

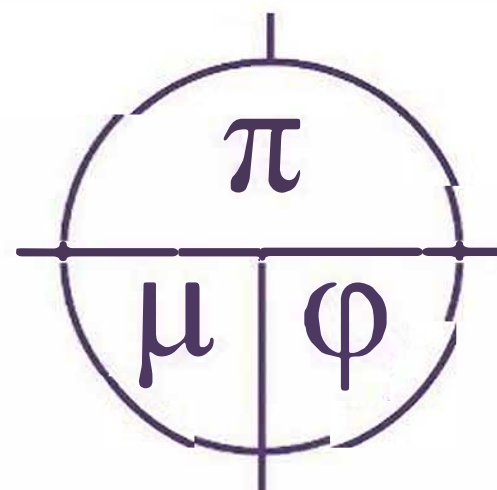


БелГУ
Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)

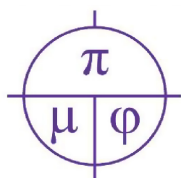
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2025. Том 57, № 3





Прикладная математика & Физика

2025. Том 57, № 3

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

А. В. Глушак, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;
Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;
Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;
Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;
Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;
Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Никуличева Т. Б., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;
Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина
Корректурa Ю. В. Мишенина
Компьютерная верстка: О. В. Чернова
Оригинал-макет: В. Б. Васильев
E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 9,9
Дата выхода 30.09.2025.
Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»
308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Соломатин Д. В.

Ранги планарности модулярных многообразий полугрупп 159

Махамуд А. А., Шишкина Э. Л.

Об уравнениях Коши – Эйлера целого и дробного порядков 172

Ройтенберг В. Ш.

Бифуркации петли сепаратрисы сшитого седло-узла в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких векторных полей 186

Архипов В. П., Глушак А. В.

О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка 193

Вирченко Ю. П., Теволде А. М.

Абсолютно непрерывные, логарифмически вогнутые унимодальные распределения 208

Кожевникова Л. М., Гилемьянова А. А.

Существование решений анизотропных эллиптических неравенств с переменными нелинейностями в неограниченных областях 224

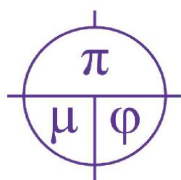
ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Кудяева Ф. Х.

Методы решения задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани 235

Великородный П. С.

Исследования в области оптимизации химического состава и термической обработки стальных шаров для мельниц 243



Applied Mathematics & Physics

2025. Volume 57, No 3

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

A. V. Glushak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Nikulicheva T.B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 9,9

Date of publishing 30.09.2025.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate

EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2025

CONTENTS

MATHEMATICS

Solomatin D. V.

Planarity Ranks of Modular Varieties of Semigroups 159

Mahamoud A. A., Shishkina E. L.

Cauchy – Euler Equation: Integer and Fractional Orders 172

Roitenberg V. Sh.

Bifurcations of a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node in a Generic Two-Parameter Family of Piecewise Smooth Vector Fields 186

Arkhipov V. P., Glushak A. V.

On the Solvability of the Initial Value Problem for a Factorized Degenerate Second-Order Differential Equation 193

Virchenko Yu. P., Tewolde A. M.

Absolutely Continuous, Log-Concave Unimodal Distributions 208

Kozhevnikova L. M., Gilemyanova A. A.

Existence of Solutions to Anisotropic Elliptic Inequalities with Variable Exponents in Unbounded Domains 224

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Kudayeva F. Kh.

Methods for Solving Problems with Phase Transitions under Low-Temperature Exposure to Biological Tissues 235

Velikorodnyy P. V.

Research in the Field of Optimization of Chemical Composition and Heat Treatment of Steel Balls for Mills 243

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 512.532
MSC 20M99
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-159-171
EDN CJVXUK

Ранги планарности модулярных многообразий полугрупп

Соломатин Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Омский государственный педагогический университет,
Россия, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, 14

solomatin_dv@omgpu.ru

Аннотация. Рангом планарности многообразия полугрупп называем наибольшее число образующих свободной полугруппы многообразия, относительно которых полугруппа допускает планарный граф Кэли. За прошедшее время, с момента когда Л. М. Мартыновым была сформулирована задача описания рангов планарности полугрупповых многообразий, было получено много конкретных результатов в этом направлении. Модулярным многообразием полугрупп называется многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. В настоящей статье вычислены точные значения рангов планарности бесконечного счетного множества всех возможных модулярных многообразий полугрупп. Оказалось, что эти значения не превосходят 3. При доказательстве в большинстве своём используются машинные вычисления. Средствами Prover9 и Mace4 проверяются равенства элементов свободных полугрупп многообразий, задаваемых тождествами в большом количестве. Для доказательства непланарности графов используется критерий Понтрягина – Куратовского, а при обосновании планарности косвенно задействован инвариант Колен де Вердьера.

Ключевые слова: модулярные многообразия, графы Кэли полугрупп, свободные полугруппы многообразий, проблема равенства слов

Для цитирования: Соломатин Д.В. Ранги планарности модулярных многообразий полугрупп. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):159–171. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-159-171 EDN CJVXUK

Original Research

Planarity Ranks of Modular Varieties of Semigroups

Denis V. Solomatin 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasilyev V. B.)

Omsk State Pedagogical University,
14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia

solomatin_dv@omgpu.ru

Abstract. By the planarity rank of a semigroup variety we mean the largest number of generators of a free semigroup of a variety with respect to which the semigroup admits a planar Cayley graph. Since the time when L.M. Martynov formulated the problem of describing the planarity ranks of semigroup varieties, many specific results have been obtained in this direction. A modular variety of semigroups is a variety of semigroups with a modular lattice of subvarieties. In this paper, we calculate the exact values of the planarity ranks of an infinite countable set of all possible modular varieties of semigroups. It turns out that these values do not exceed 3. Machine calculations are mostly used in the proof. Prover9 and Mace4 are used to check the equalities of elements of free semigroups of varieties defined by a large number of identities. To prove the non-planarity of graphs, the Pontryagin–Kuratovsky criterion is used, and the Colin de Verdière invariant is indirectly used to justify planarity.

Keywords: Modular Varieties, Cayley Graphs of Semigroups, Free Semigroups of Varieties, Word Problem

For citation: Solomatin DV. Planarity Ranks of Modular Varieties of Semigroups. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):159–171 (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-159-171 EDN CJVXUK

1. Введение. Исследование возможности представления полугрупп при помощи графов активно занимает умы современников [1], мы же рассматриваем такое представление в контексте вычисления рангов планарности полугрупповых многообразий.

Напомним [4], что модулярным многообразием полугрупп называется многообразие полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий, другими словами, с такой решёткой, в которой каждая пара элементов $a, b \in L$ модулярна, то есть справедлив закон модулярности — квазитожество: $\forall x \in L : x \leq b \Rightarrow x \vee (a \wedge b) = (x \vee a) \wedge b$. Любая немодулярная решётка содержит пятиэлементный пентагон N_5 в качестве подрешётки.

Модулярные многообразия полугрупп давно охарактеризованы разными способами. В следующей лемме приведем одну из известных характеристик на языке тождеств.

Лемма. [[4], Теорема 1 (эквациональный вариант) как результат из [3]] *Многообразие полугрупп модулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одной из следующих систем тождеств (где n — натуральное число):*

- ($m1_n$): $xy = (xy)^{n+1}$;
- ($m2_n$): $xy = x^{n+1}y$, $(xy)^{n+1} = xy^{n+1}$, $xyzt = xyx^nz$;
- ($m3_n$): $xy = xy^{n+1}$, $(xy)^{n+1} = x^{n+1}y$, $xyzt = xyt^nz$;
- ($m4_{n,\pi}$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx = yx^2 = x^{n+2}y$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m5_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx = yx^2$, $x^3yz = xy^3z$, $x^6 = x^7$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m6_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx = yx^2$, $x^2y^2z = xy^2z^2$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m7_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx = yx^2$, $x^3yz = xy^2z^2$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m8_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx$, $xy^2 = yx^2$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m9_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = yxy$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m10_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy$, $xy^2 = yx^2$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m11_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = yxy$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m12_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = xy^2$, $xyx = yxy$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m13_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy = yx^2$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m14_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy = xy^2$, $x^4y = yx^4$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m15_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yxy = xy^2$, $x^4y = yx^4$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m16_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xyx = x^2yx$, $x^3y = yx^3$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m17_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $xy^2 = yx^2$, $xyx = xyx^2$, $x^3y = yx^3$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m18_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = x^3y$, $xyx = yxy$, $x^3y = yx^3$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m19_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $xy^2 = xy^3$, $xyx = yxy$, $x^3y = yx^3$ ($\pi \in \Pi_1$);
- ($m20_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$ ($\pi \in \Pi_2$);
- ($m21$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$, $x^2yz = y^2zx$;
- ($m22$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$, $x^2yz = yzyx$;
- ($m23$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = yx^2$, $xyx = yxy$, $xyxz = yzyx$;
- ($m24_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $x^3y = yx^3$ ($\pi \in \Pi_3$);
- ($m25_\pi$): $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $x^3y = yx^3$ ($\pi \in \Pi_3$);
- ($m26$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzx$;
- ($m27$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzy$;
- ($m28$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyzy = xzyz$;
- ($m29$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yxzx$;
- ($m30$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yxzy$;
- ($m31$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyzy = xzyz$;
- ($m32$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzx$;
- ($m33$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzy$;
- ($m34$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = zxzy$;
- ($m35$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yzyx$;
- ($m36$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = x^3y$, $xy^2 = yx^2$, $xyzx = yxzy$;
- ($m37$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yxzx$;
- ($m38$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yxzy$;
- ($m39$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = zxzy$;
- ($m40$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyxz = yzyx$;
- ($m41$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = xy^3$, $xyzx = yxzy$;
- ($m42$): $xyzt = yxtz$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = (xy)^2$;
- ($m43$): $xyzt = yxtz$, $x^2y = (xy)^2$, $xy^2 = yx^2$;
- ($m44$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = (xy)^2$, $xyxz = yxzx$;
- ($m45$): $xyzt = ztxy$, $x^2y = (xy)^2$, $xy^2 = yx^2$, $xyxz = yxzx$;
- ($m46$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = y^2x$, $xy^2 = (xy)^2$, $xyzx = yxzy$;
- ($m47$): $xyzt = tzyx$, $x^2y = (xy)^2$, $xy^2 = yx^2$, $xyzx = yxzy$,

где

$$\Pi_1 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\};$$

$$\Pi_2 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34), (13)(24)\};$$

$$\Pi_3 = \{(123), (124), (134), (234), (12)(34)\}.$$

Планарные автоматы, тесным образом связанные с графами Кэли полугрупп, в частности клеточные автоматы, тоже имеют множество практических применений и активно изучаются по нескольким

причинам. Например, они используются для моделирования различных природных и искусственных систем, таких как распространение огня, рост популяций, распространение болезней и даже поведение толпы. Планарные автоматы помогают исследовать фундаментальные вопросы в теории вычислений, такие как универсальность и сложность алгоритмов. Некоторые клеточные автоматы используются в криптографических приложениях для создания сложных и устойчивых к взлому шифров, а также могут использоваться для генерации псевдослучайных чисел, что важно для различных приложений, включая статистику и моделирование.

2. Основной результат.

Определение 2.1. Пусть S – полугруппа, а X – множество образующих её элементов. Тогда *графом Кэли* $\text{Cay}(S, X)$ полугруппы S относительно множества образующих её элементов X называем ориентированный мультиграф с помеченными ребрами. Множество вершин которого совпадает с S , а вершина a соединена с вершиной b дугой, начинающейся в вершине $a \in S$, заканчивающейся в вершине $b \in S$ и помеченной элементом $x \in X$, если и только если в полугруппе S имеет место равенство $ax = b$.

Определение 2.2. Основой $\text{SCay}(S, X)$ графа Кэли $\text{Cay}(S, X)$ называем обыкновенный граф, полученный из исходного удалением петель, меток, и заменой всех дуг соединяющих одни и те же пары вершин одним ребром, соединяющим те же вершины.

Определение 2.3. Согласно известной теореме Понтрягина – Куратовского обыкновенный граф является *планарным* тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных полному графу K_5 пятого порядка или полному двудольному графу $K_{3,3}$, содержащему по три вершины в каждой из долей.

Определение 2.4. Полугруппа S допускает планарный граф Кэли $\text{Cay}(S, X)$, если относительно некоторого минимального множества неразложимых образующих X основа $\text{SCay}(S, X)$ является планарным графом.

Определение 2.5. Пусть $V = \text{var}\{\sigma\}$ – многообразие полугрупп, заданное системой тождеств σ , а $F_n(V)$ – свободная полугруппа в многообразии V , порожденная n образующими элементами. Тогда *рангом планарности многообразия* V называется такое натуральное число $r_\pi(V)$, что при $n \leq r_\pi(V)$ полугруппа $F_n(V)$ допускает планарный граф Кэли, а при $n > r_\pi(V)$ полугруппа $F_n(V)$ не допускает планарный граф Кэли.

Следующая теорема решает проблему Л. М. Мартынова [4] описания рангов планарности в классе модулярных многообразий полугрупп и содержит полный перечень рангов планарности этих многообразий.

Теорема 2.1. $r_\pi(\text{var}\{m_{11}\}) = 2$, $r_\pi(\text{var}\{m_{1n}\}) = 1$, при $n \geq 2$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{21}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{22}\}) = 2$, $r_\pi(\text{var}\{m_{2n}\}) = 1$, при $n \geq 3$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{31}\}) = 2$, $r_\pi(\text{var}\{m_{3n}\}) = 1$, при $n \geq 2$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{41\pi}\}) = 2$, $r_\pi(\text{var}\{m_{4n\pi}\}) = 1$, при $n \geq 2$, $\pi \in \Pi_1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{5\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{6\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{7\pi}\}) = 1$, при $\pi \in \Pi_1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{8\pi}\}) = 2$, при $\pi \in \Pi_1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{9\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{10\pi}\}) = 1$, при $\pi \in \Pi_1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{11\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{12\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{13\pi}\}) = 2$, при $\pi \in \Pi_1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{14\pi}\}) = 3$, при $\pi \in \Pi_1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{N\pi}\}) = 2$, при $\pi \in \Pi_1$, где $N = 15 \div 19$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{20\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{21}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{22}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{23}\}) = 1$, при $\pi \in \Pi_2$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{24\pi}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{25\pi}\}) = 2$, при $\pi \in \Pi_3$.

$r_\pi(\text{var}\{m_N\}) = 2$, где $N = 26 \div 42$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{43}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{45}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{47}\}) = 1$.

$r_\pi(\text{var}\{m_{44}\}) = r_\pi(\text{var}\{m_{46}\}) = 2$.

Доказательство. Основная проблема, которую приходится решать при составлении графов Кэли в общем случае – это алгоритмически неразрешимая проблема равенства слов в полугруппе. Так, например, запрос подробного доказательства равенства $abbaba = ababba$ элементов свободной полугруппы многообразия, заданного тождеством (m_{12}) в Prover9 имеет вид:

`formulas(assumptions).(x*y)*z=x*(y*z).x1*x2=(((x1*x2)*x1)*x2)*x1*x2.end_of_list.`

`formulas(goals).(((c1*c2)*c2)*c1)*c2=(((c1*c2)*c1)*c2)*c2*c1.end_of_list.`

Полученное подробное доказательство занимает 128 преобразований. Кратко доказательство данного равенства звучит так:

1. $xuyxux = xuyxux$; доказываемое равенство

2. $(xy)z = x(yz)$; исходное

3. $xy = xuyxux$; исходное

4. $xuyxux = xy$; применили 3

5. $xyz = xuyxuxz$; применили 2 к 4

6. $xuyxuxz = xuz$; применили 5

при $m \geq 2$. В частности, граф $\text{Cay}(F_3(\text{var}\{m1_2\}), \{x_1, x_2\})$ содержит представленный на рисунке [5, рис. 2] подграф, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$.

$m2$:

Плоская укладка графа $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b\})$ и схема плоской укладки одной из двух изоморфных связных компонент графа $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b\})$ представлены на рис. 2.

