого $1 \leq s \leq l$ компонента $g_s : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ этой вектор-функции является неубывающей по переменным $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{s-1}, \vartheta_{s+1}, \dots, \vartheta_l$ при любом фиксированном значении переменной ϑ_s . Выполнение условия Важевского для правой части системы (2) гарантирует, что среди всех решений $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0)$ этой системы существует так называемое верхнее решение $\bar{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$, т. е. решение, которое для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ удовлетворяет неравенству $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0) \leq \bar{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$. Главным свойством верхних решений является то, что для решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), вектор-функции Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ и верхнего решения $\bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$ системы сравнения (2) для системы (1) имеет место справедливое при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq \bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)). \quad (4)$$

3. Полученные результаты. Введем сначала основное понятие этой работы, а именно, введем понятие y - z_0 -эквиосциллируемости множества всех решений, представляющее собой специальный случай понятия y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограниченности множества всех решений.

Определение 6. Множество всех решений системы (1) назовем y - z_0 -эквиосциллирующим, если множество всех решений этой системы y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограничено и, кроме того, каждое решение этой системы является y -неограниченным. В случае, когда $k \leq m = n$, множество всех решений системы (1) будем называть y -эквиосциллирующим. В случае же, когда $k = m = n$, множество всех решений системы (1) будем называть эквиосциллирующим.

Из сказанного выше следует, что если множество всех решений дифференциальной системы (1) y - z_0 -эквиосциллирует, то любое решение этой системы является y -осциллирующим. В частности, если множество всех решений системы (1) y -эквиосциллирует, то любое решение этой системы является y -осциллирующим. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиосциллирует, то любое решение этой системы является осциллирующим.

Далее для произвольных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $1 \leq p \leq q \leq l$ будем употреблять обозначения $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ и $\gamma = (\xi_1, \dots, \xi_q)^T$. Кроме того, для каждой $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ вместе с указанным выше множеством $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ далее будет использоваться еще и, так сказать, «дополнительное к $M(\tau)$ » множество $N(\tau)$, т. е. множество

$$N(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i}; \tau_{2i+1}].$$

Получим теперь, пользуясь техникой вектор-функций Ляпунова, достаточное условие y - z_0 -эквиосциллируемости множества всех решений системы (1).

Теорема 1. Предположим, что для системы (1) имеются следующие объекты:

- $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;
- вектор-функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ с системой сравнения (2);
- числа $1 \leq p \leq q \leq l$;
- непрерывно дифференцируемая положительная функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая удовлетворяет условиям:

- для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$V_1(t, x) \geq 0, \dots, V_q(t, x) \geq 0;$$

- для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$b(\|y\|) \leq V_1(t, x) + \dots + V_p(t, x),$$

где $b(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ – некоторая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $b(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$;
3) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$V_1(t, x) + \dots + V_q(t, x) \leq a(t, \|z\|),$$

где $a(t, r)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая положительная функция, которая возрастает по r при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$;

4) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$W(t, x) \leq d(\|y\|),$$

где $d(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ – некоторая положительная и возрастающая функция;

5) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\dot{W}(t, x) \geq h(W(t, x)),$$

где $h(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$ – некоторая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $h(r) > 0$ при любом $r > 0$.
Кроме того, пусть множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) является μ - γ_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограниченным относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y - z_0 -эквиосциллирующим.

Доказательство. Установим сначала, что каждое решение системы (1) является y -неограниченным. Проще всего доказывается это от противного. Действительно, предположим, что любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является y -ограниченным, т. е. для этого решения существует такое $\beta > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, x_0)\| \leq \beta$. При помощи этого неравенства, пользуясь условием 4) теоремы, получаем для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau)$ неравенство $W(t, x(t, t_0, x_0)) \leq d(\beta)$. Теперь, используя условие 5) теоремы, получаем для любых $\mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство $W(t, x(t, t_0, x_0)) \geq W(t_0, x_0) + h(W(t_0, x_0))(t - t_0)$. Из двух последних неравенств следует справедливость неравенства

$$d(\beta) \geq W(t_0, x_0) + h(W(t_0, x_0))(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau),$$

что является абсурдом, поскольку $h(W(t_0, x_0)) > 0$ и $d(\beta)$ – константа. Таким образом, получено противоречие и, следовательно, каждое решение системы (1) является y -неограниченным. Докажем теперь, что множество всех решений системы (1) $y - z_0 - \mathcal{P}$ -эквиограничено. Рассмотрим любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $\|z_0\| \leq \alpha$, системы (1). С целью поиска для этого решения требуемого в определении 5 числа $\beta = \beta(t_0, \alpha)$ заметим сначала, имея в виду неравенство (4) и условие 2), что для любого $t \in M(\tau)$ справедливо неравенство

$$b(\|y(t, t_0, x_0)\|) \leq \bar{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)) + \dots + \bar{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0)),$$

где $\bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)) = (\bar{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)), \dots, \bar{\vartheta}_l(t, t_0, V(t_0, x_0)))^T$ – верхнее решение системы сравнения (2) для системы (1). По условию теоремы множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) μ - γ_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограничено относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Поэтому, для верхнего решения $\bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$, где $t_0 \in M(\tau)$, системы сравнения (2) и нормы $\|V^Y(t_0, x_0)\|$ вектора $V^Y(t_0, x_0) = (V_1(t_0, x_0), \dots, V_q(t_0, x_0))^T$, существует число $\xi(t_0, \|V^Y(t_0, x_0)\|)$ такое, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ имеет место неравенство

$$\|\bar{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0))\| \leq \xi(t_0, \|V^Y(t_0, x_0)\|),$$

где $\bar{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0)) = (\bar{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)), \dots, \bar{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0)))^T$. Из условий 1) и 3) видно, что для любого $t_0 \in M(\tau)$ справедливо неравенство $\|V^Y(t_0, x_0)\| \leq a(t_0, \alpha)$. Пользуясь теперь тем, что функция $\xi = \xi(t_0, r)$ не убывает при любом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$, получаем справедливое для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ неравенство

$$p \cdot \|\bar{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0))\| \leq p \cdot \xi(t_0, a(t_0, \alpha)).$$

Из этого следует, что для каждого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $b(\|y(t, t_0, x_0)\|) \leq p \cdot \xi(t_0, a(t_0, \alpha))$. Так как число p фиксировано, то при помощи условия $b(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ можно выбрать такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$, что $p \cdot \xi(t_0, a(t_0, \alpha)) \leq b(\beta)$. Из этого неравенства получаем справедливое для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ неравенство $b(\|y(t, t_0, x_0)\|) \leq b(\beta)$. Так как по условию теоремы функция $b(r)$ является неубывающей, то из последнего неравенства вытекает, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, x_0)\| \leq \beta$. Таким образом, установлено, что множество всех решений системы (1) y - z_0 - $\mathcal{P}$ -эквиограничено. Из этого, учитывая доказанную выше y -неограниченность каждого решения системы (1), получаем, что множество всех решений системы (1) является y - z_0 -эквиосциллирующим. Теорема доказана. ■

Отметим, что если в формулировке теоремы 1 положить $z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием y -эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций

Ляпунова. Если же в формулировке теоремы 1 положить $y = z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций Ляпунова.

Рассмотрим теперь случай, когда в теореме 1 для вектор-функций Ляпунова полагается $l = 1$, т. е. когда вектор-функции Ляпунова являются функциями Ляпунова. При помощи неравенства (3) несложно видеть, что в рассматриваемом случае теорема 1 превращается в следующее достаточное условие y -эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Предложение 3. Предположим, что для системы (1) имеются следующие объекты:

- a) $\mathcal{P}$ -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;
- b) неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (функция Ляпунова)
- c) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$;
- e) непрерывная функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

которые удовлетворяют условиям:

- 1) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо двойное неравенство $b(\|y\|) \leq V(t, x) \leq a(t, \|z\|)$, где функции $b(r)$ и $a(t, r)$ такие же, как в теореме 1;
- 2) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $\dot{V}(t, x) \leq g(t, V(t, x))$;
- 3) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство $W(t, x) \leq d(\|y\|)$, где функция $d(r)$ такая же, как в теореме 1;
- 4) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $\dot{W}(t, x) \geq h(W(t, x))$, где функция $h(r)$ такая же, как в теореме 1;
- 5) множество всех решений уравнения $\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ является $\mathcal{P}$ -эквиограниченным относительно $\mathcal{P}$ -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y -эквиосциллирующим. ■

В заключение отметим, что если в формулировке предложения 3 положить $z = x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие y -эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова. Если же в формулировке предложения 3 положить $y = z = x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Список литературы

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 3^e ser. 1922;39:29-130.
2. Ситников К.А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел. *Доклады Академии наук СССР.* 1960;133(2):303-306.
3. Леонтович А.М. О существовании осциллирующих траекторий в одной бильярдной задаче. *Докл. АН СССР.* 1962;145(3):523-526.
4. Алексеев В.М. Квазислучайные динамические системы. II. *Математический сборник.* 1968;77(119):545-600.
5. Пустыльников Л.Д. О строгом обосновании возможности неограниченного роста энергии частиц в одной задаче ядерной физики. *Доклады Академии наук СССР.* 1985;283(3):550-553.
6. Лапин К.С. Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова. *Дифференциальные уравнения.* 2018;54(1):40-50. DOI: 10.1134/S0374064118010053
7. Лапин К.С. Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений. *Дифференциальные уравнения.* 2020;56(10):1304-1309. DOI: 10.1134/S0374064120100027
8. Лапин К.С. Вектор-функции Ляпунова, вращения векторных полей, направляющие функции и существование ограниченных по Пуассону решений. *Дифференциальные уравнения.* 2021;57(3):306-312. DOI:10.31857/S037406412103002X
9. Лапин К.С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. Саранск: РИЦ МГПУ; 2022. 163 с.
10. Лапин К.С. Тотальная ограниченность по Пуассону и тотальная осциллируемость решений систем дифференциальных уравнений. *Владикавказский математический журнал.* 2022;24(4):105-116. DOI: 10.46698/w0398-0994-2990-z
11. Лапин К.С. Высшие производные функций Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируемыми начальными условиями. *Матем. заметки.* 2017;101(6):883-893. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm11156>
12. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных. М.: Наука; 1987. 254 с.
13. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений. *Математика.* 1965;5:95-127.
14. Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И., Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М.: Наука; 1987. 312 с.

15. Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит; 2001. 373 с.

References

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 3^e ser. 1922;39:29–130.
2. Sitnikov K The Existence of Oscillatory Motions in the Three-Body Problems. *Soviet Physics Doklady* 1960;5:647–650.
3. Leontovich AM. On the Existence of Unbounded Oscillating Trajectories in a Billiard Problem. *Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of USSR]*. 1962;145(3):523–526. (In Russ.)
4. Alekseev VM. Quasirandom Dynamical Systems. II. One-Dimensional Nonlinear Vibrations in a Periodically Perturbed Field. *Mathematics of the USSR-Sbornik*. 1968;6(4):505–560. DOI: 10.1070/SM1968v006n04ABEH001074.
5. Pustyl'nikov LD. Strict Justification of the Possibility of Unbounded Increase in Particle Energy in a Problem of Nuclear Physics. *Doklady Akademii Nauk SSSR [Reports of the Academy of Sciences of USSR]*. 1985;283(3):550–553. (In Russ.)
6. Lapin KS. Uniform Boundedness in the Sense of Poisson of Solutions of Systems of Differential Equations and Lyapunov Vector Functions. *Differential Equations*. 2018; 54(1):38–48. DOI: 10.1134/S0012266118010056.
7. Lapin KS. Lyapunov Vector Functions, Krasnosel'skii Canonical Domains, and Existence of Poisson Bounded Solutions. *Differential Equations*. 2020;56(10):1270–1275. DOI: 10.1134/S0012266120010002X.
8. Lapin, KS. Lyapunov Vector Functions, Rotation of Vector Fields, Guiding Functions, and the Existence of Poisson Bounded Solutions. *Differential Equations*. 2021;57(3):284–290. DOI: 10.1134/S0012266121030022.
9. Lapin KS. Ogranichenost' po Puassonu reshenii sistem differentsial'nykh uravnenii [Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations.] Saransk: RITS MGPU; 2022. 163 p. (In Russ.)
10. Lapin KS. Poisson total boundedness and total oscillability of solutions to systems of differential equations. *Siberian Mathematical Journal*. 2023;64(6):988–995. DOI:https://doi.org/10.1134/S0037446623040201
11. Lapin KS. Higher-Order Derivatives of Lyapunov Functions and Partial Boundedness of Solutions with Partially Controllable Initial Conditions. *Mathematical Notes*. 2017;101(6):1000–1008. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434617050273
12. Rumyantsev VV. Oziraner AS. Ustoychivost' i stabilizatsiya dvizheniya otnositel'no chasti peremennykh [Stability and stabilization of motion with respect to part of variables]. Moscow: Nauka, 1987, 253 p. (In Russ.)
13. Yoshizawa T. Liapunovs function and boundedness of solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1959;2:95–142.
14. Abdullin RZ., Anapolskii LY., Voronov AA., Zemlyakov AS., Kozlov RI., Malikov AI., Matrosov VM. Metod vektornykh funktsii Lyapunova v teorii ustoychivosti [The method of Lyapunov vector functions in stability theory]. Moscow: Nauka; 1987. 312 p. (In Russ.)
15. Matrosov VM. Metod vektornykh funktsiy Lyapunova: analiz dinamicheskikh svoystv nelineynykh sistem [Method of Lyapunov Vector Functions: Analysis of Dynamical Properties of Nonlinear Systems], Moscow, Fizmatlit, 2001, 373 p. (in Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 24.04.2025

Received April 24, 2025

Поступила после рецензирования 19.05.2025

Revised May 19, 2025

Принята к публикации 23.05.2025

Accepted May 23, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ларин Кирилл Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

Глицай Илья Олегович – аспирант кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kirill S. Lapin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evsevieva, Saransk, Russia

Ilya O. Gritsay – Graduate Student of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evsevieva, Saransk, Russia

[К содержанию](#)

Об одной задаче с нелокальными интегральными условиями первого рода для уравнения второго порядка

Гилев А. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии В. Б. Васильевым)

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева,
Россия, 443086, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34
toshqaaa@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями первого рода для гиперболического уравнения второго порядка в характеристической области. Обусловив единственность решения поставленной задачи, выполняется переход к операторному уравнению, которое, как доказано в работе, эквивалентно рассматриваемой нелокальной задаче. Показано, что оператор полученного уравнения вполне непрерывен, а значит ввиду доказанной единственности решения операторное уравнение разрешимо. Отсюда, а также в силу эквивалентности рассматриваемой задачи и операторного уравнения, и следует разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальные интегральные условия первого рода, существование решения, вполне непрерывный оператор

Для цитирования: Гилев А. В. 2025. Об одной задаче с нелокальными интегральными условиями первого рода для уравнения второго порядка. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 82–92.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-82-92 EDN YPBMKJ

Original Research

On a Problem With Nonlocal Integral Conditions of the First Kind for a Second-order Equation

Anton V. Gilev 

(Article submitted by a member of the editorial board V. B. Vasilyev)

Samara National Research University,
34 Moskovskoye shosse, Samara 443086, Russia
toshqaaa@gmail.com

Abstract. In this article we consider a nonlocal problem for a second-order differential equation in the characteristic domain with integral conditions of the first kind. By introducing a new unknown function we reduce the original problem to the equivalent one with nonlocal conditions containing the unit as kernels. Next, we were able to prove the uniqueness of the solution to the problem and perform the transition to the operator equation. At this stage we justify the complete continuity of the obtained operator. From this, and also due to the previously proven uniqueness of the solution, the solvability of the operator equation follows. Since the original problem is equivalent to an operator equation whose solution exists, then the solution to the original problem also exists. As a result of the study, we found the conditions under which exists a solution to original problem. We also formulated and proved the corresponding theorem on the existence and uniqueness of the solution to the problem under consideration.

Keywords: Nonlocal Integral Conditions of the First Kind, Existence of a Solution, Completely Continuous Operator

For citation: Gilev A. V. 2025. On a Problem With Nonlocal Integral Conditions of the First Kind for a Second-order Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 82–92. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-82-92 EDN YPBMKJ

1. Введение. Моделирование различных физических процессов в случае, когда граница протекания моделируемого процесса недоступна для измерения, приводит к постановке задач с нелокальными условиями. Принято считать, что отправной точкой множества исследований этого класса задач являются работы [1, 2]. Не ограничивая общности, остановимся на рассмотрении нелокальных интегральных условий и отметим, что после выхода вышеупомянутых работ стали активно появляться исследования, посвященные разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями, играющими роль как граничных условий [3, 4], так и условий переопределения в обратных задачах [5, 6, 7].

Под нелокальными интегральными условиями принято понимать [8] следующее соотношение

$$\alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda \int_{\Omega} K(x, y, t) u(y, t) dy = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_i} \nu_{x_j},$$

а $\nu(x) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ есть вектор внешней нормали к границе области Ω . Нелокальные интегральные условия имеют классификацию по родам. Если в (1) α и β не обращаются в нуль одновременно, то условие (1) называют нелокальным интегральным условием второго рода, а если же $\alpha = \beta = 0$ – первого рода.

Важно отметить, что задачи с нелокальными условиями относятся к классу неклассических задач, что не позволяет применить хорошо изученные подходы и методы обоснования разрешимости задачи без какой-либо модификации. Данный факт хорошо виден, например, в работе [9].

Род нелокальных условий также оказывает влияние на выбор метода исследования нелокальной задачи. Так, в [10] для задачи с условиями, содержащими производную по нормали, предложен метод обоснования разрешимости в пространстве Соболева, так называемый метод компактности, основывающийся на известной процедуре, изложенной в [11]. Однако, при отсутствии внеинтегрального слагаемого, содержащего производную, позже, в [12] была предложена альтернатива этому методу, получившая развитие в дальнейших работах. В работе [13] предложен метод, который основывается на возможности сведения условий первого к условиям второго рода.

Кроме начально-краевых задач с нелокальными условиями интересен класс задач, которые можно рассматривать как интегральный аналог задачи Гурса. Простейшая задача из такого класса была рассмотрена З. А. Нахушевой в [14] для уравнения $u_{xy}(x, y) = 0$. Решение этой задачи основано на известном общем решении этого уравнения. В случае общего уравнения со старшей смешанной производной нельзя рассчитывать на возможность нахождения общего решения, однако удалось доказать разрешимость задачи с нелокальными условиями для него.

2. Постановка задачи. Поставим следующую задачу: найти в области $\Omega = (0, \alpha) \times (0, \beta)$ решение уравнения

$$u_{xy}(x, y) + (a(x, y)u(x, y))_x + (b(x, y)u(x, y))_y + c(x, y)u(x, y) = f(x, y), \quad (2)$$

которое удовлетворяет нелокальным интегральным условиям первого рода

$$\int_0^\alpha K(x)u(x, y)dx = h(y), \quad \int_0^\beta M(y)u(x, y)dy = p(x). \quad (3)$$

Будем предполагать выполненными следующие условия

$$a, a_x, b, b_y, c, f \in C^1(\bar{\Omega}), \quad p \in C^1[0, \alpha], \quad h \in C^1[0, \beta], \quad (R_1)$$

$$\begin{aligned} K(x) &\in C^1[0, \alpha], \quad K(x) \neq 0, \quad x \in [0, \alpha], \\ M(y) &\in C^1[0, \beta], \quad M(y) \neq 0, \quad y \in [0, \beta]. \end{aligned} \quad (R_2)$$

Прежде всего сведем условия (3) к более простым. Введем функцию

$$v(x, y) = K(x)M(y)u(x, y),$$

где $u(x, y)$ – решение задачи (2) – (3). Тогда новая неизвестная функция удовлетворяет уравнению

$$v_{xy}(x, y) + (A(x, y)v(x, y))_x + (B(x, y)v(x, y))_y + C(x, y)v(x, y) = F(x, y), \quad (4)$$

и условиям

$$\int_0^\alpha v(x, y)dx = H(y), \quad \int_0^\beta v(x, y)dy = P(x), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A(x, y) &= a(x, y) - \frac{M'(y)}{M(y)}, \quad B(x, y) = b(x, y) - \frac{K'(x)}{K(x)}, \\ C(x, y) &= \frac{K'(x)M'(y)}{K(x)M(y)} - \frac{a(x, y)K'(x)}{K(x)} - \frac{b(x, y)M'(y)}{M(y)} + c(x, y), \quad F(x, y) = K(x)M(y)f(x, y), \\ H(y) &= M(y)h(y), \quad P(x) = K(x)p(x). \end{aligned}$$

Предполагая же теперь, что $v(x, y)$ – решение задачи (4)–(5), и воспользовавшись обратной заменой, не составляет труда получить задачу (2)–(3), что и приводит к эквивалентности задач (2)–(3) и (4)–(5).

Вид интегральных условий (5) позволяет легко доказать следующую теорему [15].

Теорема 2.1. Если

$$A_y(x, y)p_1^2 - 2C(x, y)p_1p_2 + B_x(x, y)p_2^2 \geq 0, \quad C_{xy}(x, y) \geq 0,$$

то существует не более одного решения задачи (4)–(5) для любых конечных чисел α, β .

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ задачи (4)–(5). Тогда функция $v(x, y)$, определенная следующим образом $v(x, y) = v_1(x, y) - v_2(x, y)$, очевидно, является решением однородного уравнения

$$v_{xy}(x, y) + (A(x, y)v(x, y))_x + (B(x, y)v(x, y))_y + C(x, y)v(x, y) = 0 \quad (6)$$

и удовлетворяет следующим условиям,

$$\int_0^\alpha v(x, y)dx = 0, \quad \int_0^\beta v(x, y)dy = 0. \quad (7)$$

Умножим (6) на функцию

$$\int_0^y \int_0^x v(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

и проинтегрируем по области Ω , что приводит к равенству

$$\int_0^\beta \int_0^\alpha [v_{xy}(x, y) + (A(x, y)v(x, y))_x + (B(x, y)v(x, y))_y + C(x, y)v(x, y)] \int_0^y \int_0^x v(\xi, \eta)d\xi d\eta dx dy = 0.$$

Воспользуемся интегрированием по частям в левой части этого равенства и, ввиду условий (7), получим

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \int_0^\alpha \left[v^2(x, y) + \frac{1}{2}A_y(x, y) \left(\int_0^y v(x, \eta)d\eta \right)^2 + \frac{1}{2}B_x(x, y) \left(\int_0^x v(\xi, y)d\xi \right)^2 - \frac{1}{2}C_{xy}(x, y) \left(\int_0^y \int_0^x v(\xi, \eta)d\xi d\eta \right)^2 - \right. \\ \left. - C(x, y) \int_0^y v(\xi, \eta)d\eta \int_0^x v(\xi, y)d\xi \right] dx dy = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

а значит, в силу условий теоремы, $v(x, y) = 0$, что и означает единственность решения задачи (4)–(5).

3. Существование решения задачи (4)–(5). Займемся вопросом существования решения эквивалентной задачи (4)–(5), для чего сформулируем и докажем теорему.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (R_1) , (R_2) и теоремы 2.1. Тогда, если

$$1 + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - y)A(x, y)dy \neq 0, \quad \forall x \in [0, \alpha], \quad 1 + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\alpha - x)B(x, y)dx \neq 0, \quad \forall y \in [0, \beta],$$

то решение задачи (4)–(5) существует.

Доказательство. Запишем уравнение (4) следующим образом:

$$v_{xy}(x, y) = F(x, y) - A(x, y)v_x(x, y) - B(x, y)v_y(x, y) - \tilde{C}(x, y)v(x, y), \quad (9)$$

где $\tilde{C}(x, y) = A_x(x, y) + B_y(x, y) + C(x, y)$. Считая правую часть временно известной, легко получить представление

$$\begin{aligned} v(x, y) = f(x) + g(y) + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta)d\xi d\eta - \int_0^y \int_0^x A(\xi, \eta)v_\xi(\xi, \eta)d\xi d\eta - \\ - \int_0^y \int_0^x B(\xi, \eta)v_\eta(\xi, \eta)d\xi d\eta - \int_0^y \int_0^x \tilde{C}(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (10)$$

где $f(x)$, $g(y)$ – произвольные гладкие функции.

При помощи интегрирования по частям избавимся от слагаемых, содержащих производные от функции $v(x, y)$ в правой части (10). Заметим, что условия (R_1) , (R_2) и представления A, B, C дают гарантию выполнения условия (R_1) и для новых коэффициентов. Тогда, в силу определения $\tilde{C}(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} v(x, y) = & f(x) + g(y) + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta + \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta - \\ & - \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi + \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

Применим для отыскания $f(x)$ и $g(y)$ условия (5), что приводит к равенствам

$$\begin{aligned} H(y) = & \int_0^\alpha f(x) dx + \alpha g(y) + \int_0^\alpha \left(\int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta + \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi + \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P(x) = & \beta f(x) + \int_0^\beta g(y) dy + \int_0^\beta \left(\int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta + \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi + \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta \right) dy. \end{aligned} \quad (13)$$

Поменяем порядок интегрирования в равенствах (12) и (13) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dy &= \int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy, \quad \int_0^\alpha \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dx = \int_0^\alpha (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dx, \\ \int_0^\beta \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta dy &= \int_0^\beta (\beta - y) A(0, y) v(0, y) dy, \quad \int_0^\alpha \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi dx = \int_0^\alpha (\alpha - x) B(x, 0) v(x, 0) dx, \\ \int_0^\alpha \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dx &= \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x) F(x, \eta) dx d\eta, \quad \int_0^\beta \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta dy = \int_0^\alpha \int_0^y (\beta - y) F(\xi, y) dy d\xi, \\ \int_0^\alpha \int_0^y \int_0^x \tilde{C}(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta dx &= \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x) \tilde{C}(x, \eta) v(x, \eta) dx d\eta, \\ \int_0^\beta \int_0^y \int_0^x \tilde{C}(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta dy &= \int_0^\alpha \int_0^y (\beta - y) \tilde{C}(\xi, y) v(\xi, y) dy d\xi. \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} H(y) = & \int_0^\alpha f(x) dx + \alpha g(y) + \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x) F(x, \eta) d\eta dx - \int_0^\alpha \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx + \alpha \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta - \\ & - \int_0^\alpha (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dx + \int_0^\alpha (\alpha - x) B(x, 0) v(x, 0) dx - \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x) C(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx, \\ P(x) = & \beta f(x) + \int_0^\beta g(y) dy + \int_0^\beta \int_0^x (\beta - y) F(\xi, y) d\xi dy - \int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy + \int_0^\beta (\beta - y) A(0, y) v(0, y) dy - \end{aligned}$$

$$- \int_0^{\beta} \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy + \beta \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi - \int_0^{\beta} \int_0^x (\beta - y) C(\xi, y) v(\xi, y) dy d\xi.$$

Обратим внимание на наличие интегральных слагаемых от неизвестных функций в приведенных отношениях. Для того чтобы определить функции $f(x)$, $g(y)$, можно решить соответствующие интегральные уравнения, однако выберем другой способ. Запишем полученные выше выражения в виде

$$\begin{cases} H(y) - G(y) = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \alpha g(y), \\ P(x) - N(x) = \beta f(x) + \int_0^{\beta} g(y) dy, \end{cases} \quad (14)$$

где обозначим

$$\begin{aligned} G(y) &= \int_0^{\alpha} \int_0^y (\alpha - x) F(x, \eta) d\eta dx - \int_0^{\alpha} \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx + \alpha \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta - \\ &- \int_0^{\alpha} (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dx + \int_0^{\alpha} (\alpha - x) B(x, 0) v(x, 0) dx - \int_0^{\alpha} \int_0^y (\alpha - x) C(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx, \\ N(x) &= \int_0^{\beta} \int_0^x (\beta - y) F(\xi, y) d\xi dy - \int_0^{\beta} (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy + \int_0^{\beta} (\beta - y) A(0, y) v(0, y) dy - \\ &- \int_0^{\beta} \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy + \beta \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi - \int_0^{\beta} \int_0^x (\beta - y) C(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy, \end{aligned}$$

и сразу вычислим сумму интегралов от искомых функций, проинтегрировав систему (14) по соответствующим переменным, а затем сложим оба равенства

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(x) dx + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} g(y) dy = \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\int_0^{\beta} H(y) dy + \int_0^{\alpha} P(x) dx - \int_0^{\beta} G(y) dy - \int_0^{\alpha} N(x) dx \right). \quad (15)$$

Тогда, учитывая (15), для (11) следует

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{1}{\beta} (P(x) - N(x)) + \frac{1}{\alpha} (H(y) - G(y)) - \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\int_0^{\beta} H(y) dy - \int_0^{\beta} G(y) dy + \int_0^{\alpha} P(x) dx - \int_0^{\alpha} N(x) dx \right) + \\ &+ \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta + \int_0^y A(0, \eta) v(0, \eta) d\eta - \\ &- \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi + \int_0^x B(\xi, 0) v(\xi, 0) d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставим значения $N(x)$, $G(y)$ и, после упрощений, получим

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx - \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy dx - \\ &- \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dy dx + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dx - \\ &+ \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^y (\alpha - x) C(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^x (\beta - y) C(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy - \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} (\alpha - x) (\beta - y) C(x, y) v(x, y) dy dx - \end{aligned}$$

$$-\int_0^y A(x, \eta)v(x, \eta)d\eta - \int_0^x B(\xi, y)v(\xi, y)d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\xi d\eta + G(x, y), \quad (16)$$

где

$$G(x, y) = \frac{1}{\beta}P(x) - \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^x (\beta - y)F(\xi, y)d\xi dy + \frac{1}{\alpha}H(y) - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x)F(x, \eta)d\eta dx - \frac{1}{2\alpha\beta} \int_0^\beta H(y)dy - \\ - \frac{1}{2\alpha\beta} \int_0^\alpha P(x)dx + \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \int_0^\beta (\alpha - x)(\beta - y)F(x, y)dy dx + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta)d\xi d\eta.$$

Формула (16) естественно не дает нам решение задачи, и необходимо вспомнить, что мы только временно считаем правую часть (9) известной. (16) представляет собой операторное уравнение, к которому сведена задача (4)–(5). Предполагая теперь, что уравнение (16) разрешимо и $v(x, y)$ его решение, можно легко показать, что эта же функция, если она имеет все производные, входящие в уравнение (4), является решением задачи (4)–(5). Для этого нужно лишь продифференцировать (16) и подставить введенные обозначения $N(x)$ и $G(y)$.

На следующем этапе покажем, что следующее операторное уравнение

$$v(x, y) + \mathcal{T}v = G(x, y), \quad (17)$$

где

$$\mathcal{T}v = -\frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - y)A(x, y)v(x, y)dy - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \int_0^y \left[A(x, \eta)v(x, \eta) + (\alpha - x)C(x, \eta)v(x, \eta) \right] d\eta dx + \\ + \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \int_0^\beta \left[(\beta - y)A(x, y)v(x, y) + (\alpha - x)B(x, y)v(x, y) + (\alpha - x)(\beta - y)C(x, y)v(x, y) \right] dy dx - \\ - \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^x \left[B(\xi, y)v(\xi, y) + (\beta - y)C(\xi, y)v(\xi, y) \right] d\xi dy - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\alpha - x)B(x, y)v(x, y)dx + \int_0^y A(x, \eta)v(x, \eta)d\eta + \\ + \int_0^x B(\xi, y)v(\xi, y)d\xi + \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

разрешимо.

Действительно, легко показать, что оператор $\mathcal{T}$ вполне непрерывен как оператор из C в C , для чего обозначим

$$S(x, y) = \mathcal{T}v.$$

Тогда, в силу условий (R_1) , существуют такие числа A_1, B_1, C_1, V , что

$$\max_{\Omega} |A(x, y)| \leq A_1, \max_{\Omega} |B(x, y)| \leq B_1, \max_{\Omega} |C(x, y)| \leq C_1, \max_{\Omega} |v(x, y)| \leq V$$

и выполняется неравенство

$$|S(x, y)| \leq qD(6 + \frac{5}{4}q),$$

где

$$D = \max\{A_1, B_1, C_1, V\}, \quad q = \max\{\alpha, \beta\},$$

откуда и следует равномерная ограниченность $S(x, y)$.