В графе $\text{SCay}(F_3(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу K_5 на следующих попарно непересекающихся маршрутах между вершинами, являющимися элементами множества $\{abc, abac, abca, abcb, abc^2\}$: $abc - ab - aba - abac$; $abc - abca$; $abc - abcb$; $abc - abc^2$; $abac - abca$; $abac - abcb$; $abac - abc^2$; $abca - abcb$; $abca - abc^2$; $abcb - abc^2$. Следовательно, граф Кэли свободной полугруппы многообразия $\text{var}\{m2_1\}$ относительно трех и более образующих не является планарным. В $\text{SCay}(F_3(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b, c\})$ аналогичным образом обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ на маршрутах между вершинами из множества $\{ab, aba^2, ab^3\}$ в одной доле и $\{aba, ab^2, abc\}$ в другой: $ab - aba$; $ab - ab^2$; $ab - abc$; $aba^2 - aba$; $aba^2 - ab^2$; $aba^2 - abc$; $aba^2 - aba^2c - abca - abc$; $ab^3 - aba$; $ab^3 - ab^2$; $ab^3 - abc$. А далее в $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_n\}), \{a, b\})$, при $n \geq 3$, обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$, в частности для $n = 3$ на маршрутах между вершинами из множества $\{ab^2, aba^2, aba\}$ в одной доле и $\{aba^3, ab^3, (ab)^2b\}$ в другой: $ab^2 - aba^3$; $ab^2 - ab^3$; $ab^2 - aba^2a - ab^2a^2 - ab^2a^2b - ab^2a^2ba - aba^2(ba)^2 - (ab)^2ba^2 - (ab)^2ba - (ab)^2b$; $aba^2 - aba^3$; $aba^2 - aba^2b - aba^2ba - a(ba^2)^2 - a(ba^2)^2a - ab^3ab^2 - ab^3ab - ab^3a - ab^3$; $aba^2 - (ab)^2b^2 - (ab)^2b$; $aba - aba^3$; $aba - ab^4 - ab^3$; $aba - (ab)^2 - (ab)^2b$. Интуитивно значение $r_\pi(\text{var}\{m2_n\}) = 1$, при $n \geq 3$, обусловлено тем, что в каждом многообразии $\text{var}\{m2_n\}$, при $n \geq 3$, выполнено тождество $x^2 = x^{n+2}$, при $n \geq 3$ приводящее к появлению простого цикла из трех и более элементов, как при выполнении тождества $x = x^n$, при $n \geq 4$, для многообразия, порожденного которым ранг планарности равен 1 [3, Теорема].

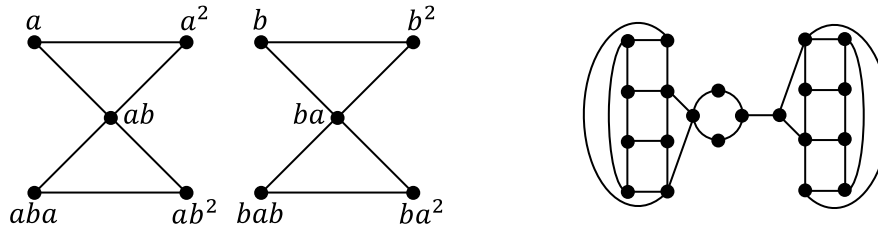


Рис. 2. Плоская укладка пары изоморфных компонент, формирующих граф $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b\})$ [слева] и схема плоской укладки одной из двух изоморфных компонент, формирующих граф $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b\})$ [справа]

Fig. 2. Planar embedding of a pair of isomorphic components forming the graph $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_1\}), \{a, b\})$ [left] and a diagram of the planar embedding of one of the two isomorphic components forming the graph $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m2_2\}), \{a, b\})$ [right]

$m3$:

Плоская укладка графа $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b\})$ представлена на рис. 3.

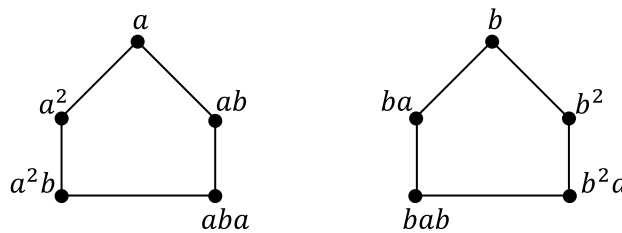


Рис. 3. Плоская укладка графа $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b\})$
Fig. 3. Planar embedding of the graph $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b\})$

В графе $\text{SCay}(F_3(\text{var}\{m3_1\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$, так как присутствуют следующие попарно непересекающиеся маршруты между вершинами из множеств $\{a^2, a^2bc, aba\}$ и $\{ab, a^2b, a^2cb\}$: $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^2c - a^2cb$; $a^2bc - abca - abc - ab$; $a^2bc - a^2b$; $a^2bc - a^2cb$; $aba - ab$; $aba - a^2b$; $aba - abac - a^2cb$.

В графе $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_2\}), \{a, b\})$ есть пути между вершинами из множеств $\{a^2, aba, ab^2a\}$ и $\{a^3b, a^2b, ab\}$: $a^2 - a^3 - a^3b$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab$; $aba - a^3b$; $aba - (ab)^2 - a^2ba^2 - a^2ba - a^2b$; $aba - ab$; $ab^2a - a^3b^2 - a^3b$; $ab^2a - a^2b$; $ab^2a - ab^2 - ab$. В графе $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_3\}), \{a, b\})$ соответственно есть пути между вершинами из множеств $\{a^2, aba, ab^2\}$ и $\{a^4b, a^2b, ab\}$: $a^2 - a^4 - a^4b$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab$; $aba - a^4b$; $aba - (ab)^2 - (ab)^2a - (ab)^2a^2 - a^3b^2ab - a^3b^2a - a^3b^2 - a^3b - a^2b^3a - a^2b^3 - a^2b$; $aba - ab$; $ab^2 - ab^2a - a^4b^2 - a^4b$; $ab^2 - ab^3 - ab^3a - a^2b$; $ab^2 - ab$, с выделенными изменениями. А в общем случае в графе $\text{SCay}(F_2(\text{var}\{m3_n\}), \{a, b\})$, где $n > 3$, находим пути между вершинами из множеств $\{a^2, aba, ab^2\}$ и $\{a^{n+1}b, a^2b, ab\}$: $a^2 - a^{n+1} - a^{n+1}b$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab$; $aba - a^{n+1}b$; $aba - (ab)^2 - (ab)^2a - (ab)^2a^2 - \dots - a^2b$; $aba - ab$; $ab^2 - \dots - a^{n+1}b^2 - a^{n+1}b$; $ab^2 - ab^3 - \dots - a^2b$; $ab^2 - ab$.

$m4$:

Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$ представлена на рис. 4.

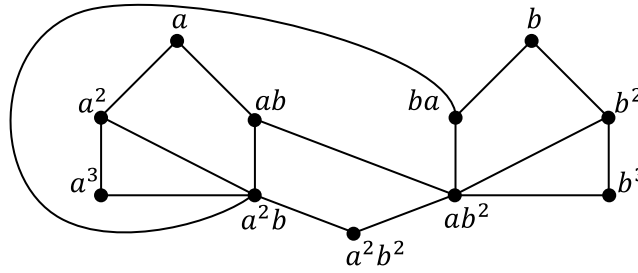


Рис. 4. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$

Fig. 4. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$

Наличие подграфа гомеоморфного графу $K_{3,3}$ в основе графа Кэли 3-порожденной полугруппы $F_3(\text{var}\{m4_{1,(123)}\})$ обусловлено существованием следующих попарно непересекающихся маршрутов между вершинами множества $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ab - ab^2 - b^2$; $a - ac - ac^2 - c^2$; $b - ba - a^2b - a^2$; $b - b^2$; $b - bc - bc^2 - c^2$; $c - ca - a^2c - a^2$; $c - cb - b^2c - b^2$; $c - c^2$.

В основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m4_{2,(123)}\})$ подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ формируют маршруты между вершинами из множеств $\{a^2, a^2b^2, ba\}$ и $\{a^3b^2, a^2b, ab^2\}$: $a^2 - a^3 - a^3b - a^3b^2$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab - ab^2$; $a^2b^2 - a^3b^2$; $a^2b^2 - a^2b$; $a^2b^2 - ab^2$; $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^2b^3 - a^3b^3 - a^3b^2$; $ba - a^2b$; $ba - ab^2$.

В основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m4_{3,(123)}\})$ подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ формируют маршруты между вершинами из множеств $\{a^2, a^4, a^3b\}$ и $\{a^3, a^2b, a^4b\}$: $a^2 - a^3$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab - ab^2 - a^2b^2 - a^4b^2 - a^4b$; $a^4 - a^3$; $a^4 - a^5 - a^2b$; $a^4 - a^4b$; $a^3b - a^3$; $a^3b - a^2b$; $a^3b - a^4b$. Аналогично в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m4_{4,(123)}\})$ подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ формируют маршруты между вершинами из множеств $\{a^2, a^4, a^3b\}$ и $\{a^3, a^2b, a^4b\}$: $a^2 - a^3$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab - ab^2 - a^2b^2 - a^3b^2 - a^4b^2 - a^4b$; $a^4 - a^3$; $a^4 - a^5 - a^6 - a^2b$; $a^4 - a^4b$; $a^3b - a^3$; $a^3b - a^2b$; $a^3b - a^4b$, с выделенными отличающимися элементами. Для каждого $n > 4$ в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m4_{n,(123)}\})$ подграф гомеоморфный графу $K_{3,3}$ формируют маршруты между вершинами из множеств $\{a^2, a^4, a^3b\}$ и $\{a^3, a^2b, a^4b\}$: $a^2 - a^3$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a - ab - ab^2 - a^2b^2 - a^3b^2 - \dots - a^4b^2 - a^4b$; $a^4 - a^3$; $a^4 - a^5 - a^6 - \dots - a^2b$; $a^4 - a^4b$; $a^3b - a^3$; $a^3b - a^2b$; $a^3b - a^4b$.

Для любой перестановки $\pi \in \Pi_1$ основа графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m4_{1,\pi}\})$ изоморфна $SCay(F_2(\text{var}\{m4_{1,(123)}\}), \{a, b\})$, плоская укладка которого представлена на Рис.4. А при $n > 1$ в $F_2(\text{var}\{m4_{n,\pi}\})$ обнаруживаются те же запрещенные конфигурации, что и в $F_2(\text{var}\{m4_{n,(123)}\})$.

$m5$:

Более того, для любой перестановки $\pi \in \Pi_1$ в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m5_\pi\})$ присутствует гомеоморфный $K_{3,3}$ подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a^2, ba, a^2b^2\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^4b\}$: $a^2 - a - ab - ab^2$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3 - a^4 - a^4b$; $ba - ab^2$; $ba - a^2b$; $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^4b$; $a^2b^2 - ab^2$; $a^2b^2 - a^2b$; $a^2b^2 - a^4b$.

$m6$:

Аналогично для любой перестановки $\pi \in \Pi_1$ в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m6_\pi\})$ присутствует гомеоморфный $K_{3,3}$ подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a^2, ba, a^2b^2\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^2b^3\}$: $a^2 - a - ab - ab^2$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3 - a^4 - a^5 - a^5b$; $ba - ab^2$; $ba - a^2b$; $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^2b^3$; $a^2b^2 - ab^2$; $a^2b^2 - a^2b$; $a^2b^2 - a^2b^3$.

$m7$:

Для любой перестановки $\pi \in \Pi_1$ в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m7_\pi\})$ присутствует гомеоморфный $K_{3,3}$ подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a^2, ba, a^2b^2\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^4b\}$: $a^2 - a - ab - ab^2$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3 - a^4 - a^4b$; $ba - ab^2$; $ba - a^2b$; $ba - b - b^2 - b^3 - ab^3 - a^4b$; $a^2b^2 - ab^2$; $a^2b^2 - a^2b$; $a^2b^2 - a^4b$.

$m8$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m8_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 5.

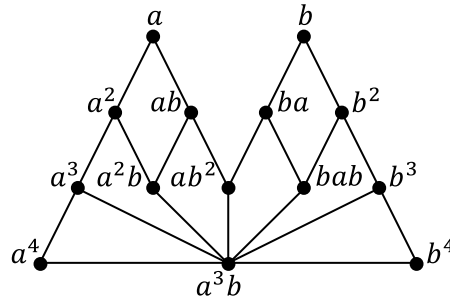


Рис. 5. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m8_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 5. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m8_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

При дальнейшем увеличении числа образующих в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m8_\pi\}), \{a, b, c\})$, при $\pi \in \Pi_1 \setminus \{(234)\}$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, a^2b, ab^2\}$ и $\{a^3b, a^2bc, ab\}$: $a^2 - a^3 - a^3b$; $a^2 - a^2c - a^2bc$; $a^2 - a - ab$; $a^2b - a^3b$; $a^2b - a^2bc$; $a^2b - ab$; $ab^2 - a^3b$; $ab^2 - a^2bc$; $ab^2 - ab$. Для исключенного случая, в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m8_{(234)}\}), \{a, b, c\})$, легко обнаружить гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab, ac\}$ и $\{a, a^2b, ab^2\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3 - a^3b - ab^2$; $ab - a$; $ab - a^2b$; $ab - ab^2$; $ac - a$; $ac - a^2c - a^2bc - a^2b$; $ac - ac^2 - ca - c - cb - bc^2 - bc - b - ba - ab^2$.

m9:

Для любой перестановки $\pi \in \Pi_1$ в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m9_\pi\})$ присутствует гомеоморфный $K_{3,3}$ подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, ba, a^3b\}$ и $\{aba, ab^2, a^2b\}$: $ab - aba$; $ab - ab^2$; $ab - a - a^2 - a^2b$; $ba - aba$; $ba - ab^2$; $ba - b - b^2 - a^2b$; $a^3b - aba$; $a^3b - ab^2$; $a^3b - a^2b$.

m10:

Для любой перестановки $\pi \in \Pi_1$ в основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m10_\pi\})$ присутствует гомеоморфный $K_{3,3}$ подграф на попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{ab, ba, a^3b\}$ и $\{aba, ab^2, a^2b\}$: $ab - aba$; $ab - ab^2$; $ab - a - a^2 - a^2b$; $ba - b - b^2 - aba$; $ba - ab^2$; $ba - a^2b$; $a^3b - aba$; $a^3b - ab^2$; $a^3b - a^2b$.

m11:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m11_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 6.

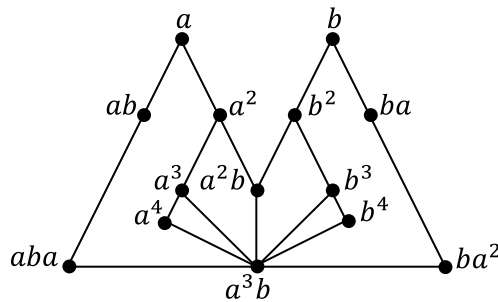


Рис. 6. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m11_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 6. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m11_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

А в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m11_\pi\}), \{a, b, c\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами, являющимися элементами из множества $\{a, a^3, a^2b\}$ и $\{a^2, a^3b, a^3c\}$: $a - a^2$; $a - ab - aba - a^3b$; $a - ac - aca - a^3c$; $a^3 - a^2$; $a^3 - a^3b$; $a^3 - a^3c$; $a^2b - a^2$; $a^2b - a^3b$; $a^2b - b^2 - b^2c - c^2 - a^2c - a^3c$.

m12:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m12_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 7.

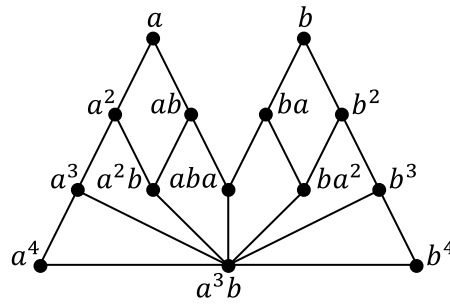


Рис. 7. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m12_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 7. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m12_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

В графе $SCay(F_3(\text{var}\{m12_\pi\}), \{a, b, c\})$, при каждом значении $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, aba, a^2b\}$ и $\{ab, a^3b, a^2bc\}$: $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^3 - a^3b$; $a^2 - a^2c - a^2bc$; $aba - ab$; $aba - a^3b$; $aba - a^2bc$; $a^2b - ab$; $a^2b - a^3b$; $a^2b - a^2bc$. А при оставшихся $\pi \in \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ легко обнаружить маршруты между вершинами из $\{a^2, ab, ac\}$ и $\{a, a^2b, aba\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3 - a^3b - aba$; $ab - a$; $ab - a^2b$; $ab - aba$; $ac - a$; $ac - a^2c - a^2bc - a^2b$; $ac - aca - ca - c - cb - bcb - bc - b - ba - aba$.

m13:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m13_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 8. А уже в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m13_\pi\}), \{a, b, c\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$: $a - a^2$; $a - ab - aba - b^2$; $a - ac - aca - c^2$; $b - ba - a^2b - a^2$; $b - b^2$; $b - bc - bcb - c^2$; $c - ca - a^2c - a^2$; $c - cb - b^2c - b^2$; $c - c^2$.

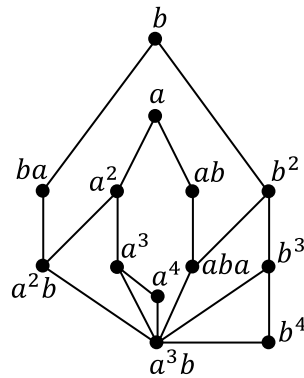


Рис. 8. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m13_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 8. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m13_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

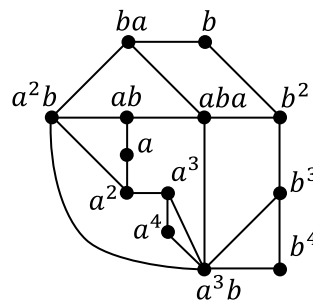
m14:

Полугруппа $F_3(\text{var}\{m14_\pi\})$ имеет 34 элемента. Дабы не загромождать доказательство, не будем приводить плоскую укладку основы графа Кэли этой полугруппы, а воспользуемся инвариантом Колен де Вердьера [6]. Матрица смежности графа $SCay(F_3(\text{var}\{m14_\pi\}), \{a, b, c\})$ графически изображена на рис. 9, где в массиве из 34×34 точек черная точка означает наличие ребра, а белая – его отсутствие между вершинами из соответствующей строки и столбца. Инвариант Колен де Вердьера определяется похожим на матрицу смежности образом. А именно, для простого графа G без петель и кратных ребер на n вершинах, инвариантом Колен де Вердьера $\mu(G)$ является наибольший коранг такой квадратной матрицы M порядка n с действительными коэффициентами, что её недиагональные элементы в строке i столбца j являются отрицательными числами, когда вершина i смежна с вершиной j в графе G , в противном случае эти элементы равны нулю. Кроме того, матрица M должна иметь ровно одно отрицательное собственное значение кратности 1 (то есть быть диагонализированной) и не существует такой ненулевой матрицы X с действительными коэффициентами, что $MX = O$ и $X_{i,j} = 0$ всякий раз, когда $i = j$ или $M_{i,j} \neq 0$ (то есть i и j являются смежными). Максимизация коранга достигается изменением диагональных элементов матрицы M в целях минимизации её ранга. Чтобы достичь указанных в определении инварианта Колен де Вердьера ограничений, можно взять матрицу смежности графа G в качестве отправной точки, изменить знаки всех её элементов на противоположные и на пересечении i строки i столбца диагональными элементами поставить i , при $i > 1$, и -1 для $i = 1$, это обеспечит дальнейшую диагонализацию получившейся матрицы M , то есть приведет к единственному отрицательному собственному числу кратности 1. После этого минимизировать ранг сформированной матрицы. Граф G оказывается планарным тогда и только тогда, когда $\mu(G) \leq 3$. В рассматриваемом случае имеем $\mu(SCay(F_3(\text{var}\{m14_\pi\}), \{a, b, c\})) \leq 3$.

Рис. 9. Матрица смежности графа $SCay(F_3(\text{var}\{m14_\pi\}), \{a, b, c\})$ Fig. 9. Adjacency matrix of the graph $SCay(F_3(\text{var}\{m14_\pi\}), \{a, b, c\})$

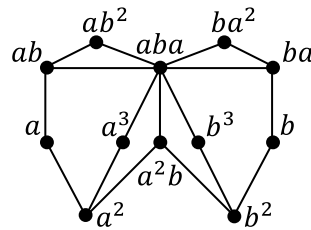
$m10$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m15_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 10. А в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m15_\pi\}), \{a, b, c\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, обнаруживается такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m13_\pi\}), \{a, b, c\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на маршрутах между вершинами из $\{a, b, c\}$ и $\{a^2, b^2, c^2\}$.

Рис. 10. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m15_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$ Fig. 10. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m15_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

$m16$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m16_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 11. А в графе $SCay(F_3(\text{var}\{m16_\pi\}), \{a, b, c\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a, a^3, a^2b\}$ и $\{a^2, aba, aca\}$: $a - a^2$; $a - ab - aba$; $a - ac - aca$; $a^3 - a^2$; $a^3 - aba$; $a^3 - aca$; $a^2b - a^2$; $a^2b - aba$; $a^2b - b^2 - b^2c - c^2 - c - ca - aca$.

Рис. 11. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m16_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$ Fig. 11. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m16_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

$m17$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m17_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 12.

В графе $SCay(F_3(\text{var}\{m17_\pi\}), \{a, b, c\})$, при любом $\pi \in \{(123), (124), (134), (234), (13)(24)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (14)(23)\}$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, aba, aca\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3$; $aba - ab - a$; $aba - a^2b$; $aba - a^3$; $aca - ac - a$; $aca - a^2bc - a^2b$; $aca - a^3$.

В графе $SCay(F_3(\text{var}\{m17_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$ наличие гомеоморфного графу $K_{3,3}$ подграфа обусловлено существованием маршрутов между вершинами из $\{a^2, aba, aca\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3$; $aba - ab - a$; $aba - a^2b$; $aba - a^3$; $aca - ac - a$; $aca - a^2c - a^2bc - a^2b$; $aca - a^3$. А в оставшемся графе $SCay(F_3(\text{var}\{m17_{(14)(23)}\}), \{a, b, c\})$ наличие гомеоморфного графу $K_{3,3}$ подграфа обусловлено существованием маршрутов между вершинами из $\{a^2, aba, aca\}$ и $\{a, a^2c, a^3\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^2c$; $a^2 - a^3$; $aba - ab - a$; $aba - a^2bc - a^2c$; $aba - a^3$; $aca - ac - a$; $aca - a^2c$; $aca - a^3$.

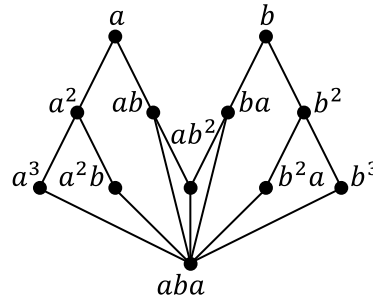


Рис. 12. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m17_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 12. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m17_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

$m18$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m18_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 13.

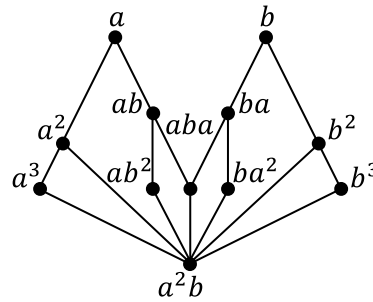


Рис. 13. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m18_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 13. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m18_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

В графе $SCay(F_3(\text{var}\{m18_\pi\}), \{a, b, c\})$, при каждом значении $\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, aba, ab^2\}$ и $\{ab, a^2b, a^2bc\}$: $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^2c - a^2bc$; $aba - ab$; $aba - a^2b$; $aba - a^2bc$; $ab^2 - ab$; $ab^2 - a^2b$; $ab^2 - a^2bc$. А при оставшихся $\pi \in \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ можно обнаружить маршруты между вершинами из $\{a^2, b^2, a^2bc\}$ и $\{ab, a^2b, a^2c\}$: $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^2c$; $b^2 - b - ba - aba - ab$; $b^2 - a^2b$; $b^2 - b^2c - c^2 - a^2c$; $a^2bc - ab^2 - ab$; $a^2bc - a^2b$; $a^2bc - a^2c$.

$m19$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m19_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представлена на рис. 14.

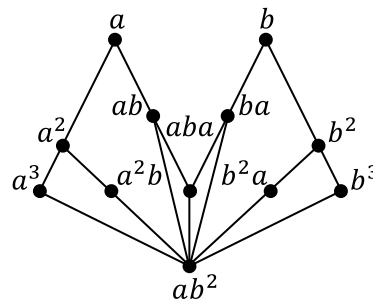


Рис. 14. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{m19_\pi\}), \{a, b\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$
 Fig. 14. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{m19_\pi\}), \{a, b\})$, for any $\pi \in \Pi_1$

В графе $SCay(F_3(\text{var}\{m19_\pi\}), \{a, b, c\})$, при каждом значении

$$\pi \in \{(123), (124), (134), (234)\} = \Pi_1 \setminus \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\},$$

обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^3, a^2b\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^3$; $a^2 - a^2b$; $ab^2 - ab - a$; $ab^2 - a^3$; $ab^2 - a^2b$; $ac^2 - ac - a$; $ac^2 - a^3$; $ac^2 - a^2bc - a^2b$. При $\pi \in \{(12)(34), (13)(24)\}$, на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^3, a^2b\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^3$; $a^2 - a^2b$; $ab^2 - ab - a$; $ab^2 - a^3$; $ab^2 - a^2b$; $ac^2 - ac - a$; $ac^2 - a^3$; $ac^2 - a^2c - a^2bc - a^2b$. А при оставшемся $\pi = (14)(23)$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^3, a^2c\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^3$; $a^2 - a^2c$; $ab^2 - ab - a$; $ab^2 - a^3$; $ab^2 - a^2bc - a^2c$; $ac^2 - ac - a$; $ac^2 - a^3$; $ac^2 - a^2c$.

$m20 \div 23$:

В графах $SCay(F_2(\text{var}\{m20_\pi\}), \{a, b\})$, при любом значении $\pi \in \Pi_2$, $SCay(F_2(\text{var}\{m21\}), \{a, b\})$, $SCay(F_2(\text{var}\{m22\}), \{a, b\})$ и $SCay(F_2(\text{var}\{m23\}), \{a, b\})$, обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из множества $\{a^2b, aba, ab^2\}$ и $\{ba, ab, a^3b\}$: $a^2b - ba$; $a^2b - a^2 - a - ab$; $a^2b - a^3b$; $aba - ba$; $aba - ab$; $aba - a^3b$; $ab^2 - b^2 - b - ba$; $ab^2 - ab$; $ab^2 - a^3b$.

$m24$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m24_\pi\})$, при любой перестановке $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$, представлена на рис. 15 слева. Заметим, что она изоморфна основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m18_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представленной на рис. 13. А плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m24_{(12)(34)}\})$ представлена на рис. 15 справа.

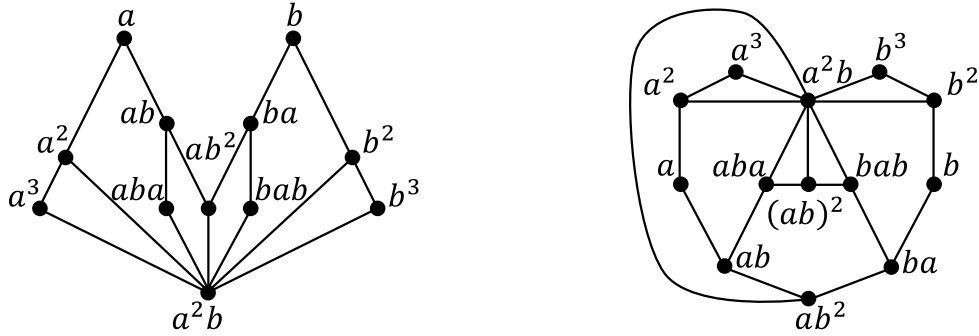


Рис. 15. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$, где $\sigma_1 \in \{m24_\pi, m27, m28, m32\}$, при любом $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ [слева] и $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$, где $\sigma_2 \in \{m24_{(12)(34)}, m26, m36\}$ [справа]
Fig. 15. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$, where $\sigma_1 \in \{m24_\pi, m27, m28, m32\}$, for any $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ [on the left] $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$, where $\sigma_2 \in \{m24_{(12)(34)}, m26, m36\}$ [right]

Увеличив число образующих, в $SCay(F_3(\text{var}\{m24_\pi\}), \{a, b, c\})$, при $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$, обнаруживаем гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, aba, ab^2\}$ и $\{ab, a^2b, a^2bc\}$: $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^2c - a^2bc$; $aba - ab$; $aba - a^2b$; $aba - a^2bc$; $ab^2 - ab$; $ab^2 - a^2b$; $ab^2 - a^2bc$. А в оставшемся графе $SCay(F_3(\text{var}\{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф есть на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, b^2, a^2bc\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$: $a^2 - a - ab - ab^2$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^2c$; $b^2 - b - ba - ab^2$; $b^2 - a^2b$; $b^2 - b^2c - c^2 - a^2c$; $a^2bc - ab^2$; $a^2bc - a^2b$; $a^2bc - a^2c$.

$m25$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m25_\pi\})$, при $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$, представлена на рис. 16 слева. Заметим, что она как и в случае $F_2(\text{var}\{m24_\pi\})$ изоморфна основе графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m18_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_1$, представленной на рис. 13. А плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var}\{m25_{(12)(34)}\})$ представлена на рис. 16 справа.

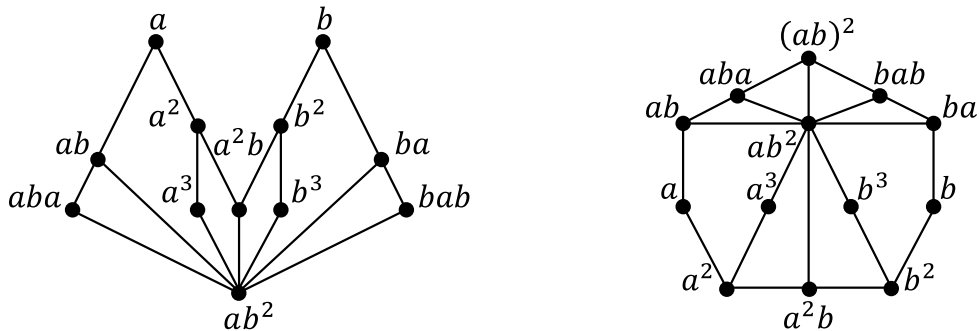


Рис. 16. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$, для $\sigma_1 \in \{m25_\pi, m30, m31, m37, m38, m39, m40\}$, при любом $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ [слева] и $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$, для $\sigma_2 \in \{m25_{(12)(34)}, m29, m41\}$ [справа]
Fig. 16. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_1\}), \{a, b\})$, for $\sigma_1 \in \{m25_\pi, m30, m31, m37, m38, m39, m40\}$, for any $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$ [left] and $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma_2\}), \{a, b\})$, for $\sigma_2 \in \{m25_{(12)(34)}, m29, m41\}$ [right]

Увеличив число образующих, в графах $SCay(F_3(\text{var}\{m25_\pi\}), \{a, b, c\})$, при любой перестановке $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12) (34)\}$, и в не изоморфном им графе $SCay(F_3(\text{var}\{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, обнаруживаем гомеоморфный графу $K_{3,3}$ один и тот же подграф на следующих маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$: $a^2 - a$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3$; $ab^2 - ab - a$; $ab^2 - a^2b$; $ab^2 - a^3$; $ac^2 - ac - a$; $ac^2 - ca - c - c^2 - b^2c - b^2 - a^2b$; $ac^2 - a^3$.

$m26$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m26\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\})$, представлена на рис. 15 справа. А в $SCay(F_3(\text{var } \{m26\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, b^2, a^2bc\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$.

$m27 \div 28$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп $F_2(\text{var } \{m27\})$ и $F_2(\text{var } \{m28\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m24_\pi\})$, при любой перестановке $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$, представлена на рис. 15 слева. И в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m27\}), \{a, b, c\})$ с графом $SCay(F_3(\text{var } \{m28\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, b^2, a^2bc\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$.

$m29$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m29\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\})$ представлена на рис. 16 справа. И в $SCay(F_3(\text{var } \{m29\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$.

$m30 \div 31$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп $F_2(\text{var } \{m30\})$ и $F_2(\text{var } \{m31\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m25_\pi\})$, при каждой перестановке $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$, представлена на рис. 16 слева. А в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m30\}), \{a, b, c\})$ и в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m31\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$.

$m32 \div 35$:

Для всех $\sigma \in \{m32, m33, m34, m35\}$ плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{\sigma\})$ как и $F_2(\text{var } \{m27\})$, $F_2(\text{var } \{m28\})$, совпадает с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m24_\pi\})$, при любом $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$, и представлена на рис. 15 слева. А в графе $SCay(F_3(\text{var } \{\sigma\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, b^2, a^2bc\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$.

$m36$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m36\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\})$, представлена на рис. 15 справа. А в $SCay(F_3(\text{var } \{m36\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m24_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, b^2, a^2bc\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^2c\}$.