Рассмотрим разность

$$S(x_2, y_2) - S(x_1, y_1) = -\frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - \eta)A(x_2, \eta)v(x_2, \eta)d\eta + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - \eta)A(x_1, \eta)v(x_1, \eta)d\eta - \\ - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \int_0^{y_2} A(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\eta d\xi + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \int_0^{y_1} A(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\eta d\xi - \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^{x_2} B(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\xi d\eta + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^{x_1} B(\xi, \eta)v(\xi, \eta)d\xi d\eta -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (\alpha - \xi) B(\xi, y_2) v(\xi, y_2) d\xi + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (\alpha - \xi) B(\xi, y_1) v(\xi, y_1) d\xi - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^{y_2} (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi + \\
& + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^{y_1} (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi - \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^{x_2} (\beta - \eta) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^{x_1} (\beta - \eta) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
& + \int_0^{y_2} A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) d\eta - \int_0^{y_1} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta + \int_0^{x_2} B(\xi, y_2) v(\xi, y_2) d\xi - \int_0^{x_1} B(\xi, y_1) v(\xi, y_1) d\xi + \\
& + \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Отметим, что так как

$$\begin{aligned}
\int_0^{\beta} (\beta - \eta) (A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) - A(x_2, \eta) v(x_2, \eta)) d\eta &= \int_0^{\beta} (\beta - \eta) \left[A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) - A(x_2, \eta) v(x_1, \eta) + A(x_2, \eta) v(x_1, \eta) - \right. \\
&\quad \left. - A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) \right] d\eta = \int_0^{\beta} (\beta - \eta) \left[v(x_1, \eta) (A(x_1, \eta) - A(x_2, \eta)) + A(x_2, \eta) (v(x_1, \eta) - v(x_2, \eta)) \right] d\eta,
\end{aligned}$$

то можно перейти к следующему неравенству:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\beta} (\beta - \eta) \left[v(x_1, \eta) (A(x_1, \eta) - A(x_2, \eta)) + A(x_2, \eta) (v(x_1, \eta) - v(x_2, \eta)) \right] d\eta \right| &\leq \int_0^{\beta} (\beta - \eta) |v(x_1, \eta)| |A(x_1, \eta) - A(x_2, \eta)| d\eta + \\
&+ \int_0^{\beta} (\beta - \eta) |A(x_2, \eta)| |v(x_1, \eta) - v(x_2, \eta)| d\eta \leq \frac{\beta^2}{2} (A_1 + V) \epsilon
\end{aligned}$$

в силу непрерывности функций $v(x, y)$ и $A(x, y)$. Далее, из того что

$$\begin{aligned}
\int_0^{y_2} A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) d\eta - \int_0^{y_1} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta &= \int_0^{y_2} A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) d\eta - \int_0^{y_2} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta + \int_0^{y_2} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta - \\
&- \int_0^{y_1} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta = \int_0^{y_2} [A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) - A(x_1, \eta) v(x_1, \eta)] d\eta + \int_{y_1}^{y_2} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta = \\
&= \int_0^{y_2} [A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) - A(x_2, \eta) v(x_1, \eta) + A(x_2, \eta) v(x_1, \eta) - A(x_1, \eta) v(x_1, \eta)] d\eta + \int_{y_1}^{y_2} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta = \\
&= \int_0^{y_2} A(x_2, \eta) [v(x_2, \eta) - v(x_1, \eta)] d\eta + \int_0^{y_2} v(x_1, \eta) [A(x_2, \eta) - A(x_1, \eta)] d\eta + \int_{y_1}^{y_2} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta
\end{aligned}$$

очевидно следует неравенство

$$\left| \int_0^{y_2} A(x_2, \eta) v(x_2, \eta) d\eta - \int_0^{y_1} A(x_1, \eta) v(x_1, \eta) d\eta \right| \leq \beta A_1 \epsilon + \beta V \epsilon + A_1 V \delta.$$

Также несложно заметить, что раз

$$\int_0^{y_2} \int_0^{x_2} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^{y_2} \int_0^{x_1} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^{y_2} \int_0^{x_1} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^{x_1} \int_{y_1}^{y_2} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

то для этой разности имеет место следующая оценка:

$$\left| \int_0^{y_2} \int_0^{x_2} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_0^{y_1} \int_0^{x_1} C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \leq \beta C_1 V \delta + \alpha C_1 V \delta \leq 2q C_1 V \delta.$$

Проводя аналогичные рассуждения, получим:

$$\begin{aligned} & \left| - \int_0^{\alpha} \int_0^{y_2} A(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi + \int_0^{\alpha} \int_0^{y_1} A(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi \right| \leq \alpha A_1 V \delta, \\ & \left| - \int_0^{\beta} \int_0^{x_2} B(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^{\beta} \int_0^{x_1} B(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \leq \beta B_1 V \delta, \\ & \left| - \int_0^{\alpha} (\alpha - \xi) B(\xi, y_2) v(\xi, y_2) d\xi + \int_0^{\alpha} (\alpha - \xi) B(\xi, y_1) v(\xi, y_1) d\xi \right| \leq \frac{\alpha^2}{2} (B_1 + V) \epsilon, \\ & \left| - \int_0^{\alpha} \int_0^{y_2} (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi + \int_0^{\alpha} \int_0^{y_1} (\alpha - \xi) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi \right| \leq \frac{\alpha^2}{2} C_1 V \delta, \\ & \left| - \int_0^{\beta} \int_0^{x_2} (\beta - \eta) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^{\beta} \int_0^{x_1} (\beta - \eta) C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| \leq \frac{\beta^2}{2} C_1 V \delta, \\ & \left| \int_0^{x_2} B(\xi, y_2) v(\xi, y_2) d\xi - \int_0^{x_1} B(\xi, y_1) v(\xi, y_1) d\xi \right| \leq \alpha B_1 \epsilon + \alpha V \epsilon + B_1 V \delta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |S(x_2, y_2) - S(x_1, y_1)| & \leq \frac{\beta}{2} (A_1 + V) \epsilon + A_1 V \delta + B_1 V \delta + \frac{\alpha}{2} (B_1 + V) \epsilon + \frac{\alpha}{2} C_1 V \delta + \frac{\beta}{2} C_1 V \delta + \\ & + \beta A_1 \epsilon + \beta V \epsilon + A_1 V \delta + \alpha B_1 \epsilon + \alpha V \epsilon + B_1 V \delta + 2q C_1 V \delta. \end{aligned}$$

Выберем $\delta = \epsilon$, откуда

$$|S(x_2, y_2) - S(x_1, y_1)| \leq Q \epsilon,$$

где

$$Q = \frac{q}{2} \left(\left(3 + \frac{4}{q} V \right) (A_1 + B_1) + V (6 + C_1) \right)$$

для всякой функции $v(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющей (16). Это означает, что $S(x, y)$ равностепенно непрерывны, но в таком случае оператор $\mathcal{T}$ вполне непрерывен и тогда из теоремы 3.1 следует разрешимость уравнения (17).

Осталось лишь убедиться в том, что это решение имеет нужные производные. Покажем, что существует $v_x(x, y)$. Запишем (16) следующим образом

$$v(x, y) - \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy = G_1(x, y), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx - \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy dx - \\ &- \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dy dx + \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (\alpha - x) B(x, y) v(x, y) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \int_0^y (\alpha - x) C(x, \eta) v(x, \eta) d\eta dx + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta \int_0^x (\beta - y) C(\xi, y) v(\xi, y) d\xi dy - \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \int_0^\beta (\alpha - x)(\beta - y) C(x, y) v(x, y) dy dx - \\
& - \int_0^y A(x, \eta) v(x, \eta) d\eta - \int_0^x B(\xi, y) v(\xi, y) d\xi - \int_0^y \int_0^x C(\xi, \eta) v(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{\beta} P(x) - \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - y) F(\xi, y) d\xi dy + \\
& + \frac{1}{\alpha} H(y) - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (\alpha - x) F(x, \eta) d\eta dx - \frac{1}{2\alpha\beta} \int_0^\beta H(y) dy - \frac{1}{2\alpha\beta} \int_0^\alpha P(x) dx + \\
& + \frac{1}{\alpha\beta} \int_0^\alpha \int_0^\beta (\alpha - x)(\beta - y) F(x, y) dy dx + \int_0^y \int_0^x F(\xi, \eta) d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Заметим, что ядро интегрального оператора в (18) зависит только от x, y , следовательно, интегральное слагаемое есть функция от x . Введем следующее обозначение:

$$V(x) = \int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) v(x, y) dy. \quad (19)$$

Тогда решение (18) представимо в виде

$$v(x, y) = G_1(x, y) - \frac{1}{\beta} V(x). \quad (20)$$

Отыщем $V(x)$, подставив (20) в (19), откуда

$$V(x) = \frac{\int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) G_1(x, y) dy}{1 + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) dy},$$

а значит

$$v(x, y) = G_1(x, y) - \frac{1}{\beta} \frac{\int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) G_1(x, y) dy}{1 + \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (\beta - y) A(x, y) dy}. \quad (21)$$

Путем непосредственной подстановки (21) в (18) убеждаемся в том, что (21) действительно решение. Так как $G_1(x, y)$ имеет производную по x , то же верно и для $v(x, y)$. Аналогичным образом легко показать существование производной по y , а также смешанной производной.

4. Заключение. В заключении работы сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 3.1. Тогда существует единственное решение задачи (2)–(3).

Доказательство. Доказательство этой теоремы очевидно следует из приведенных рассуждений, в силу обусловленной эквивалентности задач (2)–(3) и (4)–(5).

Список литературы

1. Cannon JR. The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1963;21(2):155–160. <https://doi.org/10.1090/QAM/160437>
2. Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1964;4(6):1006–1024.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977;13(2):294–304.
4. Иванцов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2004;40(4):547–564.
5. Cannon JR., van der Hoek J. The Classical Solution of the One-Dimensional Two-Phase Stefan Problem with Energy Specification. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1982;130(1):385–398. <https://doi.org/10.1007/BF01761503>

6. Cannon JR., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems*. 1988;4(1):35–45. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>
7. Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения. *Математические заметки*. 2013;94(2):207–217. <https://doi.org/10.4213/mzm9370>
8. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Издательство "Самарский Университет"; 2012. 194 с.
9. Beilin SA. Existence of Solutions for One-Dimensional Wave Equations with Nonlocal Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2001;2001(76):1–8.
10. Pulkina LS. Solution to Nonlocal Problems of Pseudohyperbolic Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014;2014(116):1–9.
11. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.:Наука; 1973. 408 с.
12. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 2006;42(9):1166–1179.
13. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода. *Известия высших учебных заведений. Математика* 2012;1(4):74–83.
14. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения в частных производных. *Дифференциальные уравнения*. 1986;22(1):171–174.
15. Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения. *Дифференциальные уравнения*. 2000;36(2):279–280.

References

1. Cannon JR. The Solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1963;21(2):155–160. <https://doi.org/10.1090/QAM/160437>
2. Kamynin LI. Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviyami [On a boundary value problem of heat conduction theory with non-classical boundary conditions]. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]*. 1964;4(6):33–59. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90080-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1)
3. Ionkin NI. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 1977;13(2):294–304.
4. Ivanchov NI. Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya s integral'nymi usloviyami [Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 2004;40(4):591–609. <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44>
5. Cannon JR., van der Hoek J. The Classical Solution of the One-Dimensional Two-Phase Stefan Problem with Energy Specification. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 1982;130(1):385–398. <https://doi.org/10.1007/BF01761503>
6. Cannon JR., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems*. 1988;4(1):35–45. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006>
7. Kamynin VL. Obratnaya zadacha opredeleniya mladshogo koefitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nablyudeniya [The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation]. *Matematicheskie zametki [Mathematical Notes]*. 2013;94(2):205–213. <https://doi.org/10.1134/S00014-34613070201>
8. Pul'kina LS. Zadachi s neklassicheskimi usloviyami dlya giperbolicheskikh uravnenii. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii Universitet"; 2012. 194 p.
9. Beilin SA. Existence of Solutions for One-Dimensional Wave Equations with Nonlocal Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2001;2001(76):1–8.
10. Pulkina LS. Solution to Nonlocal Problems of Pseudohyperbolic Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2014;2014(116):1–9.
11. Ladyzhenskaya OA. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki. Moscow:Nauka; 1973. 408 p.
12. Kozhanov AI., Pul'kina LS. O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii [On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 2006;42(9):1233–1246. <https://doi.org/10.1134/S0012266106090023>
13. Pul'kina LS. Kraevye zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s nelokal'nymi usloviyami I i II roda [Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika [Russian Mathematics]* 2012;56(4):62–69. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081>
14. Nakhushcheva ZA. Ob odnoi nelokal'noi zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 1986;22(1):171–174.
15. Pul'kina LS. O razreshimosti v L_2 nelokal'noi zadachi s integral'nymi usloviyami dlya giperbolicheskogo uravneniya [The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 2000;36(2):316–318. <https://doi.org/10.1007/BF02754219>

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 02.04.2025

Поступила после рецензирования 20.05.2025

Принята к публикации 24.05.2025

Received April 2, 2025

Revised May 20, 2025

Accepted May 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гилев Антон Владимирович – аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anton V. Gilev – Graduate Student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, Samara, Russia

[К содержанию](#)

Локализованная и локальная дробная производные функции Такаги

Гринько А. П. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Барановичский государственный университет,
Беларусь, 225404, г. Барановичи, ул. Войкова, 21
agrinko_1999@yahoo.com

Аннотация. В статье доказывается действие локализованных дробных производных типа Римана – Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$ из гёльдеровского пространства с показателем λ , $0 < \lambda \leq 1$ и логарифмическим множителем в гёльдеровское пространство с показателем $\lambda - \alpha$, $0 < \lambda - \alpha$ и логарифмическим множителем. Вычисляются локализованные и локальные дробные производные, точки минимума и максимума функции Такаги. Показывается, что функция Такаги принадлежит пространству Гёльдера с показателем один и логарифмическим множителем.

Ключевые слова: локализованная дробная производная, локальная дробная производная, функция Такаги

Для цитирования: Гринько А. П. 2025. Локализованная и локальная дробная производные функции Такаги. Прикладная математика & Физика, 57(2): 93–110. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-93-110 EDN ZLKYYB

Original Research

Localized and Local Fractional Derivative of the Takagi Function

Alexander P. Grinko 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Baranovich State University,
21 Voikova St., Baranovich 225404, Belarus
agrinko_1999@yahoo.com

Abstract. In this paper it is proved that localized fractional derivatives of Riemann – Liouville type of order $0 < \alpha < 1$ are bounded from the Hölder space with exponent λ , $0 < \lambda \leq 1$ and logarithmic factor into the Hölder space with exponent $\lambda - \alpha$, $0 < \lambda - \alpha$ and logarithmic factor. Localized and local fractional derivatives, minimum and maximum points of the Takagi function are calculated. It is shown that the Takagi function belongs to the Hölder space with exponent one and logarithmic factor.

Keywords: Localized Fractional Derivative, Local Fractional Derivative, Takagi Function

For citation: Grinko A.P. 2025. Localized and Local Fractional Derivative of the Takagi Function. Applied Mathematics & Physics, 57(2): 93–110. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-93-110 EDN ZLKYYB

1. Введение. В настоящей статье рассматриваются левосторонние усечённые локализованные дробные производные ([1]) типа Маршо

$$\begin{aligned} (D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f \right)(x) = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^{x-\delta} \frac{\phi(x) - \phi(\tau)}{(x-\tau)^{1+\alpha}} d\tau \right), \end{aligned} \quad (1)$$

и типа Римана – Лиувилля

$$(\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{d}{dx} \right)^{[\alpha]+1} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}} dt, \quad 0 < \alpha, \quad (2)$$

левосторонний локализованный дробный интеграл ([2]) типа Римана – Лиувилля

$$(I^{\alpha, -\varepsilon} \phi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} \phi(t) dt, \quad -\infty < a \leq x \leq b < +\infty \quad (3)$$

левый обратный оператор, для локализованного интеграла (3),

$$D_{[a,b]}^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{\varepsilon} \rfloor} \left(D_{\delta}^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x - \varepsilon k) \right)(x) = 0 \quad (4)$$

и левосторонняя локальная дробная производная ([3])

$$\begin{aligned} \left(\overline{D^{\alpha,-}} f \right)(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1 + \log_{\varepsilon} \omega(\varepsilon) - \alpha)}{\omega(\varepsilon)} \varepsilon^{\alpha} \left(\overline{D^{\alpha,-\varepsilon}} f \right)(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(1 + \log_{\varepsilon} \omega(\varepsilon) - \alpha) \frac{f(x) - f(x - \varepsilon)}{\omega(\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega(\varepsilon)$ – непрерывная монотонная функция, для которой $\omega(0) = 0$, $\sup_{\varepsilon < \varepsilon_0} |f(x) - f(x - \varepsilon)| \leq C\omega(\varepsilon)$, $C > 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \log_{\varepsilon} \omega(\varepsilon) = \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 < \varepsilon$.

Доказывается, что при $\alpha + \lambda = 1$ локализованная производная (1) порядка α действует из гёльдеровского пространства с показателем λ и логарифмическим множителем в гёльдеровское пространство с показателем $\alpha + \lambda$ и логарифмическим множителем.

В качестве примера, для нигде не дифференцируемой, но непрерывной функции типа Такаги ([4],[5])

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \phi(4^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(4^n x - k) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x),$$

где

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(x - k), \\ F(x) &= \begin{cases} 0, & x < -0,5, \\ |x|, & -0,5 \leq x \leq 0,5, \\ 0, & x > 0,5, \end{cases} \quad \text{продолженная 1-периодически на всю числовую ось функция,} \end{aligned} \quad (6)$$

вычисляются локализованная производная (1) и модуль непрерывности локализованной производной, локальная производная (5), точки минимума и максимума. Доказывается, что функция Такаги принадлежит пространству Гёльдера с показателем один и логарифмическим множителем.

Целью данной работы является применение локализованных и локальных дробных производных для изучения свойств нигде не дифференцируемых непрерывных функций.

Среди результатов, аналогичных результатам статьи, следует назвать результаты о действии дробных интегралов Римана – Лиувилля порядка α , $0 < \alpha < 1$ из гёльдеровских пространств с показателем λ , $0 < \lambda < 1$ в гёльдеровское пространство с показателем $\alpha + \lambda = 1$ и логарифмическим множителем, а также действии дробных производных Римана – Лиувилля из гёльдеровского пространства с показателем λ , $0 < \lambda \leq 1$ в гёльдеровское пространство с показателем $\lambda - \alpha$, $0 < \lambda - \alpha$, полученных в [6], теорема 13.13, теорема 3.1 и лемма 13.1 соответственно. Изоморфизм локализованных дробных интегралов порядка α , $0 < \alpha < 1$ типа Римана – Лиувилля гёльдеровского пространства с показателем λ , $0 < \lambda < 1$ с логарифмическим множителем на фактор-пространство гёльдеровского пространства с показателем $\lambda + \alpha < 1$, был доказан в работе ([2]). В работах [7] и [8] было доказано, что функция Такаги (параметры 2, 2) и функция типа Такаги (параметры 4, 4) соответственно принадлежат пространству Гёльдера с показателем α , $0 < \alpha < 1$. Различные примеры вычисления локализованных дробных производных типа Римана – Лиувилля, в частности функции $|x - x_0|^p$, $p \in \mathbb{R}$ приводятся в работе [9].

2. Основные результаты. Пусть $0 < \lambda \leq 1$. Будем говорить, что $f(x) \in H^{\lambda}([a; b])$ ($f(x) \in H^{\lambda,k}([a; b])$) если

$$|f(x+h) - f(x)| \leq A|h|^{\lambda} \ln \frac{1}{|h|}, |h| < \frac{1}{2}, (|f(x+h) - f(x)| \leq A|h|^{\lambda} \left(\ln \frac{1}{|h|} \right)^k, |h| < \frac{1}{2}).$$

В работе [3] были получены следующие результаты.

Лемма 2.1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda \leq 1$, $0 < \varepsilon$, тогда оператор локализованного дробного интегрирования $I^{\alpha,-\varepsilon}$, для $\alpha + \lambda < 1$ ограничен из $H^{\lambda}[a; b]$, в $H^{\alpha+\lambda}[a; b]$ и из $H^{\lambda,1}[a; b]$ в $H^{\alpha+\lambda,1}[a; b]$, а для $\alpha + \lambda = 1$ ограничен из $H^{\lambda,1}[a; b]$ в $H^{\alpha+\lambda,2}[a; b]$.

Лемма 2.2. Для любого $x \in [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$\left(D_{[a,b]}^{\alpha,-\varepsilon} I^{\alpha,-\varepsilon} f \right)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{[a,b],\delta}^{\alpha,-\varepsilon} I^{\alpha,-\varepsilon} f \right)(x) = f(x), 0 < \varepsilon, 0 < \alpha < 1$$

имеет место поточечно для $f(x) \in H^{\lambda}(a; b)$, $-\infty < a, 0 < \alpha < \lambda \leq 1$.

В работе [3] была доказана следующая лемма.

Лемма 2.3. Пусть $0 < \varepsilon, 0 < \alpha < \lambda < 1$, функция $f(x) \in H^\lambda([a; b])$ продлена нулём вне отрезка $[a, b]$, тогда оператор локализованного дифференцирования $D^{\alpha, -\varepsilon}$ ограниченно действует из пространства $H^\lambda([a; b])$ в пространство $H^{\lambda-\alpha}([a; b])$ и

$$D^{\alpha, -\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула, полученная в [9], для $0 < \alpha < 1, p = 1, n = 1, x_0 = \frac{k}{4^n}$:

$$\left(\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left| t - \frac{k}{4^n} \right| \right) (x) = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \begin{cases} -1, x \leq \frac{k}{4^n}; \\ \left(\left(\frac{x - \frac{k}{4^n}}{\varepsilon} \right)^{1-\alpha} - 2 - 1 \right), \frac{k}{4^n} \leq x \leq \frac{k}{4^n} + \varepsilon. \\ 1, \frac{k}{4^n} + \varepsilon \leq x. \end{cases} \quad (7)$$

В работах [10], [11] были получены следующие результаты.

Теорема 2.1. Пусть $x \in [a + 2\varepsilon, b], -\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$(I^{\alpha, -\varepsilon} D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(I^{\alpha, -\varepsilon} D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s, \alpha) f(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds,$$

где $\int_0^1 K(s, \alpha) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int_0^1 \frac{s^{-\alpha} - s^{-\alpha}}{s+1} ds \right) = 1$ имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^\lambda([a; b]), 0 < \alpha < \lambda < 1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.2. Пусть функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = I^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x)$, тогда для любого $x \in [a + 2\varepsilon, b], -\infty \leq a < b \leq \infty$, равенство

$$(D^{\alpha, -\varepsilon} f)(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(D_{\delta}^{\alpha, -\varepsilon} f \right) (x) = \phi(x) - \phi(x - \varepsilon), 0 < \delta < \varepsilon,$$

имеет место поточечно для $\phi(x) \in H^\lambda(a; b), 0 < \alpha < \lambda < 1$ и почти всюду для $\phi(x) \in L_p(a, b), 1 \leq p < \infty$.

Теорема 2.3. Пусть $\alpha \in (0, 1), \varepsilon > 0, -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Интегральное уравнение

$$I^{\alpha, -\varepsilon} (D^{\alpha, -\varepsilon} \phi(x)) (x) = \phi(x) - \int_0^1 K(s, \alpha) f(x - \varepsilon - \varepsilon s) ds = 0$$

где

$$\int_0^1 K(s, \alpha) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 s^{\alpha-1} ds + \int_0^1 \frac{s^{\alpha} - s^{-\alpha}}{s+1} ds \right) = 1,$$

в пространстве $H^\lambda(a; b)$, для $a > -\inf ty$, имеет единственное решение $\phi(x) \in H^\lambda(a; b)$, заданное следующими рекуррентными соотношениями:

1. $a < x < a + 2\varepsilon, \phi(x) = \phi_0(x)$ – задана произвольно;

2. $a + 2\varepsilon < x < a + 3\varepsilon$,

$$\phi(x) = \phi_1 = \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int_0^1 \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_0(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)};$$

...

n. $n > 2, a + n\varepsilon < x < b$,

$$\begin{aligned} \phi(x) = \phi_{n-1}(x) = & \int_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int_{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}}^1 \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_{n-3}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)} + \\ & + \int_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{\tau^{\alpha-1} \phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} + \int_0^{\frac{x-a-n\varepsilon}{\varepsilon}} \frac{(\tau^{\alpha} - \tau^{-\alpha}) \phi_{n-2}(x - \varepsilon - \varepsilon \tau) d\tau}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)(\tau+1)}. \end{aligned}$$

Покажем, что при $\alpha + \lambda = 1$ локализованная производная (1) порядка α действует из гёльдеровского пространства с показателем λ и логарифмическим множителем в гёльдеровское пространство с показателем $\alpha + \lambda$ и логарифмическим множителем.

Лемма 2.4. Пусть $0 < \varepsilon$, $0 < \alpha < \lambda \leq 1$, функция $f(x) \in H^{\lambda,1}([a;b])$ ($f(x) \in H^\lambda([a;b])$) продлена нулём вне отрезка $[a,b]$, тогда оператор локализованного дифференцирования $D^{\alpha,-\varepsilon}$ ограниченно действует из пространства $H^{\lambda,1}([a;b])$ в пространство $H^{\lambda-\alpha,1}([a;b])$. Существуют такое ε_0 , константа $c > 0$, функция $\psi(x)$, $|\psi(x)| < \delta$, $\psi(x) \in H^{\lambda,1}([a;b])$ ($\psi(x) \in H^\lambda([a;b])$), что для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-\varepsilon) &= \Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha D^{\alpha,-\varepsilon} f(x) - \frac{\alpha c}{(1-\alpha)^\varepsilon} \varepsilon - \alpha \varepsilon^\alpha \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\psi(x) - \psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt, \\ \left| \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\psi(x) - \psi(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right| &\leq c \|\psi\|_{H^\lambda} \varepsilon^{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon}, c \in R, \text{ для } f(x) \in H^{\lambda,1}([a;b]), \\ \left| \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\psi(x) - \psi(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right| &\leq c \|\psi\|_{H^\lambda} \varepsilon^{\lambda-\alpha}, \text{ для } f(x) \in H^\lambda([a;b]). \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Из замечания к лемме 2.4 в работе [3] следует, что для любого $\delta > 0$ функция $f(x) \in H^{\lambda,1}([a;b])$ ($f(x) \in H^\lambda([a;b])$) может быть представлена в виде:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + \psi(x),$$

где $f_1(x), f_2(x)$ – неубывающие ломанные, $\psi(x) \in H^{\lambda,1}[a;b]$ ($\psi(x) \in H^\lambda[a;b]$), $|\psi(x)| < \delta$. В случае, если ε выберем настолько малым, что $x, x-\varepsilon$ принадлежат одному частичному отрезку, разбиение отрезка $[a;b]$, при построении ломаных $f_1(x), f_2(x)$, то $|\psi(t) - \psi(t-\varepsilon)| < c\varepsilon^\lambda \ln \frac{1}{\varepsilon}$ ($|\psi(t) - \psi(t-\varepsilon)| < c\varepsilon^\lambda$), $t, t-\varepsilon \in [x-\varepsilon; x]$. Обозначим $f_1(x) - f_2(x) = cx + b = \phi(x)$, $c, b \in R$. Тогда можем записать:

$$\begin{aligned} D^{\alpha,-\varepsilon} \phi(x) &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\phi(x) - \phi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt = \\ &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{c(x-t) dt}{(x-t)^{1+\alpha}} = \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha c \varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} = \\ &= \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha(\phi(x) - \phi(x-\varepsilon))}{(1-\alpha) \Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} = \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{\Gamma(2-\alpha) \varepsilon^\alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для функции $\psi(x)$, $\psi(x) \in H^{\lambda,1}([a;b])$ ($\psi(x) \in H^\lambda([a;b])$) можем записать:

$$\begin{aligned} |D^{\alpha,-\varepsilon} \psi(x)| &\leq \frac{|\psi(x) - \psi(x-\varepsilon)|}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{|\psi(x) - \psi(t)|}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \leq \frac{\|\psi\|_{H^{\lambda,1}} \varepsilon^\lambda}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ &+ \frac{\alpha \|\psi\|_{H^{\lambda,1}}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{(x-t)^\lambda \ln \frac{1}{x-t} dt}{(x-t)^{\alpha+1}} = \frac{\|\psi\|_{H^{\lambda,1}} \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\alpha \|\psi\|_{H^{\lambda,1}} \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) (\lambda-\alpha)} \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\alpha \|\psi\|_{H^{\lambda,1}} \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) (\lambda-\alpha)^2}, \\ |D^{\alpha,-\varepsilon} \psi(x)| &\leq \frac{|\psi(x) - \psi(x-\varepsilon)|}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{|\psi(x) - \psi(t)|}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \leq \frac{\|\psi\|_{H^\lambda} \varepsilon^\lambda}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \\ &+ \frac{\alpha \|\psi\|_{H^\lambda}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{(x-t)^\lambda dt}{(x-t)^{\alpha+1}} = \frac{\|\psi\|_{H^\lambda} \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha \|\psi\|_{H^\lambda} \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) (\lambda-\alpha)} = \frac{\lambda \|\psi\|_{H^\lambda} \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) (\lambda-\alpha)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $f(x) \in H^{\lambda,1}([a;b])$, $0 < \lambda \leq 1$. Докажем, что

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha,1}([a;b]), 0 < \lambda - \alpha. \quad (11)$$

Заметим, что случай $f(x) \in H^\lambda([a;b])$ доказан в [12]. Имеем:

$$\frac{f(x+h) - f(a)}{(x+h-a)^\alpha} - \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^\alpha} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h-a)^\alpha} + (f(x) - f(a)) \frac{(x-a)^\alpha - (x+h-a)^\alpha}{(x+h-a)^\alpha (x-a)^\alpha} = A_1 + A_2.$$

$$|A_1| \leq \frac{ch^\lambda}{(x+h-a)^\alpha} \ln \left(\frac{1}{|h|} \right) \leq ch^{\lambda-\alpha} \ln \left(\frac{1}{|h|} \right).$$

Рассмотрим случай $x-a \leq |h|$. Поскольку

$$\begin{aligned} \left((x-a)^{\lambda-\alpha} \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) \right)' &= (\lambda-\alpha) (x-a)^{\lambda-\alpha-1} \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) - \frac{1}{x-a} (x-a)^{\lambda-\alpha} = \\ &= (x-a)^{\lambda-\alpha-1} \left((\lambda-\alpha) \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) - 1 \right) > 0, \end{aligned}$$

то можем записать следующие оценки:

$$|A_2| \leq c_1 (x-a)^\lambda \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) \frac{h (x+h-a)^{\alpha-1}}{(x+h-a)^\alpha (x-a)^\alpha} \leq c_1 \frac{(x-a)^{\lambda-\alpha} h}{x+h-a} \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) \leq c_1 h^{\lambda-\alpha} \ln \left(\frac{1}{|h|} \right).$$

Пусть $x-a > |h|$. Поскольку

$$\left((x-a)^{\lambda-1} \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) \right)' = (x-a)^{\lambda-2} \left((\lambda-1) \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) - 1 \right) < 0,$$

то имеем:

$$\begin{aligned} |A_2| &\leq c_1 (x-a)^\lambda \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) \frac{h (x-a)^{\alpha-1}}{(x+h-a)^\alpha (x-a)^\alpha} \leq c_1 (x-a)^{\lambda-1} \ln \left(\frac{1}{x-a} \right) \frac{h}{(x+h-a)^\alpha} \leq \\ &\leq c_1 h^{\lambda-1} \ln \left(\frac{1}{|h|} \right) \frac{h}{(x+h-a)^\alpha} \leq c_1 h^{\lambda-\alpha} \ln \left(\frac{1}{|h|} \right). \end{aligned}$$

Докажем (8).

$$\begin{aligned} D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\phi(x) - \phi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\psi(x) - \psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt; \\ f(x) - f(x-\varepsilon) &= \Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) - \alpha \varepsilon^\alpha \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\phi(x) - \phi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt - \alpha \varepsilon^\alpha \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\psi(x) - \psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt = \\ &= \Gamma(1-\alpha) \varepsilon^\alpha D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) - \alpha \frac{\phi(x) - \phi(x-\varepsilon)}{(1-\alpha)} - \alpha \varepsilon^\alpha \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\psi(x) - \psi(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt. \end{aligned}$$

Из оценок (9), (10), (11) следует (8). Случай $\phi(x) \in H^\lambda([a; b])$, $0 < \lambda \leq 1$, доказывается аналогично.

Докажем результат о действии $D^{\alpha, -\varepsilon}$ в гёльдеровских пространствах. Поскольку

$$\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha}([a; b]), \left(\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \in H^{\lambda-\alpha, 1}([a; b]) \right),$$

то докажем, что

$$\psi_1(x) = \int_{x-\varepsilon}^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt = \int_0^\varepsilon \frac{f(x) - f(x-s)}{s^{\alpha+1}} ds \in H^{\lambda-\alpha}([a; b]) \left(\psi_1(x) \in H^{\lambda-\alpha, 1}([a; b]) \right).$$

Используя подстановку $t|_0^\varepsilon = h+s|_{-h}^{\varepsilon-h}$ в $\psi_1(x+h)$, можем записать:

$$\begin{aligned} \psi_1(x+h) - \psi_1(x) &= \int_{-h}^{\varepsilon-h} \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt + \int_0^\varepsilon \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\alpha+1}} dt = \\ &= \int_0^\varepsilon (f(x) - f(x-t)) ((t+h)^{-\alpha-1} - t^{-\alpha-1}) dt + \int_{-h}^0 (f(x+h) - f(x-t)) (t+h)^{-\alpha-1} dt + \\ &+ \int_0^\varepsilon (f(x+h) - f(x)) (t+h)^{-\alpha-1} dt - \int_{\varepsilon-h}^\varepsilon \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

В случае, если $x - a < \varepsilon$, $\alpha + \lambda < 1$, $f(x) \in H^\lambda([a; b])$, $D^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha} + \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt$ и $|\psi_1(x)| \leq c \int_0^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1} dt < \infty$. Поэтому $|\psi_1(a)| = 0$ и $D^{\alpha, -\varepsilon} f(a) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)\varepsilon^\alpha}$. Результат о действии оператора $D^{\alpha, -\varepsilon} f(x)$ следует из леммы 13.1 и теоремы 13.5 из [6].

Пусть $x - a \geq \varepsilon$, $h, \alpha + \lambda < 1$, $f(x) \in H^\lambda([a; b])$, тогда, используя лемму 13.1 ([6]), можем записать:

$$|J_1| \leq \int_0^{x-a} |f(x) - f(x-t)| (t^{-\alpha-1} - (t+h)^{-\alpha-1}) dt \leq c_1 h^{\lambda-\alpha}.$$

$$|J_2| \leq c_2 h^{\lambda-\alpha}.$$

$$|J_3| \leq \int_0^{x-a} |f(x+h) - f(x)| (t+h)^{-\alpha-1} dt \leq c_3 h^{\lambda-\alpha},$$

где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Оценим J_4 . Используя (3.8) из [6], имеем:

$$|J_4| = \left| \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{\alpha+1}} dt \right| \leq c_4 \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (t+h)^{\lambda-\alpha-1} dt \leq c_5 h (\varepsilon+h)^{\lambda-\alpha-1} \leq c_5 h^{\lambda-\alpha}.$$

Если $0 < \alpha < \lambda \leq 1$, $f(x) \in H^{\lambda,1}([a; b])$, имеем:

$$|J_1| \leq \int_0^{x-a} |f(x) - f(x-t)| (t^{-\alpha-1} - (t+h)^{-\alpha-1}) dt \leq c_1 \int_0^{x-a} t^\lambda \ln \frac{1}{t} (t^{-\alpha-1} - (t+h)^{-\alpha-1}) dt.$$

Если $x - a \geq h$, верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq c_1 \int_0^h t^{\lambda-\alpha-1} \ln \frac{1}{t} dt + c_1 h (\alpha+1) \int_h^{x-a} t^{\lambda-\alpha-2} \ln \frac{1}{t} dt = c_1 \frac{t^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{t} \Big|_0^h + \frac{c_1}{\lambda-\alpha} \int_0^h t^{\lambda-\alpha-1} dt + \\ &+ c_1 \frac{(\alpha+1) h t^{\lambda-\alpha-1}}{\lambda-\alpha-1} \ln \frac{1}{t} \Big|_h^{x-a} + c_1 h \frac{(\alpha+1)}{\lambda-\alpha-1} \int_h^{x-a} t^{\lambda-\alpha-1} dt \leq c_2 h^{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Для $x - a < h$, имеем:

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq c_1 \int_0^{x-a} t^\lambda \ln \frac{1}{t} (t^{-\alpha-1} - (t+h)^{-\alpha-1}) dt \leq c_1 \int_0^h t^{\lambda-\alpha-1} \ln \frac{1}{t} dt \leq c_2 h^{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{h}. \\ |J_2| &\leq \int_{-h}^0 |f(x+h) - f(x-t)| (t+h)^{-\alpha-1} dt \leq c_3 \int_{-h}^0 (t+h)^{\lambda-\alpha-1} \ln \frac{1}{t} dt = c_3 \frac{(t+h)^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{t} \Big|_{-h}^0 + \\ &+ c_3 \int_{-h}^0 \frac{(t+h)^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha} dt = c_3 \frac{h^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{h} + c_3 \frac{h^{\lambda-\alpha+1}}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha+1)} \leq c_4 \frac{h^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{h}. \\ |J_3| &\leq \int_0^{\varepsilon} |f(x+h) - f(x)| (t+h)^{-\alpha-1} dt \leq c_4 h^\lambda \ln \frac{1}{h} \int_0^{\varepsilon} \frac{dt}{(t+h)^{\alpha+1}} \leq \frac{c_4 h^{\lambda-\alpha}}{\alpha} \ln \frac{1}{h}. \\ |J_4| &\leq \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} \frac{|f(x+h) - f(x-t)|}{(t+h)^{\alpha+1}} dt \leq c_5 \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} (h+t)^{\lambda-\alpha-1} \ln \frac{1}{h+t} dt = c_5 \frac{(h+t)^{\lambda-\alpha}}{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{h+t} \Big|_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} + \\ &+ c_5 \int_{\varepsilon-h}^{\varepsilon} \frac{(h+t)^{\lambda-\alpha-1}}{\lambda-\alpha} dt = \frac{c_5}{\lambda-\alpha} \left((h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{h+\varepsilon} - \varepsilon^{\lambda-\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + c_5 \frac{(h+\varepsilon)^{\lambda-\alpha} - \varepsilon^{\lambda-\alpha}}{(\lambda-\alpha)^2}. \end{aligned}$$

В случае $h \leq \varepsilon$ существует такое $\theta, 0 \leq \theta \leq 1$, что можем записать:

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq \frac{c_5 h}{\lambda - \alpha} \left((\lambda - \alpha) (\theta h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha - 1} \ln \frac{1}{\theta h + \varepsilon} - (\theta h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha - 1} \right) + c_5 h \frac{(\lambda - \alpha) (\theta h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha - 1}}{(\lambda - \alpha)^2} \leq \\ &\leq \frac{c_5 h}{\lambda - \alpha} (\theta h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha - 1} (\lambda - \alpha) \ln \frac{1}{\theta h + \varepsilon} + c_5 h \frac{h^{\lambda - \alpha}}{(\lambda - \alpha + 1)} \leq c_5 h h^{\lambda - \alpha - 1} \ln \frac{1}{h} + \frac{c_5 h h^{\lambda - \alpha}}{(\lambda - \alpha + 1)} \leq c_6 h^{\lambda - \alpha} \ln \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Для $h > \varepsilon$ имеем:

$$\begin{aligned} |J_4| &\leq \frac{c_5}{\lambda - \alpha} \left((h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha} \ln \frac{1}{h + \varepsilon} - \varepsilon^{\lambda - \alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + c_5 \frac{(h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha} - \varepsilon^{\lambda - \alpha}}{(\lambda - \alpha)^2} \leq \\ &\leq \frac{c_5}{\lambda - \alpha} (h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha} \ln \frac{1}{h + \varepsilon} + c_5 \frac{(h + \varepsilon)^{\lambda - \alpha}}{(\lambda - \alpha)^2} \leq \frac{c_5}{\lambda - \alpha} (2h)^{\lambda - \alpha} \ln \frac{1}{2h} \leq \frac{c_6}{\lambda - \alpha} h^{\lambda - \alpha} \ln \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Если $x - a < \varepsilon, h, 0 < \alpha < \lambda \leq 1, f(x) \in H^{\lambda, 1}([a; b])$, доказательство следует после интегрирования по частям и леммы 13.1 из [6]. Лемма доказана.