$m37 \div 40$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп $F_2(\text{var } \{m37\})$, $F_2(\text{var } \{m38\})$, $F_2(\text{var } \{m39\})$ и $F_2(\text{var } \{m40\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m25_\pi\})$, при $\pi \in \Pi_3 \setminus \{(12)(34)\}$, представлена на рис. 16 слева. А в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m37\}), \{a, b, c\})$, $SCay(F_3(\text{var } \{m38\}), \{a, b, c\})$, $SCay(F_3(\text{var } \{m39\}), \{a, b, c\})$ и $SCay(F_3(\text{var } \{m40\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф как в $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$.

$m41$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m41\})$, совпадающая с плоской укладкой основы графа Кэли полугруппы $F_2(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\})$, представлена на рис. 16 справа. А в $SCay(F_3(\text{var } \{m41\}), \{a, b, c\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф такой же, как в графе $SCay(F_3(\text{var } \{m25_{(12)(34)}\}), \{a, b, c\})$, на маршрутах между вершинами из $\{a^2, ab^2, ac^2\}$ и $\{a, a^2b, a^3\}$.

$m42, m44, m46$:

Плоская укладка основы графа Кэли полугрупп $F_2(\text{var } \{m42\})$, $F_2(\text{var } \{m44\})$ и $F_2(\text{var } \{m46\})$ представлена на рис. 17.

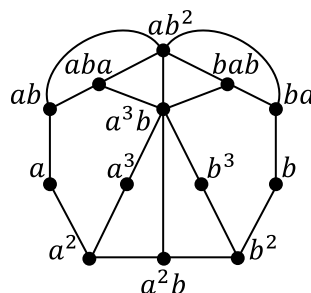


Рис. 17. Плоская укладка графа $SCay(F_2(\text{var } \{\sigma\}), \{a, b\})$, при любом $\sigma \in \{m42, m44, m46\}$

Fig. 17. Planar embedding of the graph $SCay(F_2(\text{var}\{\sigma\}), \{a, b\})$, for any $\sigma \in \{m42, m44, m46\}$

А при дальнейшем увеличении числа образующих, начиная с трех, в графах $SCay(F_3(\text{var}\{m42\}), \{a, b, c\})$, $SCay(F_3(\text{var}\{m44\}), \{a, b, c\})$ и $SCay(F_3(\text{var}\{m46\}), \{a, b, c\})$ уже обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a^2, b^2, a^3b\}$ и $\{ab^2, a^2b, a^3\}$: $a^2 - a - ab - ab^2$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3$; $b^2 - b - ba - ab^2$; $b^2 - a^2b$; $b^2 - b^2c - c^2 - a^2c - a^3c - a^3$; $a^3b - ab^2$; $a^3b - a^2b$; $a^3b - a^3$.

$m43, m45, m47$:

В основе графа Кэли полугрупп $F_2(\text{var}\{m43\})$, $F_2(\text{var}\{m45\})$ и $F_2(\text{var}\{m47\})$ обнаруживается гомеоморфный графу $K_{3,3}$ подграф на следующих попарно непересекающихся маршрутах между вершинами из множеств $\{a^2, aba, ab^2\}$ и $\{ab, a^2b, a^3b\}$: $a^2 - a - ab$; $a^2 - a^2b$; $a^2 - a^3 - a^3b$; $aba - ab$; $aba - a^2b$; $aba - a^3b$; $ab^2 - ab$; $ab^2 - ba - b - b^2 - a^2b$; $ab^2 - a^3b$.

Таким образом, было осуществлено обоснование найденных значений рангов планарности представленных в доказываемой теореме модулярных многообразий полугрупп. Теорема 1 доказана.

3. Заключение. В работе рассмотрены все возможные модулярные многообразия полугрупп, вычислены ранги планарности каждого из них. Как оказалось, значения рангов планарности бесконечного счетного числа всех возможных модулярных многообразий полугрупп не превосходят 3.

Список литературы

1. Knauer K. and Surroca G.P.i. On monoid graphs. *Mediterr. J. Math.* 20, No. 1, Paper No. 26, 2023, 24 p.
2. Верников Б.М. Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия. *Известия УрГУ*, №22, 2002, С.16–42.
3. Волков М.В. Тождества в решетках многообразий полугрупп: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1994.
4. Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара. *Омский алгебраический семинар* 12 ноября 2015 г. – URL: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> (дата обращения: 25.01.2025). – Режим доступа: для зарегистр. пользователей.
5. Соломатин Д.В. Ранги планарности многообразий полугрупп, заданных тождеством $x^n \approx x$. *Вестник Омского университета*, 2020. Т. 25, № 3. С. 13–17.
6. Yves Colin de Verdière. Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité. *Journal of combinatorial theory*, Series B 50, 11–21 (1990).

References

1. Knauer K. and Surroca G.P.i. On monoid graphs. *Mediterr. J. Math.* 20, No. 1, Paper No. 26, 2023, 24 p.
2. Vernikov B.M. Semimodular and Desarguesian varieties of semigroups: forbidden subvarieties. *Izvestia of Ural State University*, No. 22, 2002, P.16–42. (In Russ.)
3. Volkov M.V. Identities in lattices of varieties of semigroups: Diss. ... *Doctor of Physical and Mathematical Sciences*. St. Petersburg, 1994. (In Russ.)
4. New problems of algebra and logic. Anniversary 900th meeting of the seminar. *Omsk algebraic seminar* November 12, 2015. – URL: <https://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900> (date of access: 01/25/2025). – Access mode: for registered users.
5. Solomatin D.V. Planarity ranks of varieties of semigroups defined by the identity $x^n \approx x$. *Bulletin of Omsk University*, 2020. Vol. 25, No. 3. P. 13–17. (In Russ.)
6. Yves Colin de Verdière. Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité. *Journal of combinatorial theory*, Series B 50, 11–21 (1990).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 25.01.2025

Поступила после рецензирования 04.08.2025

Принята к публикации 06.08.2025

Received January 25, 2025

Revised August 4, 2025

Accepted August 6, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Denis V. Solomatin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

[К содержанию](#)

Об уравнениях Коши – Эйлера целого и дробного порядков

Махамуд А. А.¹, Шишкина Э. Л.^{2,3}

¹ Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
1269765@bsuedu.ru

² Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1

³ Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Россия, 364024, г. Грозный, ул. А. Шерипова, 32
ilina_dico@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе исследуются уравнения Коши – Эйлера целого и дробного порядков. Анализируется и используется тот факт, что операторы, входящие в такие уравнения, тесно связаны с числами Стирлинга второго рода и их обобщениями дробного порядка. Предложена конечно-разностная интерпретация оператора $(x \frac{d}{dx})^n$. Рассмотрено применение преобразования Меллина для решения неоднородных уравнений Коши – Эйлера целого и дробного порядков.

Ключевые слова: уравнение Коши – Эйлера, дифференциальный оператор Коши – Эйлера, числа Стирлинга второго рода, функции Стирлинга второго рода, дробные производные Адамара, преобразование Меллина

Благодарности: Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEES-2023-0003).

Для цитирования: Махамуд А.А., Шишкина Э.Л. Об уравнениях Коши – Эйлера целого и дробного порядков. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):172–185. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-172-185 EDN IRORTQ

Original Research

Cauchy – Euler Equation: Integer and Fractional Orders

Ahmat A. Mahamoud¹, Elina L. Shishkina^{2,3}

¹ Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
1269765@bsuedu.ru

² Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh 394018, Russia

³ Kadyrov Chechen State University,
32 A. Sheripova St., Grozny 364024, Russia
ilina_dico@mail.ru

Abstract. In this paper, we study the Cauchy-Euler equations of both integer and fractional orders. We analyze and utilize the fact that the operators involved in these equations are closely related to the Stirling numbers of the second kind and their fractional generalizations. We propose a finite-difference interpretation of the operator $(x \frac{d}{dx})^n$. Additionally, we consider the application of the Mellin transform for solving inhomogeneous Cauchy – Euler equations of both integer and fractional orders.

Keywords: Cauchy – Euler Equation, Cauchy – Euler Differential Operator, Stirling Numbers of the Second Kind, Stirling Functions of the Second Kind, Hadamard Fractional Derivatives, Mellin Transform

Acknowledgements: The work of the second author was carried out with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation on a state assignment (project FEES-2023-0003).

For citation: Mahamoud AA., Shishkina EL. Cauchy – Euler Equation: Integer and Fractional Orders. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):172–185 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-172-185 EDN IRORTQ

1. Введение. Исследование дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами продолжается и далеко от завершения. Особенно интересной и насыщенной является теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Некоторые такие обыкновенные дифференциальные уравнения эффективно решаются с помощью рядов. Такая простая ситуация возникает в том случае, когда у уравнения нет особых точек. Если у уравнения есть особые точки, то, вообще говоря, простой метод поиска решения в виде степенного ряда неприменим напрямую. Однако, в некоторых случаях, и при наличии у уравнения особых точек простые методы поиска решения в виде рядов остаются в силе. Такие особые точки уравнения называются регулярными особыми точками.

Простейшим уравнением с полиномиальными коэффициентами, имеющим регулярную особую точку $x = 0$, является уравнение Коши – Эйлера. Уравнение Коши – Эйлера отличается тем, что при некоторых условиях оно имеет несколько независимых полиномиальных решений. Поэтому, построив полную теорию для уравнений Коши – Эйлера, имеется возможность перенести ее на любое общее уравнение, имеющее регулярную особую точку. Этот классический подход реализован в [1].

Мы рассмотрим дифференциальное уравнение Эйлера – Коши дробного порядка. Ситуация в этом случае становится значительно интереснее, поскольку существует, во-первых, много способов обобщения уравнений такого типа на случай уравнения дробного порядка, а во-вторых, поскольку уравнение типа Коши – Эйлера тесно связано с числами Стирлинга второго рода, то его дробный аналог оказывается связан с функциями Стирлинга второго рода (числами Стирлинга дробного порядка). Второе наблюдение позволит реализовать метод численного решения таких уравнений.

Будем рассматривать функцию одной переменной $y = y(x)$. Пусть $\frac{d^n y}{dx^n}$ – производная n -го порядка функции $y(x)$. Неоднородное уравнение Коши – Эйлера порядка n имеет вид

$$Ly = a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad a_n \neq 0$$

или

$$Ly = \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = f(x). \quad (1)$$

Наиболее популярно у исследователей уравнение Коши – Эйлера второго порядка (см. [2], р. 273).

Заметим, что, в силу основной теоремы алгебры, оператор

$$L = \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k}{dx^k} \quad (2)$$

можно факторизовать, то есть записать в виде

$$L = a_n \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_1 I \right) \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_2 I \right) \dots \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_n I \right),$$

где I – тождественный оператор, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются корнями соответствующего характеристического уравнения.

Факторизованное уравнение Коши – Эйлера

$$\left(\prod_{k=1}^n \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_k \right) \right) f(x) = 0$$

рассмотрено в [3, 4].

Центральным моментом при исследовании решения уравнения Коши – Эйлера является то, что

$$L x^r = p(r) x^r, \quad (3)$$

где $p(r)$ – многочлен. Этот многочлен является характеристическим многочленом оператора L . Оператор Коши – Эйлера L отображает степень x^r в многочлен от переменной r (характеристический многочлен), умноженный на ту же степень x .

Пример 1.1. Рассмотрим оператор Коши – Эйлера второго порядка:

$$Ly = a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y.$$

Тогда

$$L x^r = a_2 x^2 \frac{d^2 x^r}{dx^2} + a_1 x \frac{dx^r}{dx} + a_0 x^r = (a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0) x^r = (a_2 r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0) x^r,$$

$$p(r) = (a_2 r^2 + (a_1 - a_2)r + a_0).$$

В общем,

$$a_k x^k \frac{d^k x^r}{dx^k} = a_k r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1) x^r = p_k x^r, \quad \text{где } p_k = a_k (r)_k, \quad (r)_k - \text{символ Похгаммера.}$$

Таким образом, если мы знаем $p(r)$ и можем найти корни уравнения $p(r) = 0$, то мы можем найти решение однородного уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$. А именно, справедливо следующее утверждение (см. [1]).

1. Если $m \leq n$ и $r_1, r_2, \dots, r_m$ – различные действительные корни уравнения $p(r) = 0$, тогда $x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_m}$ являются линейно независимыми действительными решениями уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$ и

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + \dots + c_m x^{r_m}, \quad c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$$

тоже являются решениями уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$. Эти решения определяют m -мерное подпространство ядра оператора L .

2. Если s корень уравнения $p(r) = 0$ кратности k , $1 < k \leq n$, то $x^s, x^s \ln x, \dots, x^s (\ln x)^{k-1}$ – линейно независимые решения уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$ и

$$y(x) = c_1 x^s + c_2 x^s \ln x + \dots + c_k x^s (\ln x)^{k-1}, \quad c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$$

тоже являются решениями уравнения Коши – Эйлера $Ly = 0$. Эти решения определяют k -мерное подпространство ядра оператора L .

3. Если $r = \alpha \pm i\beta$ – комплексно-сопряженная пара корней уравнения $p(r) = 0$, тогда $x^\alpha \cos(\beta \ln x)$ и $x^\alpha \sin(\beta \ln x)$ – действительные линейно независимые решения, соответствующие паре $\alpha \pm i\beta$ комплексных корней. Если $\alpha \pm i\beta$ – пара кратности k , то

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), \quad x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \quad \dots, \quad x^\alpha (\ln x)^{k-1} \cos(\beta \ln x)$$

и

$$x^\alpha \sin(\beta \ln x), \quad x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \quad \dots, \quad x^\alpha (\ln x)^{k-1} \sin(\beta \ln x)$$

являются $2k$ действительными линейно независимыми решениями в ядре оператора L . Их линейные комбинации охватывают $2k$ -мерное подпространство ядра оператора L .

4. Полное описание ядра оператора L – это множество всех линейных комбинаций функций, найденных в предыдущих трех случаях.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. Во втором разделе приводятся основные определения чисел Стирлинга первого и второго рода, функций Стирлинга второго рода, их обобщение, а также свойства таких чисел и функций. Также приведено определение преобразования Меллина. В третьем разделе приведены операторы Коши – Эйлера $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и Шватта $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$, формулы связи между ними, а также доказана лемма о конечно-разностном представлении оператора Шватта. Линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения с операторами Коши – Эйлера и Шватта рассмотрены в четвертом разделе. Приведены их решения, полученные при помощи преобразования Меллина. Приведены примеры решения таких уравнений. Пятый раздел посвящен дробным степеням оператора $x \frac{d}{dx}$. Его дробная степень сначала построена с помощью полугруппового подхода, затем приведены известные формулы, определяющие дробную производную и дробный интеграл Адамара и их обобщение. Дифференциальные уравнения с дробными производными адамаровского типа рассмотрены в шестом разделе.

2. Основные определения. Приведем необходимые в дальнейшем определения. Числами Стирлинга первого рода со знаком $s(n, k)$ называются коэффициенты многочлена (см. [5, 6]):

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k,$$

где $(x)_n$ – символ Похгаммера (убывающий факториал):

$$(x)_0 = 1, \quad (x)_n = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1). \quad (4)$$

Абсолютные значения $s(n, k)$ называются числами Стирлинга первого рода без знака и обозначаются $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$:

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = |s(n, k)| = (-1)^{n-k} s(n, k).$$

Эти числа задают количество перестановок множества, состоящего из n элементов с k циклами. Производящей функцией $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ является возрастающий факториал $x^{(n)} = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$, т. е.

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k. \quad (5)$$

Хорошо известно, что числа Стирлинга первого рода не выражаются формулой с одной суммой. Формула, определяющая числа Стирлинга первого рода с двумя суммами, имеет вид:

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{j=n}^{2n-k} \binom{j-1}{k-1} \binom{2n-k}{j} \sum_{m=0}^{j-n} \frac{(-1)^{m+n-k} m^{j-k}}{m!(j-n-m)!}. \quad (6)$$

Числа Стирлинга второго рода находятся по формуле (см. [5, 6])

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k-i}}{(k-i)! i!} i^n \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \geq 1. \quad (7)$$

Известно, что число Стирлинга второго рода $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ равно количеству неупорядоченных разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств. Для чисел Стирлинга второго рода используются два обозначения $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ и $S(n, k)$.

Другой способ задания чисел Стирлинга второго рода имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow 0} \Delta^k (x^n), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0, \quad (8)$$

где Δ задается как $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, $\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f)(x)$, $k \in \mathbb{N}$.

Числа Стирлинга второго рода удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k = x^n. \quad (9)$$

Для рассмотрения уравнения Коши – Эйлера дробного порядка нам потребуются числа Стирлинга дробного порядка. В [7, 8] классические числа Стирлинга второго рода $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S(n, k)$, $n \in \mathbb{N}$ распространены на более общие комплексные функции $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = S(\alpha, k)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Функции $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = S(\alpha, k)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ будем называть функциями Стирлинга второго рода. Рассмотрим случай вещественного α , а именно, формулу (7) можно обобщить на случай $\alpha \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ при помощи равенства

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \alpha > 0; \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\} = 0, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1. \quad (10)$$

Функция Стирлинга второго рода $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right\}$ не определена для $\alpha < 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Формула (8) в этом случае примет вид

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \lim_{x \rightarrow 0} \Delta^k (x^\alpha), \quad \text{при } \alpha \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $\alpha > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ таковы, что $k > \alpha$. Тогда функции Стирлинга второго рода имеют интегральное представление (см. [8], Теорема 4)

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-t})^k \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Для того, чтобы выразить дробные производные и интегралы адамаровского типа в виде суммы в [8], были введены обобщенные функции Стирлинга вида

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} (c+j)^\alpha, \quad \alpha, c \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для таких функций справедливо

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Справедливо равенство

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \end{matrix} \right\}_c = c^\alpha.$$

Определение 2.1. Преобразование Меллина функции $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ имеет вид

$$\varphi^*(s) = \mathcal{M}[\varphi(x)](s) = \int_0^\infty x^{s-1} \varphi(x) dx, \quad (11)$$

где $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, такое, что указанный интеграл существует.

В качестве пространства оригиналов выбираем пространство P_a^b , где $-\infty < a < b < \infty$. Пространство P_a^b является линейным пространством функций $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, таких, что $x^{s-1} \varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ для каждого $s \in \{p \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} p \leq b\}$.

Если дополнительно $\varphi^*(\sigma + i\tau) \in L_1(\mathbb{R})$ относительно τ , то выполняется комплексная формула обращения:

$$\mathcal{M}^{-1}[\varphi^*(s)](x) = \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s} \varphi^*(s) ds.$$

3. Операторы Коши – Эйлера и Шватта. Приведем операторы Коши – Эйлера и Шватта, а также некоторые их свойства. Представленные здесь свойства иллюстрируют связь операторов $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$ с числами Стирлинга первого и второго рода.

В книге [1], стр. 241, приведено определение оператора Коши – Эйлера $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и соответствующее ему уравнение. В [9, 10] изучался оператор $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$, который, как оказалось, имеет большое количество приложений к различным задачам анализа и теории дифференциальных уравнений.

Определение 3.1. Оператор Коши – Эйлера – это дифференциальный оператор вида $x^n \frac{d^n}{dx^n}$, где $n \in \mathbb{N}$ (см. [1], 242). Простейшим примером является оператор $x \frac{d}{dx}$, имеющий собственные значения $r = 0, 1, 2, 3, \dots$ и соответствующие собственные функции x^r .

Определение 3.2. Оператор Шватта – это дифференциальный оператор вида $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$.

Операторы $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ и $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$ тесно связаны с числами Стирлинга первого и второго рода

Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} = x \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} - 1\right) \left(x \frac{d}{dx} - 2\right) \dots \left(x \frac{d}{dx} - n + 1\right) = \left(x \frac{d}{dx}\right)_n,$$

где $(x)_n$ – символ Похгаммера (4). Тогда $x^n \frac{d^n}{dx^n}$ выражается через числа Стирлинга первого рода (6)

$$x^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \left(x \frac{d}{dx}\right)^k f(x). \quad (12)$$

Для произвольной бесконечно дифференцируемой функции f в [9, 10] методом математической индукции доказано, что

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x), \quad (13)$$

где $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ – числа Стирлинга второго рода (7).

Получим конечно-разностное представление для оператора $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$.

Лемма 3.1. Справедлива формула

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (-1)^i E_i^n \left(\frac{x}{h}\right) f(x + ih),$$

$$\text{где } E_i^n(t) = \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} t^k.$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{d^k f}{dx^k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^k[f](x)}{h^k},$$

где $\Delta_h^k[f](x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$ – восходящая конечная разность порядка k от функции f с шагом h , взятая в точке x , $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$ – биномиальный коэффициент, то по формуле (13), учитывая, что $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$,

имеем

$$\begin{aligned} \left(x \frac{d}{dx}\right)^n f(x) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k f}{dx^k} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^k}{h^k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^k}{h^k} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} f(x+ih) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n (-1)^i f(x+ih) \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{x^k}{h^k}. \end{aligned}$$

Что и завершает доказательство.

Оператор (2) можно записать в виде

$$L = \sum_{k=0}^n b_k \left(x \frac{d}{dx}\right)^k, \quad \text{где} \quad b_k = \sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} a_j.$$

Следствие 3.1. Уравнение

$$Ly = \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = f(x)$$

равносильно уравнению

$$Ly = \sum_{k=0}^n b_k \left(x \frac{d}{dx}\right)^k y(x) = f(x), \quad (14)$$

где

$$b_k = \sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} a_j.$$

4. Применение преобразования Меллина к решению неоднородного уравнения Коши – Эйлера.

В этом разделе рассматриваются линейные неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения с операторами Коши – Эйлера и Шватта. Уравнение Эйлера – Коши низкого порядка (до второго) можно решить с помощью различных методов, таких как метод вариации параметров, метод понижения порядка, метод дифференциального преобразования. В общем же случае наиболее эффективным является метод интегральных преобразований. С использованием прямого и обратного преобразования Меллина устанавливаются явные решения таких уравнений. В работе [11] показано, как решать уравнение Коши – Эйлера при помощи преобразования Меллина. Следуя [12], приведем основные для нас формулы.

Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и

$$x^{s-m} \varphi^{(k-m)}(x)|_{x=0} = x^{s-m} \varphi^{(k-m)}(x)|_{x=\infty} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, k, \quad (15)$$

тогда преобразование Меллина $x^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x)$ имеет вид:

$$\mathcal{M} \left[x^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) \right] (s) = (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} \varphi^*(s). \quad (16)$$

Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и

$$x^s \left(x \frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x) \Big|_{x=0} = x^s \left(x \frac{d}{dx}\right)^m \varphi(x) \Big|_{x=\infty} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, k-1, \quad (17)$$

тогда преобразование Меллина $\left(x \frac{d}{dx}\right)^k \varphi(x)$ имеет вид:

$$\mathcal{M} \left[\left(x \frac{d}{dx}\right)^k \varphi(x) \right] (s) = (-1)^k s^k \varphi^*(s). \quad (18)$$

Теорема 4.1.

1. Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и выполняется условие (15), тогда решение неоднородного уравнения Коши – Эйлера вида

$$Ly = \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \varphi(x) \quad (19)$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\varphi^*(s)}{a_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}} \right] (x). \quad (20)$$

2. Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и выполняется условие (17), тогда решение неоднородного уравнения Коши – Эйлера вида

$$Ly = \sum_{k=0}^n b_k \left(x \frac{d}{dx} \right)^k y(x) = \varphi(x) \quad \text{где} \quad b_k = \sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} a_j \quad (21)$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\varphi^*(s)}{b_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k s^k} \right] (x). \quad (22)$$

Доказательство.

1. Применим к (19) преобразование Меллина:

$$\mathcal{M}[Ly(x)](s) = \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{M} \left[x^k \frac{d^k}{dx^k} y(x) \right] (s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)} y^*(s) = \varphi^*(s),$$

тогда формула (16) дает (20).

2. Применим к (21) преобразование Меллина, получим:

$$\mathcal{M}[Ly(x)](s) = \sum_{k=0}^n b_k \mathcal{M} \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^k y(x) \right] (s) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k s^k y^*(s) = \varphi^*(s),$$

тогда формула (18) дает (22).

В силу следствия 2.1. уравнения (19) и (21) равносильны и выбор уравнения осуществляется в пользу того уравнения, для которого проще найти обратное преобразование Меллина.

Для иллюстрации этого элементарного метода приведем несколько преобразований Меллина от функций из [12]:

$$\mathcal{M}[\sin(ax)](s) = \frac{\Gamma(s) \sin \frac{s\pi}{2}}{a^s}, \quad (23)$$

формула (23) справедлива при $0 < a$, $-1 < \operatorname{Re}(s) < 1$;

$$\mathcal{M}[\delta(x-a)](s) = a^{s-1}, \quad (24)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, формула (24) справедлива при $0 < a$,

$$\mathcal{M}[\theta(1-x)](s) = \frac{1}{s}, \quad (25)$$

где $\theta(1-x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0 & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$ – функция Хевисайда, формула (25) справедлива при $0 < \operatorname{Re}(s)$.

Пример 4.1. При $n = 1$ уравнения (19) и (21) совпадают и принимают вид $ax \frac{dy}{dx} + by(x) = \varphi(x)$. Рассмотрим уравнение

$$ax \frac{dy}{dx} + by(x) = \sin(ax).$$

Применяя преобразование Меллина, при помощи Wolfram Mathematica 13.0, получим

$$-a \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} y^*(s) + by^*(s) = \alpha^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(s) \Rightarrow (b-as)y^*(s) = \alpha^{-s} \sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(s) \Rightarrow y^*(s) = \frac{\sin \left(\frac{\pi s}{2} \right) \Gamma(s)}{\alpha^s (b-as)}.$$

Применяя обратное преобразование Меллина, будем иметь

$$y(x) = \frac{\alpha}{a+b} x {}_1F_2 \left(\frac{a+b}{2a}; \frac{3}{2}, \frac{a+b}{2a} + 1; -\frac{x^2 \alpha^2}{4} \right) + \frac{\pi}{2b\alpha^{\frac{b}{a}} \Gamma \left(-\frac{b}{a} \right) \cos \left(\frac{\pi b}{2a} \right)} x^{-\frac{b}{a}}.$$

При $a = 2$, $b = 1$, $\alpha = 3$, $x > 0$ получим, что решение уравнения $2x \frac{dy}{dx} + y(x) = \sin(3x)$ имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6x}} \left(2S \left(\sqrt{\frac{6x}{\pi}} \right) - 1 \right), \quad (26)$$

где $S(x)$ – интеграл Френеля, определяемый как

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt.$$

График решения (26) изображен на рис. 1.

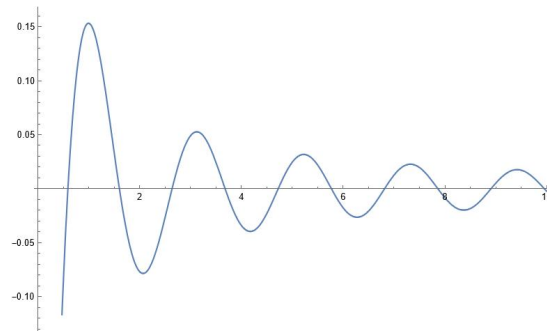


Рис. 1. $y(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6x}} \left(2S \left(\sqrt{\frac{6x}{\pi}} \right) - 1 \right)$
Fig. 1. $y(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{6x}} \left(2S \left(\sqrt{\frac{6x}{\pi}} \right) - 1 \right)$

Пример 4.2. При $n = 2$ уравнения (19) и (21) примут вид, соответственно

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = \varphi(x),$$

$$b_2 \left(x \frac{dy}{dx} \right) + b_1 x \frac{dy}{dx} + b_0 y = \varphi(x).$$

Рассмотрим уравнение

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy(x) = \delta(x-1),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Применяя преобразование Меллина, при помощи Wolfram Mathematica 13.0, получим

$$a \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(s)} y^*(s) - b \frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} y^*(s) + y^*(s) = 1 \Rightarrow (as(s+1) - bs + c) y^*(s) = 1 \Rightarrow y^*(s) = \frac{1}{as(s+1) - bs + c}.$$

Применяя обратное преобразование Меллина, будем иметь

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{(a-b)^2 - 4ac}} \left(1 - x^{\frac{\sqrt{(a-b)^2 - 4ac}}{a}} \right) x^{-\frac{\sqrt{(a-b)^2 - 4ac} - a + b}{2a}}.$$

При $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -1$, $x > 0$ получим, что решение уравнения $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2y(x) = 2\delta(x-1)$, имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} (x^{1-\sqrt{3}} - x^{1+\sqrt{3}}). \quad (27)$$

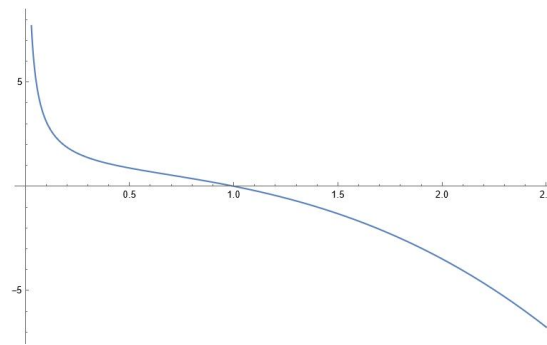
График решения (27) изображен на рис. 2.

Рассмотрим теперь

$$\alpha \left(x \frac{dy}{dx} \right)^2 + \beta x \frac{dy}{dx} + \gamma y = \delta(x).$$

Аналогично предыдущему решению, получим

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} x^{-\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \left(1 - x^{\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}} \right).$$

Рис. 2. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x^{1-\sqrt{3}} - x^{1+\sqrt{3}})$ Fig. 2. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x^{1-\sqrt{3}} - x^{1+\sqrt{3}})$

Следующий шаг в решении рассмотренных уравнений – применение теории вычетов и H -функций Фокса для построения конкретных решений более сложных уравнений, чем в приведенных примерах.

5. Дробные степени оператора $x \frac{d}{dx}$ и их обобщения. Пусть $\{T_t\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полугруппа класса C_0 (то есть сильно непрерывная полугруппа) в банаховом пространстве X с инфинитезимальным генератором. Согласно подходу Балакришнана, (см. [13, 14, 15]), дробная степень $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ определяется по формуле

$$(-A)^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (T_t - I) f(x) dt, \quad f \in D(A). \quad (28)$$

В случае, когда $1 < \alpha < \ell$, $\ell = 2, 3, \dots$ эту формулу можно записать с использованием «конечных разностей» $(I - T_t)^\ell$:

$$(-A)^\alpha f = \frac{1}{C_\alpha(\ell)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (I - T_t)^\ell f(x) dt, \quad (29)$$

где $C_\alpha(\ell) = \Gamma(-\alpha) A_\alpha(\ell)$, $A_\alpha(\ell) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k-1} \binom{\ell}{k} = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k-1} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!}$.

Отрицательная степень оператора $(-A)$ for $0 < \alpha < 1$ может быть определена с помощью уравнения:

$$(-A)^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T_t f(x) dt. \quad (30)$$

Чтобы получить дробный интеграл порядка $\alpha > 1$, достаточно применить повторный интеграл к уравнению (30).

В теории групп оператор $x \frac{d}{dx}$ обычно называют инфинитезимальным оператором масштабирующего преобразования. Инфинитезимальный оператор всегда равен дифференцированию по канонической переменной и преобразует преобразование в сдвиг. Для инфинитезимального оператора $x \frac{d}{dx}$ полугруппа имеет вид:

$$T_t f(x) = e^{xt} \frac{d}{dx} f(x) = f(e^t x).$$

Если оператор $A = \left(-x \frac{d}{dx}\right)$, тогда A является порождающим оператором сильно непрерывной полугруппы $T_t f(x) = f(e^{-t} x)$ on $L^2[0, \infty)$.

Тогда (28) получим

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (f(e^{-t} x) - f(x)) dt, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Произведя замену $e^{-t} x = \tau$, $t = \ln \frac{x}{\tau}$, $dt = -\frac{d\tau}{\tau}$, получим

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \left(\ln \frac{x}{\tau}\right)^{-\alpha-1} (f(\tau) - f(x)) \frac{d\tau}{\tau}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

что совпадает с адамаровской дробной производной в смысле Маршо (см. [16], стр. 252).

Другая форма записи адамаровской дробной производной осуществляется через дробный интеграл Адамара.

Дробный интеграл Адамара при $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{I}_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x > 0, \quad (31)$$

дробная производная Адамара при дробных $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{D}_{0+}^\alpha f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^n (\mathfrak{I}_{0+}^{n-\alpha} f)(x), \quad x > 0, \quad (32)$$

где $n = [\alpha] + 1$. В случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$({}_H\mathfrak{D}_{0+}^n f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^n f(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}_{0+}^0 f)(x) = ({}_H\mathfrak{I}_{0+}^0 f)(x) = f(x).$$

При $0 < \alpha < 1$ оператор $\mathfrak{D}_{0+}^\alpha$ примет вид:

$$({}_H\mathfrak{D}_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t) dt}{t \left(\ln \frac{x}{t}\right)^\alpha}.$$

Еще один способ ввести дробную степень оператора $x \frac{d}{dx}$ – обобщение формулы (13).