Вычислим локализованную дробную производную типа Маршо (1) функции $|t - x_0|$. В случае $x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$, используя подстановку

$$\left[\begin{array}{l} u = t, \\ dv = (x - t)^{-1 - \alpha}, \quad v = \frac{(x - t)^{-\alpha}}{\alpha}, \end{array} \right]$$

имеем:

$$\begin{aligned} (D^{\alpha, -\varepsilon} |t - x_0|)(x) &= \frac{x - x_0 + x - \varepsilon - x_0}{\Gamma(1 - \alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x - \varepsilon}^x \frac{|x - x_0| - |t - x_0|}{(x - t)^{1 + \alpha}} dt = \frac{2x - 2x_0 - \varepsilon}{\Gamma(1 - \alpha) \varepsilon^\alpha} + \\ &+ \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x_0}^x \frac{x - x_0 - t + x_0}{(x - t)^{1 + \alpha}} dt + \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x - \varepsilon}^{x_0} \frac{x - x_0 - x_0 + t}{(x - t)^{1 + \alpha}} dt = \frac{2x - 2x_0 - \varepsilon}{\Gamma(1 - \alpha) \varepsilon^\alpha} + \frac{\alpha (x - x_0)^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) (1 - \alpha)} + \\ &+ \frac{(x - 2x_0) (x - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} - \frac{(x - 2x_0) \varepsilon^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + t \frac{(x - t)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \Big|_{x - \varepsilon}^{x_0} - \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x - \varepsilon}^{x_0} \frac{dt}{(x - t)^\alpha} = \\ &= \frac{\alpha (x - x_0)^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) (1 - \alpha)} + \frac{(x - 2x_0) (x - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + x_0 \frac{(x - x_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \frac{(x - x_0)^{1 - \alpha} - \varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) (1 - \alpha)} = \\ &= \frac{\alpha (x - x_0)^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) (1 - \alpha)} + \frac{(1 - \alpha) (x - x_0)^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) (1 - \alpha)} + \frac{(x - x_0)^{-\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} = \frac{(x - x_0)^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{(x - x_0)^{1 - \alpha} - \varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} = \\ &= \frac{(x - x_0)^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} + \frac{(x - x_0)^{1 - \alpha} - \varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} = \frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \left(\frac{(x - x_0)^{1 - \alpha}}{\varepsilon^{1 - \alpha}} 2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Для $x \leq x_0$ можем записать:

$$\begin{aligned} (D^{\alpha, -\varepsilon} |t - x_0|)(x) &= -\frac{x - x_0 - x + \varepsilon + x_0}{\Gamma(1 - \alpha) \varepsilon^\alpha} - \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x - \varepsilon}^x \frac{x - x_0 - t + x_0}{(x - t)^{1 + \alpha}} dt = -\frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) \varepsilon^\alpha} - \\ &- \frac{\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_{x - \varepsilon}^x (x - t)^{-\alpha} dt = -\frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} - \frac{\alpha (x - t)^{1 - \alpha}}{\Gamma(1 - \alpha) (1 - \alpha)} \Big|_{x - \varepsilon}^x = -\frac{\varepsilon^{1 - \alpha} (1 - \alpha + \alpha)}{\Gamma(2 - \alpha)} = -\frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}. \end{aligned}$$

Случай $x \geq x_0 + \varepsilon$ доказывается аналогично. Окончательно имеем:

$$(D^{\alpha, -\varepsilon} |t - x_0|)(x) = \begin{cases} -\frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, & x \leq x_0; \\ \frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \left(\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right)^{1 - \alpha} 2 - 1 \right), & x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon; \\ \frac{\varepsilon^{1 - \alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)}, & x_0 + \varepsilon \leq x. \end{cases} \quad (12)$$

Вычислим локализованную дробную производную функции Такаги (6) рис. 1.

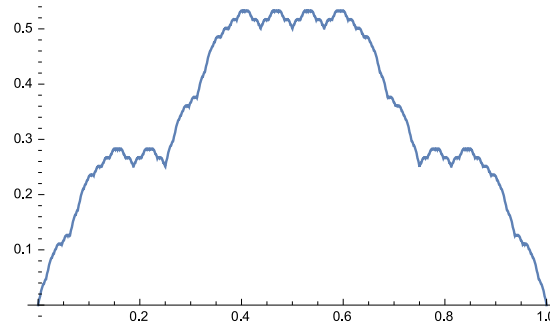


Рис. 1. Plot $\left[\left\{ \sum_{n=0}^{10} \frac{\sum_{l=0}^{2^n} 4^n F(4^n x - l)}{4^n} \right\}, \{x, 0, 1\} \right]$
 Fig. 1. Plot $\left[\left\{ \sum_{n=0}^{10} \frac{\sum_{l=0}^{2^n} 4^n F(4^n x - l)}{4^n} \right\}, \{x, 0, 1\} \right]$

Заметим, что для функции $\psi_n(x) = 4^{-n} \phi(4^n x)$ числа $M4^{-n}$, $M \in \mathbb{Z}$ являются периодами:

$$\psi_n(x + M4^{-n}) = 4^{-n} \phi(4^n x + M) = 4^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(4^n x + M - k) = 4^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(4^n x - k) = \psi_n(x)$$

и $M4^{-m} = 1$, – минимальный период всех функций $\psi_n(x)$, а значит функции Такаги. Поэтому достаточно вычислить локализованную дробную производную на отрезке $[0, 1]$. В этом случае функцию Такаги можно записать в виде:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \phi(4^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x).$$

Промежутки строгой монотонности функции $\psi_n(x) = 4^{-n} \phi(4^n x)$ имеют длину $\frac{4^{-n}}{2}$. Если (x_1, x_2) промежутков монотонности функции $\psi_n(x)$, то он будет промежутком монотонности каждой $\psi_m(x)$, $m < n$.

Приведём примеры промежутков возрастания функций $\psi_n(x)$ (см. рис. 2), угловые точки будем относить только к одному промежутку:

$$\left(0; \frac{1}{2}\right];$$

$$\left(0; \frac{1}{8}\right], \left(\frac{2}{8}; \frac{3}{8}\right], \left(\frac{4}{8}; \frac{5}{8}\right], \left(\frac{6}{8}; \frac{7}{8}\right];$$

$$\left[0; \frac{1}{32}\right], \left[\frac{2}{32}; \frac{3}{32}\right], \left[\frac{4}{32}; \frac{5}{32}\right], \left[\frac{6}{32}; \frac{7}{32}\right], \left[\frac{8}{32}; \frac{9}{32}\right], \dots$$

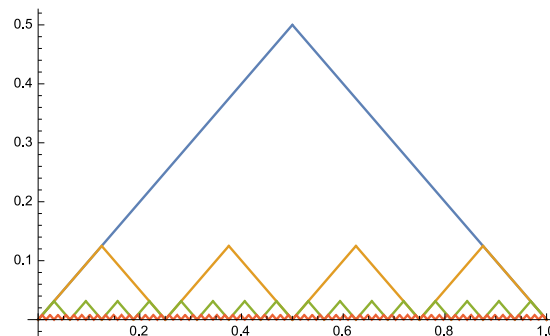


Рис. 2. Plot $\left[\frac{1}{4^0} \sum_{k=0}^1 F[x4^0 - k], \frac{1}{4^1} \sum_{k=0}^4 F[x4^1 - k], \frac{1}{4^2} \sum_{k=0}^{16} F[x4^2 - k], \frac{1}{4^3} \sum_{k=0}^{64} F[x4^3 - k] \right], \{x, 0, 1\}$

Fig. 2. Plot $\left[\frac{1}{4^0} \sum_{k=0}^1 F[x4^0 - k], \frac{1}{4^1} \sum_{k=0}^4 F[x4^1 - k], \frac{1}{4^2} \sum_{k=0}^{16} F[x4^2 - k], \frac{1}{4^3} \sum_{k=0}^{64} F[x4^3 - k] \right], \{x, 0, 1\}$

Эти же промежутки можно записать в виде чисел с основанием четыре:

$$\left(0; \frac{2}{4}\right];$$

$$\begin{aligned}
& \left(0; \frac{2}{4^2}\right], \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2}\right], \left(\frac{2}{4}; \frac{2}{4} + \frac{2}{4^2}\right], \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4} + \frac{2}{4^2}\right]; \\
& \left[0; \frac{2}{4^3}\right], \left[\frac{1}{4^2}; \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3}\right], \left[\frac{2}{4^2}; \frac{2}{4^2} + \frac{2}{4^3}\right], \left[\frac{3}{4^2}; \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^3}\right], \left[\frac{4}{4^2}; \frac{4}{4^2} + \frac{2}{4^3}\right], \dots \\
& (0; 0, 2_4] \equiv (0; 0, 1(9)_4]; \\
& (0; 0, 02_4], (0, 1_4; 0, 12_4], (0, 2_4; 0, 22_4], (0, 3_4; 0, 32_4]; \\
& (0; 0, 002_4], (0, 01_4; 0, 012_4], (0, 02_4; 0, 022_4], (0, 03_4; 0, 032_4], (0, 1_4; 0, 102_4], \\
& (0, 11_4; 0, 112_4], (0, 12_4; 0, 122_4], (0, 13_4; 0, 132_4], (0, 2_4; 0, 202_4], (0, 21_4; 0, 212_4], (0, 22_4; 0, 222_4], \\
& (0, 23_4; 0, 232_4], (0, 3_4; 0, 302_4], (0, 31_4; 0, 312_4], (0, 32_4; 0, 322_4], (0, 33_4; 0, 332_4].
\end{aligned}$$

Будем считать, что $0, 2 \equiv 0, 1(9)$, т. е. нет чисел, у которых справа от последней ненулевой цифры стоят только нули. Пусть $n = 0, 1, \dots$. Все числа, у которых на $n + 1$ -ом месте стоит 1 (слева и справа от 1 произвольные цифры), и числа, у которых стоит 0 (слева и справа от 0 произвольные цифры), принадлежат промежуткам возрастания функции.

Приведём примеры промежутков убывания функций $\psi_n(x)$:

$$\begin{aligned}
& (0, 2_4; 1_4] \equiv (0, 1(9)_4; 1_4]; \\
& (0, 02_4; 0, 1_4], (0, 12_4; 0, 2_4], (0, 22_4; 0, 3_4], (0, 32_4; 1_4]; \\
& (0, 002; 0, 01]_4, (0, 012; 0, 02]_4, (0, 022; 0, 03]_4, (0, 032; 0, 1]_4, (0, 102; 0, 11]_4, \dots
\end{aligned}$$

Все числа, у которых на $n + 1$ -ом месте стоит 2 (слева и справа от 2 произвольные цифры), и числа, у которых стоит 3 (слева и справа от 3 произвольные цифры), принадлежат промежуткам убывания функции $\psi_n(x)$.

Запишем промежутки монотонности функций $\psi_n(x)$, $x \in \left[\frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}, 1\right]$, $n = 0, 1, \dots, n_0$. Промежутки возрастания:

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n_0}; \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right], \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n k; \left(\frac{1}{4}\right)^n k + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right], k = 1, \dots, 4^n - 1, n \leq n_0.$$

Используя запись чисел с основанием четыре, отрезки возрастания можно записать в виде:

$$[0, a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n; 0, a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n 2], a_i = 0, 1, 2, 3, i = \overline{1, n}.$$

Поскольку длина отрезка равна $0, \underbrace{00 \dots 0}_n 2$ и

$$\sum_{l=n+2}^{\infty} 3 \frac{1}{4^l} = \frac{3}{4^{n+2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{4^{n+1}},$$

то для того, чтобы точка x попала в промежуток возрастания, т. е.

$$0, a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n \leq x \leq 0, a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n 2,$$

на $n + 1$ месте должна быть цифра ноль или один, независимо от того, какие цифры идут далее. Следовательно, количество нулей и единиц в записи x как числа с основанием четыре равно числу функций $\psi_n(x)$, для которых x попадает в промежуток возрастания.

Промежутки убывания:

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n k; \left(\frac{1}{4}\right)^n (k + 1)\right], k = 0, \dots, 4^n - 1, n \leq n_0.$$

Используя запись чисел с основанием четыре, отрезки убывания можно записать в виде:

$$\left[0, a_1 a_2 \dots a_n 2; 0, a_1 a_2 \dots a_n 2 + 0, \underbrace{00 \dots 02}_{n+1}\right], a_i = 0, 1, 2, 3, i = \overline{1, n}.$$

Поскольку $0, a_1 a_2 \dots a_n 2(3) = 0, a_1 a_2 \dots a_n 3 \leq 0, a_1 a_2 \dots a_n 2 + 0, \underbrace{00 \dots 02}_n$. Значит, если точка $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n 2$

имеет в записи в виде числа с основанием четыре двойку, то независимо от последующих цифр справа от двойки x попадает в промежуток убывания функции $\psi_n(x)$. Аналогично, если точка $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n 3$

имеет в записи в виде числа с основанием четыре тройку, то не зависимо от последующих цифр справа от тройки x попадает в промежуток убывания функции $\psi_n(x)$. Следовательно, количество двоек и троек в записи x как числа с основанием четыре равно числу функций $\psi_n(x)$, для которых x попадает в промежуток убывания.

Рассмотрим произвольную функцию $\psi_n(x)$, $x \in [\frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}, 1]$ и выберем $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}$, $n \leq n_0$. Поскольку функция $\psi_n(x)$ в точках $\frac{k}{4^n}, \frac{1}{2} \frac{k}{4^n}$, $k \in [1, 4^n]$ меняет монотонность, то такой выбор ε гарантирует, что на промежутке $(x - \varepsilon, x)$ будет находиться не более одной точки смены монотонности и значит будет существовать k , такое, что $\Psi_n(x) = 4^{-n} |4^n t - k| = |t - \frac{k}{4^n}|$ и мы можем применить формулу (7). Т. к. при $\frac{k}{4^n} \leq x \leq \frac{k}{4^n} + \varepsilon$ выполняется $0 \leq \frac{x - \frac{k}{4^n}}{\varepsilon} \leq 1$, то непрерывная функция $\varepsilon^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha) (\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \psi_n)(x)$ принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$ в зависимости от $x \in [\frac{k}{4^n}, \frac{k}{4^n} + \varepsilon]$. В точке $x = \frac{k}{4^n}$ локальная дробная производная терпит разрыв первого рода, оставаясь непрерывной слева, поскольку

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha) (\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \psi_n)(x) = -1, \text{ если } x = \frac{k}{4^n},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha) (\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \psi_n)(x) = 1, \text{ если } x = \frac{k}{4^n} + \varepsilon.$$

Обозначим:

$$i_n = [4^n x] + \begin{cases} 1, [4^n x] \neq 4^n x; \\ 0, [4^n x] = 4^n x; \end{cases} \quad f_n = [4^n (x - \varepsilon)] + \begin{cases} 1, [4^n (x - \varepsilon)] \neq 4^n x; \\ 0, [4^n (x - \varepsilon)] = 4^n x; \end{cases} \quad i_n, f_n \in [0; 1; \dots; 4^n];$$

ближайшую точку минимума справа, для точек $4^n x$ и $4^n (x - \varepsilon)$ соответственно, для которой функция $4^{-n} \phi(i_n) = 4^{-n} \phi(f_n) = 0$. Обозначим через $k(x, n)$ индикатор, который равен нулю, если на $n+1$ -ом месте в записи x как числа с основанием четыре стоит двойка или тройка и, равен нулю, если на $n+1$ -ом месте ноль или один. Иначе говоря, $k(x, n) = 0$ для x , принадлежащим промежутку убывания функции $k(x, n) = 1$, и для x , принадлежащим промежутку возрастания функции:

$$k(x, n) = \begin{cases} 0, x = 0, \dots, 2 \dots, \forall x = 0, \dots, 3 \dots; \\ 1, x = 0, \dots, 1 \dots, \forall x = 0, \dots, 0 \dots \end{cases}$$

Для однозначности примем, что $k(x, n) = 0$, если существует представление числа x такое, что на $n+1$ -ом месте стоит три или два и индикатор $k(x, n) = 1$, если существует представление числа x такое, что на $n+1$ -ом месте стоит один или ноль. Например, для функции $\psi_1(x)$ индикатор точки максимума $k(0, 11(3); 1) = k(0, 12; 1) = 1$, индикатор точки минимума $k(0, 12(3); 2) = k(0, 130; 2) = 0$. Такой выбор даёт возможность отнести точки минимума $\frac{k}{4^n}$, $k = \overline{1}, 4^n$ функций $\psi_n(x)$ к промежуткам убывания, а точки максимума $\frac{k}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}$, $k = \overline{1}, 4^n$ функций $\psi_n(x)$ – к промежуткам возрастания. Индикатор $k(x, n)$ можно также записать в виде:

$$k(x, n) = \begin{cases} 0, \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} < x, \\ 1, x \leq \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}. \end{cases} \quad (13)$$

Для каждого $n \in N \cup \{0\}$ возможны случаи:

- $\frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \leq x \leq \frac{i_n}{4^n}$ – промежуток, в котором $\psi_n(x)$ убывает,
- $\frac{i_n - 1}{4^n} \leq x \leq \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}$ – промежуток, в котором $\psi_n(x)$ возрастает,
- $\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \leq x - \varepsilon \leq \frac{f_n}{4^n}$ – промежуток, в котором $\psi_n(x - \varepsilon)$ убывает,
- $\frac{f_n - 1}{4^n} \leq x - \varepsilon \leq \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}$ – промежуток, в котором $\psi_n(x - \varepsilon)$ возрастает,

$$n \in N \cup \{0\}, f_n, i_n \in Z, f_n \leq i_n.$$

Неравенства а)-д), используя обозначения (13), можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} - k(x, n) \frac{1}{2 \times 4^n} \leq x \leq \frac{i_n}{4^n} - k(x, n) \frac{1}{2 \times 4^n}, \\ \text{б)} \quad & \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} - k(x - \varepsilon, n) \frac{1}{2 \times 4^n} \leq x - \varepsilon \leq \frac{f_n}{4^n} - k(x - \varepsilon, n) \frac{1}{2 \times 4^n}. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}$. Обозначим ближайшую для $x 4^n$ точку минимума функции $\psi_n(x)$ через

$$k'_{n,x} = \begin{cases} i_n, \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \leq x; \\ i_n - 1, \frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} > x; \end{cases} = i_n - k(x, n).$$

Используя формулу (7), вычислим локализованную дробную производную функции $\sum_{n=0}^{n_0} \psi_n(x)$ в точке $x \in [\frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}, 1]$.

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) = \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} (\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} F(4^n x - k'_{n,x})) (x) = \\ & = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=0}^{n_0} \begin{cases} -1, 4^n x \leq i_n - k(x, n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{4^n \varepsilon} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), i_n - k(x, n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим локализованную дробную производную функции Такаги в точке $x \in [\frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}, 1]$. Поскольку $\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{4^{n_0}}$, то промежутку $[x - \varepsilon, x)$ принадлежит одна точка $\frac{i_{n_0}-1}{4^{n_0}}$ или $\frac{i_{n_0}-1}{4^{n_0}} + \frac{2}{4^{n_0+1}}$, четыре экстремальные точки функции ψ_{n_0+1} , восемь экстремальных точек функции ψ_{n_0+2} , и т. д. Поскольку для x ближайшая слева точка экстремума $\frac{i_n}{4^n} - \frac{1+k(x,n)}{2 \times 4^n}$, то для локализованной производной функции Такаги на отрезке $[0; 1]$ можем записать:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) = \\ &= \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{4^n} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(F\left(x - \frac{k}{4^n}\right) \right) (x) = \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} (\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} F(4^n x - k'_{n,x})) (x) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{i_n}{4^n} - \frac{1+k(x,n)}{2 \times 4^n}}^x \frac{\left| \frac{i_n - k(x, n)}{4^n} - t \right| dt}{(x-t)^\alpha} + (1 - k(x, n)) \int_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{i_n-1}{4^n} \right) dt}{(x-t)^\alpha} + \right. \\ &+ \int_{\frac{i_n-1}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}} \frac{\left(\frac{i_n-1}{4^n} - t \right) dt}{(x-t)^\alpha} + \int_{\frac{i_n-2}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{i_n-2}{4^n} \right) dt}{(x-t)^\alpha} + \dots + \\ &+ \int_{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{f_n+1}{4^n}} \frac{\left(\frac{f_n+1}{4^n} - t \right) dt}{(x-t)^\alpha} + \int_{\frac{f_n}{4^n}}^{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{f_n}{4^n} \right) dt}{(x-t)^\alpha} + \\ &\left. + k(x - \varepsilon, n) \int_{\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}} \frac{\left(\frac{f_n}{4^n} - t \right) dt}{(x-t)^\alpha} + \int_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n} - \frac{k(x-\varepsilon, n)}{2 \times 4^n}} \frac{\left| \frac{f_n - k(x-\varepsilon, n)}{4^n} - t \right| dt}{(x-t)^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Применим для вычисления локализованной производной формулу (14) и то, что

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2 \times 4^{n_0}}, 4^{n_0} = \frac{1}{2\varepsilon}, n_0 = \log_4 \frac{1}{2\varepsilon} = \log_4 \frac{1}{2} + \log_4 \frac{1}{\varepsilon} = \log_4 \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}, \frac{1}{\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \\ &= \frac{n_0 + 1}{(n_0 + 1) \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\log_4 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}}{(n_0 + 1) \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{(n_0 + 1) \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\frac{1}{2}}{(n_0 + 1) \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{(n_0 + 1)} + \frac{(n_0 + 1)^{-1}}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

тогда имеем:

$$\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) = A = \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{1}{(n_0+1)} \sum_{n=0}^{n_0} \left\{ \begin{array}{l} -1, 4^n x \leq i_n - k(x, n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{4^n \varepsilon} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), i_n - k(x, n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x; \end{array} \right. \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{(n_0+1)} \sum_{n=0}^{n_0} \left\{ \begin{array}{l} -1, 4^n x \leq i_n - k(x, n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{4^n \varepsilon} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), i_n - k(x, n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x. \end{array} \right. \right\} \right). \quad (16) \end{aligned}$$

В оставшейся части (15) воспользуемся, учитывая, что $0 < \alpha < 1$, интегрированием по частям:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{i_n-1}{4^n} - t = u, \quad -dt = du, \\ (x-t)^{-\alpha} = dv \quad -\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = v. \end{array} \right]$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= A + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{d}{dx} \times \\ & \times \left((1-\alpha) k(x, n) \int_{\frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{4^n}}^x \frac{\left| \frac{i_n-1}{4^n} - t \right| dt}{(x-t)^\alpha} + \frac{1-k(x, n)}{(1-\alpha)^{-1}} \left(\int_{\frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^x \frac{\left| \frac{i_n}{4^n} - t \right| dt}{(x-t)^\alpha} + \int_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} \frac{\left(t - \frac{i_n-1}{4^n} \right) dt}{(x-t)^\alpha} \right) - \right. \\ & - \left(\frac{i_n-1}{4^n} - t \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{\frac{i_n-2}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}} - \int_{\frac{i_n-2}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt - \\ & - \left(t - \frac{i_n-2}{4^n} \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{\frac{i_n-2}{4^n}}^{\frac{i_n-2}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} + \int_{\frac{i_n-2}{4^n}}^{\frac{i_n-2}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt - \dots - \\ & - \left(\frac{f_n+1}{4^n} - t \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{f_n+1}{4^n}} - \int_{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{f_n+1}{4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt - \\ & - \left(t - \frac{f_n}{4^n} \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{\frac{f_n}{4^n}}^{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} + \int_{\frac{f_n}{4^n}}^{\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt + \\ & + k(x-\varepsilon, n) \left(- \left(\frac{f_n}{4^n} - t \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}} - \int_{\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^{\frac{f_n}{4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt - \right. \\ & - \left. \left(t - \frac{f_n-1}{4^n} \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}} + \int_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt \right) + \\ & + (1-k(x-\varepsilon, n)) \left(- \left(\frac{f_n}{4^n} - t \right) (x-t)^{1-\alpha} \Big|_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n}} - \int_{x-\varepsilon}^{\frac{f_n}{4^n}} (x-t)^{1-\alpha} dt \right) \Bigg) = \\ & = A + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{d}{dx} \times \\ & \left(k(x, n) (1-\alpha) \left(- \left(t - \frac{i_n-1}{4^n} \right) \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^x - \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \Big|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^x \right) + (1-k(x, n)) (1-\alpha) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(- \left(\frac{i_n}{4^n} - t \right) \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^x + \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \Big|_{\frac{i_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n}}^x - \left(t - \frac{i_n-1}{4^n} \right) \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \Big|_{\frac{i_n-1}{4^n}}^{\frac{i_n-1}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n}} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2 \times 4^n} \left(x - \frac{i_n-2}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \frac{(x - \frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(x - \frac{i_n-2}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \\
& \quad - \frac{1}{2 \times 4^n} \left(x - \frac{i_n-2}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \frac{(x - \frac{i_n-2}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(x - \frac{i_n-2}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \\
& \quad - \dots + \frac{1}{2 \times 4^n} \left(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \frac{(x - \frac{f_n+1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \\
& \quad - \left(\frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} - \frac{f_n}{4^n} \right) \left(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(x - \frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \\
& \quad + k(x-\varepsilon, n) \left(\left(\frac{f_n}{4^n} - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right) \left(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \frac{(x - \frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} - \frac{f_n-1}{4^n} \right) \left(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \frac{x - \varepsilon - \frac{f_n-1}{4^n}}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) + \\
& \quad + (1-k(x-\varepsilon, n)) \left(\left(\frac{f_n}{4^n} - x + \varepsilon \right) \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{(x - \frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) \Bigg) = \\
& = A + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{k(x, n)}{(2-\alpha)} \left(x - \frac{i_n-1}{4^n} \right)^{2-\alpha} + (1-k(x, n)) \left(\frac{1}{2 \times 4^n} \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{1}{2 \times 4^n} \left(x - \frac{i_n-1}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \frac{(x - \frac{i_n-1}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(x - \frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{(x - \frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(x - \frac{i_n-2}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(x - \frac{i_n-2}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(x - \frac{i_n-2}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \\
& \quad - \dots + \frac{(x - \frac{f_n+1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(x - \frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \\
& \quad + k(x-\varepsilon, n) \left(\frac{(x - \frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} - 2 \frac{(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \left(x - \varepsilon - \frac{f_n-1}{4^n} \right) \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) + \\
& \quad + (1-k(x-\varepsilon, n)) \left(\left(\frac{f_n}{4^n} - x + \varepsilon \right) \varepsilon^{1-\alpha} + \frac{(x - \frac{f_n}{4^n})^{2-\alpha}}{2-\alpha} - \frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) \Bigg).
\end{aligned}$$

Поскольку числа $i_n, f_n, k(x-\varepsilon, n), k(x, n)$ используются для общности записи, то для конкретного x они фиксированные и $\frac{d}{dx} \frac{i_n}{4^n} = \frac{d}{dx} \frac{f_n}{4^n} = \frac{d}{dx} k(x-\varepsilon, n) = \frac{d}{dx} k(x, n) = 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) = A + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \times \\
& \times \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \left(k(x, n) \frac{(x - \frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + (1-k(x, n)) \left(\frac{(x - \frac{i_n-1}{4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - 2 \frac{(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} \right) \right) + \right. \\
& + \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{2}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{3}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{3}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{4}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \\
& - \dots + \left(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{2}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \left(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \left(x - \frac{f_n}{4^n} - \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \left(x - \frac{f_n}{4^n} \right)^{1-\alpha} + \\
& \left. + k(x-\varepsilon, n) \left(\left(x - \frac{f_n}{4^n} \right)^{1-\alpha} - 2 \left(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + \varepsilon^{1-\alpha} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+ (1 - k(x - \varepsilon, n)) \left(-\varepsilon^{1-\alpha} + \left(x - \frac{f_n}{4^n}\right)^{1-\alpha} \right).$$

Окончательно, локализованная дробная производная функции Такаги при выполнении условий (13) и с учётом (16) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f(x) &= \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)} \times \\ &\times \left(\frac{1}{(n_0+1)} \sum_{n=0}^{n_0} \left\{ \begin{array}{l} -1, 4^n x \leq i_n - k(x, n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{4^n \varepsilon} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), i_n - k(x, n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x; \end{array} \right. + \right. \\ &+ \frac{1}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{(n_0+1)} \sum_{n=0}^{n_0} \left\{ \begin{array}{l} -1, 4^n x \leq i_n - k(x, n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{4^n \varepsilon} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), i_n - k(x, n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x. \end{array} \right. \Bigg) + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\left(x - \frac{i_n - 1}{4^n} \right)^{1-\alpha} - (1 - k(x, n)) 2 \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \right. \\ &- \sum_{k=1}^{(i_n - f_n)2^{-2}} \left((-1)^k \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+2}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} \right) + \\ &+ \left(x - \frac{f_n}{4^n} \right)^{1-\alpha} - 2k(x - \varepsilon, n) \left(x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} + (2k(x - \varepsilon, n) - 1) \varepsilon^{1-\alpha} \Bigg). \end{aligned} \quad (17)$$

Лемма 2.5 Для локализованной дробной производной функции Такаги имеет место оценка:

$$|\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f(x)| \leq \text{const} \varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Функция Такаги принадлежит пространству $H^{1,1}([0; 1])$.

Доказательство. Будем рассматривать последовательно члены (17). Для A , определённого в (16), с учётом (14), имеем:

$$\begin{aligned} |A| &\leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)(n_0+1)} \left(1 + \frac{1}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \right) \sum_{n=0}^{n_0} 1 = \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon} (n_0+1)}{\Gamma(2-\alpha)(n_0+1)} \left(1 + \frac{1}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \right) = \\ &= \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(1 + \frac{1}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В случае $k(x, n) = 1$, для следующей части в (17) имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\left(x - \frac{i_n - 1}{4^n} \right)^{1-\alpha} + (1 - k(x, n)) 2 \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} \right) = \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{1-\alpha}} \right)^n = \left(\frac{1}{2 \times 4^{n_0}} \right)^{1-\alpha} \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{4^{\alpha-1}}{1 - 4^{\alpha-1}} = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 4^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (19)$$

В случае $k(x, n) = 0$, можем записать:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\left(x - \frac{i_n - 1}{4^n} \right)^{1-\alpha} + 2 \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} \right) \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{4^n} \right)^{1-\alpha} + \right. \\ &\left. + 2 \left(\frac{1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} \right) = \frac{1 + 2^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} \right)^{1-\alpha} \leq \frac{1 + 2^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\varepsilon^{1-\alpha} 2^{1-\alpha}}{1 - 4^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Перейдём к оценке третьего слагаемого. Поскольку

$$\left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+2}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} - \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+1}{2 \times 4^n} \right)^{1-\alpha} = \frac{1-\alpha}{2 \times 4^n} \left(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{k+1+\theta(n, k)}{2 \times 4^n} \right)^{-\alpha} = a_{n, k},$$

$0 \leq \theta(n, k) \leq 1, n \geq n_0$, то $a_{n,k}$ монотонно убывает по k и имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{2(i_n - f_n) - 2} (-1)^k \frac{a_{n,k}}{\Gamma(2-\alpha)} \right| &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{2+1}{2 \times 4^n})^{1-\alpha} - (x - \frac{i_n}{4^n} + \frac{2}{2 \times 4^n})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \leq \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{3}{2} \right)^{1-\alpha} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^{1-\alpha}} \right)^n = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{3}{2} \right)^{1-\alpha} \frac{2^{1-\alpha}}{4^{1-\alpha}} \left(\frac{1}{2 \times 4^{n_0}} \right)^{1-\alpha} = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{3}{4} \right)^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим последнее слагаемое равенства (17), при условии, что $0 < \varepsilon < 1, k(x - \varepsilon, n) = 1$, т. е. $0 \leq \{(x - \varepsilon) 4^n\} \leq \frac{1}{2}$. Используя оценки (3.8), (3.9) из [6], можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| (x - \frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha} - 2 \left((x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha} \right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \varepsilon^{1-\alpha} - (x - \frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha} \right| + \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| (x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{[4^n(x - \varepsilon)] + 1 - 4^n(x - \varepsilon)}{4^n} c \varepsilon^{-\alpha} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \frac{[4^n(x - \varepsilon)] + 1 - (x - \varepsilon) 4^n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right| c \varepsilon^{-\alpha} \leq \\ &\leq c \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1 - \{4^n(x - \varepsilon)\}}{4^n} \varepsilon^{-\alpha} + 2c \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \frac{1 - \{4^n(x - \varepsilon)\}}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n} \right| \varepsilon^{-\alpha} \leq \varepsilon^{-\alpha} c \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{6c \varepsilon^{-\alpha}}{2 \times 4^n} \leq c \varepsilon^{-\alpha} (1+3) \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \leq \varepsilon^{-\alpha} c 4 \frac{1}{4^{n_0+1}} \frac{4}{3} = c_1 \varepsilon^{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (22)$$

В случае $k(x - \varepsilon, n) = 0$, из оценки (22) следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| (x - \frac{f_n}{4^n})^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha} - 2k(x - \varepsilon, n) \left((x - \frac{f_n}{4^n} + \frac{1}{2 \times 4^n})^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha} \right) \right| \leq c_1 \varepsilon^{1-\alpha}. \quad (23)$$

Используя полученные оценки в (18)–(23), окончательно, для (17) можем записать:

$$|\mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} f(x)| \leq \frac{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(1 + \frac{1}{2 \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \right) + c \varepsilon^{1-\alpha}. \quad (24)$$

Мы доказали, что локализованная производная функции Такаги при $0 < \alpha < 1$ имеет порядок малости $\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon \rightarrow 0$. Этот порядок ((18)) имеет член, определённый в (14). Следовательно, локализованная дробная производная функции Такаги принадлежит пространству $H^{1-\alpha, 1}$. Из лемм 2.1, 2.2 и теорем 2.1–2.3 следует, что $I^{\alpha, -\varepsilon}(H^{1-\alpha, 1}) \in H^{1, 2}$, а значит функция Такаги принадлежит пространству $H^{1, 2}$. Непосредственные оценки показывают, что функция Такаги принадлежит даже пространству $H^{1, 2}$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что точки $x, x - \varepsilon$ принадлежат одному промежутку монотонности и $k_n(x)$ ближайшая точка минимума для точек $x, x - \varepsilon$. Тогда, учитывая, что $\max_x \left(4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{4^n}, \varepsilon = \frac{1}{2 \times 4^{n_0}}, n_0 = \log_4 \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}$, для функции Такаги имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) - \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n(x - \varepsilon) - k) \right| &= \left| \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n(x - \varepsilon) - k) \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n(x - \varepsilon) - k) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} \left(\left| x - \frac{k_n(x)}{4^n} \right| - \left| x - \varepsilon - \frac{k_n(x)}{4^n} \right| \right) \right| + \sum_{n=n_0+1}^{n_0} \frac{1}{2} 4^{-n} = \sum_{n=0}^{n_0} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{4^{-n_0-1}}{1 - \frac{1}{4}} = \varepsilon(n_0 + 1) + \frac{2}{3} 4^{-n_0-1} = \\ &= \varepsilon \left(\log_4 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} 4^{-n_0-1} = \varepsilon \left(\log_4 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \varepsilon \leq c \varepsilon \log_4 \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Результат леммы 2.5 уточняет результат, полученный в [8] о том, что функция Такаги принадлежит пространству H^α , $0 < \alpha < 1$.

Вычислим локальную дробную производную функции Такаги. Учитывая оценки (19)–(23), имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} c \varepsilon^{1-\alpha} = 0.$$

Следовательно локализованная дробная производная функции Такаги равна:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(1 + \log_\varepsilon(\varepsilon \log_4 \frac{1}{\varepsilon}) - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{n_0} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) \right) = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{n_0} \begin{cases} -1, 4^n x \leq i_n - k(x, n); \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{4^n \varepsilon} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), i_n - k(x, n) \leq 4^n x \leq i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon; \\ 1, i_n - k(x, n) + 4^n \varepsilon \leq 4^n x; \end{cases} = \\ & = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_0 + \frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{n_0} \begin{cases} -1, \frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}} \leq 0; \\ \left(\left(\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}} \right)^{1-\alpha} 2 - 1 \right), 0 \leq \frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}} \leq 1; \\ 1, 1 \leq \frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что для локальной дробной производной функции Такаги имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \varepsilon^\alpha \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) \right) \geq (n_0 + 1)^{-1} \sum_{n=0}^{n_0} (-1) = -1, \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) \right) \leq (n_0 + 1)^{-1} \sum_{n=0}^{n_0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Поскольку $-\frac{1}{4^n} \leq 4^n x - i_n \leq 0$, то знак $\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}}$ определяется значением $k(x, n)$, если $k(x, n) = 0$, то $\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}} \leq 0$, если $k(x, n) = 1$, то

$$\frac{4^n x - i_n + k(x, n)}{\frac{4^n}{2 \times 4^{n_0}}} \geq \frac{-\frac{1}{4^n} + 1}{\frac{1}{2 \times 4^{n_0}}} = 2 \times 4^{n_0} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \geq 2 \times 4^{n_0} \left(1 - \frac{1}{4^{n_0}} \right) = 2 \times (4^{n_0} - 1) \geq 1,$$

имеем:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \varepsilon^\alpha \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (x) \right) = \\ & = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \left(n_0 + \frac{1}{2} \right)^{-1} \sum_{n=0}^{n_0+1} \begin{cases} -1, k(x, n) = 0; \\ 1, 1 = k(x, n); \end{cases} = \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^{n_0+1} (-1)^{k(x, n)+1}}{n_0}. \end{aligned}$$

Видим, что локализованная дробная производная функции Такаги в точке $x \in [0; 1]$ равна пределу относительной части разности числа нулей, единиц и двоек, троек к общему числу цифр числа x , записанного в виде числа с основанием четыре. Приведём несколько примеров:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (0, 1010101010111000111 \dots) \right) = 1. \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (0, 233323222233 \dots) \right) = -1. \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{\varepsilon^{1-\alpha} \log_4 \frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{D}^{\alpha, -\varepsilon} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \sum_{k=0}^{4^n} F(4^n x - k) \right) (0, 102310321013330033 \dots) \right) = 0. \end{aligned}$$

3. Заключение. Локализованные и локальные дробные производные и интегралы типа Римана – Лиувилля могут быть успешно использованы для исследования непрерывных, но не дифференцируемых функций. Локализованные дробные производные типа Маршо получены с помощью перехода от локализованных дробных производных типа Римана – Лиувилля для абсолютно непрерывных функций. Следовательно, для таких функций локализованные производные типа Маршо и Римана – Лиувилля совпадают. Например, локализованные производные типа Маршо и типа Римана – Лиувилля модуля (16) равны. Вопрос о необходимых условиях совпадения локализованных производных типа Римана – Лиувилля и Маршо остаётся открытым. В определении локальной дробной производной первое равенство в (5) есть способ вычисления локальной дробной производной, поскольку при вычислении $\bar{D}^{\alpha, -\varepsilon} f$ мы получаем явный вид функции $\omega(\varepsilon)$.

Список литературы

1. Grinko A.P. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019;30(10):817-832.
2. Grinko A.P. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions*. 2018;29(6):489-504.
3. Гринько А.П. Локализованные и локальные производные дробного порядка функций с заданным модулем непрерывности. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(4):296-313.
4. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*. 1903;1:176-177.
5. Hata M., Yamaguti M. Takagi function and its generalization *Japan J. Appl. Math.* 1984;1:183-199.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и Техника; 1987. 687с.
7. Shidfar A., Sabetfakhri K. On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense. *Amer. Math. Monthly*. 1986;93(5):375-376.
8. Шейпак И.А., О показателях Гёльдера самоподобных функций. *Функциональный анализ и его приложения* 2019;53(1):67-78.
9. Grinko A.P. Localized fractional derivative of Djrbashian-Caputo type. *Integral Transforms and Special Functions*. 2021;32(12):1002-1018.
10. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk*;2009;17(1):41-50. (In Russian)
11. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions*. 2022;33(8):623-636.
12. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Наука; 1968. 511 с.

References

1. Grinko AP. Localized derivatives in spaces of functions representable by localized fractional integrals. *Integral Transforms and Special Functions*. 2019;30(10):817-832.
2. Grinko AP. Generalized Abel type integral equations with localized fractional integrals and derivatives. *Integral Transforms and Special Functions*. 2018;29(6):489-504.
3. Grin'ko AP. Localized and local derivatives of fractional order of functions with a given modulus of continuity. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(4):296-313.
4. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*. 1903;1:176-177.
5. Hata M., Yamaguti M. Takagi function and its generalization *Japan J. Appl. Math.* 1984;1:183-199.
6. Samko SG., Kilbas AA., Marichev OI. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Mn.; Science and Technology; 1987. 687 p.
7. Shidfar A., Sabetfakhri K. On the Continuity of Van Der Waerden's Function in the Hölder Sense. *Amer. Math. Monthly*. 1986;93(5):375-376.
8. Sheipak IA., On Hölder exponents of self-similar functions *Functional Analysis and Its Applications* 2019;53(1):67-78.
9. Grinko AP. Localized fractional derivative of Djrbashian-Caputo type. *Integral Transforms and Special Functions*. 2021;32(12):1002-1018.
10. Grinko AP. Composition properties of operators of local fractional integro-differentiation calculated in various points. *Trudy institute of mathemat. NAN Belarus. Minsk*;2009;17(1):41-50. (In Russ.)
11. Grinko AP. Compositions of localized fractional derivatives and integrals of a different degree of localization. *Integral Transforms and Special Functions*. 2022;33(8):623-636.
12. Muskhelishvili NI. Singular integral equations. - M.: Nauka; 1968. 511 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 25.03.2025

Received March 25, 2025

Поступила после рецензирования 20.05.2025

Revised May 20, 2025

Принята к публикации 24.05.2025

Accepted May 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гринько Александр Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий и физико-математических дисциплин, Барановичский государственный университет, г. Барановичи, Беларусь

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander P. Grinko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Technology and Physical and Mathematical Disciplines, Baranovichi State University, Baranovichi, Belarus

[К содержанию](#)

Задача с препятствием на стратифицированном множестве

Ощепкова С. Н.¹ , Пенкин О. М.² ,

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, 19
osonia@mail.ru

² Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
o.m.penkin@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается аналог задачи с препятствием для системы, составленной из струн и мембран, а также для её обобщения на многомерный случай. Малые перемещения такой системы моделируются эллиптическим уравнением второго порядка (вне зоны контакта системы с препятствием) на стратифицированном множестве, оснащённым условием Дирихле на границе. Основным результатом работы состоит в доказательстве разрешимости данной задачи в пространстве соболевского типа. Основным условием для этого является так называемая прочность стратифицированного множества.

Ключевые слова: стратифицированное множество, лапласиан, вариационная задача, задача с препятствием

Для цитирования: Ощепкова С. Н., Пенкин О. М. 2025. Задача с препятствием на стратифицированном множестве. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 111–116. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-111-116 EDN KEEDOW

Original Research

The Obstacle Problem on the Stratified Set

Sofia N. Oshchepkova¹ , Oleg M. Penkin² ,

¹ Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolutsii Av., Voronezh 394036, Russia
osonia@mail.ru

² Samara National Research University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
o.m.penkin@gmail.com

Abstract. In this paper we consider an analog of the obstacle problem for a mechanical system composed of strings and membranes; as well as a generalization of this problem to multidimensional case. Small displacements of this system under external small loads may be modeled as an elliptic equation of second order (outside of a contact zone) on the stratified set, equipped with Dirichlet's condition on the boundary. The main result of this job is a proof of solvability of a corresponding boundary value problem in sobolev-type space. The main assumption is so-called firmness of the stratified set.

Keywords: Stratified Set, Laplacian, Variational Problem, Obstacle Problem

For citation: Oshchepkova S. N., Penkin O. M. 2025. The Obstacle Problem on the Stratified Set. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 111–116. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-111-116 EDN KEEDOW

1. Описание основных понятий.

1.1. Стратифицированное множество. В определении понятия стратифицированного множества мы в целом следуем работе [1], но модифицируем первоначальное определение с учётом специфики рассматриваемых нами задач. Требуемую нами модификацию можно найти также в [2, 3, 4].

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы называем *стратифицированным*, если оно связно и является объединением конечного числа многообразий (страт) σ_{kj} (первый индекс означает размерность многообразия, а второй служит для автономной нумерации страт данной размерности), имеющих компактные замыкания и удовлетворяющих следующей паре условий.

i Пересечение замыканий $\bar{\sigma}_{kj}, \bar{\sigma}_{ml}$ любых страт σ_{kj}, σ_{ml} , если оно не пусто, является объединением страт.

ii Граница $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ также является объединением страт.

Всюду далее страты считаются подмногообразиями в $\mathbb{R}^n$. Одно и то же множество Ω можно стратифицировать многими способами. Во избежание недоразумений мы будем считать, что набор страт (обозначим его S) фиксирован. Более того, следует ещё задать способ «сборки» Ω из элементов набора

$\mathcal{S}$ – отображение φ , отождествляющее некоторые граничные страты различных страт. Таким образом, под стратифицированным множеством следует понимать тройку $\{\Omega, \mathcal{S}, \varphi\}$. Тем не менее мы само Ω намерены называть стратифицированным, не упоминая остальных элементов тройки.

Условия i, ii встречаются при определении клеточного комплекса. Помимо них накладываются ещё требования на отображение φ . Мы сформулируем это условие в виде геометрического требования к результату сборки – множеству Ω , рассматриваемому как топологическое пространство с индуцированной из $\mathbb{R}^n$ топологией. А именно, мы потребуем, чтобы для любой точки $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega$ существовал шар $B_r(X) \subset \mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\Phi : B_r(X) \rightarrow B_r(X)$ такие, что образ $\Phi(B_r(X) \cap Z)$ части «кривой» звезды Z , состоящей из σ_{kj} и примыкающих к ней $(k+1)$ -мерных страт, является объединением k -мерного шара (образа $\sigma_{kj} \cap B_r(X)$) и опирающихся на него, как на диаметральную плоскость, $(k+1)$ -мерных полушарий – образов $\sigma_{k+1i} \cap B_r(X)$, соответствующих всем $(k+1)$ -мерным стратам, примыкающим к σ_{kj} ; мы говорим, что страта σ_{k+1i} примыкает к страте σ_{kj} , если последняя входит в границу первой. Следующий рисунок иллюстрирует процесс этого «выпрямления».

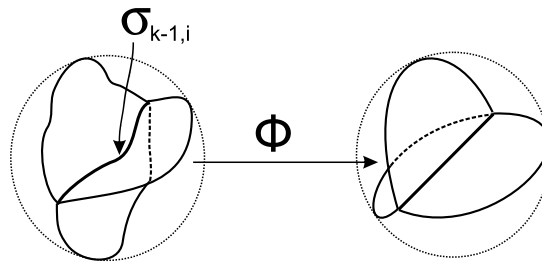


Рис. 1. Локальное выпрямление

Fig. 1. Local straightening

Всюду далее Ω предполагается представленным в виде объединения $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, в котором Ω_0 – связное открытое подмножество Ω (мы здесь пользуемся упомянутой выше индуцированной топологией), составленное из страт набора $\mathcal{S}$ и удовлетворяющее равенству $\overline{\Omega_0} = \Omega$. Множество Ω_0 является аналогом внутренности некоторой замкнутой области, а разность $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ – аналог границы; в топологии Ω множество $\partial\Omega_0$ действительно является топологической границей множества Ω_0 . Обсуждаемый далее стратифицированный лапласиан будет действовать на функции в пределах Ω_0 . Формально определение множества Ω_0 не исключает случая $\Omega_0 = \Omega$ и, как следствие пустоты границы, но в настоящей работе мы будем предполагать, что $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$.

1.2. Стратифицированная мера. Каждая страта σ_{kj} , как подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$, наследует риманову метрику, а с ней и меру Лебега μ_{kj} . Из этих мер мы сконструируем стратифицированную меру μ , определяя её на измеримых подмножествах $\omega \subset \Omega$ формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \mu_{kj}(\omega_{kj}),$$

где $\omega_{kj} = \omega \cap \sigma_{kj}$. При этом множество $\omega \subset \Omega$ назовём μ -измеримым, если каждое пересечение ω_{kj} измеримо в смысле k -мерной меры Лебега на σ_{kj} . Нетрудно заметить, что множество $\mathcal{M}$ всех μ -измеримых множеств является σ -алгеброй на Ω . Измеримость функции $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ определяется стандартно: f является μ -измеримой, если лебеговы множества $L_f(c) = \{X \in \Omega : f(X) \leq c\}$ принадлежат $\mathcal{M}$ при всех $c \in \mathbb{R}$. Нетрудно заметить, что интеграл Лебега μ -измеримой функции по μ -измеримому множеству ω сводится к сумме

$$\int_{\omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \mathcal{S}} \int_{\omega_{kj}} f d\mu.$$

В правой части равенства вместо $d\mu$, строго говоря, следовало бы писать $d\mu_{kj}$; однако нам удобно опускать индексы, если только это не может вызвать недоразумений.

1.3. Дивергенция и лапласиан. Векторное поле $\vec{F}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется касательным к Ω_0 , если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному, в обычном дифференциально-геометрическом смысле, пространству $T_X \sigma_{kj}$.

Обозначение $\vec{C}^1(\Omega_0)$ применяется к пространству касательных векторных полей $\vec{F}$ на Ω_0 , сужения $\vec{F}|_{\sigma_{ki}}$ которых на каждую внутреннюю страту $\sigma_{ki} \subset \Omega_0$ непрерывно дифференцируемы и имеют непрерывное продолжение в каждую точку любой примыкающей внутренней, т. е. лежащей в Ω_0 , страты на единицу меньшей размерности. Непрерывность поля $\vec{F}$ в целом на Ω_0 не предполагается. Последнее означает, что касательное векторное поле из $\vec{C}^1(\Omega_0)$ являет собой набор независимых полей класса C^1 в количестве, равном количеству страт в Ω_0 .

Дивергенция касательного векторного поля $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ в точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ задаётся равенством

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i, \quad (1)$$

где суммирование проводится по всем $(k+1)$ -мерным стратам σ_{k+1i} , примыкающим к σ_{kj} (запись $\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}$ под знаком суммы выражает факт этого примыкания). Символ ∇_k в правой части обозначает оператор обычной k -мерной дивергенции, применённый к сужению $\vec{F}$ на страту σ_{kj} , $\vec{v}_i$ — единичная внутренняя нормаль к σ_{kj} в точке X , направленная внутрь σ_{k+1i} по касательной к σ_{k+1i} (см. следующий рисунок), а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i)$ — предел $\vec{F}(Y)$ при $Y \in \sigma_{k+1i}$, стремящемся к X изнутри страты $\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}$ вдоль непрерывной кривой.

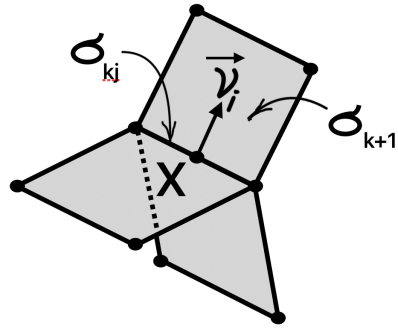


Рис. 2. К определению дивергенции
Fig. 2. Towards the definition of divergence

Существование таких пределов можно потребовать и в случае, когда σ_{kj} — граничная страта, а σ_{k+1i} — внутренняя; множество векторных полей из $\vec{C}^1(\Omega_0)$, обладающих таким свойством обозначается $\vec{C}^1(\Omega)$. Сразу не видно, что определённая нами дивергенция является точным аналогом классической, но можно показать, что $\nabla \cdot \vec{F}(X)$, как и в обычной ситуации, является плотностью потока векторного поля в точке X , отнесённой к стратифицированной мере μ , определённой в предыдущем пункте. Подробнее об этом см. [2].

Примером касательного векторного поля является градиент ∇u скалярной функции u , сужение которой на каждую внутреннюю страту непрерывно дифференцируемо. В этом случае ∇u представляет собой просто набор градиентов этих сужений. Если $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ (множество таких функций обозначим через $C^2(\Omega_0)$), то оператор $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$ естественно назвать стратифицированным лапласианом. Так определённый лапласиан часто называют «жёстким». Можно также определить более общий аналог оператора Лапласа $\nabla \cdot (p \nabla u)$, где p — так называемая стратифицированная константа, то есть на каждой страте p принимает свое постоянное значение.

В этой работе мы будем иметь дело не с классическими, а слабыми производными, поэтому определим здесь аналог пространства Соболева $\dot{H}^1(\Omega)$, а именно определим пространство $\dot{H}_\mu^1(\Omega)$ как пополнение пространства непрерывных на Ω , обращающихся в нуль на $\partial\Omega_0$ и непрерывно дифференцируемых в каждой страте функций по норме, определяемой скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega_0} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mu.$$

Здесь, конечно, нужно предполагать, что градиенты должны быть квадратично суммируемыми на каждой страте σ_{kj} по k -мерной мере Лебега.

1.4. Интегральные тождества. Здесь приводятся аналоги классических интегральных тождеств, играющих решающую роль в наших рассуждениях. Следующее утверждение является аналогом теоремы Гаусса — Остроградского или, как часто говорят, теоремы о дивергенции.

Теорема 1 (о дивергенции). Пусть $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$, тогда

$$\int_{\partial\Omega_0} (\vec{F})_v \, d\mu = - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{F} \, d\mu. \quad (2)$$

Здесь $(\vec{F})_v$ — сумма, аналогичная второму слагаемому в определении дивергенции:

$$(\vec{F})_v(X) = \sum_{\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

но суммирование теперь распространяется только на страты $\sigma_{k+1i} \subset \Omega_0$; подчеркнём, что сейчас σ_{kj} – граничная страта, поэтому некоторые из примыкающих к ней страт $\sigma_{k+1i} > \sigma_{kj}$ тоже могут оказаться граничными. Знак «минус» в формуле (2) связан с тем, что всюду мы пользуемся внутренними нормальными.

Доказательство этой теоремы имеется в книге [2]. Если мы положим в формуле (2) $\vec{F} = v\nabla u$, где $u \in C^2(\Omega)$ (так мы будем обозначать множество таких функций $u \in C^1_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, что $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$), а $v \in C^1_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$, то получим стратифицированный аналог первой формулы Грина:

$$\int_{\Omega_0} v \Delta u \, d\mu + \int_{\Omega_0} \nabla v \cdot \nabla u \, d\mu = - \int_{\partial\Omega_0} v (\nabla u)_v \, d\mu. \quad (3)$$

2. Задача с препятствием. Здесь мы обсудим обобщение известной задачи с препятствием (см. например, [5]) на случай стратифицированного множества. Следующий рисунок иллюстрирует постановку задачи в двумерном случае.

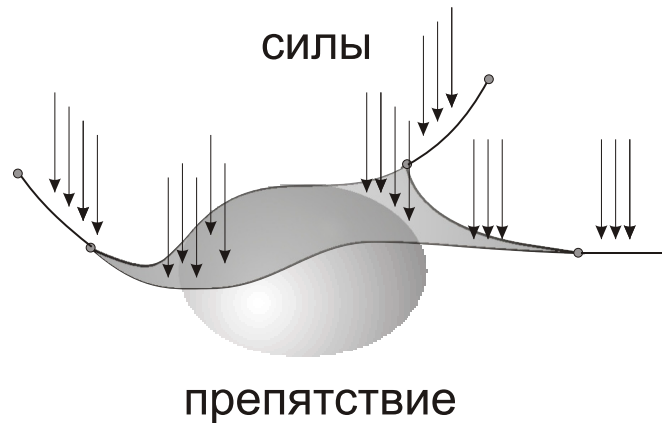


Рис. 3. Механическая система с препятствием
Fig. 3. Mechanical system with obstacle

Здесь показана система, состоящая из мембран (двумерные страты) и струн (одномерные страты). Предполагается, что сначала система была растянута в плоскости и закреплена на границе. Затем, под действием внешней нагрузки, приложенной ортогонально к плоскости, система испытывает перемещения. Помимо внешней нагрузки, эти перемещения обусловлены ещё и препятствием. Препятствие создаётся фиксированным абсолютно твёрдым телом, поверхность которого может быть представлена как график некоторой функции.

Мы будем рассматривать операторы вида $\nabla \cdot (p\nabla u) - qu$ в предположении, что коэффициенты удовлетворяют следующим требованиям: p – строго положительная функция такая, что $p\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$, а $q \in C_\sigma(\Omega_0)$ – неотрицательная. Малая внешняя нагрузка задаётся как функция $f \in C_\sigma(\Omega_0)$. Поскольку мы здесь интересуемся слабыми решениями, можно было бы считать, что эти функции принадлежат $L^2_\mu(\Omega_0)$.

Относительно препятствия предполагается, что описывающая его функция ϕ принадлежит соболевскому пространству $H^1_\mu(\Omega)$.

Перемещения u определяются следующей вариационной задачей

$$\int_{\Omega_0} (p|\nabla u|^2 + qu^2 - 2fu) \, d\mu = \min_{v \in K} \int_{\Omega_0} (p|\nabla v|^2 + qv^2 - 2fv) \, d\mu, \quad (4)$$

где K – выпуклое замкнутое подмножество пространства $H^1_\mu(\Omega)$, определяемое следующим образом:

$$K = \{u \in H^1_\mu(\Omega) : u - g \in \overset{\circ}{H}{}^1_\mu(\Omega), u(x) \geq \phi(x) \text{ п.в.}\}, \quad (5)$$

где $g \in H^1(\Omega)$ – фиксированная функция.

Замечание 1. Мы ограничиваемся слабой формулировкой разрешимости задачи (4) в пространстве $H^1_\mu(\Omega)$, поскольку в рассматриваемых нами условиях она может не иметь классического решения даже в случае отсутствия контакта между системой и препятствием.

Стандартным образом (схема изложена, например, в [5]) задача (4) может быть сведена к вариационному неравенству, т. е. к решению задачи, в которой требуется найти такую функцию $u \in K$, что

$$a(u, v - u) - (f, v - u)_\mu \geq 0, \quad \forall v \in K, \quad (6)$$

где $(f, v - u)_\mu = \int_{\Omega} f(v - u) d\mu$, а форма $a(u, v)$ определяется соотношением

$$a(u, v) = \int_{\Omega_0} (p \nabla u \cdot \nabla v + quv) d\mu. \quad (7)$$

Разрешимость описанной задачи зависит от геометрического устройства стратифицированного множества и представления его в виде пары $(\Omega_0, \partial\Omega_0)$. Нужные нам требования формализуются в виде прочности стратифицированного множества.

Определение. Назовём пару $(\Omega_0, \partial\Omega_0)$ прочной, если любую страту $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ можно соединить с какой-нибудь граничной стратой σ_{ml} цепочкой страт $\sigma_{k_1j_1}, \sigma_{k_2j_2}, \dots, \sigma_{k_pj_p}$ – назовём её прочной цепочкой – со следующими свойствами:

- $\sigma_{k_1j_1} = \sigma_{kj}, \sigma_{k_pj_p} = \sigma_{ml}$;
- для любого $1 \leq q \leq p - 1$ либо $\sigma_{k_qj_q} < \sigma_{k_{q+1}j_{q+1}}$, либо $\sigma_{k_qj_q} > \sigma_{k_{q+1}j_{q+1}}$;
- $|k_{q+1} - k_q| = 1$ для любого $1 \leq q \leq p - 1$;
- все $\sigma_{k_qj_q}$, кроме $\sigma_{k_pj_p}$, лежат в Ω_0 .

Из условия прочности следует неравенство Пуанкаре – Стеклова (см. [6]):

$$\int_{\Omega} u^2 d\mu \leq C \int_{\Omega_0} |\nabla u|^2 d\mu, \quad (8)$$

которое имеет место для любой функции $u \in \overset{\circ}{H}_\mu^1(\Omega)$ с независимой от u константой C .

Теорема 2. Пусть Ω является прочным множеством. Тогда задача (6) имеет единственное решение в K .

Доказательство. Ограниченная билинейная форма $a(u, v)$ является коэрцитивной (см. ниже), что легко следует из неравенства Пуанкаре – Стеклова. Таким образом, доказываемое нами утверждение является следствием хорошо известной теоремы о вариационных неравенствах в гильбертовом пространстве (см., например, [5]). ■

Мы называем форму $a(u, v)$ коэрцитивной, если $a(u, u) \geq C \|u\|_\mu^2$ ($C > 0$), где норма $\|u\|_\mu$ определяется формулой

$$\|u\|_\mu^2 = \int_{\Omega} u^2(x) d\mu.$$

Замечание 2. Множество $\mathcal{N} = \{x \in \Omega_0 : u(x) > \phi(x)\}$ называется множеством неинцидентности решения u . Это множество, очевидно, открыто. Нетрудно показать, что обсуждаемое нами решение u вариационного неравенства (6) является слабым решением задачи

$$\int_{\mathcal{N}} (p \nabla u \nabla \varphi + qu\varphi) d\mu = \int_{\mathcal{N}} f\varphi d\mu, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{N}),$$

где $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ – пространство финитных функций с носителями в $\mathcal{N}$.

Если положить $K = \overset{\circ}{H}_\mu^1(\Omega)$, то вариационное неравенство (6) превращается в вариационное равенство

$$a(u, v) = (f, v)_\mu, \forall v \in \overset{\circ}{H}_\mu^1(\Omega),$$

где $(f, v)_\mu = \int_{\Omega} f v d\mu$. В этом случае, используя формулу Грина, нетрудно убедиться, что u является слабым решением однородной задачи Дирихле (т. е. $u = 0$ на границе $\partial\Omega_0$) для дифференциального оператора, имеющего на каждой страте σ_{kj} следующий вид:

$$(-\Delta_p u_{kj} + qu_{kj})(X) - \sum_{\sigma_{kj} < \sigma_{k+1i}} p_{k+1i} \vec{v}_i \cdot \nabla u_{k+1i}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) = f_{kj}.$$

Полученный нами результат обобщает частные результаты работ [7, 8, 9].

Список литературы

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2005. 272 с.
3. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве. *Алгебра и анализ*. 2018;30(5):149-158. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1573>
4. Даирбеков Н.С., Пенкин О.М., Сарыбекова Л.О. Неравенство Пуанкаре и p -связность стратифицированного множества. *Сибирский математический журнал*. 2018;59(6):1291-1302. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.606>
5. Фридман А. Вариационные принципы и задачи со свободными границами. М.: Наука; 1990. 536 с.
6. Gavrilo A., Nicaise S., Penkin O. Poincaré's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. 2003;55:195-213.
7. Ali Mehmeti F. Nonlinear waves in networks. Mathematical Research, 80, Academie Verlag, Berlin, 1994. 171 p.
8. Below J. von. A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2 -networks. *Linear algebra and appl.* 1985, 71, 309-325.
9. Nicaise S. Polygonal interface problems. Peter Lang Verlag, 1993. 250 p.

References

1. Pham F. Introduction a l'étude topologique des singularités de Landau. Paris: Gauthier-Villars Éditeur; 1967. 142 p.
2. Pokornyi YV, Penkin OM, Pryadiev VL, Borovskikh AV, Lazarev KP, Shabrov SA. Differential's n'ye uravneniya na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272 p. (In Russ.)
3. Dairbekov NS, Penkin OM, Sarybekova LO. An analog of the Sobolev inequality on a stratified set. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2019;30:869–875. DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1573>
4. Dairbekov NS, Penkin OM, Sarybekova LO. The Poincaré inequality and p -connectedness of a stratified set *Siberian Mathematical Journal*. 2018;59(6):1024-1033. DOI: <https://doi.org/10.1134/S003744661806006X>
5. Friedman A. Variational principles and free-boundary problems. Wiley; 1982. 710 p. (Friedman A. Variational principles and free-boundary problems. Moscow: Nauka; 1990. 536 c.)
6. Gavrilo A, Nicaise S, Penkin O. Poincaré's inequality on stratified sets and applications. *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. 2003;55:195-213.
7. Ali Mehmeti F. Nonlinear waves in networks. Mathematical Research, 80, Academie Verlag, Berlin, 1994. 171 p.
8. Below J. von. A characteristic equation associated to an eigenvalue problem on c^2 -networks. *Linear algebra and appl.* 1985, 71, 309-325.
9. Nicaise S. Polygonal interface problems. Peter Lang Verlag, 1993. 250 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 07.04.2025

Поступила после рецензирования 24.05.2025

Принята к публикации 26.05.2025

Received April 7, 2025

Revised May 24, 2025

Accepted May 26, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ощепкова Софья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Пенкин Олег Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sofia N. Oshchepkova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Oleg M. Penkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Modelling, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 51-7, 519.6, 517

MSC 92B05

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124

EDN LERFVY

Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани

Кудаева Ф. Х. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии С. М. Ситником)

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,

Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

kfatimat@yandex.ru

Аннотация. Низкотемпературное воздействие на биологические ткани сопровождается фазовыми переходами, которые приводят к появлению движущихся границ раздела фаз. Математическое моделирование таких процессов является сложной задачей, требующей специальных методов решения. В предлагаемой работе рассматривается возможность применения асимптотического интегрирования для решения задачи со свободными границами, возникающими при низкотемпературных воздействиях на биоткани, с целью упрощения моделей и получения аналитических и квазианалитических приближений, позволяющих анализировать влияние различных параметров на динамику процесса. В работе рассмотрена новая постановка двумерной задачи со свободными границами, получена более простая двумерная стационарная задача Стефана.

Ключевые слова: свободная граница, асимптотическое интегрирование, фазовые переходы, низкотемпературное воздействие, асимптотическое разложение, нулевое приближение, уравнение первого приближения

Для цитирования: Кудаева Ф. Х. 2025. Математическая модель низкотемпературного воздействия на биоткани. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 117–124. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124 EDN LERFVY

Original Research

A Mathematical Model of Low-temperature Effects on Biological Tissues

Fatimat Kh. Kudayeva 

(Article submitted by a member of the editorial board S. M. Sitnik)

Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov,

173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

kfatimat@yandex.ru

Abstract. Low-temperature effects on biological tissues are accompanied by phase transitions that lead to the appearance of moving phase boundaries. Mathematical modeling of such processes is a complex task requiring special solution methods. The proposed paper considers the possibility of using asymptotic integration to solve the problem with free boundaries arising from low-temperature effects on biological tissues in order to simplify models and obtain analytical and quasi-analytical approximations that allow analyzing the influence of various parameters on the dynamics of the process. In this paper, we consider a new formulation of a two-dimensional problem with free boundaries, and obtain a simpler two-dimensional stationary Stefan problem.

Keywords: Free Boundary, Asymptotic Integration, Phase Transitions, Low-temperature Exposure, Asymptotic Decomposition, Zero Approximation, Equation of the First Approximation

For citation: Kudayeva F. Kh. 2025. A Mathematical Model of Low-temperature Effects on Biological Tissues. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 117–124. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-117-124 EDN LERFVY

1. Введение. Асимптотическое интегрирование задач со свободными границами относится к аналитическим методам, которые позволяют получить приближенные решения, когда точное аналитическое решение невозможно найти или его поиск связан с большими сложностями. Данный метод основан на идее рассмотрения поведения системы в предельных случаях, когда один или несколько параметров становятся очень большими или очень малыми.

К ключевым идеям и этапам асимптотического интегрирования задач со свободными границами относятся: определение малого или большого параметра, перемасштабирование переменных, асимптотическое разложение, решение задач в порядке возрастания степеней параметра, согласование асимптотических разложений.

Асимптотическое интегрирование имеет преимущества и недостатки. К преимуществам асимптотического интегрирования относится то, что данный метод позволяет получать аналитическое или квазианалитическое приближение решения, которое может быть использовано для быстрого анализа и оценки параметров. Данный метод позволяет свести сложную задачу к более простой последовательности задач, которые можно решить с помощью аналитических или численных методов. Асимптотический анализ позволяет выявить основные физические факторы, определяющие поведение системы в предельных случаях.

К недостаткам данного метода относятся ограниченная область применимости, т. е. асимптотические решения справедливы только вблизи предельного значения малого параметра. Возникают сложности при вычислении, связанные с получением высокого порядка разложений. Не всегда имеется подходящий малый параметр, который можно использовать для различных задач со свободными границами.

Асимптотическое интегрирование можно использовать для анализа поведения движущейся границы при малых и больших значениях параметра Стефана, для анализа движения капель жидкости, тонких пленок, волн на поверхности, для анализа процесса фильтрации жидкости в пористой среде с подвижной границей, для анализа скорости и формы фронта кристаллизации при малых и больших значениях переохлаждения.