Учитывая введенные ранее функции Стирлинга второго рода (10), дробная производная Адамара и дробный интеграл Адамара в форме Грюнвальда – Летникова примут вид

$$({}_H\mathbb{D}_{0+}^\alpha f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x), \quad \alpha > 0,$$

$$({}_H\mathbb{I}_{0+}^\alpha f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} -\alpha \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x), \quad \alpha > 0.$$

Буцер, Килбас и Трухильо (см. [8], Теорему 17) показали, что для функции бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, такой, что ее ряд Тейлора сходится во всякой точке $x > 0$, выполняются при $\alpha > 0$ равенства

$$({}_H\mathfrak{I}_{0+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} -\alpha \\ k \end{matrix} \right\} x^k f^{(k)}(x) = ({}_H\mathbb{I}_{0+}^\alpha f)(x),$$

$$({}_H\mathfrak{D}_{0+}^\alpha f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^n (\mathfrak{I}_{0+}^{n-\alpha} f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} x^k f^{(k)}(x) = ({}_H\mathbb{D}_{0+}^\alpha f)(x).$$

Пусть $\alpha > 0$. В силу формулы (12), получим

$$({}_H\mathbb{D}_{0+}^\alpha f)(x) = \left(x \frac{d}{dx}\right)^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\} \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \left(x \frac{d}{dx}\right)^m f(x). \quad (33)$$

В статье [8] рассмотрены также следующие обобщения дробных интегралов и производных Адамара. Дробный интеграл адамаровского типа при $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{I}_{0+,c}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^c \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t}, \quad x > 0, \quad (34)$$

дробная производная адамаровского типа при дробных $\alpha > 0$ имеет вид

$$({}_H\mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha f)(x) = \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx}\right)^n x^c (\mathfrak{I}_{0+,c}^{n-\alpha} f)(x), \quad x > 0, \quad (35)$$

где $n = [\alpha] + 1$. В случае $\alpha = n \in \mathbb{N}$

$$({}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^n f)(x) = \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n x^c f(x),$$

$$({}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^0 f)(x) = ({}_H \mathfrak{I}_{0+,c}^0 f)(x) = f(x).$$

При $c = 0$ дробный интеграл адамаровского типа и дробная производная адамаровского типа переходят в ${}_H \mathfrak{I}_{0+}^\alpha$ и ${}_H \mathfrak{D}_{0+}^\alpha$, соответственно.

В силу Теоремы 15 из [8] имеем, что для функции бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, определенной для $x > 0$, такой, что ее ряд Тейлора сходится во всякой точке $x > 0$, выполняются при $\alpha > 0$ и $c > 0$ равенства

$$({}_H \mathfrak{I}_{0+,c}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x} \right)^c \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} y(t) \frac{dt}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} -\alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c x^k \frac{d^k y}{dx^k} = ({}_H \mathfrak{I}_{0+,c}^\alpha y)(x),$$

$$({}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha y)(x) = \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n x^c ({}_H \mathfrak{I}_{0+,c}^{n-\alpha} y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ k \end{matrix} \right\}_c x^k \frac{d^k y}{dx^k} = ({}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha f)(x).$$

6. Дифференциальные уравнения с дробными производными адамаровского типа. Решение и анализ дробных дифференциальных уравнений с дробными производными Адамара привлекает внимание исследователей как в области чистой математики [17], так и в области их приложений к теории вероятностей [18]. Здесь мы рассмотрим дифференциальные уравнения с дробными производными адамаровского типа.

Получим обобщение формулы (3).

Лемма 6.1. *Имеют место формулы*

$${}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha x^r = (c+r)^\alpha x^r \quad (36)$$

и

$${}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha x^r = r^\alpha x^r. \quad (37)$$

Доказательство. Учитывая формулы (13) и (9), получим

$$\begin{aligned} {}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha x^r &= \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n x^c {}_H \mathfrak{I}_{0+,c}^{n-\alpha} x^r = \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n x^c \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left(\frac{t}{x} \right)^c \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} t^{r-1} dt = \\ &= \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{n-\alpha-1} t^{r+c-1} dt = \left\{ \ln \frac{x}{t} = z \right\} = \\ &= \frac{1}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n x^{r+c} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty z^{n-\alpha-1} e^{-(r+c)z} dz = \frac{(c+r)^{\alpha-n}}{x^c} \left(x \frac{d}{dx} \right)^n x^{r+c} = \\ &= \frac{(c+r)^{\alpha-n}}{x^c} \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k \frac{d^k}{dx^k} x^{r+c} = \frac{(c+r)^{\alpha-n}}{x^c} \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (r+c)_k x^{r+c} = \\ &= x^r (c+r)^{\alpha-n} \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (r+c)_k = (c+r)^\alpha x^r. \end{aligned}$$

В частном случае, при $c = 0$, получаем (37).

Рассмотрим теперь, как действует на ${}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha$ преобразование Меллина, следуя [19].

Теорема 6.1. Пусть $\alpha > 0$, $c \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{M} \{({}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s)$ существует, тогда преобразование Меллина дробной производной адамаровского типа имеет вид

$$\mathcal{M} \{({}_H \mathfrak{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s) = (c-s)^\alpha y^*(s).$$

Доказательство. Известно, что преобразование Меллина (11) от $\left(x \frac{d}{dx} \right)^m y(x)$ находится по формуле

$$\mathcal{M} \left\{ \left(x \frac{d}{dx} \right)^m y(x) \right\}(s) = (-s)^m y^*(s).$$

В силу формулы (12), получим

$$({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \alpha \right\}_c \frac{x^k}{k!} \frac{d^k y}{dx^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \alpha \right\}_c \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \left(x \frac{d}{dx} \right)^m y(x).$$

Применим преобразование Меллина (11) к $({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)$, получим

$$\mathcal{M} \{({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \alpha \right\}_c \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-s)^m y^*(s) = y^*(s) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \alpha \right\}_c \sum_{m=0}^k \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} s^m.$$

В силу (5), будем иметь

$$\mathcal{M} \{({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s) = y^*(s) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \alpha \right\}_c s^{(k)}.$$

Между восходящим факториалом $s^{(k)} = s(s+1)(s+2)\dots(s+k-1)$ и нисходящим факториалом $(s)_k = s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)$ существуют простые соотношения:

$$\begin{aligned} (s)_k &= (-1)^k (-s)^{(k)}, \\ s^{(k)} &= (-1)^k (-s)_k. \end{aligned}$$

Тогда, в силу формулы (см. [8], формула (8.2))

$$(c+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \alpha \right\}_c (z)_k$$

получим

$$\mathcal{M} \{({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s) = y^*(s) \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \alpha \right\}_c (-s)_k = (c-s)^\alpha y^*(s).$$

Следствие 6.1. Пусть $\alpha > 0$, $c \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{M} \{({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s)$ существует, тогда преобразование Меллина дробной производной адамаровского типа имеет вид

$$\mathcal{M} \{({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x)\}(s) = (c-s)^\alpha y^*(s).$$

В книге [20], на стр.120, приведено другое доказательство этого следствия.

Теорема 6.2. Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что преобразование Меллина (11) от нее существует и выполняется условие (17), тогда решение неоднородного уравнения Коши – Эйлера вида

$$L_{\vec{\alpha}} y = \sum_{k=0}^n b_k ({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^{\alpha_k} y)(x) = \varphi(x), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

имеет вид

$$y(x) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{\varphi^*(s)}{\sum_{k=0}^n b_k (c-s)^{\alpha_k}} \right] (x). \quad (39)$$

Доказательство. Учитывая Теорему 6.1, применяя к (38) преобразование Меллина, получим:

$$\mathcal{M}[L_{\vec{\alpha}} y(x)](s) = \sum_{k=0}^n b_k \mathcal{M} [({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^{\alpha_k} y)(x)](s) = \sum_{k=0}^n b_k (c-s)^{\alpha_k} y^*(s) = \varphi^*(s).$$

Применение обратного преобразования дает (39).

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение

$$({}_H\mathbb{D}_{0+,c}^\alpha y)(x) = \theta(1-x).$$

Применяя преобразование Меллина, получим

$$(c-s)^\alpha y^*(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow y^*(s) = \frac{1}{s(c-s)^\alpha} \Rightarrow y(x) = \mathcal{M}^{-1} \left[\frac{1}{s(c-s)^\alpha} \right] (x).$$

При $\alpha = 1/2$

$$y(x) = -\frac{\operatorname{erf}\left(\sqrt{c \cdot \log(x)}\right)}{\sqrt{c}},$$

где $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок, которая определяется как

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Список литературы

1. Ross C.C. Differential Equations. An Introduction with Mathematica. 2th ed. New York: Springer; 2004. 431 p.
2. Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. 8th ed. New York: Wiley; 2005. 790 p.
3. Sadykov T. Graceful bases in solution spaces of differential and difference equations. Journal of Symbolic Computation. 2025;127:1–13. DOI: 10.1016/j.jsc.2024.10235
4. Takahasi S.E., Oka H., Miura T., Takagi H. A Cauchy-Euler Type Factorization of Operators. Tokyo Journal of Mathematics. 2008;31(2):489–493.
5. Berman G., Fryer K.D. Introduction to Combinatorics. New York: Academic Press; 2014. 314 p.
6. Дега Е.И. Специальные комбинаторные числа: От чисел Стирлинга до чисел Моцкина: всё о двенадцати известных числовых множествах комбинаторной природы (история, классические свойства, примеры и задачи). М.: Ленанд; 2018. 504 с.
7. Butzer P.L., Hauss M., Schmidt M. Factorial functions and Stirling numbers of fractional orders. Results. Math. 1989;16:16–48. DOI: 10.1007/BF03322642
8. Butzer P.L., Kilbas A.A., Trujillo J.J. Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus. Numer. Funct. Anal. Optim. 2003;24(7–8):673–711. DOI: 10.1081/nfa-120026366
9. Schwatt I.J. An Introduction to the Operations with Series. New York: Chelsea Publishing Co; 1962. 328 p.
10. Knopf P.M. The operator $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$ and its applications to series. Math. Mag. 2003;76(5):364–371. DOI: 10.1080/0025570X.2003.11953210
11. González G.J.R., Plaza Galvez L.F. Solución de la ecuación de Cauchy-Euler por medio de la transformada de Mellin. Scientia Et Technica. 2009;2(42):300–303. DOI: 10.22517/23447214.2651
12. Brychkov Y., Marichev O., Svischenko N. Handbook of Mellin Transforms. New York: Chapman and Hall/CRC; 2018. 609 p.
13. Balakrishnan A.V. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 1959;91:330–353. DOI: 10.2307/1993125
14. Westphal U. Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, Teil I: Halbgruppenerzeuger, Teil II: Gruppenerzeuger. Compositio Math. 1970;22:67–103, 104–136.
15. Yosida K. Functional Analysis, 6 th ed. Berlin: Springer-Verlag; 1980. 504 p.
16. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. Минск: Наука и техника; 1987. 688 с.
17. Ahmad B., Alsaedi A., Ntouyas S.K., Tariboon J. Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities. New York: Springer; 2017. 427 p.
18. Garra R., Orsingher E., Polito F. A Note on Hadamard Fractional Differential Equations with Varying Coefficients and Their Applications in Probability. Mathematics. 2018;6(1):1–10. DOI: 10.3390/math6010004
19. Butzer P.L., Kilbas A.A., Trujillo J.J. Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals. J. Math. Anal. Appl. 2002;269(1):1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00001-X
20. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Switzerland: Elsevier Science; 2006. 540 p.

References

1. Ross CC. Differential Equations. An Introduction with Mathematica. 2th ed. New York: Springer; 2004. 431 p.
2. Boyce WE, DiPrima RC. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. 8th ed. New York: Wiley; 2005. 790 p.
3. Sadykov T. Graceful bases in solution spaces of differential and difference equations. Journal of Symbolic Computation. 2025;127:1–13. DOI: 10.1016/j.jsc.2024.10235

4. Takahasi SE, Oka H, Miura T, Takagi H. A Cauchy-Euler Type Factorization of Operators. Tokyo Journal of Mathematics. 2008;31(2):489–493.
5. Berman G, Fryer KD. Introduction to Combinatorics. New York: Academic Press; 2014. 314 p.
6. Deza EI. Special combinatorial numbers: From Stirling numbers to Motzkin numbers: everything about the twelve well-known sets of numbers of combinatorial nature (history, classical properties, examples, and problems). Moscow: Lenand; 2018. 504 p. (In Russ.)
7. Butzer PL, Hauss M, Schmidt M. Factorial functions and Stirling numbers of fractional orders. Results. Math. 1989;16:16–48. DOI: 10.1007/BF03322642
8. Butzer PL, Kilbas AA, Trujillo JJ. Stirling functions of the second kind in the setting of difference and fractional calculus. Numer. Funct. Anal. Optim. 2003;24(7–8):673–711. DOI: 10.1081/nfa-120026366
9. Schwatt IJ. An Introduction to the Operations with Series. New York: Chelsea Publishing Co; 1962. 328 p.
10. Knopf PM. The operator $\left(x \frac{d}{dx}\right)^n$ and its applications to series. Math. Mag. 2003;76(5):364–371. DOI: 10.1080/0025570X.2003.11953210
11. González GJR, Plaza Galvez LF. Solución de la ecuación de Cauchy-Euler por medio de la transformada de Mellin. Scientia Et Technica. 2009;2(42):300–303. DOI: 10.22517/23447214.2651
12. Brychkov Y, Marichev O, Savischenko N. Handbook of Mellin Transforms. New York: Chapman and Hall/CRC; 2018. 609 p.
13. Balakrishnan AV. An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 1959;91:330–353. DOI: 10.2307/1993125
14. Westphal U. Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, Teil I: Halbgruppenerzeuger, Teil II: Gruppenerzeuger. Compositio Math. 1970;22:67–103, 104–136.
15. Yosida K. Functional Analysis, 6 th ed. Berlin: Springer-Verlag; 1980. 504 p.
16. Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Yverdon: Gordon and Breach; 1993. 1016 p.
17. Ahmad B, Alsaedi A, Ntouyas SK, Tariboon J. Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities. New York: Springer; 2017. 427 p.
18. Garra R, Orsingher E, Polito F. A Note on Hadamard Fractional Differential Equations with Varying Coefficients and Their Applications in Probability. Mathematics. 2018;6(1):1–10. DOI: 10.3390/math6010004
19. Butzer PL, Kilbas AA, Trujillo JJ. Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals. J. Math. Anal. Appl. 2002;269(1):1–27. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00001-X
20. Kilbas AA, Srivastava HM, Trujillo JJ. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Switzerland: Elsevier Science; 2006. 540 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.06.2025

Поступила после рецензирования 11.08.2025

Принята к публикации 18.08.2025

Received June 20, 2025

Revised August 11, 2025

Accepted August 18, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Махамуд Ахмат Ассад – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Шишкина Элина Леонидовна – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, научный сотрудник, Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, г. Грозный, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ahmat A. Mahamoud – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Elina L. Shishkina – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor, Voronezh State University, Voronezh, Researcher, Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

[К содержанию](#)

Бифуркации петли сепаратрисы сшитого седло-узла в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких векторных полей

Ройтенберг В. Ш. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Половинкиным И. П.)

Ярославский государственный технический университет,
Россия, 150023, г. Ярославль, Московский проспект, 88
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Рассматривается динамическая система на плоскости, заданная кусочно-гладким векторным полем. Пусть это векторное поле имеет такую особую точку S на линии L переключения, что в окрестности S с одной стороны L поле совпадает с гладким векторным полем, для которого S является седло-узлом с устойчивым параболическим сектором и центральным многообразием, трансверсальным L , а с другой стороны L оно совпадает с гладким векторным полем, трансверсальным L . Предполагается также, что из точки S выходит положительная полутраектория Γ , не содержащая особых точек, отличных от S , предельная к S . Рассматривается типичное двухпараметрическое семейство кусочно-гладких векторных полей – деформация рассматриваемого векторного поля. Описано множество параметров, при которых векторное поле из этого семейства имеет устойчивую периодическую траекторию, рождающуюся из петли Γ .

Ключевые слова: кусочно-гладкое векторное поле, седло-узел, петля сепаратрисы, бифуркация, устойчивая периодическая траектория

Для цитирования: Ройтенберг В.Ш. Бифуркации петли сепаратрисы сшитого седло-узла в типичном двухпараметрическом семействе кусочно-гладких векторных полей. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):186–192. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-186-192 EDN MPPBSO

Original Research

Bifurcations of a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node in a Generic Two-Parameter Family of Piecewise Smooth Vector Fields

Vladimir Sh. Roitenberg 

(Article submitted by a member of the editorial board Polovinkin I.P.)