Работа математика Вазова В. [1] посвящена методам асимптотического разложения для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть использованы во многих задачах механики, электроники, астрофизики. Данная работа содержит много примеров. В своей работе [2] авторы изучают асимптотику решений слабонелинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

Изложению методики решения квазилинейных задач нестационарной теплопроводности методом малого параметра посвящена работа [3]. Подход, используемый в данной работе, расширяет возможности метода возмущений на класс с существенными нелинейностями.

В [4] авторы предлагают новый подход к исследованию уравнений типа Эмдена – Фаулера, применяется метод асимптотической эквивалентности.

В работе [5] строятся асимптотические формулы для решений линейного дифференциального уравнения второго порядка.

В книге [6] излагается теория пограничного слоя с позиции теорий дифференциальных уравнений. Предлагается новый подход к понятиям асимптотического ряда и псевдоаналитической функции.

Работы [7, 8] посвящены асимптотической теории решений с внутренними слоями, задаче для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения.

Актуальность представленной работы связана с тем, что с помощью асимптотического интегрирования можно во многом упростить процесс построения и исследования поставленной задачи.

Цель предлагаемой работы: применение асимптотического интегрирования к задачам со свободными границами для низкотемпературного воздействия на биологические ткани для получения более глубокого понимания физических процессов и разработке эффективных моделей для оптимизации криопроблем.

Задачи работы: 1) построение асимптотических разложений; 2) решение асимптотических задач; 3) анализ и интерпретация результатов; 4) численные расчеты.

Полученные результаты позволяют получить ценную информацию о поведении задач со свободными границами и помогут построить более эффективные модели, описывающие низкотемпературное воздействие на биологические ткани.

2. Постановка задачи. При низкотемпературных воздействиях на биологические ткани в различных областях используются криозонды с полусферическими формами аппликатора. Определение динамики порождаемого ими в биологической ткани температурного поля приводит к решению следующей нестационарной задачи со свободными границами типа Стефана [9]–[12]:

$$\begin{aligned} \Delta u - k(u)u_t &= f(u), \quad y_0 < y < y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(y, x, 0) &= 0, \quad y = y_0, \quad 0 < x < 1, \quad (y_1(x, 0) = y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= H(P)[v(u) - v_c], \quad x = 0, \quad y_0 < y < y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad x = 1, \quad y_0 < y < y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ [u] &= 0, \quad y = y^*, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{y=y^*}^{y=y_1(x, t)}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta u = y^{-2}(y^2 u_y)_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_x]_x$ – осесимметричная часть оператора Лапласа в сферической системе координат $y, \varphi, \Theta = \arccos x$.

В задаче (1) искомыми являются функции, которые описывают температурное поле и температуру раздела фаз:

$$u = u(y, x, t), \quad y_0 \leq y \leq y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$y = y^*(x, t), \quad 0 < x < 1; \quad y_1 = y_1(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0.$$

Остальные числовые параметры k, γ, β, u^* и функции $H(P), v_c(y, x, t), k(u) = k + (1 - k)\eta(u - u^*), f(u) = u^\beta \eta(u - u^*), v(u) = u + [1 + \gamma(u - 1) - u]\eta(u - u^*), \eta(u)$ – функция Хевисайда известны.

3. Асимптотическое разложение. Суть асимптотического интегрирования состоит в том, что решение, включая положение свободной границы, ищется в виде ряда по степеням малого параметра. Подставляя асимптотическое разложение в исходные уравнения и граничные условия и приравнивая при одинаковых степенях ε , получается последовательность задач для определения членов разложения u_i и s_i . Далее решаются полученные задачи в порядке возрастания степеней малого параметра. Обычно задача нулевого порядка ε^0 оказывается значительно проще, чем исходная задача, и часто имеет аналитическое решение. Решения более высокого порядка добавляют поправки к нулевому приближению, делая его более точным.

В случае, когда в задаче присутствуют несколько масштабов, то для каждого из них строится свое асимптотическое разложение. Для получения единого решения, справедливого во всей области, необходимо «согласовать» эти разложения в переходной области.

В реальных ситуациях, когда коэффициент теплообмена с окружающей средой $H(P) = \varepsilon(y) \ll 1$, решение задачи (1) можно искать в виде:

$$u = \sum_{n=0}^N u_n \varepsilon^n, \quad y^* = \sum_{n=0}^N y_n^* \varepsilon^n, \quad N \geq 1. \quad (2)$$

Если подставить (2) в (1) и еще приравнять коэффициенты при ε^0 , приходим к сферически-симметричной одномерной задаче Стефана относительно пары функций $u_0 = u_0(y, t)$ и $y_0^* = y_0^*(t)$:

$$y^{-2}(y^2 u_{0y})_y + f(u_0) - k(u_0)u_{0t} = 0, \quad y_0 < y < \infty, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_0(y, 0) = 0, \quad y_0 < y < \infty,$$

$$u_{0y} = H_A[v(u_0) - v_A(t)], \quad y = y_0, \quad t > 0,$$

$$[u_0] = 0, \quad [u_{0y}] = 0, \quad y = \infty, \quad t > 0,$$

$$[u_0] = 0, \quad y = y_0^*, \quad [u_{0y}] = P y_{0t}^*, \quad y_0^* = y_0^*(t), \quad t > 0.$$

Для $u_1 = u_1(y, x, t)$ получается двумерная линейная задача на сопряжение на уже известной полуокружности $y = y_0^*(t)$:

$$\Delta u_1 - k u_{1t} = 0, \quad y_0 < y < y^*, \quad t > 0,$$

$$\Delta u_1 - k u_{1t} = f'(u_0) \varepsilon u_1 = 0, \quad y^* < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$u_1(y, x, 0) = 0, \quad y^* < y < \infty, \quad 0 < x < 1,$$

$$[u_1]_{y_0^*} = -\frac{P y_{0t}^*}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} u_1(y_0^*, x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$[u_1]_{y_0^*} = -\frac{P y_{0t}^{*-1} y_{0t}^*}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} u_1(y_0^*, x, t) + P \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{u_1(y_0^*, x, t)}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} \right\},$$

$$y^{-1} u_{1x} = v(u_0) - v_c(t), \quad x = 0, \quad y_0 < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$u_1 < \infty, \quad (u_{1x} = 0), \quad x = 1, \quad y_0 < y < \infty, \quad t > 0,$$

$$u_1 = 1, \quad u_{1y} = 0, \quad y = \infty, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_0(y_0^* + \varepsilon y_1^*, t) + \varepsilon u_1(y_0^* + \varepsilon y_1^*, x, t) = 0. \quad (5)$$

Из (5) следует,

$$y_1^*(x, t) = \frac{u_1(y_0^*, x, t)}{u_{0y}^\pm(y_0 \pm 0, t)}. \quad (6)$$

Проведенный анализ показывает, что формально полученные в задаче (4) условия сопряжения корректны, второе из этих условий содержит дельта-функцию Дирака, несмотря на то, что

$$u_{0yy} = [u_{0y}]_{y_0^*} + \delta(y - y_0^*) + u_{0yy} = -P y_{0t} \delta(y - y_0^*) + u_{0yy}, \quad (7)$$

так как в силу четности $[\delta(y - y_0^*)]_{y_0^*} = 0$ и $[u_{0yy}]_{y_A^*} = [\tilde{u}_{0yy}]_{y_A^*}$. Волнистая черта в условии означает обычную не обобщенную функцию, для которой справедливо равенство:

$$[u_{0yy}]_{y_A^*} = \tilde{u}_{0yy}(y_0^* + 0, t) - \tilde{u}_{0yy}(y_0^* - 0, t). \quad (8)$$

Из уравнения нулевого приближения (3) получается:

$$\begin{aligned} [u_0]_{y_0^*} &= 0, \\ [u_{0y}]_{y_0^*} &= -Py_{0t}^*, \quad y_0^* = y_0^*(t), \quad t > 0, \\ u_{0yy} &= \begin{cases} -2y^{-1}u_{0y} + ku_{0t}, & y < y_A^*, \\ -2y^{-1}u_{0y} + u_{0t}, & y > y_0^*. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует, что $[\tilde{u}_{0yy}]_{y_A^*} = 2Py_0^{*-1}y_{0t}$, которое следует из условия непрерывности, а также из уравнения (4), если учесть, что:

$$\eta(u_0) - \eta(y - y_0^*), \quad \delta(u_0)u_{0t} = -\delta(y - y_0^*)y_{0t}^* \quad (10)$$

и выполнить интегрирование последнего в пределах от $y_0^* - 0$ до $y_0^* + 0$

$$[u_{0y}]_{y_0^*} = -Py_{0t}^*. \quad (11)$$

В силу равенств (8) условия сопряжения задачи (4) упрощаются к виду:

$$\begin{aligned} [u_1]_{y_0^*} &= -\frac{y_{0t}^*}{\tilde{u}_{0y}^\pm(y_0^*, t)} Pu_1(y_0^*, x, t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ [u_1]_{y_0^*} &= \frac{2Py_{0t}^* u_1(y_0^*, x, t)}{u_{0y}^\pm(y_0^*, t)} + P \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u_1(y_0^*, x, t)}{\tilde{u}_{Ay}(y_0^*, t)} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\tilde{u}_{0y}^+ = \tilde{u}_{0y}(y_0^* + 0, t), \quad \tilde{u}_{0y}^- = \tilde{u}_{0y}(y_0^* - 0, t), \quad (13)$$

а знак «+» или «-» выбирается в соответствии со знаком u_1 : $u_1(y_0^*, x, t) < 0$ или $u_1(y_0^*, x, t) > 0$.

В случае, когда $t \rightarrow \infty$, $u(x, y, t) \rightarrow u(x, y)$, а $y^*(x, t) \rightarrow y^*(x)$ получаются более простые двумерные стационарные задачи Стефана, вытекающие из задачи (1):

$$\begin{aligned} Lu &= y^{-2}(y^2 u_y)_y + y^{-2}[(1-x^2)u_x]_x + f(u) = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \\ y^{-1}u_x &= \varepsilon(y)[\gamma(u_c) - \gamma(u)], \quad x = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \\ u(x, \bar{y}) &= 0, \quad u_n(x, \bar{y}) = 0, \quad y = \underline{y}, \quad 0 < x < 1. \end{aligned} \quad (14)$$

4. Нулевое приближение. Согласно (3), после асимптотического разложения при $\varepsilon(y) \leq 1$:

$$u = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k, \quad \varepsilon = \varepsilon(y) \leq 1, \quad u_k = u_k(x, y), \quad N \geq 1, \quad (15)$$

уравнение нулевого приближения u_0 имеет вид:

$$\begin{aligned} Lu_0 &= y^{-2}(y^2 u_{0y})_y + y^{-2}[(1-x^2)u_{0x}]_x + f(u_0) = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \\ u_{0y} &= h(u_0 - u_A), \quad y = \underline{y}, \\ y^{-1}u_{0x} &= 0, \quad x = 0, \quad u_0 < \infty, \quad x = 1, \quad \underline{y} < y < \bar{y}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как решение задачи (16) не зависит от x , т. е.

$$u_0(x, y) = u_0(y), \quad (17)$$

то для определения $u_0(y)$ получаем следующую одномерную стационарную задачу Стефана:

$$\begin{aligned} y^{-2}(y^2 u_0') + f(u_0) &= 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y} \leq \infty, \\ u_0'(\underline{y}) &= h(u_0 - u_A), \quad u(\bar{y}) = 1, \quad (u_0(y) = u_0). \end{aligned} \quad (18)$$

С введением координаты изотермы замораживания $y = y^*$ ($u_0(y^*) = 0$) задача (18) записывается в виде:

$$y^{-2}(y^2 u_0')' = 0, \quad \underline{y} < y < y^*,$$

$$\begin{aligned}
y^{-2}(y^2 u_0')' + u_0^\beta &= 0, \quad y^* < y < \bar{y} \\
u_0'(y) &= h(u_0 - u_A), \quad u(\bar{y}) = 1, \\
[u]_{y^*} &= 0, \quad [u']_{y^*} = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

где знак $[]_{y^*}$ означает скачок стоящей под ним функции в точке y^* .

Используя общее решение дифференциального уравнения задачи (19) в замороженной биологической ткани $c_1 + c_2/y$ и в незамороженной биологической ткани $1 + c_2 e^{-y}/y$, после удовлетворения краевым условиям и условиям сопряжения задачи (19) получается система нелинейных уравнений относительно c_1, c_2, c_3 и y^* . Разрешив последнюю, находим точное решение задачи (19):

$$u_0(y) = \begin{cases} (1 - \frac{y^*}{y} \frac{y-y}{y^*-y}), & y \leq y \leq y^*, \\ \Delta^{-1}(y^*)(1 - \frac{y^*}{y} e^{(y^*-y)/y}), & y^* \leq y \leq \bar{y}, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$\Delta(y^*) = 1 - y^* e^{(y^*-y)/y}, \tag{21}$$

$$\frac{y^*}{y(y-y^*)} u_0 = h(u_0 - u_A). \tag{22}$$

Из (22) следует:

$$u_0 = \frac{y(y^* - y)}{y^* + y(y^* - y)h} u_A, \tag{23}$$

$$\frac{y}{y^*(y-y^*)} u_0 = \Delta^{-1}(y^*)(1 + \frac{1}{y^*}). \tag{24}$$

Из (24) следует:

$$u_0 = \frac{(1 + y^*)(y - y^*)}{y \Delta(y^*)}, \tag{25}$$

а y^* определяется как положительный корень уравнения:

$$y^{-2}(1 + h y) + y^*[1 + y(1 - y)h] - \frac{y}{y^*} h \left[1 - \frac{u_A \Delta}{y^*} \right] = 0. \tag{26}$$

В частности, в случае, когда $y = \infty$, $\Delta(y^*) = 1$ уравнение (26) вырождается в квадратное уравнение с единственным положительным корнем:

$$y^* = [2(1 + h y)]^{-1} \left\{ \sqrt{[1 + y(1 - y)h]^2 + 4(1 + h y)h y^2(1 - u_A)} - [1 + y(1 - y)h] \right\}. \tag{27}$$

В этом случае из уравнения общего баланса тепловой энергии следует:

$$\int_y^\infty Lu_0 y^2 dy = \int_y^{y^*} Lu_0 y^2 dy + \int_{y^*}^\infty Lu_0 y^2 dy = y^2 u_0 y|_y^{y^*} + y^2 u_0 y|_{y^*}^\infty + \int_{y^*}^\infty f(u_0) y^2 dy = 0 \tag{28}$$

с учетом краевого условия и точного решения (20), находим:

$$y^2 h(u_0 - u_A) = y^{*2} + y^* \rightarrow u_0 = u_A + y^*(1 + y^*)/y^2 h. \tag{29}$$

По физическому смыслу $y^* \geq y$, что достигается при следующем ограничении на h :

$$h \geq (1 + y)/(y |u_A|). \tag{30}$$

В общем случае уравнение теплового баланса записывается в виде:

$$y^2 h(u_0 - u_A) = (y^{*2} + y^*) \Delta^{-1}(y^*) + \frac{1}{3} (y^{-3} - y^{*3}) [1 - \Delta^{-1}(y^*)]. \tag{31}$$

Из (31) следует:

$$\underline{u}_0 = u_A + \frac{(y^{*2} + y^*)\Delta^{-1}(y^*) + \frac{1}{3}(\bar{y}^2 - y^*)[1 - \Delta^{-1}(y^*)]}{y^2 h}.$$

5. Уравнения первого приближения. Предварительно разложив функцию $f(u_0 + \varepsilon u_1)$ в ряд Тейлора и собирая коэффициенты при ε , для определения $u_1(x, y)$ получается следующая краевая задача:

$$L_1 u_1 = y^{-2}(y^2 u_{1y})_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_{1x}]_x - u_1 \eta(u_0) + f(u_0)u_1 = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \quad (32)$$

$$u_{1y} = h u_1, \quad y = \underline{y}, \quad u_1 = 0, \quad y = \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \quad y^{-1} u_{1x} = [\gamma(u_c) - \gamma(u_0)], \quad x = 0,$$

$$u_0(y^*) = 0, \quad \delta(u_0(y)) = \frac{\delta(y - y^*)}{u'_0(y^*)} = \frac{y^* \delta(y - y^*)}{1 + y^*}.$$

В каждой из подобластей биологической ткани $y < y^*$ и $y > y^*$ получаются уравнения:

$$y^{-1}(y^2 u_{1y})_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_{1x}]_x = 0, \quad \underline{y} < y < y^*,$$

$$y^{-1}(y^2 u_{1y})_y + y^{-2}[(1 - x^2)u_{1x}]_x - f(u_0)\varepsilon u_1, \quad y^* < y < \bar{y}, \quad (33)$$

с краевыми условиями

$$y^{-1} u_{1x} = \gamma(u_c) - u_0, \quad x = 0, \quad \underline{y} < y < y^* \quad (34)$$

и условиями сопряжения при $y = y^*$

$$[u_1]_{y^*} = 0, \quad [u_{1y}]_{y^*} = \frac{y^* u_1(x, y^*)}{1 + y^*}, \quad 0 < x < 1, \quad (35)$$

где $\gamma(u_c) = u_c + (\gamma u_c - u_c)\eta(u_c)$. В частном случае $\beta = 0$, когда $f(u) = u^\beta = 1$, правая часть уравнения (1) линейна. Для такого оператора задачи (1) имеет место вторая формула Грина:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} (\varphi L_1 u - u L_1 \varphi) y^2 dy dx = \\ & = \int_0^1 (\bar{y}^{-2} (\varphi u_y - u \varphi_y))|_{y=\underline{y}-y^2[\varphi(u_y-hu)-u(\varphi_y-h\varphi)_1]}|_{y=\underline{y}} dx - \int_{\underline{y}}^{\bar{y}} (\varphi u_x - u \varphi_x)|_{x=0} dy. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим функцию Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, определяемую как решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} L_1 G &= y^{-2}(y^2 G_y) + y^{-2}[(1 - x^2)G_x]_x - G \left[\eta(y - y^*) - \frac{y \delta(y - y^*)}{1 + y^*} \right] = \\ &= -\delta(y - \eta) \delta(x - \xi), \quad \underline{y} < y < \bar{y}, \quad 0 < x, \xi < 1, \\ G_y &= h G, \quad y = \underline{y}, \quad G = 0, \quad y = \bar{y}, \quad 0 < x < 1, \\ y^{-1} G_x &= 0, \quad x = 0, \quad \underline{y} < y < \bar{y}. \end{aligned} \quad (37)$$

При $u = u_1(x, y)$, $\varphi = G$ из (36), (37) и (32)–(35) получается интегральное представление:

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \eta) &= - \int_{y(\xi)}^{y^*(\xi)} G(y; \xi, \eta) [\gamma(u_c(y)) - u_0(y)] y dy - \\ &- \int_{y^*(\xi)}^{\bar{y}(\xi)} G(y; \xi, \eta) [\gamma[u_c(y)] - \gamma u_0(y)] y dy. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя оставшиеся краевые условия:

$$u_1(\xi, y^*(\xi)) = 1, \quad u_1(\xi, \bar{y}(\xi)) = 0. \quad (39)$$

определяем неизвестные функции $y^* = y^*(\xi)$ и $\bar{y} = \bar{y}(\xi)$, которые содержатся в полученном интегральном представлении (38).

6. Заключение. Асимптотическое интегрирование – это один из мощных методов для анализа задач со свободными границами, который позволяет получить аналитические или квазианалитические приближенные решения. Несмотря на определенные ограничения, данный метод является ценным инструментом для понимания основных физических принципов и создания эффективных моделей для различных приложений. Умение использовать этот инструмент требует знания асимптотических методов, дифференциальных уравнений и понимания физических процессов, лежащих в основе рассматриваемой задачи.

Список литературы

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир; 1968. 464 с.
2. Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях. *Математический сборник*. 1998;189(3): 45–68.
3. Коздоба Л. А., Чумаков В.Л. Методика применения метода малого параметра при решении квазилинейных задач нестационарной теплопроводности с существенными нелинейностями. *ТВТ*. 1971;9(3):557–562.
4. Мамедова Т.Ф., Егорова Д.К., Десяев Е.В., Хесс Р. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений типа Эмдена – Фаулера. *Вестник Мордовского университета*. 2016; 26(4):440–447.
5. Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование одного класса систем функционально-дифференциальных уравнений. *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2013;(1):137–145.
6. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского университета; 2011. 456с.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н. Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями. *Дифференциальные уравнения и топология. I, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН*, 268, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2010, 268–283; *Proc. Steklov Inst. Math.*, 268 (2010), 258–273.
8. Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н., Радченко И.В. О внутреннем переходном слое в сингулярно возмущенной начальной задаче. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1996;36(9):105–111. *Comput. Math. Math. Phys.* 1996;36(9):1251–1256.
9. Березовский А.А. Двумерные модели криодеструкции биоткани. *Мат. моделирование физических процессов. Сборник научных трудов. Киев. Институт математики АН УССР*. 1989:14–38.
10. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Кармоков М.М. Есанкулова М.Х. Двумерные задачи со свободными границами в проблемах медицины. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2022;2:36–40.
11. Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х. Двумерные задачи со свободными границами в медицине. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2014;3:16–18.
12. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Нагоров А.Л. Двумерные задачи со свободными границами в проблемах медицины. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2022;2:80–92.

References

1. Vazov V. Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations. Moscow: Mir, 1968; 464 p.
2. Egorov YuV., Kondratiev VA., Oleinik OA. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems in cylindrical domains, *Mathematical Notes*. 1998;189(3):45–68.
3. Kozdoba LA., Chumakov VL. Methodology for applying the small parameter method in solving quasi-linear problems of unsteady thermal conductivity with significant nonlinearities, *TVT*. 1971; 9(3):557–562.
4. Mammadova TF., Egorova DK., Desyaev EV., Hess R. Asymptotic integration of Emden-Fowler type differential equations, *Bulletin of the Mordovian University*. 2016;26(4):440–447.
5. Nesterov PN. Asymptotic integration of one class of systems of functional differential equations, *Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky*. 2013;1(3):137–145.
6. Lomov SA., Lomov IS. Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer. Moscow: Moscow University Press., 2011; 456 p.
7. Vasilyeva AB., Butuzov VF., Nefedov NN. Singularly perturbed problems with boundary and inner layers, *Differential equations and topology. I, Collection of articles. On the 100th anniversary of the birth of Academician Lev Semenovitch Pontryagin, Proceedings of the MIAN*. 268, MAIK "Science/Interperiodics Moscow. 2010:268–283, *Proc. Steklov Inst. Math*. 2010; 268, 258–273.
8. Vasilyeva AB., Nefedov NN., Radchenko IV. On the inner transition layer in a singularly perturbed initial problem, *J. computing. matem. and mathematical physics.*, 36:9 (1996), 105–111; *Comput. Math. Math. Phys.*, 36:9 (1996), 1251–1256.

9. Berezovsky AA. Two-dimensional models of cryodestruction of biological tissue// Mat. modeling of physical processes, *Collection of scientific papers*. - Kiev, *Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*. 1989:14–38
10. Kudayeva FKh., Kaygermazov AA. Karmokov MM. Yesankulova MKh. Two-dimensional problems with free boundaries in problems of medicine, *South Siberian Scientific Bulletin*. 2022;2:36–40.
11. Kaygermazov AA., Kudayeva FKh. Two-dimensional problems with free boundaries in medicine, *South Siberian Scientific Bulletin*. 2014;3:16–18.
12. Kudayeva FKh., Kaygermazov AA. Nagorov AL. Two-dimensional problems with free boundaries in medical problems, *Bulletin of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2022;2:80–92.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.03.2025

Received March 21, 2025

Поступила после рецензирования 19.05.2025

Revised May 19, 2025

Принята к публикации 24.05.2025

Accepted May 24, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кудаева Фатимат Хусейновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Fatimat Kh. Kudayeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor Department of Applied Mathematics and Computer Science, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nalchik, Russia

[К содержанию](#)

Изучение влияния температуры на параметры насыщения и стабильность легированных образцов GaN:Si

Сохань К. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии А. В. Носковым)
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
1006964@bsuedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается влияние легирования галлия нитрида (GaN) кремнием (Si) на его электрические свойства и стабильность при различных температурах. Обсуждаются основные аспекты теоретической основы, включая формулы для расчета концентрации носителей заряда и подвижности, а также влияние температуры на эти параметры. Результаты исследования могут способствовать более глубокому пониманию поведения легированных полупроводников и их применению в современных технологиях.

Ключевые слова: галлиевый нитрид, легирование, насыщение, стабильность, доноры, акцепторы

Для цитирования: Сохань К. С. 2025. Изучение влияния температуры на параметры насыщения и стабильность легированных образцов GaN:Si. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 125–130.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-125-130 EDN DBKCRY

Original Research

Study of the Effect of Temperature on Saturation Parameters and Stability of Alloyed GaN:Si Samples

Kristina S. Sokhan 

(Article submitted by a member of the editorial board A. V. Noskov)
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
1006964@bsuedu.ru

Abstract. The article examines the effect of gallium nitride (GaN) doping with silicon (Si) on its electrical properties and stability at various temperatures. The main aspects of the theoretical framework are discussed, including formulas for calculating the concentration of charge carriers and mobility, as well as the effect of temperature on these parameters. The results of the study can contribute to a deeper understanding of the behavior of doped semiconductors and their application in modern technologies.

Keywords: Gallium Nitride, Alloying, Saturation, Stability, Donors, Acceptors

For citation: Sokhan K. S. 2025. Study of the Effect of Temperature on Saturation Parameters and Stability of Alloyed GaN:Si Samples. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 125–130. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-125-130 EDN DBKCRY

1. Введение. Галлий нитрид (GaN) является важным полупроводниковым материалом, используемым в различных электронных и оптоэлектронных устройствах [1]. Легирование GaN кремнием (Si) позволяет улучшить его электрические свойства и стабильность [2]. В данной статье мы рассмотрим влияние температуры на параметры насыщения и стабильность легированных образцов GaN:Si.

2. Теоретическая основа. Параметры насыщения в полупроводниках определяются концентрацией носителей заряда и их подвижностью [3, 4]. Для этого необходима также информация о термодинамических параметрах GaN. На рис. 1 представлена свободная энергия Гиббса для галлия нитрида.

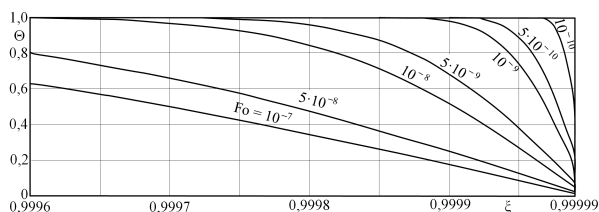


Рис. 1. Свободная энергия Гиббса для GaN в соответствии с данными [5]

Fig. 1. Gibbs free energy for GaN according to [5]

Из курса термодинамики известно, что фаза с минимальной свободной энергией Гиббса является стабильной и смещается в направлении более высоких температур при увеличении давления.

На рис. 2 показано равновесное давление N_2 для галлия нитрида [5]. Пунктирные линии показывают максимальное давление и температуру в газовой системе, использованной в этом исследовании.

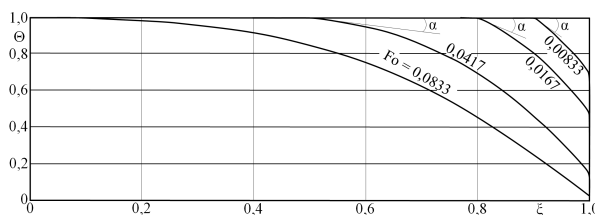


Рис. 2. Температурная зависимость равновесного давления для GaN (согласно [5])

Fig. 2. Temperature dependence of the equilibrium pressure for GaN (according to [5])

На рис. 3 показана линия ликвидуса для системы Ga-GaN, рассчитанная в приближении идеального равновесия. Данные позволяют сделать вывод, что подходящие условия температуры и давления для выращивания монокристаллов из раствора азота в жидком металле могут быть достигнуты для получения GaN только для высоких давлений.

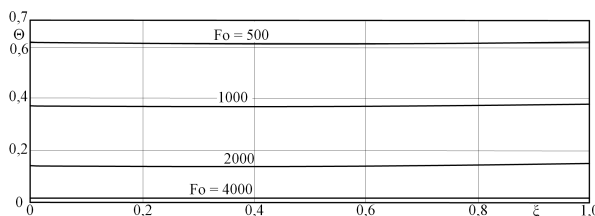


Рис. 3. Температурная зависимость концентрации примеси (ликвидус) для системы Ga-GaN (согласно [5])

Fig. 3. Temperature dependence of impurity concentration (liquidus) for the Ga-GaN system according to [5])

На рис. 4 показан солидус для системы Ga-GaN. Солидус был рассчитан для приближения идеального равновесия.

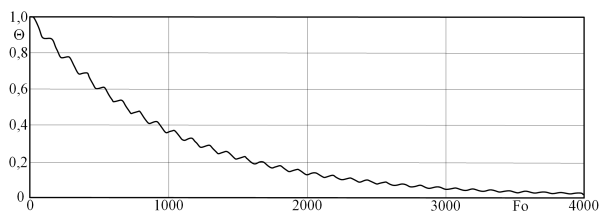


Рис. 4. Температурная зависимость концентрации примеси (солидус) для системы Ga-GaN (согласно [5])

Fig. 4. Temperature dependence of impurity concentration (solidus) for the Ga-GaN system according to [5])

Для расчета концентрации носителей заряда системы GaN:Si можно использовать следующее уравнение [6, 7, 8]:

$$n = N_D - N_A,$$

где N_D – концентрация доноров, N_A – концентрация акцепторов. Концентрация носителей заряда в полупроводниках, таких как легированные образцы GaN:Si, определяется разностью между концентрацией доноров и акцепторов. Подробнее разберем это уравнение.

1. Доноры N_D – это атомы, которые добавляются в полупроводник и обеспечивают дополнительные электроны. В случае GaN:Si атомы кремния (Si) выступают в роли доноров, так как они имеют 4 валентных электрона и могут отдать один электрон, создавая свободный носитель заряда.

2. Акцепторы N_A – это атомы, которые могут принимать электроны, создавая «дыры» (положительные носители заряда). В GaN акцепторами могут быть, например, атомы магния (Mg), которые имеют 3 валентных электрона и могут принимать электроны из валентной зоны.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Положительное значение n приобретает, если $N_D > N_A$, тогда в полупроводнике будет избыток электронов, и он будет вести себя как n -тип полупроводника. Это означает, что легирование Si создает больше свободных электронов, чем акцепторы могут «поглотить».

2. Отрицательное значение n приобретает, если $N_D > N_A$, тогда в полупроводнике будет избыток дырок, и он будет вести себя как p -тип полупроводника. Это происходит, когда акцепторы преобладают над донорами.

3. Если $N_D = N_A$, то концентрация носителей заряда будет равна нулю, и полупроводник будет нейтральным.

Подвижность носителей заряда в полупроводниках [9, 10, 11, 12], таких как легированные образцы GaN:Si, является важным параметром, который влияет на их электрические свойства. Рассмотрим формулу подвижности более подробно:

$$\mu = \mu_0 \cdot \left(\frac{T_0}{T} \right)^\alpha$$

где μ – подвижность носителей заряда при температуре T , μ_0 – подвижность носителей заряда при эталонной температуре T_0 (значение подвижности, измеренное или рассчитанное при определенной температуре, обычно при комнатной температуре, например, 300 К), T – температура, при которой измеряется подвижность носителей, температура может варьироваться в зависимости от условий эксперимента или применения, α – коэффициент, зависящий от материала. Этот коэффициент определяет, как сильно подвижность зависит от температуры. Для различных полупроводников параметр α может принимать разные значения в зависимости от материала.

Это уравнение можно трактовать следующим образом.

1. При увеличении температуры подвижность носителей, как правило, уменьшается. Это связано с тем, что при более высоких температурах увеличивается количество тепловых колебаний решетки, что приводит к большему количеству столкновений носителей заряда с атомами решетки. В результате носители теряют свою подвижность.

2. Коэффициент α может варьироваться в зависимости от типа полупроводника и его легирования. Например, для некоторых полупроводников α может быть близким к 1, что указывает на линейную зависимость подвижности от температуры, в то время как для других материалов α может быть меньше или больше 1, что указывает на более сложные зависимости.

Стабильность легированных образцов GaN:Si зависит от термической и химической устойчивости [13, 14, 15]. При повышении температуры могут происходить процессы диффузии и рекомбинации, что влияет на электрические свойства.

3. Экспериментальная часть. Для исследования были использованы образцы GaN, легированные кремнием, с различными концентрациями легирующих примесей (рис. 5). Измерения проводились при температурах от 300 К до 800 К.

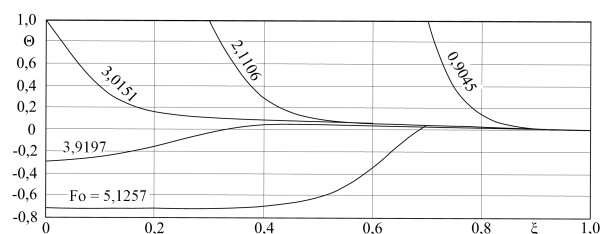


Рис. 5. Микрофотография структуры порошка GaN, отожженного в атмосфере N_2-H_2 под давлением 1 ГПа при температуре 1473 К, полученная с помощью СЭМ. Время отжига составляло 5 часов

Fig. 5. EM micrograph of the structure of GaN powder annealed in N_2-H_2 atmosphere under 1 GPa pressure at 1473 K. The annealing time was 5 hours

Были сделаны следующие вычисления:

1. Концентрация носителей:

Предположим, что в образце GaN:Si:

- Концентрация доноров $N_D = 10^{18}$, $см^{-3}$;
- Концентрация акцепторов $N_A = 5 \cdot 10^{17}$, $см^{-3}$.

Тогда концентрация носителей заряда будет ($см^{-3}$):

$$n = N_D - N_A = 10^{18} - 5 \cdot 10^{17} = 5 \cdot 10^{17}.$$

Это означает, что в образце имеется избыток свободных электронов, и он будет вести себя как n -тип полупроводника.

Таким образом, понимание концентрации носителей заряда в легированных образцах GaN:Si является ключевым для оценки их электрических свойств и стабильности при различных температурах, что подтверждается литературными данными [16, 17]. Изменения в концентрации доноров и акцепторов могут значительно влиять на проводимость и другие параметры полупроводниковых материалов.

2. Подвижность:

Зная концентрацию, определим подвижность ($\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$), полагая, что $\mu_0 = 1500, \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ и $\alpha = 1.5$:

$$\mu_{300} = 1500 \cdot \left(\frac{300}{300} \right)^{1.5} = 1500,$$

$$\mu_{600} = 1500 \cdot \left(\frac{300}{600} \right)^{1.5} \approx 530.33.$$

Пусть для GaN:Si при $T_0 = 300 \text{ К}$, подвижность ($\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$), учитывая, что $\mu_0 = 1500, \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, $\alpha = 1.5$, тогда подвижность при температуре $T = 150 \text{ К}$:

$$\mu = 1500 \cdot \left(\frac{300}{150} \right)^{1.5} \approx 4242.$$

3. Стабильность:

Для оценки стабильности можно использовать коэффициент диффузии D , который зависит от температуры [18, 19]:

$$D = D_0 \cdot \exp - \frac{E_a}{kT},$$

где D_0 – предэкспоненциальный множитель, E_a – энергия активации, k – постоянная Больцмана.