Yaroslavl State Technical University,
88 Moscow Avenue, Yaroslavl 150023, Russia
vroitenberg@mail.ru

Abstract. We consider a dynamical system on the plane defined by a piecewise smooth vector field. Let this vector field have a singular point S on the switching line L such that in the neighborhood of S , on the one side of L , the field coincides with a smooth vector field for which S is a saddle-node with a stable parabolic sector and a central manifold transversal to L , and on the other side, it coincides with a smooth vector field transversal to L . It is also assumed that from the point S go a positive semitrajectory Γ , which does not contain singular points different from S and is limiting to S . We consider a generic two-parameter family of piecewise smooth vector fields, a deformation of the vector field under consideration. We describe a set of parameters for which a vector field from this family has a stable periodic trajectory born from a loop Γ .

Keywords: Piecewise Smooth Vector Field, Saddle-Node, Separatrix Loop, Bifurcation, Stable Periodic Trajectory

For citation: Roitenberg VSh. Bifurcations of a Separatrix Loop of a Sewn Saddle-Node in a Generic Two-Parameter Family of Piecewise Smooth Vector Fields. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):186–192 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-186-192 EDN MPPBSO

1. Введение. Теория бифуркаций гладких динамических систем началась с работ А.А. Андропова и его сотрудников 1930-х годов. Одной из первых были описаны локальная бифуркация седло-узла, а также нелокальная бифуркация петли сепаратрисы седло-узла, из которой рождается устойчивая периодическая траектория [1, 2]. В многомерном случае рождение периодической траектории из петли сепаратрисы седло-узла было доказано Л.П. Шильниковым [3]. Для кусочно-гладких динамических систем на плоскости бифуркации особых точек рассматривались в работах [4, 5], а также [6, 7, 8, 9]. В частности, там исследованы и бифуркации особых точек – «сшитых седло-узлов», бифурцирующих аналогично седло-узлу гладкой динамической системы. Бифуркации рождения периодической траектории из петли сепаратрисы сшитого седло-узла динамической системы на плоскости, задаваемой соответственно кусочно-гладким разрывным и непрерывным векторным полем, при типичных однопараметрических деформациях поля описаны в [10] и [11].

В настоящей работе рассматриваются бифуркации петли сепаратрисы особой точки на линии l переключения, «сшитой» из седло-узла гладкого векторного поля, заданного с одной стороны l и неособой точки гладкого векторного поля, заданного с другой стороны l , при типичных двухпараметрических деформациях кусочно-гладкого векторного поля.

2. Условия и результаты. Пусть компактное множество G на плоскости $\mathbb{R}^2$ с C^∞ -гладкой границей представлено в виде объединения компактных множеств G_k ($k = 1, \dots, m$) с C^∞ -гладкими границами ∂G_k , таких, что $G_i \cap G_j = \partial G_i \cap \partial G_j \neq \emptyset$ при $i \neq j$. Обозначим $\mathcal{D}$ разбиение G на множества G_k . Пусть $\text{Vec}^r(G)$ – топологическое векторное пространство C^r -векторных полей на G с C^r -топологией ($r \geq 3$) [12]. Кусочно-гладкое векторное поле на G с разбиением $\mathcal{D}$, заданное векторными полями $\mathbf{v}^k \in \text{Vec}^r(G)$ ($k = 1, \dots, m$) – класс всех векторных полей $\tilde{\mathbf{v}} : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ таких, что $\tilde{\mathbf{v}}|_{\text{int}G_k} = \mathbf{v}^k|_{\text{int}G_k}$. Отождествим его с элементом $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^m)$ топологического векторного пространства

$$\text{Vec}^r(G, \mathcal{D}) := \underbrace{\text{Vec}^r(G) \oplus \dots \oplus \text{Vec}^r(G)}_m.$$

Траектории векторных полей $\tilde{\mathbf{v}}$ будем определять по правилу выпуклого доопределения в точках линий переключения $G_{ij} := \partial G_i \cap \partial G_j \neq \emptyset$ [5]. Они не зависят от выбора представителя $\tilde{\mathbf{v}}$ класса и потому называются *траекториями поля* $\mathbf{v}$.

Пусть E_0 – окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство кусочно-гладких векторных полей с базой $E_0 - C^r$ -отображение $E_0 \ni \varepsilon \mapsto \mathbf{v}_\varepsilon = (\mathbf{v}_\varepsilon^1, \dots, \mathbf{v}_\varepsilon^m) \in \text{Vec}^r(G, \mathcal{D})$, удовлетворяющее сформулированным ниже условиям (Y1)–(Y4).

(Y1) Векторное поле $\mathbf{v}_0^i$ имеет седло-узел $S_0 \in G_{ij}$ с устойчивым параболическим сектором.

По теореме о центральном многообразии и теореме редукции [13, глава 5] существуют такие окрестность нуля $E_1 \subset E_0$ и координаты (x, y) , $|x| < d_0$, $|y| < d_1$ в окрестности V_ε точки S_0 , в которых поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, $\varepsilon \in E_1$ имеет вид

$$P(x, \varepsilon)\partial/\partial x + Q(x, y, \varepsilon)\partial/\partial y, \quad (1)$$

где $P, Q \in C^{r-1}$, $Q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0$, $\lambda := Q'_y(0, 0, 0) < 0$,

$$P(0, 0) = P'_x(0, 0) = 0, \quad a := P''_{xx}(0, 0) > 0. \quad (2)$$

(Y2) При $\varepsilon = 0$ центральное многообразие, задаваемое уравнением $y = 0$, трансверсально пересекается с G_{ij} в точке S_0 .

При выполнении этого условия координаты (x, y) можно выбрать так, что $G_{ij} \cap V_\varepsilon$ задается уравнением $x = \xi(y, \varepsilon)$, $y \in (-d_1, d_1)$, где

$$\xi(0, \varepsilon) = 0, \quad \xi'_y(y, \varepsilon) < 0. \quad (3)$$

Будем также считать, что точки центрального многообразия с координатами $(x, 0)$ при $x < 0$ ($x > 0$) лежат в G_i (G_j).

(Y3) Вектор $\mathbf{v}_0^j(S_0)$ не касается G_{ij} и направлен внутрь G_j . Положительная полутраектория Γ_0 поля $\mathbf{v}_0$, начинающаяся в точке S_0 как положительная траектория поля $\mathbf{v}_0^j$, не содержит особых точек кроме S_0 и ω -предельна к S_0 , входя в S_0 по направлению оси x (рис. 1).

Из (2) по теореме о неявной функции следует, что найдутся такие число $d \in (0, d_0)$ и окрестность нуля $E_2 \subset E_1$, что уравнение $P'_x(x, \varepsilon) = 0$ имеет решение $x = \rho_1(\varepsilon) \in (-d, d)$, $\varepsilon \in E_2$, где $\rho_1(\cdot) \in C^{r-1}$, $\rho_1(0) = 0$. Обозначим $\rho_2(\varepsilon) := P(\rho_1(\varepsilon), \varepsilon)$.

(Y4) $\det(\partial \rho_k(0)/\partial \varepsilon_l) \neq 0$.

Сделаем в некоторой окрестности нуля $E_3 \subset E_2$ замену параметров $\bar{\varepsilon}_k = \rho_k(\varepsilon)$, $k = 1, 2$ и вернемся к их «старым» обозначениям. Теперь можно считать $E_3 = (-\delta_0, \delta_0)^2$, $\delta_0 < d$,

$$P(x, \varepsilon) = \varepsilon_2 + a(x - \varepsilon_1)^2 + R(x, \varepsilon), \quad (4)$$

где $R \in C^3$, и при всех $\varepsilon \in (-\delta_0, \delta_0)^2$

$$R(\varepsilon_1, \varepsilon) = R'_x(\varepsilon_1, \varepsilon) = R''_{xx}(0, 0) = 0, \quad |R(x, \varepsilon)| < (a/2)(x - \varepsilon_1)^2 \text{ для } x \in [-d, d]; \quad (5)$$

$$\text{sgn } P'_x(x, \varepsilon) = \text{sgn } (x - \varepsilon_1) \text{ для } x \in [-d, d]; \quad (6)$$

$$Q(x, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad 2\lambda < Q'_y(x, y, \varepsilon) < \lambda/2 \text{ для } x, y \in [-d, d]. \quad (7)$$

Теорема. Пусть выполняются условия (Y1)–(Y4). Тогда существуют окрестность $U(\Gamma_0)$ кривой Γ_0 , число $\delta > 0$ и разбиение области $E := (-\delta, \delta)^2$ параметров на две части, $E_+ := (-\delta, \delta) \times (0, \delta) \cup \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 \in (0, \delta), \beta(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 \leq 0\}$, где $\beta : [0, \delta) \rightarrow (-\delta, 0]$, $\beta \in C^1$, $\beta(0) = \beta'(0) = 0$, и $E_- := E \setminus E_+$ такие, что поле $\mathbf{v}_\varepsilon$ при $\varepsilon \in E_-$ не имеет в $U(\Gamma_0)$ периодических траекторий, а при $\varepsilon \in E_+$ имеет в $U(\Gamma_0)$ единственную периодическую траекторию Γ_ε , причем она является устойчивым гиперболическим предельным циклом, ее топологический предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$, то есть для любой окрестности $V(\Gamma_0)$ кривой Γ_0 , существует такое число $\bar{\delta} > 0$, что $\Gamma_\varepsilon \subset V(\Gamma_0)$ для всех $\varepsilon \in E_+ \cap (-\bar{\delta}, \bar{\delta})^2$.

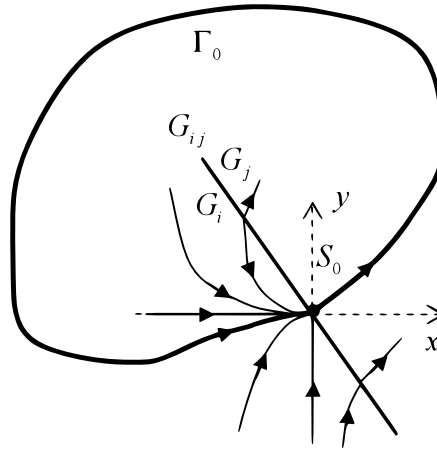


Рис. 1. Петля сепаратрисы сшитого седло-узла

Fig. 1. The loop of separatrix of sewn saddle-node

3. Доказательство теоремы. Траектория поля $\mathbf{v}_0^i$, начинающаяся в точке с координатами $(-d, u)$, где $-d < u < d$, задается уравнением $y = Y(x, u)$, $-d \leq x < 0$, где $Y \in C^{r-1}$, $Y(\cdot, u) \in C^r$,

$$Y'_x(x, u) = \frac{Q(x, Y(x, u), 0)}{P(x, 0)}. \quad (8)$$

Так как производная

$$Y'_u(x, u) = \exp \int_{-d}^x \frac{Q'_y(s, Y(s, u), 0)}{P(s, 0)} ds,$$

то из (4), (5) и (7) получаем $0 < Y'_u(x, u) \leq C \exp \frac{-\lambda}{4ax}$, где $C = \exp \frac{-\lambda}{4ad}$. Поскольку $Y(x, 0) \equiv 0$, то $|Y(x, u)| \leq Cd \exp \frac{-\lambda}{4ax}$. Отсюда, из (8), (4), (5) и (7) имеем оценку $|Y'_x(x, u)| \leq \frac{C_1}{x^2} \exp \frac{-\lambda}{2ax}$ с некоторой постоянной C_1 . Так как

$$Y''_{xx} = \frac{Q'_x(x, Y, 0)}{P(x, 0)} + \frac{Q'_y(x, Y, 0)}{P(x, 0)} Y'_x - \frac{Q(x, Y, 0) P'_x(x, 0)}{P^2(x, 0)},$$

то $|Y''_{xx}(x, u)| \leq \frac{C_2}{x^4} \exp \frac{-\lambda}{2ax}$, где C_2 – постоянная. Аналогично получаем неравенство $|Y'''_{xxx}(x, u)| \leq \frac{C_3}{x^6} \exp \frac{-\lambda}{2ax}$ с некоторой постоянной C_3 . Вследствие полученных оценок

$$Y(-0, u) = Y'_x(-0, u) = Y''_{xx}(-0, u) = Y'''_{xxx}(-0, u) = 0 \quad \text{для всех } u \in (-d, d). \quad (9)$$

Если d достаточно мало, то траектория Γ_0 трансверсально пересекает дугу $x = -d$, $-d < y < d$. Пусть $(-d, y_0)$ – координаты точки пересечения. Пользуясь тем, что центральное многообразие и соответственно координаты (x, y) , в которых поле $\mathbf{v}_0^i$ имеет вид (1), определены не однозначно, покажем, что координаты (x, y) и число d можно выбрать так, что по-прежнему выполняется (3), а $y_0 < 0$.

Предположим, что при выбранных координатах $y_0 \geq 0$. Пусть $y_0 < y_* < d$, $Y_*(x) := Y(x, y_*)$ при $-d \leq x < 0$ и $Y_*(x) := 0$ при $0 \leq x \leq d$. Вследствие (9) $Y_*(x)$ – C^3 -функция. Перейдем к координатам $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y - Y_*(x)$ и сохраним прежние обозначения координат. Поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ в новых координатах будет иметь вид $P(x, \varepsilon) \partial / \partial x + Q_*(x, y, \varepsilon) \partial / \partial y$, где $Q_* \in C^2$, $Q_*(x, 0, 0) \equiv 0$, то есть $y = 0$ – центральное многообразие поля $\mathbf{v}_0^i$. Из доказательства теоремы о центральном многообразии [14, 13] следует, что d можно выбрать так, что векторное поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ при ε , достаточно близких к нулю, имеет центральное многообразие $y = w(x, \varepsilon)$, $x \in [-d, d]$, где w – C^2 -функция, $w(x, 0) \equiv 0$. Сделаем C^2 -замену $\bar{y} = y - w(x, \varepsilon)$, выпрямляющую центральное многообразие, и вернемся к прежним обозначениям координат. В новых координатах поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ имеет тот же вид (1), где функция $P(x, \varepsilon)$ осталась прежняя, а функция Q удовлетворяет тем же условиям, что раньше, но теперь мы можем гарантировать только, что $Q \in C^1$. Поскольку сделанные замены координат были C^1 -близки к тождественному отображению, то δ можно считать выбранными столь малым, что пересечение G_{ij} с малой окрестностью точки S_0 задается уравнением вида $x = \xi(y, \varepsilon)$, где $\xi(0, 0) = 0$, а второе условие в (3) сохраняется. Сделав замену $\bar{x} = x - \xi(0, \varepsilon)$, $\bar{y} = y$ и вернувшись к прежним обозначениям, можно считать, что в новых координатах поле $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ по-прежнему имеет вид (1), а уравнение G_{ij} в окрестности удовлетворяет условиям (3). Уравнение пересечения Γ_0 с окрестностью точки S_0 теперь имеет вид $y = \hat{Y}(x) = Y(x, y_0) - Y(x, y_*)$, при этом $\hat{Y}(-d) = y_0 - y_* < 0$, чего и хотели добиться.

Из (4) и (5) следуют равенства $P(0, 0) = 0$, $P'_\varepsilon(0, 0) = 1$, $P'_{\varepsilon_1}(0, 0) = 0$, из которых по теореме о неявной функции получаем, что существуют такие число $\delta > 0$ и C^1 -функция $\beta : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\delta, 0]$, $\beta(\varepsilon_1) = -a\varepsilon_1^2 + o(\varepsilon_1^2)$, что

$$\operatorname{sgn} P(0, \varepsilon) = \operatorname{sgn} (\varepsilon_2 - \beta(\varepsilon_1)) \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \delta) \times (-\delta, \delta). \quad (10)$$

Выбор δ будет уточнен в дальнейшем.

Пусть $E_+^+ := (-\delta, \delta) \times (0, \delta)$, $E_+^- := \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \varepsilon_1 \in [0, \delta), \beta(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 \leq 0\}$, $E_+ := E_+^+ \cup E_+^-$, $E_- := E \setminus E_+$.