4. Заключение. Из полученных данных видно, что с увеличением температуры концентрация носителей заряда остается стабильной, однако подвижность значительно снижается. Это может быть связано с увеличением тепловых колебаний решетки, что приводит к большему количеству столкновений носителей с дефектами.

Стабильность образцов также ухудшается при повышении температуры, что подтверждается увеличением коэффициента диффузии. Это указывает на то, что при высоких температурах легированные образцы GaN:Si могут терять свои электрические свойства.

Таким образом, в данной статье было исследовано влияние температуры на параметры насыщения и стабильность легированных образцов GaN:Si. Полученные результаты показывают, что с увеличением температуры подвижность носителей заряда снижается, а стабильность образцов ухудшается. Эти данные могут быть полезны для дальнейших исследований и разработки устройств на основе GaN:Si.

Список литературы

1. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука; 1978. 619 с.
2. Алешкин В.Я., Бурдейный Д.И. Временная динамика примесной фотопроводимости в $n\text{-GaAs}$ и $n\text{-InP}$. *Физика и техника полупроводников*. 2021;56;3:883–887.
3. Гусев А.В., Лебедев В.Н. Полупроводниковые материалы и их применение в электронике. М.: Энергия; 1985. 320 с.
4. Баранов А.Н., Костюков В.Н. Физические основы полупроводниковой электроники. М.: Радио и связь; 2002. 480 с.
5. Porowski S., Grzegory I. Thermodynamical properties of III–V nitrides and crystal growth of GaN at high N_2 pressure. *Journal of Crystal Growth*. 1997;178;№1-2:174–188.
6. Ларионов А.В., Федоров В.П. Основы физики полупроводников. М.: Высшая школа; 2008. 368 с.
7. Михайлов А.И., Сорокин Б.А. Полупроводниковые приборы. М.: Энергия; 1984. 256 с.
8. Петров В.Н., Сидоров И.В. Современные технологии в полупроводниковой электронике. М.: Научный мир; 2010. 512 с.
9. Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука; 1979. 416 с.
10. Сигов А.С., Шука А.А. Нанoeлектроника. М.: Издательство Юрайт; 2019. 297 с.
11. Дорофеев С.Г., Кононов Н.Н., Бубенов С.С. Прыжковая проводимость Мотта и Эфроса-Шкловского в пленках из наночастиц Si, легированных фосфором и бором. *Физика и техника полупроводников*. 2022;56;2:204–212.
12. Грушко Н.С., Логинова Е.А., Потанахина Л.Н. Подвижность и механизмы рассеяния в структурах на основе InGaN *Известия вузов. Сер. Матер. электронная техника*. 2006;№1:68–72.

13. Марков Л.К., Смирнова И.П., Павлюченко А.С., Кукушкин М.В., Васильева Е.Д., Черняков А.Е., Усиков А.С. Сравнение свойств светодиодных кристаллов AlGaInN вертикальной и флип-чип конструкции с использованием кремния в качестве платы-носителя. *Физика и техника полупроводников*. 2013;47(3):386–391.
14. Tanaka T., Takano K., Mishima T., Kohji Y., Otoki Y., Meguro T. GaN epitaxial wafers for high breakdown voltage RF transistor applications *Hitachi Cable Review*. 2005;24:11–14.
15. Мынбаева М.Г., Головатенко А.А., Печников А.И., Лаврентьев А.А., Мынбаев К.Д., Николаев В.И. Особенности хлорид-гидридной эпитаксии нитридных материалов на подложке кремния. *Физика и техника полупроводников*. 2014;48(11):1573–1577.
16. Волчѣк В.С., Стемпицкий В.Р. Оптимизация конструкции AlGaIn/GaN HEMT, обеспечивающая снижение влияния эффекта саморазогрева с использованием теплоотводящих элементов на основе графена *Нитриды галлия, индия и алюминия – структуры и приборы : 11-я Всерос. конф.*, Москва, 1–3 февр. 2017 г. : тез. докл. / Мос. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе Рос. акад. наук: 122–123.
17. Романов А.С., Филиппов С.В. Полупроводниковые наноструктуры: физика и технологии. М.: Физматлит; 2015. 400 с.
18. Gangwani P., Pandey S., Haldar S., Gupta M., Gupta R.S. Polarization dependent analysis of AlGaIn/GaN HEMT for high power applications. *Solid-state electronics*. 2007;51;№1:130–135.
19. Mavroidis C., Harris J.J., Kappers M.J., Humphreys C.J., Bougrioua Z. Detailed interpretation of electron transport in n-GaN *Journal of applied physics*. 2003; 93; № 11 : 9095–9103.
20. Porowski S., Grzegory I. Thermodynamical properties of III–V nitrides and crystal growth of GaN at high N₂ pressure. *Journal of Crystal Growth*. 1997; 178;№1-2:174–188.

References

1. Anselm A.I. Introduction to the Theory of Semiconductors. Moscow: Science; 1978. 619 с. (In Russ.)
2. Aleshkin VYa., Burdeyny DI. Time dynamics of impurity photoconductivity in n-GaAs and n-InP *Physics and technology of semiconductors*. 2021;56;3:883–887. (In Russ.)
3. Gusev AV., Lebedev VN. Semiconductor materials and their application in electronics. Moscow: Energy; 1985. 320 с. (In Russ.)
4. Baranov AN., Kostyukov VN. Physical foundations of semiconductor electronics. Moscow: Radio and communication; 2002. 480 с. (In Russ.)
5. Porowski S., Grzegory I. Thermodynamical properties of III–V nitrides and crystal growth of GaN at high N₂ pressure. *Journal of Crystal Growth*. 1997;178;№1-2:174–188.
6. Larionov AV., Fedorov VP. Fundamentals of Semiconductor Physics. Moscow: Higher School; 2008. 368 с. (In Russ.)
7. Mikhailov AI., Sorokin BA. Semiconductor devices. M.: Energy; 1984. 256 с. (In Russ.)
8. Petrov VN., Sidorov IV. Modern technologies in semiconductor electronics. Moscow: Scientific world; 2010. 512 с. (In Russ.)
9. Shklovsky BI., Efros AL. Electronic properties of doped semiconductors. Moscow: Science; 1979. 416 с. (In Russ.)
10. Sigov AS., Shchuka AA. Nanoelectronics. M.: Yurayt Publishing House; 2019. 297 с. (In Russ.)
11. Dorofeev S.G., Kononov N.N., Bubenov S.S. Mott and Efros-Shklovsky hopping conductivity in films of Si nanoparticles doped with phosphorus and boron *Physics and technology of semiconductors*. 2022;56;2:204–212. (In Russ.)
12. Grushko NS., Loginova EA., Potanakhina L.N. Mobility and scattering mechanisms in InGaIn-based structures *News of universities. Series. Materials of electronic engineering*. 2006;№1:68– 72. (In Russ.)
13. Markov L.K., Smirnova I.P., Pavlyuchenko A.S., Kukushkin M.V., Vasilyeva E.D., Chernyakov AE., Usikov AS. Comparison of the properties of AlGaInN LED crystals of vertical and flip-chip design using silicon as a carrier board. *Physics and technology of semiconductors*. 2013;47(3):386–391. (In Russ.)
14. Tanaka T., Takano K., Mishima T., Kohji Y., Otoki Y., Meguro T. GaN epitaxial wafers for high breakdown voltage RF transistor applications *Hitachi Cable Review*. 2005;24:11–14.
15. Mynbaeva MG., Golovatenko AA., Pechnikov AI., Lavrentiev AA., Mynbaev KD., Nikolaev VI. Features of chloride-hydride epitaxy of nitride materials on a silicon substrate. *Physics and Engineering of Semiconductors*. 2014;48(11):1573–1577. (In Russ.)
16. Volchek VS., Stempitsky VR. Optimization of the AlGaIn/GaN HEMT design, providing a decrease in the influence of the self-heating effect using heat-sinking elements based on graphene *Gallium, indium and aluminum nitrides - structures and devices: 11th All-Russian Conf.*, Moscow, February 1-3, 2017: report summary / Lomonosov Moscow State University, Ioffe Phys.-Tech. Institute of Russian Academy of Sciences : 122–123. (In Russ.)
17. Romanov AS., Filippov SV. Semiconductor nanostructures: physics and technology. Moscow: Fizmatlit; 2015. 400 с. (In Russ.)
18. Mavroidis C., Harris JJ., Kappers MJ., Humphreys CJ., Bougrioua Z. Detailed interpretation of electron transport in n-GaN *Journal of applied physics*. 2003;93;№ 11:9095–9103.

19. Gangwani P., Pandey S., Halder S., Gupta M., Gupta R.S. Polarization dependent analysis of AlGaIn/GaN HEMT for high power applications. *Solid-state electronics*. 2007;51;№1:130–135.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.04.2025

Received April 1, 2025

Поступила после рецензирования 20.05.2025

Revised May 20, 2025

Принята к публикации 26.05.2025

Accepted May 26, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Сохань Кристина Сергеевна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kristina S. Sokhan – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Исследование волнового теплообмена в тонких металлических пленках на основе гиперболического уравнения

Пашин А. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Н. В. Малаем)
Самарский государственный технический университет,
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244
pashinalexey@yandex.ru

Аннотация. Выполнены исследования точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности третьего порядка, найденного с учетом релаксации теплового потока и градиента температуры, потока второго порядка в формуле закона Фурье. Исследования показали, что в зависимости от величин коэффициентов релаксации (временных и пространственных) и толщины пластины могут наблюдаться качественно различные варианты изменения температуры. И, в частности, при толщинах, существенно больших длины свободного пробега микрочастиц, наблюдается диффузионная передача теплоты с временной задержкой установления граничного условия 1-го рода. При сопоставимых с длиной свободного пробега микрочастиц толщинах (наноразмерная толщина) диффузионный теплообмен заменяется на волновой, который в зависимости от величин коэффициентов релаксации может протекать как в режиме баллистического переноса теплоты, так и в режиме колебаний с корреляцией в области отрицательных значений температур. Рассмотрены условия, приводящие к каждому из вариантов волнового переноса теплоты.

Ключевые слова: локально-неравновесный теплообмен, модифицированная формула закона Фурье, гиперболическое уравнение, точное решение, диффузионный теплообмен, волновой теплообмен, время релаксации, длина свободного пробега микрочастиц, тепловой поток второго порядка

Для цитирования: Пашин А. В. 2025. Исследование волнового теплообмена в тонких металлических пленках на основе гиперболического уравнения. *Прикладная математика & Физика*, 57(2): 131–141.
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-131-141 EDN DEKMWQ

Original Research

Study of Wave Heat Transfer in Thin Metal Films Based on the Hyperbolic Equation

Alexey V. Pashin 

(Article submitted by a member of the editorial board N. V. Malay)
Samara State Technical University,
244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia
pashinalexey@yandex.ru

Abstract. Research has been conducted on the exact analytical solution of the third-order hyperbolic heat conduction equation, derived with consideration of heat flux relaxation, temperature gradient, and the second-order flux term in the Fourier law formulation. The studies have shown that, depending on the values of the relaxation coefficients (temporal and spatial) and the thickness of the plate, qualitatively different variants of temperature change can be observed. And, in particular, at thicknesses significantly greater than the mean free path of microparticles, diffusion heat transfer with a time delay in establishing the boundary condition of the 1st kind is observed. At thicknesses comparable to the mean free path of microparticles (nanoscale thickness), diffusion heat exchange is replaced by wave heat exchange, which, depending on the values of the relaxation coefficients, can occur both in the ballistic heat transfer mode and in the oscillation mode with correlation in the region of negative temperature values. The conditions leading to each of the wave heat transfer variants are considered.

Keywords: Locally-Nonequilibrium Heat Transfer, Modified Formula of Fourier's Law, Hyperbolic Equation, Exact Solution, Diffusion Heat Transfer, Wave Heat Transfer, Relaxation Time, Mean Free Path of Microparticles, Second-order Heat Flow

For citation: Pashin A. V. 2025. Study of Wave Heat Transfer in Thin Metal Films Based on the Hyperbolic Equation. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 131–141. (in Russian) DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-131-141 EDN DEKMWQ

1. Введение. При допущении локального термодинамического равновесия и сплошности среды находятся параболические уравнения тепломассопереноса, решения которых описывают бесконечную скорость передачи теплоты, в связи с чем, снижается круг задач, их применения. В частности, эти решения неприменимы ко всем быстротекущим процессам, время протекания которых сопоставимо со временем свободного пробега микрочастиц, а также процессы тепломассопереноса для систем, геометрические размеры которых сопоставимы с длиной свободного пробега микрочастиц. Параболические уравнения, выведенные без учёта пространственно-временной нелокальности, являются

локальными и по пространству, и по времени. Дифференциальные уравнения, выведенные с учётом пространственно-временной нелокальности, включают длину и время свободного пробега микрочастиц. Решению проблемы получения таких уравнений посвящены работы ряда авторов. В них рассматриваются следующие теории локально-неравновесных систем: на основе понятия тепловой памяти [1, 2]; с использованием молекулярно-кинетических методов [3, 4, 5, 6, 7]; на основе уравнения Больцмана [8, 9]; при использовании теории случайных блужданий и др. В ряде работ понятие температуры, определяемое лишь для равновесных систем, заменяется на другие понятия. Например, в работе [10] вводится понятие «термодинамической» температуры. Её отклонение от абсолютной температуры является характеристикой степени нелокальности системы. В молекулярно-кинетических методах используется понятие «кинетической» температуры, которая находится из локально-неравновесной функции распределения с учётом средней кинетической энергии микрочастиц [11, 12].

Наиболее известной теорией, не использующей принцип локального термодинамического равновесия, является теория, называемая в [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] как «расширенная необратимая термодинамика» (РНТ). Для теплового потока она приводит к дифференциальному уравнению Максвелла – Каттанео

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (1)$$

где q – тепловой поток, Bm/m^2 ; T – температура, K ; t – время, s ; x – координата, m ; λ – коэффициент теплопроводности, $Bm/(m \cdot K)$; τ_1 – время релаксации, s .

Из (1) следует, что тепловой поток не определяется только градиентом температуры, как в классической формуле закона Фурье, а является решением эволюционного уравнения, описывающего процесс его релаксации к локально-равновесному значению.

Формула (1) учитывает лишь временную нелокальность, исключая пространственно-нелокальные эффекты. Для их учёта в РНТ вводится дополнительное слагаемое [21]

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где l – характерный масштаб нелокальности (длина свободного пробега микрочастиц). Величина $\partial q / \partial x$ называется потоком теплового потока (потоком второго порядка). Она вводится с целью учёта пространственно-нелокальных эффектов. Соотношение (4) можно представить в виде

$$-q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right). \quad (3)$$

Из (5) следует, что отклонение нестационарного теплового потока q от стационарного $\lambda \partial T / \partial x$ оценивается скоростью изменения потока во времени $\tau_1 \partial q / \partial t$ и скоростью изменения потока $\partial q / \partial x$ по пространственной переменной x , то есть $l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)$.

В эволюционном уравнении для теплового потока можно также учесть и производные более высокого порядка. Например, учитывая не только скорость изменения теплового потока во времени, но и его ускорение, а также, учитывая скорость изменения во времени градиента температуры $\partial T / \partial x$, получаем [21]

$$-q - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = (\tau_1 + \tau_2) \frac{\partial q}{\partial t} + \tau_1 \tau_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + l^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где τ_1, τ_2 – времена релаксации, характеризующие реакцию среды на изменение теплового потока.

Известно, что вывод системы из состояния равновесия вызывает её противодействие такому изменению, степень которого оценивается временами релаксации τ_1, τ_2 и характерным масштабом пространственной нелокальности l . При $\partial T / \partial x = 0$ теплоперенос невозможен и, следовательно, $q = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = l = 0$.

Для вывода локально-неравновесных уравнений теплопроводности с учётом формул (1), (4), (3) будем использовать уравнение теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \quad (5)$$

где c – теплоёмкость, $Dж/(кг \cdot K)$; ρ – плотность, $кг/м^3$.

Подставляя (1) в (7), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ – температуропроводность.

Уравнение (8) является гиперболическим. Оно описывает как диссипативную передачу теплоты (при $\delta \gg l$, где δ – толщина пластины), так и волновую (при $\delta \sim l$).

Подставив (4) в (7), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + l^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (7)$$

Смешанная производная переводит гиперболическое уравнение (6) в параболическое. Появление этой производной связано с учётом характерного масштаба пространственной нелокальности в уравнении для теплового потока (2). Применительно к уравнению (6) получено точное аналитическое решение, исследование которого показало наличие конечной скорости распространения теплоты со скачком температуры на фронте тепловой волны, отделяющем возмущенную и невозмущенную (где сохраняется начальная температура) части среды [18, 22, 23, 24, 25, 26]. Появление скачка температуры свидетельствует о бесконечных тепловых потоках на фронте волны и о возникновении изотерм внутри тела, что объясняется неучётом пространственной нелокальности.

Исследования точных аналитических решений уравнения (9) показывают, что наличие нелокального слагаемого $l^2 \partial^3 T / (\partial x^2 \partial t)$ приводит к сглаживанию скачков температуры. Однако обнаруживается новый эффект, связанный с невозможностью мгновенного установления граничного условия первого рода. И, в частности, температура на границе постепенно возрастает от температуры T_0 , заданной начальным условием, до температуры $T_{\text{ст}}$, заданной граничным условием первого рода ($T_0 > T_{\text{ст}}$), в течение некоторого диапазона начального времени [23, 24, 25, 26]. Для сверхтонких наноплёнок, сопоставимых по толщине с длиной свободного пробега микрочастиц (молекул, атомов, электронов, ионов), уравнение (9) описывает баллистическую передачу теплоты, при которой градиент температуры по толщине пластины равен нулю. Следовательно, охлаждение пластины от некоторой начальной температуры T_0 до температуры $T_{\text{ст}}$ практически происходит при отсутствии перепада температуры по её толщине. В данном случае граничное условие первого рода не принимается во всем диапазоне времени нестационарного процесса, вплоть до установления стационарного режима. Исследования точных аналитических решений уравнений (8) и (9) показывают, что в баллистическом режиме теплообмена (для сверхтонких плёнок) решения уравнений (8) и (9) совпадают в случае, если величину температуры, получаемой из решения уравнения (8), принимать в виде квадрата амплитуды волновой функции.

Выражая величину теплового потока q из (3) и подставляя в уравнение теплового баланса (7), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_1 \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (a\tau_2 + l^2) \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}. \quad (8)$$

Найдем точное аналитическое решение уравнения (6) для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода. Краевые условия в данном случае имеют вид

$$T(x, 0) = T_0; \quad \partial T(x, 0) / \partial t = 0; \quad \partial^2 T(x, 0) / \partial t^2 = 0; \quad \partial T(0, t) / \partial x = 0; \quad T(\delta, t) = T_{\text{ст}}, \quad (9)$$

где T_0 – начальная температура, K ; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки, K ; δ – половина толщины пластины, m .

Обозначим

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad F_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad F_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad F_3 = \frac{l^2}{\delta^2}, \quad (10)$$

где Θ , ξ , Fo – безразмерные температура, координата, время (число Фурье); F_1 ,

F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; F_3 – безразмерный микромасштаб системы.

С учетом (10) задача (6), (9) будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \text{Fo}_3 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \text{Fo}^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}}; \quad (11)$$

$$(\text{Fo} > 0; 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^2} = 0; \quad (14)$$

$$\partial \Theta(0, \text{Fo}) / \partial \xi = 0; \quad (15)$$

$$\Theta(1, \text{Fo}) = 0, \quad (16)$$

где $\text{Fo}_1 = F_1 + F_2$; $\text{Fo}_2 = F_2 + F_3$; $\text{Fo}_3 = F_1 \cdot F_2$.

Начальным условием (12) задается температура во всем теле в начальный момент времени. Начальные условия (13), (14) означают отсутствие скорости изменения температуры и её ускорения в начальный момент времени соответственно. Граничным условием (15) задается отсутствие теплообмена на границе $\xi = 0$. Граничным условием (16) задается нулевая температура в точке $\xi = 1$.

Следуя методу Фурье, решение задачи (11)–(16) находится в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \phi(Fo)\psi(\xi), \quad (17)$$

где $\phi(Fo)$ и $\psi(\xi)$ – соответственно функции времени Fo и пространственной переменной ξ .

Подставляя (17) в (11), находим

$$\frac{\phi' + Fo_1\phi'' + Fo_3\phi'''}{\phi + Fo_2\phi'} = \frac{\psi''}{\psi}, \quad (18)$$

где $\phi' = d\phi/dFo$; $\phi'' = d^2\phi/dFo^2$; $\phi''' = d^3\phi/dFo^3$; $\psi'' = d^2\psi/d\xi^2$.

Приравняв правую и левую части соотношения (18) некоторой постоянной ν_k , относительно $\phi(Fo)$ и $\psi(\xi)$ получаем следующие уравнения:

$$\phi' + Fo_1\phi'' + Fo_3\phi''' + (\phi + Fo_2\phi')\nu = 0; \quad (19)$$

$$\psi'' + \nu\psi = 0. \quad (20)$$

где ν – некоторая постоянная.

Подставляя (17) в (15), (16), находим граничные условия для функции $\psi(\xi)$

$$\psi'(0) = 0; \quad (21)$$

$$\psi(1) = 0. \quad (22)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (20)–(22) разыскивается в виде

$$\psi(\xi) = \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right). \quad (23)$$

Соотношение (23) удовлетворяет условиям (21), (22). Подставляя (23) в (20), получаем следующую формулу для определения собственных чисел краевой задачи (20)–(22)

$$\nu_k = r^2\pi^2/4, \quad (r = 2k - 1; k = \overline{1, \infty}). \quad (24)$$

Уравнение (19) может быть представлено в форме следующего характеристического уравнения

$$Fo_3z^3 + Fo_1z^2 + z + (1 + Fo_2z)\nu_k = 0. \quad (25)$$

Три корня уравнения (25) имеют вид

$$z_j = -2\sqrt{Q} \cos\left(\phi + \frac{2\pi j}{3}\right) - \frac{Fo_1}{3Fo_3},$$

где $j = 1, 2, 3$; $\phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$; $Q = \left(\frac{Fo_1}{3Fo_3}\right)^2 - \frac{1+\nu_k Fo_2}{3Fo_3}$; $R = \left(\frac{Fo_1}{3Fo_3}\right)^3 - \frac{(1+\nu_k Fo_2)Fo_1}{6Fo_3^2} + \frac{\nu_k}{2Fo_3}$.

После определения z_1, z_2, z_3 решение уравнения (19) будет

$$\phi(Fo) = C_1 \exp(z_1 Fo) + C_2 \exp(z_2 Fo) + C_3 \exp(z_3 Fo), \quad (26)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Подставляя частные решения (23), (26) в (17) и определяя их сумму, получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{1k} \exp^{z_{1k} Fo} + C_{2k} \exp^{z_{2k} Fo} + C_{3k} \exp^{z_{3k} Fo} \right) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right), \quad (r = 2k - 1). \quad (27)$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} используются начальные условия (12)–(14). Составляя их невязки и требуя ортогональности невязок к собственным функциям $\cos(j\pi\xi/2)$, находим

$$\begin{cases} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = \int_0^1 \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi; \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (z_{1k} C_{1k} + z_{2k} C_{2k} + z_{3k} C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = 0; \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (z_{1k}^2 C_{1k} + z_{2k}^2 C_{2k} + z_{3k}^2 C_{3k}) \cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right) \cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right) d\xi = 0; \end{cases} \quad (28)$$

$$(r = j = 2k - 1).$$

Вследствие ортогональности косинусов, соотношения (28) относительно неизвестных C_{1k} , C_{2k} , C_{3k} приводятся к системе трех алгебраических уравнений. Её решение

$$C_{1k} = \frac{4\eta z_{3k} z_{2k}}{(-2\mu\eta z_{3k} - r\pi z_{3k} + 2\mu\eta z_{1k} + r\pi z_{1k})(z_{1k} - z_{2k})};$$

$$C_{2k} = \frac{-4\eta z_{3k} z_{1k}}{z_{3k}(z_{1k} - z_{2k})(2\mu\eta z_{2k} + r\pi z_{2k} - 2\mu\eta) - r\pi z_{3k}};$$

$$C_{3k} = \frac{4\eta z_{1k} z_{2k}}{-2\mu\eta z_{3k} z_{1k} - r\pi z_{3k} + 2\mu\eta z_{3k}^2 + r\pi z_{3k}^2 - 2z_{2k} z_{3k} \mu\eta - r\pi z_{2k} z_{3k} + 2\mu\eta z_{1k} z_{2k} + r\pi z_{1k} z_{2k}}.$$

где $\mu = \cos((2k - 1)\pi/2)$; $\eta = \sin((2k - 1)\pi/2)$.

Результаты расчетов по формуле (27) даны на рис. 1–9, из которых следует, что при прочих равных условиях существенное влияние на температурное поле оказывает толщина пластины. Показано, что при переходе к пластинам, толщина которых соизмерима с длиной свободного пробега микрочастиц, происходит качественное изменение режима теплообмена. При этом существует некоторая толщина, отделяющая диффузионные режимы от волновых. Рассмотрим результаты расчетов для толщины пластины $\delta = 10^{-3}$ м (при $l = 10^{-10}$ м) (см. рис. 1).

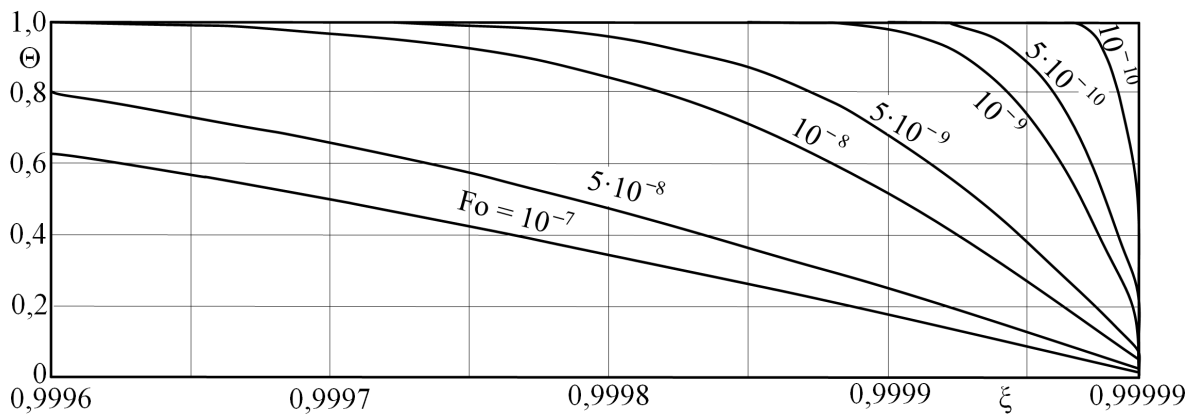


Рис. 1. Распределение температуры в диапазоне координаты $0.9996 \leq \xi \leq 1.0$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-3} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2 \cdot 10^{-11}$; $\text{Fo}_2 = 10^{-11}$; $\text{Fo}_3 = 10^{-22}$
 Fig. 1. Temperature distribution in the coordinate range $0.9996 \leq \xi \leq 1.0$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-3} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2 \cdot 10^{-11}$; $\text{Fo}_2 = 10^{-11}$; $\text{Fo}_3 = 10^{-22}$

Их анализ позволяет заключить о временной задержке принятия граничного условия первого рода (16) в окрестности точки ξ . Так, при точном выполнении условия (16) непосредственно в точке $\xi = 1$, что следует из решения (27), в бесконечно малой её окрестности ($0.99999 \leq \xi \leq 1.0$) в диапазоне начального времени ($0 \leq \text{Fo} \leq 0.081$) наблюдается скачок температуры, что свидетельствует о сопротивлении, оказываемом средой процессу изменения её температурного состояния (рис. 1). Например, в точке $\xi = 0.99999$ для $\text{Fo} = 10^{-10}$; $5 \cdot 10^{-10}$; 10^{-9} ; $5 \cdot 10^{-9}$ имеют место температуры $\Theta = 0.59$; 0.28 ; 0.18 ; 0.09 . Температура $\Theta = 0$ устанавливается в этой точке лишь при $\text{Fo} \approx 0.081$. Отметим, что для всех $\text{Fo} > 10^{-8}$ полученное решение практически совпадает с точным аналитическим решением параболического уравнения теплопроводности [12]. Расхождение с точным решением параболического уравнения для $\text{Fo} < 10^{-8}$ свидетельствует о неадекватности этого решения при сверхмалых значениях временной и пространственной переменных, сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц. Таким образом, при толщинах $\delta \geq 10^{-3}$ при заданных временах релаксации τ_1 , τ_2 и длине свободного пробега микрочастиц l происходит диффузионная передача теплоты с задержкой установления граничного условия (16) в окрестности точки $\xi = 1.0$ и, как следствие, расхождение с решением параболического уравнения теплопроводности в области сверхмалых величин времени и пространства.

Расчеты при $\delta = 10^{-6}$ м ($l = 10^{-7}$ м) даны на рис. 2.

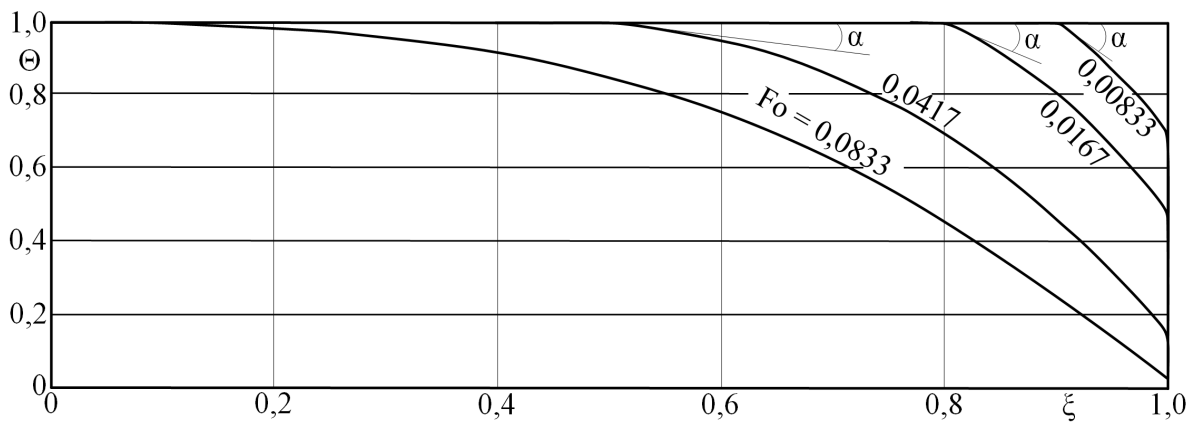


Рис. 2. Распределение температуры в диапазоне координаты.

$a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-6} \text{ м}$; $l = 10^{-7} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 1.25 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $Fo_1 = 0.025$; $Fo_2 = 0.0225$; $Fo_3 = 0.00015625$

Fig. 2. Temperature distribution in the coordinate range.

$a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-6} \text{ м}$; $l = 10^{-7} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 1.25 \cdot 10^{-8} \text{ с}$; $Fo_1 = 0.025$; $Fo_2 = 0.0225$; $Fo_3 = 0.00015625$

Из расчетов следует, что, как и в предыдущем случае, принятие граничного условия первого рода наблюдается в течение некоторого диапазона начального времени. Однако важным отличием является тот факт, что температурные кривые пересекают линию начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1.0$ под некоторым углом α , который уменьшается с увеличением времени и принимает величину $\alpha = 0$ при достижении фронтом тепловой волны точки $\xi = 0$. Температурная кривая в этой точке касательная к линии начальной температуры $\Theta(\xi, 0) = 1.0$. Этот факт объясняется выполнением в точке $\xi = 0$ условия симметрии вида (15). Наличие угла α свидетельствует о движении фронта тепловой волны, отделяющего прогретую и непрогретую части пластины. Существенным отличием от предыдущего случая является запаздывание во времени температуры в центре пластины ($\xi = 0$) по сравнению с решением классического параболического уравнения теплопроводности. Однако, начиная с $Fo \approx 4.55$, запаздывание переходит в опережение, что является свидетельством волнового характера изменения температуры, определяемой по формуле (27).

Волновое изменение температуры в еще большей степени проявляется при дальнейшем уменьшении толщины пластины (см. рис. 3, 4).

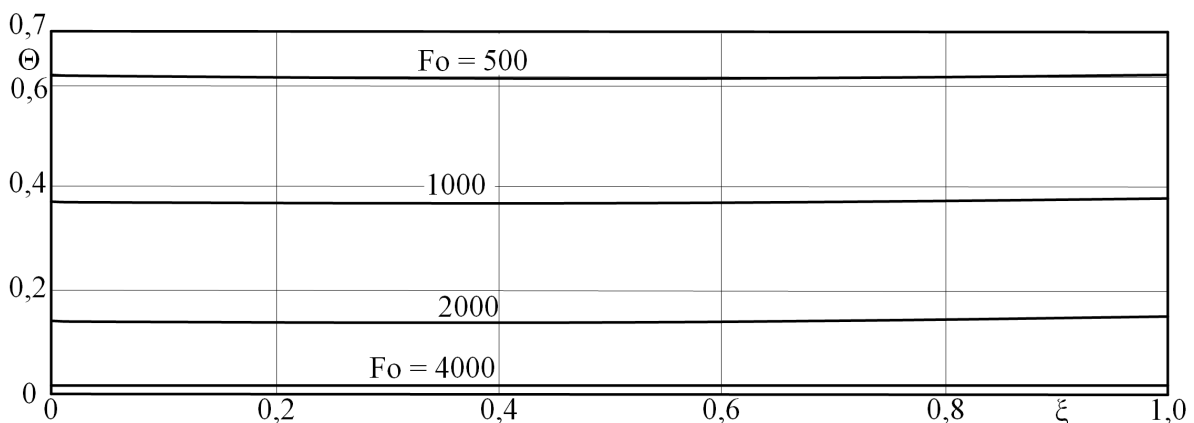


Рис. 3. Изменение температуры.

$a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 2000$; $Fo_2 = 1000$; $Fo_3 = 10^6$

Fig. 3. Temperature change. $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 2000$; $Fo_2 = 1000$; $Fo_3 = 10^6$

Так, например, при $\delta = 10^{-8} \text{ м}$ ($l = 10^{-10} \text{ м}$) теплообмен протекает при незначительных градиентах температуры в пределах толщины пластины (см. рис. 3) при периодическом (волновом) изменении температуры во времени в каждой точке пространства (см. рис. 4). При этом на оси симметрии ($\xi = 0$) кривая изменения температуры имеет изломы. Во всех других внутренних точках ($0 < \xi < 1$) происходит сглаживание изломов, что объясняется интерференцией прямых и обратных волн.

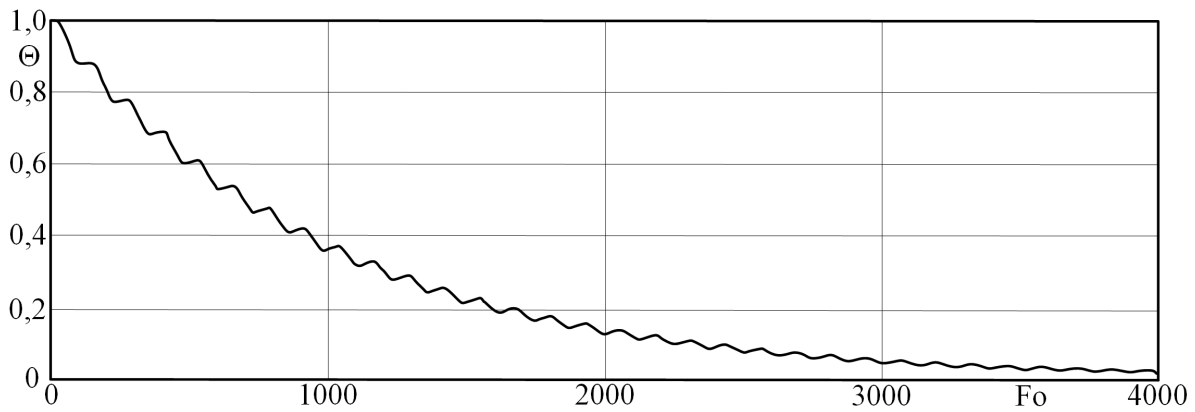


Рис. 4. Изменение температуры в центре пластины ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2000$; $\text{Fo}_2 = 1000$; $\text{Fo}_3 = 10^6$
 Fig. 4. Temperature change at the center of the plate ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-8} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 2000$; $\text{Fo}_2 = 1000$; $\text{Fo}_3 = 10^6$

Дальнейшее уменьшение толщины пластины приводит к качественному изменению распределения температуры. Результаты расчетов при $\delta = 10^{-9} \text{ м}$ ($l = 10^{-10} \text{ м}$) даны на рис. 5–7.

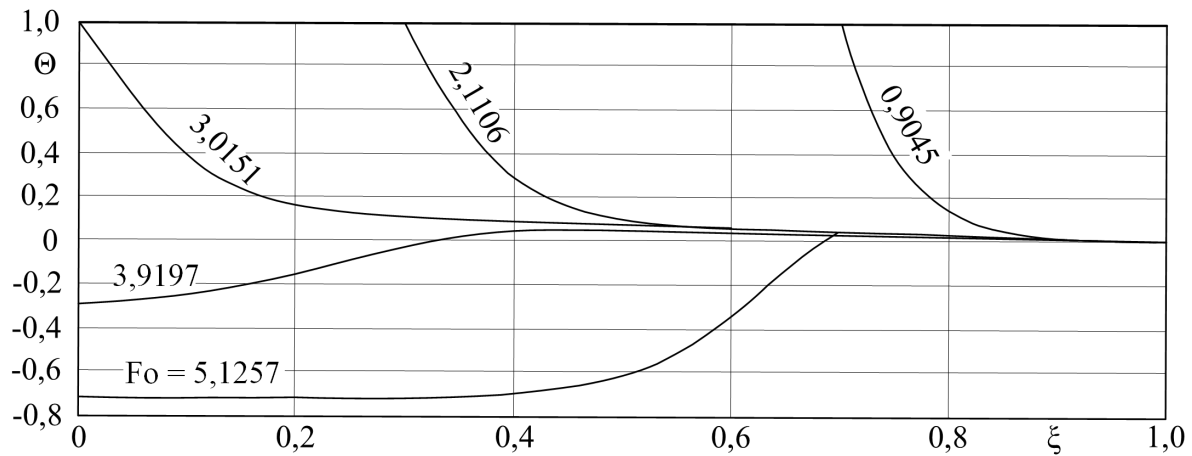


Рис. 5. Распределение температуры.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1.0$
 Fig. 5. Temperature distribution.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1.0$

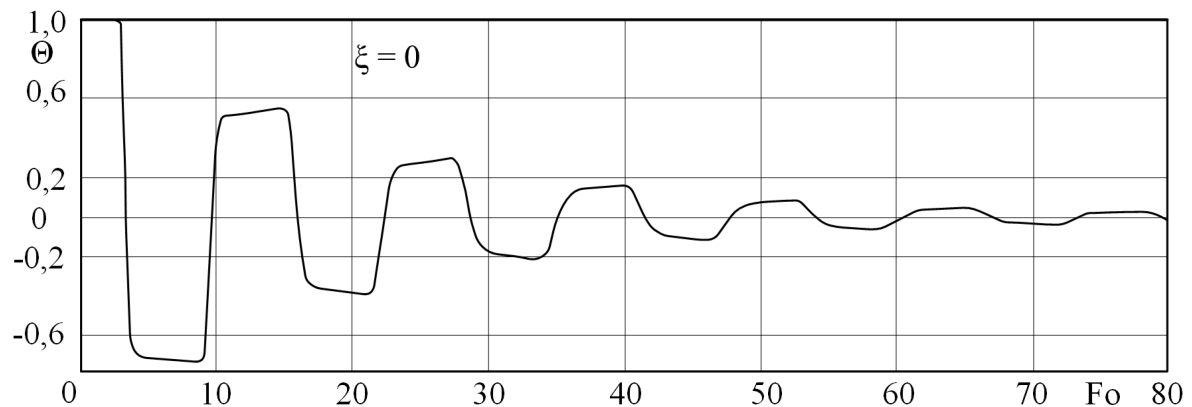


Рис. 6. Изменение температуры во времени в центре пластины ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1$
 Fig. 6. Temperature change over time at the center of the plate ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $\text{Fo}_1 = 10.1$; $\text{Fo}_2 = 0.11$; $\text{Fo}_3 = 1$

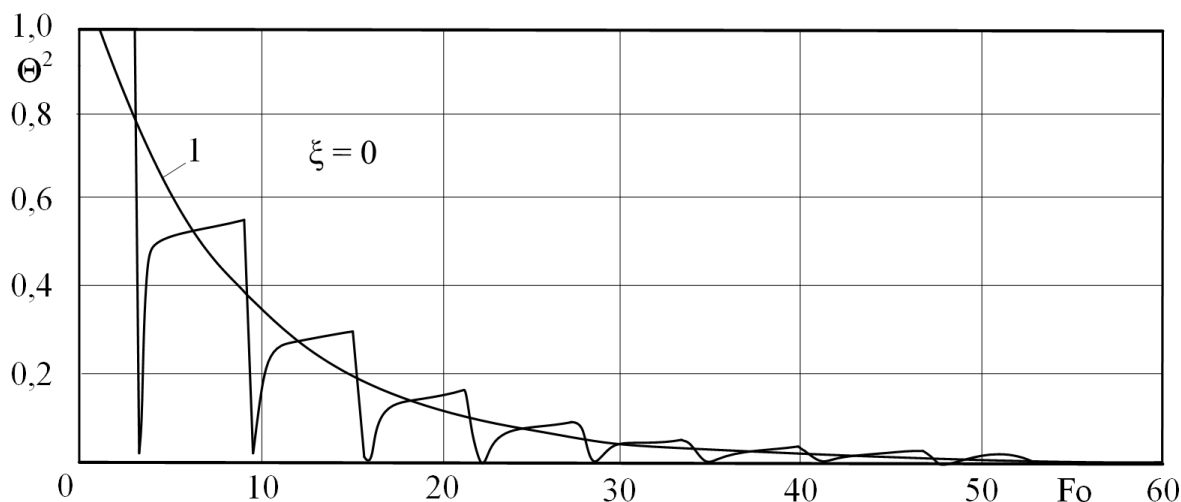


Рис. 7. Изменение квадрата амплитуды волновой функции в центре пластины ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $Fo_1 = 10.1$; $Fo_2 = 0.11$; $Fo_3 = 1$ – действительное изменение температуры

Fig. 7. Change in the square of the amplitude of the wave function at the center of the plate ($\xi = 0$).
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = 10^{-11} \text{ с}$; $\tau_2 = 10^{-13} \text{ с}$; $Fo_1 = 10.1$; $Fo_2 = 0.11$; $Fo_3 = 1$ – real temperature change

Из результатов расчетов следует, что изменение температуры в центре симметрии ($\xi = 0$) происходит по закономерности, приближающейся к гармонической, включающей как положительные, так и отрицательные значения температуры (рис. 5, 6). Классическое понятие температуры, как характеристики внутренней энергии некоторой совокупности частиц, в данном случае теряет смысл. Однако, если определить квадрат амплитуды волновой функции (Θ^2), то за действительное изменение температуры можно принять кривую 1 на рис. 7. Причиной такого распределения температуры является малая величина коэффициента $Fo_2 = 0.11$ (зависящего от значений τ_2 и l) по сравнению с коэффициентами $Fo_1 = 10.1$ и $Fo_3 = 1.0$. Столь малая его величина приводит к незначительному влиянию смешанной производной в уравнении (11), сглаживающей скачкообразное изменение температуры. В подтверждение этого факта был выполнен расчет для соизмеримых между собой коэффициентов $Fo_1 = 200000$ и $Fo_2 = 100000$, найденных при значениях $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$ ($l = 10^{-10} \text{ м}$). Результаты расчетов для данного варианта исходных данных представлены на рис. 8, 9.

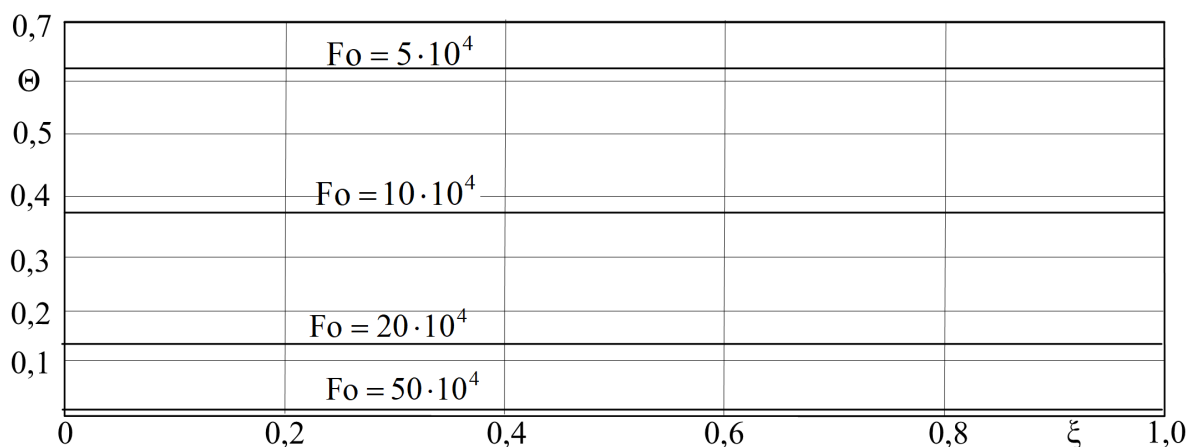


Рис. 8. Распределение температуры.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

Fig. 8. Temperature distribution.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-11} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

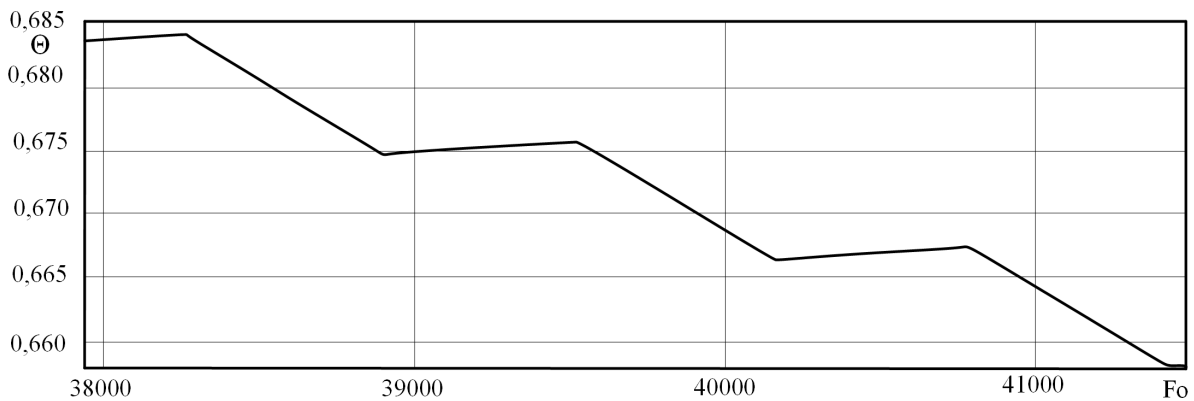


Рис. 9. Изменение температуры в центре пластины ($\xi = 0$) в диапазоне $38000 \leq Fo \leq 41500$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

Fig. 9. Temperature change at the center of the plate ($\xi = 0$) in the range $38000 \leq Fo \leq 41500$.
 $a = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\delta = 10^{-9} \text{ м}$; $l = 10^{-10} \text{ м}$; $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7} \text{ с}$; $Fo_1 = 200000$; $Fo_2 = 100000$; $Fo_3 = 10^{10}$

Из расчетов следует, что теплообмен протекает в виде периодически возникающих горизонтальных ступенек при незначительных градиентах температур по толщине пластины, что свидетельствует о диффузионно-баллистическом переносе теплоты. Обнаруженные в центре пластины изломы (рис. 9) ввиду интерференции прямых и обратных волн во всех внутренних ее точках ($0 < \xi < 1$) сглаживаются. Таким образом, при одной и той же толщине пластины δ в зависимости от величин коэффициентов релаксации τ_1 и τ_2 могут наблюдаться существенно различающиеся режимы теплообмена: от полностью волнового – при малых их значениях ($\tau_1 = 10^{-11}$, $\tau_2 = 10^{-13}$, см. рис. 5–7) до диффузионно-баллистического – при некоторых больших их значениях ($\tau_1 = \tau_2 = 10^{-7}$, см. рис. 8, 9).

Полученные результаты позволяют заключить, что уравнение (11) в зависимости от соотношения величин δ , τ_1 , τ_2 , l позволяет рассчитать большое число реальных случаев локально-неравновесного теплообмена с учетом пространственно-временной нелокальности. При этом большое влияние на теплообмен (при прочих равных условиях) оказывает толщина пластины и настолько, что при переходе к наноразмерным толщинам происходит качественное изменение процесса теплообмена с появлением волнового изменения температуры и баллистического переноса теплоты.

Заключение. Выполнены исследования точного аналитического решения уравнения теплопроводности, полученного с учетом нелокальности реальных физических процессов для пластины с симметричными граничными условиями первого рода, из анализа которых следует, что для некоторых значений длин и времен свободного пробега микрочастиц (носителей энергии), определяемых соответствующими коэффициентами релаксации, в зависимости от толщины пластины наблюдаются качественно различающиеся результаты. И, в частности, в пластинах, толщина которых значительно превышает длину свободного пробега микрочастиц, преобладает диффузионный теплоперенос с задержкой принятия граничного условия первого рода, приводящей к некоторому отличию распределения температуры на начальном временном участке по сравнению с точным аналитическим решением классического параболического уравнения теплопроводности. С уменьшением толщины пластины диффузионный процесс теплообмена сменяется на волновой. При этом в зависимости от толщины пластины наблюдаются два вида волнового изменения температуры. Первый из них не сопровождается корреляцией температуры в область отрицательных ее значений – изменение температуры в каждой точке пространства происходит в форме малоамплитудных колебаний, затухающих во времени. В этом случае происходит образование стоячих волн (частный случай интерференции), связанное с наложением прямых (бегущих к центру симметрии) и обратных (бегущих от центра симметрии) волн. Изменение температуры здесь можно представить как сумму двух функций: стоячей температурной волны малой амплитуды и функции температуры, экспоненциально уменьшающейся во времени. Причем волна негармоническая – с течением времени она затухает. Для волны $\lambda = 4\delta$ пучность находится на адиабатной стенке (в центре пластины), а узлы – на торцах симметричной пластины, то есть там, где заданы граничные условия первого рода. С течением времени амплитуда волны в пучности, как и вся волна, затухает.

Второй вид волнового изменения температуры наблюдается для толщин пластины, соизмеримых с длиной свободного пробега микрочастиц. Изменение температуры в данном случае происходит с корреляцией в область отрицательных ее значений. Понятие температуры, как характеристики внутренней энергии некоторой совокупности частиц, в данном случае теряет смысл. В связи с чем, за действительное изменение температуры принимается изменение квадрата амплитуды волновой функции. Данный вариант изменения температуры наблюдается при малых значениях τ_2 и l , приводящих к малой величине Fo_2 и, следовательно, к незначительному влиянию смешанной производной в уравнении (11), оказывающей сглаживающее влияние на скачкообразное изменение температуры. Увеличение Fo_2 (за счет увеличения

τ_2) приводит к большему влиянию смешанной производной. Волновой перенос теплоты сменяется в данном случае на баллистический теплоперенос, протекающий практически при отсутствии градиентов температур по толщине пластины.

Список литературы

1. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.
2. Дъярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 303 с.
3. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968;31:113–126. DOI: 10.1007/BF00281373.
4. Nunziato J.W. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 1971;29:187–204.
5. Weymann H.D. Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion and viscous shear motion. *American Journal of Physics.* 1967;35:488.
6. Faltel G. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 1972;15:369.
7. Леванов Е.И., Сотский Е.Н. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Наука, 1987. 155 с.
8. Алексеев Б.В. Физические основы обобщённой больцмановской теории газов. *Успехи физических наук.* 2000;170(6):649–679.
9. Алексеев Б.В. Физические принципы обобщённой больцмановской теории ионизированных газов. *Успехи физических наук.* 2003;173(2):146–174.
10. Петров Н., Бранков И. Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 288 с.
11. Черешнев С.Л., Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б. Эффекты поступательной неравновесности в ударных волнах в газах. Препринт ОИХФ АН СССР. Черногловка, 1988. 71 с.
12. Mac Donald R.A., Tsai D.H. On the theory of disordered systems. *Phys. Rep.* 1978;46:1–100.
13. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.
14. Sobolev S.L. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable models. *Physics Letters A.* 2017;381:2893–2897.
15. Sobolev S.L. Discrete space-time model for heat conduction: application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2017;108:933–939.
16. Vernott P. Les paradoxe de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus.* 1958;246(22):3154–3155.
17. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus.* 1958;247(4):431–433.
18. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. *Инженерно-физический журнал.* 1965;9(3):287–304.
19. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 601 с.
20. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход. М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
21. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук.* 1997;167(10):1096–1106.
22. Баумейстер К.У., Хамилл Т.Д. Гиперболическое уравнение теплопроводности: Решение задачи о полубесконечном теле. *Теплопередача.* 1969;(4):112–119.
23. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепло-массопереноса. М.: ИНФРА – М, 2013. 391 с.
24. Кудинов В.А., Кудинов В.И. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2020. 280 с.
25. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учётом конечной скорости распространения теплоты. *Теплофизика высоких температур.* 2013;51(2):301–310.
26. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки. *Теплофизика высоких температур.* 2013;50(1):118–125.

References

1. De Groot S., Mazur P. Nonequilibrium thermodynamics. Moscow: Mir, 1964. 456 p.
2. Gyarmati I. Non-equilibrium thermodynamics. Moscow: Mir, 1974. 303 p.
3. Gurtin M.E., Pipkin A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1968;31:113–126. DOI: 10.1007/BF00281373.

4. Nunziato JW. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* 1971;29:187–204.
5. Weymann HD. Finite speed of propagation in heat conduction, diffusion and viscous shear motion. *American Journal of Physics.* 1967;35:488.
6. Faitel G. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 1972;15:369.
7. Levanov EI., Sotsky EN. Mathematical modeling. Nonlinear differential equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1987. 155 p.
8. Alekseev B.V. Physical foundations of the generalized Boltzmann gas theory. *Advances in Physical Sciences.* 2000;170(6):649–679.
9. Alekseev B.V. Physical principles of the generalized Boltzmann theory of ionized gases. *Advances in Physical Sciences.* 2003;173(2):146–174.
10. Petrov N., Brankov I. Modern problems of thermodynamics. Moscow: Mir, 1986. 288 p.
11. Chereshev SL., Genich AP., Kulikov SV., Manelis GB. Effects of progressive nonequilibrium in shock waves in gases. Preprint of OIHF, Academy of Sciences of the USSR. Chernogolovka, 1988. 71 p.
12. Mac Donald RA., Tsai DH. On the theory of disordered systems. *Phys. Rep.* 1978;46:1–100.
13. Zhou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. Extended irreversible thermodynamics. Moscow – Izhevsk: Center for Regular and Chaotic Dynamics, Institute of Computer Science, 2006. 528 p.
14. Sobolev SL. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable models. *Physics Letters A.* 2017;381:2893–2897.
15. Sobolev SL. Discrete space-time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano-films. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 2017;108:933–939.
16. Vernott P. Les paradoxe de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus.* 1958;246(22):3154–3155.
17. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus.* 1958;247(4):431–433.
18. Lykov AV. Application of methods of nonequilibrium thermodynamics to the study of heat and mass transfer. *Journal of Engineering Physics.* 1965;9(3):287–304.
19. Lykov AV. Theory of heat conduction. Moscow: Higher School, 1967. 601 p.
20. Shashkov AG., Bubnov VA., Yanovsky SYu. Wave phenomena in heat conduction: A system-structural approach. Moscow: Editorial URSS, 2004. 296 p.
21. Sobolev SL. Locally nonequilibrium models of transport processes. *Physics-Uspekhi.* 1997;167(10):1096–1106.
22. Baumeister KU., Hamill TD. Hyperbolic heat conduction equation: Solution of the semi-infinite body problem. *Heat Transfer.* 1969;(4):112–119.
23. Kudinov IV., Kudinov VA. Analytical solutions of parabolic and hyperbolic heat and mass transfer equations. Moscow: INFRA-M, 2013. 391 p.
24. Kudinov VA., Kudinov VI. Methods for solving parabolic and hyperbolic heat conduction equations. Moscow: Librocom Publishing House, 2020. 280 p.
25. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Investigation of heat conduction considering the finite speed of heat propagation. *High Temperature Physics.* 2013;51(2):301–310.
26. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Derivation and analysis of the exact analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for a flat wall. *High Temperature Thermophysics.* 2013;50(1):118–125.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.01.2025

Поступила после рецензирования 28.05.2025

Принята к публикации 29.05.2025

Received January 13, 2025

Revised May 28, 2025

Accepted May 29, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Пашин Алексей Владимирович – старший преподаватель кафедры физики, Самарский государственный технический университет, г. Самара, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexey V. Pashin – Senior Lecturer of the Department of Physics, Samara State Technical University, Samara, Russia

[К содержанию](#)

Multidimensional Discrete Transformations and Their Applications to Discrete Equations

Abu B. Kamanda-Bongay , Vladimir B. Vasilyev 
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 394036, Russia
abubakarrkamanda357@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Abstract. Some classes of discrete equations in multidimensional space are considered. In certain cases a general solution is constructed for such equations using special discrete transformations. Applying additional conditions one can extract the unique solution.

Keywords: Digital Pseudo-differential Equation, Periodic Wave Factorization, Solvability

For citation: Kamanda-Bongay A. B., Vasilyev V. B. 2025. Multidimensional Discrete Transformations and Their Applications to Discrete Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 142–147.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-142-147 EDN EMPKIS

Оригинальное исследование

Многомерные дискретные преобразования и их применение к дискретным уравнениям

Каманда-Бонгэй А. Б. , Васильев В. Б. 
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
abubakarrkamanda357@gmail.com, vbv57@inbox.ru

Аннотация. Рассматриваются некоторые классы дискретных уравнений в многомерном пространстве. В некоторых случаях для таких уравнений строится общее решение с помощью специальных дискретных преобразований. Применяя дополнительные условия, можно извлечь единственное решение.

Ключевые слова: дискретное псевдодифференциальное уравнение, периодическая волновая факторизация, разрешимость

Для цитирования: Kamanda-Bongay A. B., Vasilyev V. B. 2025. Multidimensional Discrete Transformations and Their Applications to Discrete Equations. *Applied Mathematics & Physics*, 57(2): 142–147.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-2-142-147 EDN EMPKIS

1. Introduction

1.1. This paper is devoted to studying certain class of discrete equations. these equations are operator equations, and generating operators were called digital pseudo-differential operators [1, 2]. We are interested in solvability of such equations and their approximation properties for solving continuous ones. Existing methods [3, 4, 5] are developed for partial differential equations and related boundary value problems, but these methods are not appropriate for pseudo-differential equations. Latter equations present more general class of operator equations, and there is not complete theory for such equations, particularly in domains with a non-smooth boundary. Moreover, we think the discrete theory of pseudo-differential equations will be useful in digital signal processing [6, 7, 8] since functions of a discrete variable are models of signals and images.

Starting step, we work with model operators and canonical domains (cones) and use periodic analogue of the wave factorization [9] to describe solvability picture for discrete equations. this paper is related to a conical domain of a special type. A half-space case was considered earlier [1, 2]. The section below includes main notations and definitions. Let us remind that continuous half-space case was studied in details in [10].

1.2. We use the following notations. Let $\mathbb{Z}^3$ be the integer lattice in $\mathbb{R}^3$, $C_n = \{x \in \mathbb{R}^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 > a_n|x_1| + b_n|x_2|, a, b > 0\}$ be the four-faced angle, $C_{n,d} = h\mathbb{Z}^3 \cap C_n, h > 0, \mathbb{T} = [-\pi, \pi], \hbar = h^{-1}$, and a_n, b_n can take values $n, 1/n, n \in \mathbb{N}$. We denote $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in h\mathbb{Z}^3$ and consider functions of discrete variable $u_d(\tilde{x})$.

Let us denote

$$\zeta^2 = \sum_{k=1}^3 \zeta_k^2, \quad \zeta_k = \hbar(e^{i\hbar \cdot \xi_k} - 1),$$

and let $S(h\mathbb{Z}^3)$ be the discrete analogue of the Schwartz space of infinitely differentiable rapidly decreasing at infinity functions [1].

The space $H^s(h\mathbb{Z}^3)$ consists of discrete functions and it is a closure of the space $S(h\mathbb{Z}^3)$ with respect to the norm

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{h\mathbb{T}^3} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

where $\tilde{u}_d(\xi)$ denotes the discrete Fourier transform

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^3} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^3, \quad \xi \in h\mathbb{T}^3.$$

Let $A_d(\xi)$ be a measurable periodic function defined in $\mathbb{R}^3$ with the basic cube of periods $h\mathbb{T}^3$.

A digital pseudo-differential operator A_d with the symbol $A_d(\xi)$ in discrete cone $C_{n,d}$ is called the following operator

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^3} h^3 \int_{h\mathbb{T}^3} A_d(\xi) e^{i(\tilde{y} - \tilde{x}) \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in C_{n,d},$$

Here we will consider symbols satisfying the condition

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2}$$

with positive constants c_1, c_2 non-depending on h . The number $\alpha \in \mathbb{R}$ is called an order of the digital pseudo-differential operator A_d .

We study solvability of the discrete equation

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in C_{n,d}, \quad (1)$$

in the space $H^s(C_{n,d})$, it consists of functions from the space $H^s(h\mathbb{Z}^3)$ with supports in $\overline{C_{n,d}}$. For this purpose we need certain specific domains of three-dimensional complex space $\mathbb{C}^3$. A domain of the type $\mathcal{T}_h(C_n) = h\mathbb{T}^3 + iC_n$ is called a tube domain over the cone C_n . Such domains are periodic analogues of radial tube domains [11, 12]. We will work with analytic functions $f(x + i\tau)$ in such domains $\mathcal{T}_h(C_n)$. Let us denote

$$C_n^* = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > \frac{1}{2a_n}|x_1| + \frac{1}{2b_n}|x_2|\},$$

it is so called conjugate cone to C_n .

Definition 1.1. Periodic wave factorization of the symbol $A_d(\xi)$ with respect to C_n is called its representation in the form

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

where factors $A_{d,\neq}(\xi), A_{d,=}(\xi)$ admit analytic continuation into tube domains $\mathcal{T}_h(C_n^*)$, $\mathcal{T}_h(-C_n^*)$ respectively satisfying the estimates

$$c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |A_{d,\neq}(\xi + i\tau)| \leq c'_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha - \alpha}{2}} \leq |A_{d,=}(\xi - i\tau)| \leq c'_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha - \alpha}{2}},$$

with positive constants c_1, c'_1, c_2, c'_2 non-depending on h ;

$$\hat{\zeta}^2 \equiv h^2 \left(\sum_{k=1}^3 (e^{ih(\xi_k + i\tau_k)} - 1)^2 \right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in h\mathbb{T}^3,$$

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in C_n^*.$$

The number $\alpha \in \mathbb{R}$ is called an index of periodic wave factorization.

2. Discrete Transformations and Transmutation Operators

2.1. Here we will discuss some discrete transformations and their periodic representation. These transformations have corresponding continuous analogues [13, 14]. Let us introduce the following transformation $T_{a_n, b_n} : h\mathbb{Z}^3 \rightarrow h\mathbb{Z}^3$ of the following type

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 &= \tilde{x}_1 \\ \tilde{t}_2 &= \tilde{x}_2 \\ \tilde{t}_3 &= \tilde{x}_3 - a_n|\tilde{x}_1| - b_n|\tilde{x}_2| \end{aligned}$$

Let $u_d \in S(h\mathbb{Z}^3)$. We would like to understand what is the discrete Fourier image of the function $T_{a_n, b_n} u_d$. We have

$$\begin{aligned} (F_d T_{a_n, b_n} u_d)(\xi) &= \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^3} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} (T_{a_n, b_n} u_d)(\tilde{x}) h^3 = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^3} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 - a_n |\tilde{x}_1| - b_n |\tilde{x}_2|) h^3 \\ &= \sum_{\tilde{t} \in h\mathbb{Z}^3} e^{i\tilde{t}_1 \cdot \xi_1} e^{i\tilde{t}_2 \cdot \xi_2} e^{i(\tilde{t}_3 + a_n |\tilde{t}_1| + b_n |\tilde{t}_2|) \cdot \xi_3} u_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3) h^3 \\ &= \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_1 \xi_1 + a_n |\tilde{t}_1| \xi_3} h \left(\sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_2 \xi_2 + b_n |\tilde{t}_2| \xi_3} h \left(\sum_{\tilde{t}_3 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_3 \xi_3} u_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3) h \right) \right) \\ &= \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_1 \xi_1 + a_n |\tilde{t}_1| \xi_3} h \left(\sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_2 \xi_2 + b_n |\tilde{t}_2| \xi_3} \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3) h \right), \end{aligned}$$

where $\hat{u}_t(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3)$ is the discrete Fourier transform on third variable.

Further, we need to calculate one-dimensional discrete Fourier transforms on variables $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2$. We will use calculations from [2, 15]. Let $\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$, and $\chi_\pm$ be indicators of $\mathbb{Z}_\pm$. For functions $\varphi(x)$ of one variables defined in segment $[-\hbar\pi, \hbar\pi]$ the periodic analogue of Hilbert transform [13, 16, 17, 18, 19, 20] was introduced in [2, 15] in the following way

$$(H_h^{per} \varphi)(\xi) = \frac{h}{2\pi i} p.v. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \varphi(x) \cot \frac{h(x - \xi)}{2} dx,$$

where integral is meant in principal value (p.v.) sense. Two projectors P_h and Q_h are related to the operator H_h^{per}

$$P_h = \frac{1}{2}(I + H_h^{per}), \quad Q_h = \frac{1}{2}(I - H_h^{per}),$$

I is identity operator, so that the representation

$$\varphi = P_h \varphi + Q_h \varphi$$

is unique for arbitrary function $\varphi \in L^2[-\hbar\pi, \hbar\pi]$.

Moreover, if $\varphi_d(\tilde{x})$ is a function of discrete variable $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}$ then

$$F_d(\chi_+ \cdot \varphi_d) = P_h(F_d \varphi_d), \quad F_d(\chi_- \cdot \varphi_d) = Q_h(F_d \varphi_d)$$

at least for $\varphi_d \in S(h\mathbb{Z})$.

Using these properties we introduce the periodic Hilbert transforms with a parameter of the following type ($\psi(\xi) = \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$)

$$\begin{aligned} (H'_h \psi)(\xi) &= \frac{h}{2\pi i} p.v. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \psi(\eta_1, \xi_2, \xi_3) \cot \frac{h(\eta_1 - \xi_1)}{2} d\eta_1, \\ (H''_h \psi)(\xi) &= \frac{h}{2\pi i} p.v. \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \psi(\xi_1, \eta_2, \xi_3) \cot \frac{h(\eta_2 - \xi_2)}{2} d\eta_2, \end{aligned}$$

and corresponding projectors

$$\begin{aligned} P'_h &= (I + H'_h), \quad Q'_h = (I - H'_h), \\ P''_h &= (I + H''_h), \quad Q''_h = (I - H''_h), \end{aligned}$$

and continue calculations for $F_d T_{a_n, b_n} u_d$. We have

$$\begin{aligned} &\sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_2 \xi_2 + b_n |\tilde{t}_2| \xi_3} \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3) h = \\ &\sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{t}_2 \xi_2 + b_n |\tilde{t}_2| \xi_3} \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3) h + \sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}_-} e^{i\tilde{t}_2 \xi_2 - b_n |\tilde{t}_2| \xi_3} \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3) h \\ &= \sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_2 (\xi_2 + b_n \xi_3)} \chi_+(\tilde{t}_2) \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3) h + \sum_{\tilde{t}_2 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_2 (\xi_2 - b_n \xi_3)} \chi_-(\tilde{t}_2) \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \xi_3) h \end{aligned}$$

$$= P_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3),$$

where $\hat{u}_d$ is the discrete Fourier of discrete function $u_d(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3)$ on variables $\tilde{t}_2, \tilde{t}_3$.

Further we find

$$\begin{aligned} (F_d T_{a_n, b_n} u_d)(\xi) &= \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_1 \xi_1 + a_n |\tilde{t}_1| \xi_3} \left(P_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3) \right) h \\ &= \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}_+} e^{i\tilde{t}_1 (\xi_1 + a_n \xi_3)} \left(P_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3) \right) h \\ &\quad + \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}_-} e^{i\tilde{t}_1 (\xi_1 - a_n \xi_3)} \left(P_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3) \right) h \\ &= \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_1 (\xi_1 + a_n \xi_3)} \chi_+(\tilde{t}_1) \left(P_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3) \right) h \\ &\quad + \sum_{\tilde{t}_1 \in h\mathbb{Z}} e^{i\tilde{t}_1 (\xi_1 - a_n \xi_3)} \chi_-(\tilde{t}_1) \left(P_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \hat{u}_d(\tilde{t}_1, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3) \right) h \\ &= P_h' (P_h'' \tilde{u}_d(\xi_1 + a_n \xi_3, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \tilde{u}_d(\xi_1 + a_n \xi_3, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3)) \\ &\quad + Q_h' (P_h'' \tilde{u}_d(\xi_1 - a_n \xi_3, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + Q_h'' \tilde{u}_d(\xi_1 - a_n \xi_3, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3)). \end{aligned}$$

So, we have the following operator acting on Fourier images in the following way

$$\begin{aligned} (V_{a_n, b_n} \tilde{u}_d)(\xi) &= (P_h' P_h'' \tilde{u}_d)(\xi_1 + a_n \xi_3, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + (P_h' Q_h'' \tilde{u}_d)(\xi_1 + a_n \xi_3, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3) \\ &\quad + (Q_h' P_h'' \tilde{u}_d)(\xi_1 - a_n \xi_3, \xi_2 + b_n \xi_3, \xi_3) + (Q_h' Q_h'' \tilde{u}_d)(\xi_1 - a_n \xi_3, \xi_2 - b_n \xi_3, \xi_3), \end{aligned}$$

and finally

$$V_{a_n, b_n} = F_d T_{a_n, b_n} F_d^{-1}. \quad (2)$$

The discrete Fourier transform takes part in this relation as a transmutation operator.

2.2. Here we return to studying the equation (1).

Theorem 2.1. *Let the symbol $A_d(\xi)$ admits the periodic wave factorization with respect to C_n with the index $\varkappa$ such that $\varkappa - s = n + \varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon| < 1/2$ then a general solution of the equation (1) has the following form*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d, \neq}^{-1}(\xi) V_{a_n, b_n}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_{d, k}(\xi') \zeta_3^k \right), \quad (3)$$

where $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar^2 \mathbb{T}^2$, $c_{d, k} \in H^{s_k}(h\mathbb{Z}^2)$ are arbitrary functions, $s_k = s - \varkappa + k - 1/2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Proof. Let us introduce the discrete function v_d such that

$$v_d(\tilde{x}) = \begin{cases} -(A_d u_d)(\tilde{x}), & \tilde{x} \notin M_d, \\ 0, & \tilde{x} \in M_d. \end{cases}$$

Then we have the following paired equation in whole $h\mathbb{Z}^3$

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + v_d(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^3. \quad (4)$$

Applying the discrete Fourier transform to (4) we have

$$A_d(\xi) \tilde{u}_d(\xi) + \tilde{v}_d(\xi) = 0,$$

and after periodic wave factorization it leads to the equality

$$A_{d, \neq} \tilde{u}_d(\xi) = -A_{d, =}^{-1} \tilde{v}_d(\xi),$$

so that after applying the inverse discrete Fourier transform we have

$$F_d^{-1} A_{d, \neq} \tilde{u}_d(\xi) = -F_d^{-1} A_{d, =}^{-1} \tilde{v}_d(\xi).$$

Now we apply the transformation $T_{a_n b_n}$ in the latter equality and obtain the following

$$T_{a_n b_n} F_d^{-1} A_{d, \neq} \tilde{u}_d(\xi) = -T_{a_n b_n} F_d^{-1} A_{d, =}^{-1} \tilde{v}_d(\xi). \quad (5)$$

We denote $\mathbb{Z}_\pm^3 = \{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^3 : \tilde{x} - (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), \pm \tilde{x}_3 > 0\}$ and then the left hand side of (5) vanishes in $h\mathbb{Z}_-^3$, and the right hand side vanishes in $h\mathbb{Z}_+^3$. According to [1] (Theorem 2) such discrete function should be supported on discrete hyper-plane $\tilde{x}_3 = 0$, and its discrete Fourier transform looks as follows

$$F_d T_{a_n b_n} F_d^{-1} A_{d,\neq} \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_{d,k}(\xi') \xi_3^k,$$

where $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar^2 \mathbb{T}^2$, $c_{d,k} \in H^{s_k}(h\mathbb{Z}^2)$ are arbitrary functions, $s_k = s - \alpha + k - 1/2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Taking into account (2) we have the formula for a general solution of the equation (1)

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) V_{a_n, b_n}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_{d,k}(\xi') \xi_3^k \right),$$

Q.E.D.

Remark 2.1. Obviously, the operator V_{a_n, b_n}^{-1} is very simple,

$$V_{a_n, b_n}^{-1} = V_{-a_n, -b_n}.$$

3. Discrete Boundary Value Problems

3.1. Here we consider a special case in which we can suggest simple solution. Namely, we assume that under conditions of Theorem 2.1 we have $\alpha - s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$. Then the formula (3) looks as follows

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) V_{a_n, b_n}^{-1} \tilde{c}_d(\xi'), \quad (6)$$

where we have written c_d instead of $c_{d,0}$ for simplicity.

To determine uniquely the function c_d we add the following condition

$$\sum_{\tilde{x}_3 \in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}', \tilde{x}_3) h = f_d(\tilde{x}'), \quad (7)$$

where f is given function.

Theorem 3.1. If conditions of Theorem 2.1 hold and $1/2 < \alpha - s < 3/2$, $f_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z}^2)$ then the problem (1),(7) has unique solution given by the formula

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi) V_{a_n, b_n}^{-1} \tilde{c}_d(\xi'),$$

where $\tilde{c}_d$ is defined by the formula

$$\tilde{c}_d(\xi') = A_{\neq}(\xi', 0) \tilde{f}_d(\xi').$$

Proof. First we write the condition (7) in Fourier images

$$\tilde{u}_d(\xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{f}_d(\xi_1, \xi_2). \quad (8)$$

Second we have

$$\begin{aligned} (V_{-a_n, -b_n} \tilde{c}_d)(\xi) &= (P'_h P''_h \tilde{c}_d)(\xi_1 - a_n \xi_3, \xi_2 - b_n \xi_3) + (P'_h Q''_h \tilde{c}_d)(\xi_1 - a_n \xi_3, \xi_2 + b_n \xi_3) \\ &\quad + (Q'_h P''_h \tilde{c}_d)(\xi_1 + a_n \xi_3, \xi_2 - b_n \xi_3) + (Q'_h Q''_h \tilde{c}_d)(\xi_1 + a_n \xi_3, \xi_2 + b_n \xi_3). \end{aligned} \quad (9)$$

Substituting $\xi_3 = 0$ in the formula (9) we obtain

$$\begin{aligned} (V_{-a_n, -b_n} \tilde{c}_d)(\xi_1, \xi_2, 0) &= (P'_h P''_h \tilde{c}_d)(\xi_1, \xi_2) + (P'_h Q''_h \tilde{c}_d)(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + (Q'_h P''_h \tilde{c}_d)(\xi_1, \xi_2) + (Q'_h Q''_h \tilde{c}_d)(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Taking into account properties of projectors P'_h, P''_h, Q'_h, Q''_h we find

$$(V_{-a_n, -b_n} \tilde{c}_d)(\xi_1, \xi_2, 0) = \tilde{c}_d(\xi_1, \xi_2).$$

According to formula (6) we have

$$\tilde{u}_d(\xi', 0) = A_{\neq}^{-1}(\xi', 0) \tilde{c}_d(\xi')$$

and then using (8) we conclude

$$\tilde{c}_d(\xi') = A_{\neq}(\xi', 0) \tilde{f}_d(\xi').$$

Q.E.D.

Remark 3.1. The continuous analogue of the problem (1),(7) was considered in [21]. Unique solvability for such problem was proved under corresponding assumptions.

Conclusion. The considered discrete boundary value problem (1),(7) should be approximation problem for corresponding continuous boundary value problem. Here the first step was done, the unique solvability and integral representation were obtained. The next step is a comparison (in certain sense) of discrete and continuous solutions and we will give it in forthcoming papers. In two-dimensional case such a comparison was obtained.

References

1. Vasilyev AV. and Vasilyev VB. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space. *Math. Model. Anal.* 2018;23(3):492–506.
2. Vasilyev AV., Vasilyev VB. and Tarasova OA. Frames of solutions and discrete analysis of pseudo-differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2024;47(10):8042–8061.
3. Samarskii A. *The Theory of Difference Schemes.* CRC Press, Boca Raton. 2001.
4. Ryaben'kii V. *Method of Difference Potentials and its Applications.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg. 2002.
5. Strang G. and Fix G. *An Analysis of the Finite Element Method.* Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2008.
6. Dudgeon DE. and Mersereau RM. *Multidimensional Digital Signal Processing.* Prentice Hall, Englewood Cliffs. 1999.
7. Oppenheim AV. and Schaffer RW. *Discrete-Time Signal Processing.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 1984.
8. Manolakis D. and Ingle V. *Applied Digital Signal Processing.* Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2011.
9. Vasil'ev VB. *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London. 2000.
10. Eskin G. *Boundary Value Problems for Elliptic Pseudo Differential Equations.*, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1981.
11. Vladimirov V. *Generalized Functions in Mathematical Physics.* Mir, Moscow. 1979.
12. Vladimirov VS. *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables.* Dover Publications, Mineola, NY. 2007.
13. King FW. *Hilbert Transforms.* Vol. 1,2, Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2009.
14. Davies B. *Integral Transforms and their Applications.* Springer-Verlag, New York etc. 2001.
15. Vasilyev A. and Vasilyev V. Discrete singular operators and equations in a half-space. *Azerbaijan Journal of Mathematics* 3. 2013;1:84–93.
16. Gohberg I. and Krupnik N. *One-Dimensional Linear Singular Integral Equations.* Birkhäuser, Basel. 1992.
17. Gakhov FD. *Boundary Value Problems.* Dover Publications, Mineola. 1981.
18. Muskhelishvili NI. *Singular Integral Equations.* North Holland, Amsterdam. 1976.
19. Milkhin SG. and Pröbldorf S. *Singular Integral Operators.* Akademie-Verlag, Berlin. 1986.
20. Edwards R. *Fourier Series. A Modern Introduction.* Springer-Verlag, Heidelberg. 1982.
21. Vasilyev VB. On certain 3-dimensional limit boundary value problems. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2020;41(5):917–925.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 05.05.2025

Поступила после рецензирования 19.06.2025

Принята к публикации 19.06.2025

Received May 5, 2025

Revised June 19, 2025

Accepted June 19, 2025

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Abu B. Kamanda-Bongay – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Vladimir B. Vasilyev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Каманда-Бонгэй Абу Бакарр – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Васильев Владимир Борисович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

[К содержанию](#)

ПЕРСОНАЛИИ PERSONNEL

К 80-летию профессора Михаила Львовича Гольдмана

13 апреля 2025 года исполнилось 80 лет Михаилу Львовичу Гольдману, доктору физико-математических наук, профессору, российскому учёному-физику и математику, специалисту в области математической физики, теории операторов и математического моделирования.



Его научная деятельность внесла значительный вклад в развитие теоретической физики и математики, а также в подготовку высококвалифицированных специалистов.

Краткая биография

Михаил Гольдман родился 13 апреля 1946 года в Москве. В 1963 году он поступил в Московский государственный университет (МГУ), где обучался на физическом факультете. В 1968 году он завершил своё обучение и продолжил научную карьеру, сосредоточив внимание на математической физике и теории операторов. В период с 1972 по 1974 годы Гольдман работал научным сотрудником Московского научно-исследовательского и проектного института автоматизированных систем управления в городском хозяйстве (МНИПИ АСУ ГХ). Затем, с 1974 по 1984 годы, он был ассистентом на кафедре математики Московского института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА). В 1974 году Гольдман защитил кандидатскую диссертацию, а в 1982 году — докторскую, став признанным специалистом в области теории операторов, функционального анализа и математического моделирования. С 1984 по 1990 годы Михаил Гольдман работал доцентом на кафедре математики МИРЭА, а с 1990 года — профессором. С 1991 по 2000 годы он возглавлял эту кафедру. В 1999 году Гольдман стал профессором кафедры нелинейного анализа и оптимизации в Российском университете дружбы народов (РУДН), где продолжил свою педагогическую деятельность. В 2018 году он стал профессором Математического института имени С. М. Никольского.

Научная деятельность и основные научные достижения

Михаил Львович является автором более 100 научных публикаций, среди которых статьи в ведущих отечественных и зарубежных журналах.

С ним сотрудничали более 60 соавторов, среди которых: О.В. Бесов, Э.Г. Бахтигареева, В.С. Гулиев, В. Кокилашвили, П.П. Забрейко, Д. Хароске, Т.Г. Ayele, Е.Р. Аваков, Н.А. Бокаев, В.И. Буренков, Э.М. Галеев, В.Б. Демидович, А.В. Дмитрук, А.Н. Карапетянц, Г.Ж. Каршыгина, Р. Керман, А.Г. Кусраев, С.С. Кутателадзе, К.Ю. Осипенко, В.Д. Степанов, В.М. Тихомиров и другие.

Исследования Михаила Львовича Гольдмана охватывают широкий спектр вопросов, включая спектральную теорию операторов, функциональный анализ и математическое моделирование в физике, в том числе в квантовой механике. Он получил ряд важных результатов по оптимальным вложениям пространств дифференцируемых функций, теории следов и продолжений. В частности, дано точное описание пространства следов для обобщенных пространств Лизоркина – Трибеля. Также описано пространство

следов и установлено отсутствие линейных операторов продолжения в предельном случае теоремы о следах для обобщенных пространств Бесова. Им также исследованы оптимальные интегральные свойства функций для различных пространств дифференцируемых функций, таких как обобщенные пространства Соболева, Никольского – Бесова и Кальдерона, а также обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса и установлены для них точные описания перестановочно инвариантных оболочек. Получены точные характеристики дифференциальных свойств потенциалов в терминах их равномерных модулей непрерывности. Найдены оптимальные пространства Кальдерона для вложения обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. Исследованы оценки интегральных операторов в весовых пространствах Лебега, Лоренца и Орлица – Лоренца. Получены приложения пространств обобщенной гладкости к исследованию условий сходимости и суммируемости спектральных разложений по собственным функциям дифференциальных операторов.

Михаил Львович Гольдман получил множество наград за свой вклад в развитие теоретической физики и математической науки. Он стал лауреатом конкурса правительства Москвы в 2002 году и премии РУДН в области науки и инноваций в 2013 году. В 2017 году он был удостоен премии РУДН за научное руководство аспирантами. Он также является членом ряда научных обществ и активно участвует в международных конференциях, представляя свои исследования и делаясь опытом с коллегами.

Педагогическая деятельность

Михаил Гольдман много лет обучал студентов и аспирантов, прививая им знания в области математической физики. Он читал курсы по аналитической геометрии, теории функциональных пространств и современным проблемам математики для студентов бакалавриата и магистратуры. В РУДН он также руководил научными исследованиями и подготовкой аспирантов, а его курсы пользовались высоким спросом.

Кроме того, Гольдман активно сотрудничал с зарубежными университетами. Он читал лекции по теории функциональных пространств для студентов и докторантов в Евразийском национальном университете имени Л. Н. Гумилева (Казахстан), а также в Фридрих-Шиллер Университете в Германии. В 2018 году он прочитал курс по теории идеальных оболочек для конусов функций на Владикавказской молодежной математической школе.

Михаил Гольдман подготовил ряд новых учебных курсов, из которых наиболее значимые следующие:

1. Буренков В. И., Гольдман М. Л. Методические рекомендации к изучению курса «Функциональные пространства». (Пространство L_p . Неравенства Гельдера, Минковского. Сходимость в L_p . Классификация пространств L_p). Москва. Изд-во РУДН. – 1989. С. 1–49.
2. Буренков В. И., Гольдман М. Л. Методические рекомендации к изучению курса «Функциональные пространства». (Обобщенное неравенство Минковского. Неравенство Харди). Москва. Изд-во РУДН. 1990. С. 1–46.
3. Буренков В. И., Гольдман М. Л. Методические рекомендации к изучению курса «Функциональные пространства» (Неравенство Юнга. Функции распределения. Перестановки. Интерполяционные теоремы). Москва. Изд-во РУДН. – 1992. С. 1–76.
4. Гольдман М. Л., Вшивцев А. С., Потепалова А. Ю. Математический анализ. Элементы теории рядов. Функции комплексного переменного (учебное пособие). Москва. – Изд-во МИРЭА. – 1995. С. 1–80.
5. Гольдман М. Л., Сивкова Е. О. Курс алгебры «Алгебраические структуры». Москва, РУДН, 2007, 200 с.
6. Гольдман М. Л. Учебно-методический комплекс «Современные проблемы математики» Москва, РУДН, 2015. С. 1–25.
7. Гольдман М. Л. Учебно-методический комплекс «Теория функциональных пространств». Москва, РУДН, 2015. С. 1–21.
8. Гольдман М. Л. Учебно-методический комплекс «Основы функционального анализа». Москва, РУДН, 2015. С. 1–21.
9. Гольдман М. Л., Сивкова Е. О. «Аналитическая геометрия. Векторы: учебное пособие». Москва, 2015. Изд-во ФГБОУ ВО «Российский технологический университет (МИРЭА)».

Михаил Львович Гольдман — выдающийся учёный и педагог, чьи работы оказали значительное влияние на развитие математической физики и математического моделирования в России и за рубежом.

**Редколлегия журнала «Прикладная математика & Физика»
сердечно поздравляет Михаила Львовича Гольдмана
с юбилеем и желает ему здоровья, долголетия,
новых успехов и научных результатов.**

Избранные научные работы профессора М. Л. Гольдмана**1968 год:**

1. M. L. Goldman, Estimates of the integral norms of the eigenfunctions of Laplace's operator in certain regions, Dokl. Akad. Nauk SSSR **183** (1968), 21–24; MR0235321

1969 год:

2. M. L. Goldman, Correction to: "Estimates of the integral norms of the eigenfunctions of Laplace's operator in certain regions", Dokl. Akad. Nauk SSSR **185** (1969), vii; MR0240479

1970 год:

3. M. L. Goldman, Estimates of the eigenfunctions of Laplace's operator in certain domains, Differentsialnye Uravneniya **6** (1970), 2030–2040; MR0283429

1971 год:

4. M. L. Goldman, An isomorphism of generalized Hölder classes, Differentsialnye Uravneniya **7** (1971), 1449–1458, 1541; MR0287304

5. M. L. Goldman, Generalized kernels of fractional order, Differentsialnye Uravneniya **7** (1971), 2199–2210; MR0291726

6. M. L. Goldman, Fourier-Bessel series for functions that are integrable with respect to a weight, Differentsialnye Uravneniya **7** (1971), 1617–1628; MR0298325

1972 год:

7. M. L. Goldman, Imbedding of generalized Hölder classes, Mat. Zametki **12** (1972), 325–336; MR0324394

1976 год:

8. M. L. Goldman, The traces of functions belonging to a generalized Liouville class, Sibirsk. Mat. Zh. **17** (1976), no. 6, 1236–1255, 1437; MR0442669

9. M. L. Goldman, A description of the trace space for functions of a generalized Hölder class, Dokl. Akad. Nauk SSSR **231** (1976), no. 3, 525–528; MR0433205

1977 год:

10. M. L. Goldman, A description of the traces of the anisotropic generalized Liouville class, Dokl. Akad. Nauk SSSR **233** (1977), no. 3, 273–276; MR0442670

1979 год:

11. M. L. Goldman, Description of traces for certain function spaces, Trudy Mat. Inst. Steklov. **150** (1979), 99–127, 322; MR0544006

12. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Extension of functions from L_p , Trudy Mat. Inst. Steklov. **150** (1979), 31–51, 321; MR0544003

13. M. L. Goldman, Extension of functions in $L_p(\mathbb{R}^m)$ to a space of higher dimension, Mat. Zametki **25** (1979), no. 4, 513–520, 635; MR0534294

1980 год:

14. M. L. Goldman, The method of coverings for description of general spaces of Besov type, Trudy Mat. Inst. Steklov. **156** (1980), 47–81, 262; MR0622227

1982 год:

15. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Estimates for operator norms in spaces of periodic and nonperiodic functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR **267** (1982), no. 6, 1289–1293; MR0687902

16. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Norming of periodic analogues of normed function spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR **264** (1982), no. 2, 271–274; MR0658191

1983 год:

17. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Interrelation of norms of operators in periodic and nonperiodic function spaces, Trudy Mat. Inst. Steklov. **161** (1983), 47–105; MR0735101

1984 год:

18. M. L. Goldman, Imbedding theorems for anisotropic Nikolskiy-Besov spaces with moduli of continuity of a general type, Trudy Mat. Inst. Steklov. **170** (1984), 86–104, 275; MR0790329

19. M. L. Goldman, Embedding of Nikolskii-Besov spaces with moduli of continuity of general type in Lorentz spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR **277** (1984), no. 1, 20–24; MR0757062

1985 год:

20. M. L. Goldman, Embedding of generalized Nikolskii-Besov spaces into Lorentz spaces, Trudy Mat. Inst. Steklov. **172** (1985), 128–139, 352; MR0810423

21. M. L. Goldman, Embedding of a Lipschitz space into a symmetric space, Dokl. Akad. Nauk SSSR **284** (1985), no. 2, 283–287; MR0806449

1986 год:

22. M. L. Goldman, Embedding of constructive and structural Lipschitz spaces in symmetric spaces, Trudy Mat. Inst. Steklov. **173** (1986), 90–112, 271; MR0864837

1988 год:

23. M. L. Goldman, Embedding of various metrics for spaces of Calderón type, Trudy Mat. Inst. Steklov. **181** (1988), 70–94, 270; MR0945425

1989 год:

24. M. L. Goldman, Traces of functions with restrictions on the spectrum, Trudy Mat. Inst. Steklov. **187** (1989), 69–77; MR1006444

1991 год:

25. M. L. Goldman, Soviet Math. Dokl. **44** (1992), no. 2, 581–587; translated from Dokl. Akad. Nauk SSSR **320** (1991), no. 5, 1037–1042; MR1152406

1992 год:

26. M. L. Goldman, On integral inequalities on the set of functions with some properties of monotonicity, in *Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Friedrichroda, 1992)*, 274–279, Teubner-Texte Math., 133, Teubner, Stuttgart, ; MR1242589

27. M. L. Goldman, Proc. Steklov Inst. Math. **1994**, no. 2(201), 155–181; translated from Trudy Mat. Inst. Steklov. **201** (1992), 186–218; MR1291996

1995 год:

28. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions, Trudy Mat. Inst. Steklov. **210** (1995), Teor. Funktsii i Differ. Uravn., 65–89; MR1421378

29. M. L. Goldman, V. D. Stepanov and H. P. Heinig, The duality principle in Lorentz spaces, Dokl. Akad. Nauk **344** (1995), no. 6, 740–744; MR1364317

1996 год:

30. M. L. Goldman, H. P. Heinig and V. D. Stepanov, On the principle of duality in Lorentz spaces, Canad. J. Math. **48** (1996), no. 5, 959–979; MR1414066

1997 год:

31. V. I. Burenkov, W. D. Evans and M. L. Goldman, On weighted Hardy and Poincaré-type inequalities for differences, J. Inequal. Appl. **1** (1997), no. 1, 1–10; MR1731738

1999 год:

32. M. L. Goldman, Two-sided estimates for integral operators on the cone, in *Spectral and evolution problems, Vol. 10 (Sevastopol, 1999)*, 16–19, Natl. Taurida Univ. “V. Vernadsky”, Simferopol; MR1788755

33. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Proc. Steklov Inst. Math. **1999**, no. 4(227), 87–103; translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **227** (1999), 92–108; MR1784308

34. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, On exact analogues of the Hardy inequality for differences in the case of related weights, Dokl. Akad. Nauk **366** (1999), no. 2, 155–157; MR1723459

2001 год:

35. M. L. Goldman, Estimates for the norms of integral and discrete operators of Hardy type on cones of quasimonotone functions, Dokl. Akad. Nauk **377** (2001), no. 6, 733–738; MR1872346

36. M. L. Goldman, Proc. Steklov Inst. Math. **2001**, no. 1(232), 109–137; translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **232** (2001), 115–143; MR1851444

2003 год:

37. M. L. Goldman and R. Kerman, On the rearrangement-invariant hull of the Calderón space, Dokl. Akad. Nauk **392** (2003), no. 2, 155–159; MR2089653

38. M. L. Goldman and R. Kerman, Proc. Steklov Inst. Math. **2003**, no. 4(243), 154–184; translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **243** (2003), 161–193; MR2049469

2005 год:

39. M. L. Goldman, On the rearrangement-invariant hull of generalized Sobolev spaces, Dokl. Akad. Nauk **405** (2005), no. 1, 13–17; MR2263773

40. M. L. Goldman and F. Enríquez, Proc. Steklov Inst. Math. **2005**, no. 1(248), 89–100; translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **248** (2005), 94–105; MR2165919

41. M. L. Goldman and M. L. Sorokina, A three-weighted Hardy-type inequality on the cone of quasimonotone functions, Dokl. Akad. Nauk **401** (2005), no. 3, 301–305; MR2159547

2006 год:

42. M. L. Goldman, The local growth envelope and optimal embeddings of generalized Sobolev spaces, Dokl. Akad. Nauk **410** (2006), no. 4, 445–448; MR2446837

2007 год:

43. M. L. Goldman, Dokl. Math. **75** (2007), no. 3, 361–366; translated from Dokl. Akad. Nauk **414** (2007), no. 2, 159–164; MR2447047

44. Goldman M.L. Rearrangement Invariant Envelopes of generalized Besov, Sobolev and Calderon Spaces // Contemporary Mathematics. 2007. Vol. 424. P. 53–81.

2008 год:

45. M. L. Goldman, Dokl. Math. **78** (2008), no. 3, 814–818; translated from Dokl. Akad. Nauk **423** (2008), no. 1, 14–18; MR2494241

46. M. L. Goldman, Proc. Steklov Inst. Math. **260** (2008), no. 1, 144–156; translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **260** (2008), 151–163; MR2489509

2009 год:

47. M. L. Goldman, Dokl. Math. **80** (2009), no. 2, 689–693; translated from Dokl. Akad. Nauk **428** (2009), no. 3, 305–309; MR2599364

2010 год:

48. M. L. Goldman, Proc. Steklov Inst. Math. **269** (2010), no. 1, 85–105; translated from Tr. Mat. Inst. Steklova **269** (2010), 91–111; MR2729976

49. M. L. Goldman, On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials, Complex Var. Elliptic Equ. **55** (2010), no. 8–10, 817–832; MR2674866

2011 год:

50. M. L. Goldman, Order-sharp estimates for Hardy-type operators on cones of quasimonotone functions, Eurasian Math. J. **2** (2011), no. 3, 143–146; MR2910846

51. M. L. Goldman, Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials, Complex Var. Elliptic Equ. **56** (2011), no. 10–11, 885–903; MR2838227

52. M. L. Goldman, On equivalent criteria for the boundedness of Hardy type operators on the cone of decreasing functions, Anal. Math. **37** (2011), no. 2, 83–102; MR2805609

53. М. Л. Гольдман, О. М. Гусельникова, Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и типа Рисса, Вестник Российского университета дружбы народов: Серия Математика, информатика, физика, Изд-во РУДН, (2012), № 3, с. 4–16

2012 год:

54. M. L. Goldman, Order-sharp estimates for Hardy-type operators on the cones of functions with properties of monotonicity, Eurasian Math. J. **3** (2012), no. 2, 53–84; MR3024120

2013 год:

55. M. L. Goldman and A. V. Malysheva, Estimation of the uniform modulus of continuity of the generalized Bessel potential, Proc. Steklov Inst. Math. **283** (2013), no. 1, 75–86; MR3479949

56. M. L. Goldman, Some equivalent criteria for the boundedness of Hardy-type operators on the cone of quasimonotone functions, Eurasian Math. J. **4** (2013), no. 4, 43–63; MR3382902

57. M. L. Goldman and A. V. Malysheva, Two-sided estimate for the modulus of continuity of a convolution, Differ. Equ. **49** (2013), no. 5, 557–568; MR3208935

58. M. L. Goldman and D. D. Haroske, Dokl. Math. **88** (2013), no. 3, 664–668; translated from Dokl. Akad. Nauk **453** (2013), no. 3, 243–246; MR3185295

59. M. L. Goldman, A. V. Malysheva and D. D. Haroske, Dokl. Math. **87** (2013), no. 3, 282–285; translated from Dokl. Akad. Nauk **450** (2013), no. 2, 143–146; MR3114450

60. M. L. Goldman and D. D. Haroske, Estimates for continuity envelopes and approximation numbers of Bessel potentials, J. Approx. Theory **172** (2013), 58–85; MR3061704

2014 год:

61. M. L. Goldman and P. P. Zabreĭko, Optimal reconstruction of a Banach function space from a cone of nonnegative functions, Proc. Steklov Inst. Math. **284** (2014), no. 1, 133–147; MR3479969

62. E. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, J. Math. Sci. (N.Y.) **218** (2016), no. 5, 549–571; translated from Fundam. Prikl. Mat. **19** (2014), no. 5, 3–33; MR3431890

63. M. L. Goldman and D. D. Haroske, Dokl. Math. **90** (2014), no. 2, 599–602; translated from Dokl. Akad. Nauk **458** (2014), no. 5, 510–513; MR3407928

64. T. G. Ayele and M. L. Goldman, Spaces of generalised smoothness in summability problems for Φ -means of spectral decomposition, *Eurasian Math. J.* **5** (2014), no. 1, 61–81; MR3382918

65. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the maximal operator from Lebesgue spaces to Morrey-type spaces, *Math. Inequal. Appl.* **17** (2014), no. 2, 401–418; MR3235019

2015 год:

66. M. L. Goldman and D. D. Haroske, *Dokl. Math.* **92** (2015), no. 1, 404–407; translated from *Dokl. Akad. Nauk* **463** (2015), no. 1, 14–17; MR3443980

2016 год:

67. M. L. Goldman and P. P. Zabreiko, Theorems on the integrability of products of functions for the Kurzweil-Henstock integral, *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi* **60** (2016), no. 1, 18–23; MR3730314

68. M. L. Goldman, *Dokl. Math.* **94** (2016), no. 3, 627–631; translated from *Dokl. Akad. Nauk* **471** (2016), no. 2, 131–135; MR3700227

69. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, *Proc. Steklov Inst. Math.* **293** (2016), no. 1, 37–55; translated from *Tr. Mat. Inst. Steklova* **293** (2016), 43–61; MR3628469

70. M. L. Goldman, *Math. Notes* **100** (2016), no. 1-2, 24–37; translated from *Mat. Zametki* **100** (2016), no. 1, 30–46; MR3588826

71. T. G. Ayele and M. L. Goldman, Spaces of generalised smoothness in summability problems for Φ -means of spectral decomposition, in *Current trends in analysis and its applications*, 163–169, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham, ; MR3496507

72. Goldman M.L., Bakhtigareeva E.G. Associate norms and optimal embeddings for one class of two-weighted integral quasinorms // *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 218. № 5. P. 549–571.

2017 год:

73. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, *Dokl. Math.* **96** (2017), no. 3, 553–557; translated from *Dokl. Akad. Nauk* **477** (2017), no. 2, 133–137; MR3791389

74. M. L. Goldman, *Dokl. Math.* **95** (2017), no. 3, 214–217; translated from *Dokl. Akad. Nauk* **474** (2017), no. 2, 147–150; MR3726480

75. M. L. Goldman, Order sharp estimates for monotone operators on Orlicz-Lorentz classes, in *Function spaces and inequalities*, 37–83, Springer Proc. Math. Stat., 206, Springer, Singapore, ; MR3720099

76. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, *Math. Notes* **102** (2017), no. 5-6, 623–631; translated from *Mat. Zametki* **102** (2017), no. 5, 673–683; MR3716503

77. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, Modular and norm inequalities for operators on the cone of decreasing functions in Orlicz space, *Eurasian Math. J.* **8** (2017), no. 1, 23–33; MR3663344

2018 год:

78. N. Bokayev, M. L. Goldman and G. Z. Karshygina, *Math. Notes* **104** (2018), no. 3-4, 348–363; translated from *Mat. Zametki* **104** (2018), no. 3, 356–373; MR3849087

2019 год:

79. N. Bokayev, M. L. Goldman and G. Z. Karshygina, Criteria for embedding of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces, *Eurasian Math. J.* **10** (2019), no. 2, 8–29; MR3982287

80. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, ESTIMATES OF OPERATORS ON THE CONES OF FUNCTIONS WITH MONOTONICITY PROPERTIES AND OPTIMAL EMBEDDINGS, International Conference on Geometric Analysis in honor of the 90th anniversary of academician Yu.G. Reshetnyak, место издания Под редакцией С.Г.Басалаева, тезисы, с. 58–58

81. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, в сборнике Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis Proceedings in, серия Mathematics & Statistics book series (PROMS, volume 291), **291**, с. 3–34

2020 год:

82. M. L. Goldman and È. G. Bakhtigareeva, Some classes of operators in general Morrey-type spaces, *Eurasian Math. J.* **11** (2020), no. 4, 35–44; MR4202441

83. M. L. Goldman and È. G. Bakhtigareeva, Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces, *Math. Methods Appl. Sci.* **43** (2020), no. 16, 9435–9447; MR4170462

84. M. L. Goldman and È. G. Bakhtigareeva, Some general properties of operators in Morrey-type spaces, in *Modern methods in operator theory and harmonic analysis*, 3–34, Springer Proc. Math. Stat., 291, Springer, Cham, ; MR4008975

2021 год:

85. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **278** (2024), no. 2, 237–253; translated from *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* **67** (2021), no. 3, 455–471; MR4331202

86. È. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, Calculations of norms for monotone operators on cones of functions with monotonicity properties, *Lobachevskii J. Math.* **42** (2021), no. 5, 857–874; MR4278832

87. È. G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman and D. D. Haroske, Optimal Calderón spaces for generalized Bessel potentials, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **312** (2021), Funktsionalnye Prostranstva, Teoriya Priblizhenii i Smezhnye Voprosy Analiza, 43–81; MR4237390

88. Elza G. Bakhtigareeva, Mikhail L. Goldman, Dorothee D. Haroske, “Optimal Caldero?n Spaces for Generalized Bessel Potentials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 312 (2021), 37–75

89. А. И. Аптекарев, Д. Е. Апушкинская, О. В. Бесов, В. И. Буренков, В. В. Власов, Р. В. Гамкредидзе, М. Л. Гольдман, Г. В. Демиденко, В. Г. Задорожний, В. В. Козлов, Г. Г. Лазарева, С. П. Новиков, В. М. Савчин, В. А. Садовничий, А. Л. Скубачевский, А. П. Солдатов, Д. В. Трещев, М. А. Ragusa, Н.-О. Walther, “Владимир Михайлович Филиппов”, Посвящается 70-летию президента РУДН В.М. Филиппова, *СМФН*, 67, № 3, Российский университет дружбы народов, М., 2021, 423–426.

90. A. V. Abanin, O. G. Avsyankin, V. I. Burenkov, B. G. Vakulov, S. K. Vodopyanov, M. L. Gol'dman, V. S. Guliev, I. M. Erusalimskiy, A. N. Karapetyants, M. I. Karyakin, V. M. Kokilashvili, A. G. Kusraev, E. R. Lifyand, A. V. Pskhu, V. S. Rabinovich, S. V. Rogozin, B. S. Rubin, A. P. Soldatov, I. M. Spitkovsky, V. D. Stepanov, Kh. G. Umarov, S. M. Umarkhadzhiev, “Stefan Grigorievich Samko (on the occasion of his 80th birthday)”, *Владикавк. матем. журн.*, 23:3 (2021), 126–129 .

2022 год:

91. M. L. Goldman, Estimates for decreasing rearrangements of convolution and coverings of cones, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **266** (2022), no. 6, 944–958; MR4609725

92. M. L. Goldman and G. Z. Karshygina, Estimates for integral majorants on the cones of monotone functions, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **266** (2022), no. 3, 407–418; MR4533033

2023год:

93. M. L. Goldman and V. D. Stepanov, *Proc. Steklov Inst. Math.* **323** (2023), no. 1, 120–129; translated from *Tr. Mat. Inst. Steklova* **323** (2023), 127–136; MR4716518

94. È. G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman and G. Z. Karshygina, Mutual coverings of cones of monotone functions and estimates of their integral majorants, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **271** (2023), no. 6, 714–732; MR4706294

2024год:

95. E. G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman, “Order-sharp estimates for decreasing rearrangements of convolutions”, *Eurasian Math. J.*, 15:4 (2024), 8–32.

96. Е. Р. Аваков, В. И. Буренков, Э. М. Галеев, М. Л. Гольдман, В. Б. Демидович, А. В. Дмитрук, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, К. Ю. Осипенко, В. Д. Степанов, В. М. Тихомиров, “Георгий Георгиевич Магарил-Ильяев (к 80-летнему юбилею)”, *Владикавк. матем. журн.*, 26:2 (2024), 133–136

2025 год:

97. Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман, “О связи вложений и накрываний конусов функций”, *Матем. сб.*, 216:3 (2025), 26–48.

К содержанию