Из (4)–(6) и (10) следует, что при $\varepsilon \in E_+^-$ $P(\cdot, \varepsilon)$ имеет нуль $x_0(\varepsilon) \in (0, \varepsilon_1]$ и

$$P(x, \varepsilon) > 0 \text{ для всех } x \in [-d, x_0(\varepsilon)), \varepsilon \in E_+^-, \quad (11)$$

$$P(x, \varepsilon) > 0, \text{ для всех } x \in [-d, d], \varepsilon \in E_+^+, \quad (12)$$

$$P(\cdot, \varepsilon) \text{ имеет нуль на } [-d, 0] \text{ для всех } \varepsilon \in E_- . \quad (13)$$

Пусть $\Pi_\varepsilon := [-d, x_0(\varepsilon)) \times [-\bar{d}, \bar{d}]$ при $\varepsilon \in E_+^-$, $\Pi_\varepsilon := [-d, d] \times [-\bar{d}, \bar{d}]$ при $\varepsilon \in E_+^+$, $\Pi_\varepsilon^- := \{(x, y) \in \Pi_\varepsilon : y \leq 0, x \leq \xi(y, \varepsilon)\}$, а δ и $\bar{d} \in (0, d]$ выбраны так, чтобы $-d < \xi(y, \varepsilon) < d$ при всех $y \in [-\bar{d}, \bar{d}]$, $\varepsilon \in E_+$, и для любого $\varepsilon \in E_+$ уравнение $\xi(y, \varepsilon) = x_0(\varepsilon)$ имело решение $y = y_0(\varepsilon)$ (рис. 2). Будем отождествлять Π_ε^- с подмножеством в $V_\varepsilon \cap G_i$, состоящим из точек с координатами $(x, y) \in \Pi_\varepsilon^-$.

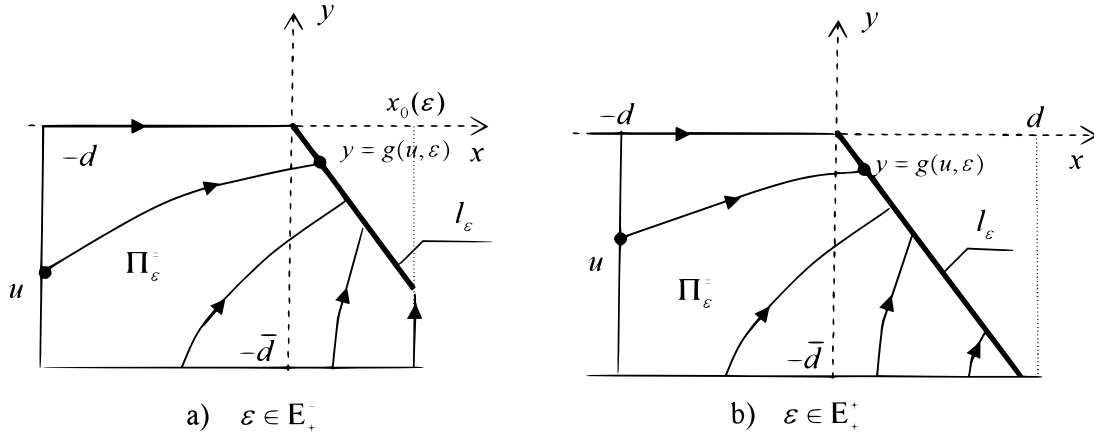


Рис. 2. Множество Π_ε^- . Отображение $g(\cdot, \varepsilon)$

Fig. 2. The set Π_ε^- . The map $g(\cdot, \varepsilon)$

Пусть T_ε – дуга G_{ij} , заданная в координатах (x, y) уравнением $x = \xi(y, \varepsilon)$, $y \in [-d_*, d_*]$, где $d_* \in (0, \bar{d}]$. При достаточно малых d_* и δ траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\varepsilon \in E$, начинающаяся в точке этой дуги с координатами $(\xi(u, \varepsilon), u)$, пересекает дугу $x = -d$, $y \in (-\bar{d}, 0)$ в точке с координатами $(-d, f(u, \varepsilon))$, где $f \in C^1$ и

$$0 < f'_u(u, \varepsilon) \leq N \quad (14)$$

с некоторой постоянной N .

Ввиду (11) и (12) для любого $\varepsilon \in E_+$ определено дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, \varepsilon)}{P(x, \varepsilon)}, \quad (x, y) \in \Pi_\varepsilon. \quad (15)$$

Вследствие (7), (11) и (12) оно имеет решение $Y(x, u, \varepsilon)$, определенное при $\varepsilon \in E_+^-$ для $x \in [-d, x_0(\varepsilon))$, а при $\varepsilon \in E_+^+$ для $x \in [-d, d]$, удовлетворяющее начальному условию $Y(-d, u, \varepsilon) = u$, $u \in [-d, d]$. Уравнение $y = Y(x, u, \varepsilon)$ задает траекторию поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, в окрестности точки S_0 .

Из (3), (7), (11) и (12) получаем

$$[Q(x, y, \varepsilon) - \xi'_y(y, \varepsilon)P(x, \varepsilon)]_{x=\xi(y, \varepsilon)} > 0 \text{ для всех } \varepsilon \in E_+, y \in [-\bar{d}, 0]. \quad (16)$$

Ввиду (7), (11) и (16) при $\varepsilon \in E_+^-$ граница множества Π_ε^- состоит из дуг $[-\bar{d}, 0] \times \{0\}$ и $\{x_0(\varepsilon)\} \times [-\bar{d}, y_0(\varepsilon)]$ траекторий поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, дуг $\{-d\} \times [-\bar{d}, 0]$ и $[-d, x_0(\varepsilon)) \times \{-\bar{d}\}$ в точках которых траектории поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$ входят в Π_ε^- , не касаясь этих дуг, из дуги $l_\varepsilon : x = \xi(y, \varepsilon)$, $y \in (y_0(\varepsilon), 0]$, в точках которой траектории выходят из Π_ε^- , не касаясь этой дуги (рис. 2). Следовательно, траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, начинающаяся в точке с координатой $(-d, u)$, $u \in (-\bar{d}, 0]$, выходит из Π_ε^- , пересекая дугу l_ε в точке с координатой $y = g(u, \varepsilon)$, $g(0, \varepsilon) = 0$. При $\varepsilon \in E_+^+$ аналогично получаем, что траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon^i$, начинающаяся в точке с координатой $(-d, u)$, $u \in (-\bar{d}, 0]$, выходит из Π_ε^- , пересекая дугу l_ε в точке с координатой $y = g(u, \varepsilon)$. Из теорем о функциях соответствия по траекториям [15] следует, что g является C^1 -функцией от $(u, \varepsilon) \in (-\bar{d}, 0] \times E_+$.

Производная $Y'_u(x, u, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$\frac{d}{dx} Y'_u = \frac{Q'_y(x, Y(x, u, \varepsilon), \varepsilon)}{P(x, \varepsilon)} \cdot Y'_u.$$

и начальному условию $Y'_u(-d, u, \varepsilon) = 1$. Поэтому

$$Y'_u(c, u, \varepsilon) = \exp \int_{-d}^c \frac{Q'_y(x, Y(x, u, \varepsilon), \varepsilon)}{P(x, \varepsilon)} dx.$$

Используя (4), (5), (7) и учитывая, что при $u \in (-\bar{d}, 0]$ $c = c(u, \varepsilon) := \xi(g(u, \varepsilon), \varepsilon) \geq 0$, имеем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp(\lambda/2) \int_{-d}^{c(u, \varepsilon)} \frac{dx}{\varepsilon_2 + 2a(x - \varepsilon_1)^2} \leq \exp(\lambda/2) \int_{-d}^0 \frac{dx}{\varepsilon_2 + 2a(x - \varepsilon_1)^2}. \quad (17)$$

При $\varepsilon \in E_+^+$ отсюда получаем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{2a\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a}(d + \varepsilon_1)}{\sqrt{\varepsilon_2}} \right). \quad (18)$$

При $\varepsilon_1 \leq 0$ из (18) следует, что

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a}(d + \varepsilon_1)}{\sqrt{\varepsilon_2}}.$$

Поэтому, считая δ выбранным так, чтобы $\frac{\sqrt{2a}(d - \delta)}{\sqrt{\delta}} > 1$, получаем

$$\text{для всех } \varepsilon \in E_+^+, \varepsilon_1 \leq 0 \quad 0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \lambda K(\varepsilon), \text{ где } K(\varepsilon) := \frac{\pi}{8\sqrt{2a\varepsilon_2}}. \quad (19)$$

При $\varepsilon \in E_+^+, \varepsilon_1 > 0$ из (18) имеем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} \right). \quad (20)$$

Покажем, что

$$\text{для всех } \varepsilon \in E_+^+, \varepsilon_1 > 0 \quad 0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \lambda K(\varepsilon), \quad (21)$$

где $K(\varepsilon) := \min \left\{ \frac{d}{4(\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1))}, \frac{\pi}{8\sqrt{2a\varepsilon_2}} \right\}$.

Действительно, если $\frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} < 1$, то из (20) получаем

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \frac{\lambda}{2\sqrt{2a\varepsilon_2}} \frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{2(\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1))} \leq \exp \lambda K(\varepsilon),$$

а если $\frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} \geq 1$, то $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2a\varepsilon_2}d}{\varepsilon_2 + 2a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)} \geq \frac{\pi}{4}$, и

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp \lambda \frac{\pi}{8\sqrt{2a\varepsilon_2}} \leq \exp \lambda K(\varepsilon).$$

При $\varepsilon \in E_+^-$ из (17) следует оценка

$$0 < Y'_u(x, u, \varepsilon)|_{x=c(u, \varepsilon)} \leq \exp(\lambda/4a) \int_{-d}^0 \frac{dx}{(x - \varepsilon_1)^2} = \exp \lambda K(\varepsilon), \quad (22)$$

где $K(\varepsilon) := \frac{d}{4a\varepsilon_1(d + \varepsilon_1)}$.

Функция $g(u, \varepsilon)$ удовлетворяет тождеству $Y(\xi(g(u, \varepsilon), \varepsilon), u, \varepsilon) - g(u, \varepsilon) \equiv 0$, дифференцируя которое получаем

$$[Y'_x(x, u, \varepsilon)\xi'_y(y, \varepsilon)g'_u(u, \varepsilon) + Y'_u(x, u, \varepsilon)] \quad x = \xi(y, \varepsilon), y = g(u, \varepsilon) \quad - g'_u(u, \varepsilon) \equiv 0.$$

Следовательно,

$$g'_u(u, \varepsilon) = \left[\frac{Y'_u(x, u, \varepsilon)}{1 - Y'_x(x, u, \varepsilon)\xi'_y(y, \varepsilon)} \right] \quad x = \xi(y, \varepsilon), y = g(u, \varepsilon). \quad (23)$$

При $u \in (-\bar{d}, 0]$ $Y(x, u, \varepsilon) \leq 0$. Отсюда и из (15), (7), (11) и (12) имеем $Y'_x(x, u, \varepsilon) \geq 0$. Так как $\xi'_y(y, \varepsilon) < 0$, то $1 - Y'_x(x, u, \varepsilon)\xi'_y(y, \varepsilon) \geq 1$, и из (19), (21) – (23) получаем

$$0 < g'_u(u, \varepsilon) \leq Y'_u(x, u, \varepsilon) \leq \exp \lambda K(\varepsilon) \text{ для всех } u \in (-\bar{d}, 0], \varepsilon \in E_+.$$

Так как $K(\varepsilon) \rightarrow +\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $\lambda < 0$, то δ можно считать выбранным столь малым, что

$$0 < g'_u(u, \varepsilon) \leq \min\{1/(2d_*), 1/(2N)\} \text{ для всех } u \in (-\bar{d}, 0], \varepsilon \in E_+. \quad (24)$$

Из (24) и равенства $g(0, \varepsilon) = 0$ следует, что $\forall (u, \varepsilon) \in (-\bar{d}, 0] \times E_+$ имеем $g(u, \varepsilon) \in (-d_*, 0]$. Функция $\chi_\varepsilon := g(f(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$, $\varepsilon \in E_+$, является функцией последования по траекториям поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ на дуге T_ε . Она отображает отрезок $[-d_*, d_*]$ в $(-d_*, 0)$. Вследствие (14) и (24) $0 < (\chi_\varepsilon)'(u) < 1/2 \quad \forall u \in [-d_*, d_*]$. Поэтому χ_ε имеет единственную неподвижную точку $u_* \in (-d_*, 0)$, при этом $0 < (\chi_\varepsilon)'(u_*) < 1/2$. Соответственно, дугу T_ε пересекает единственная периодическая траектория поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ – устойчивый гиперболический предельный цикл Γ_ε .

Фиксируем число d_* . Обозначим γ_ε^+ и γ_ε^- не пересекающиеся между собой простые замкнутые кривые, состоящие из дуг траекторий поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, начинающихся в точках A_ε^+ и A_ε^- дуги T_ε с координатами соответственно

$$y = d_* \quad \text{и} \quad y = -d_*,$$

и кончающихся соответственно в точках B_ε^+ и B_ε^- с координатами $y = f(d_*, \varepsilon)$ и $y = f(-d_*, \varepsilon)$, и из дуг границы области, заданной неравенствами

$$-d \leq x \leq \xi(y, \varepsilon), \quad -\bar{d} \leq y \leq \bar{d},$$

между соответственно точками A_ε^+ и B_ε^+ , A_ε^- и B_ε^- . Кривые γ_ε^+ и γ_ε^- ограничивают связную область W_ε , в которой имеется единственная периодическая траектория Γ_ε . При $\varepsilon = 0$ W_0 – окрестность контура Γ_0 . Пусть μ – расстояние от Γ_0 до $\gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$ в евклидовой метрике в G . Тогда для достаточно малого δ расстояние от Γ_0 до $\gamma_\varepsilon^+ \cup \gamma_\varepsilon^-$ при $\varepsilon \in E_+(\delta) = E_+$ больше $\mu/2$ и потому W_ε также окрестность Γ_0 . Пусть $0 < \rho_0 < \mu/2$ и $U(\Gamma_0)$ – ρ_0 -окрестность Γ_0 . Тогда $U(\Gamma_0) \subset W_\varepsilon$ для любого $\varepsilon \in E_+(\delta)$. Поскольку при доказательстве существования траектории Γ_ε можно заменить d_* на сколь угодно малое число, то можно выбрать столь малое δ , что $\Gamma_\varepsilon \subset U(\Gamma_0)$ при $\varepsilon \in E_+(\delta)$. Следовательно, найдены окрестность $U(\Gamma_0)$ и число δ , существование которых утверждается в теореме. Аналогично, для любой ρ -окрестности U_ρ кривой Γ_0 с $\rho \in (0, \rho_0]$ можно найти такое $\delta_\rho \in (0, \delta)$, что $\Gamma_\varepsilon \subset U_\rho$ при $\varepsilon \in E_+(\delta_\rho)$, то есть $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_\varepsilon = \Gamma_0$.

Тот факт, что при $\varepsilon \in E_-$ в W_ε , а потому и в $U(\Gamma_0)$ нет периодических траекторий, следует из (13). Все утверждения теоремы доказаны.

Список литературы

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. *Ученые записки Горьковского университета*. 1939;6:3–24.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., Наука. 1967. 488 с.
3. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. *Математический сборник*. 1963; 61(4):443–466.
4. Козлова В.С. Особые точки первой степени негрубости, лежащие на линии разрыва правых частей системы. Москва, МГУ. 1984. Деп. в ВИНТИ. № 4284-84.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., Наука, 1985. 224 с.
6. di Bernardo M., Budd Ch.J., Capneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems. Appl. Math. Sci. V. 163. London, Springer-Verlag. 2008. 483 p.
7. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
8. Kuznetsov Yu.A., Rinaldi S, Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2003;13(8):2157–2188.
9. Simpson D.J.W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems. World scientific series on nonlinear science, series A. Vol. 69. World Scientific Publ. 2010. 238 p.
10. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях петель сепаратрис особых точек на линии разрыва. Ярославль, Яросл. политехн. ин-т. 1987. Деп. в ВИНТИ. № 2795-B87.
11. Ройтенберг В.Ш. О рождении предельного цикла из петли сепаратрисы шитого седло-узла. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2022; 22(2):159–168.
12. Палис Ж., В. Мелу. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М., Мир. 1986. 301 с.
13. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований. 2004. 547 с.
14. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир. 1980. 368 с.
15. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., Наука. 1966. 568 с.

References

1. Andronov AA., Leontovich EA. Some cases of dependence of limit cycles on a parameters. *Scientific notes of Gorky University*. 1939;6:3-24 (In Russ).
2. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. Moscow, Nauka Publ. 1967. 488 p (In Russ).
3. Shilnikov LP. Some cases of generation of period motions from singular trajectories. *Sbornik. Mathematics*. 1963;61(4):443-466 (In Russ).
4. Kozlova VS. Singular points of the first degree of non-coarsenees lying on a line of discontinuity of the right-hand parts of a system. 1984. Deposited in VINITI. No. 4284-84 (In Russ).
5. Filippov AF. Differential equations with discontinuous right-hand side. Moscow, Nauka Publ. 1985. 224 (In Russ).
6. di Bernardo M., Budd ChJ., Capneys AR., Kowalczyk P. Piecewise smooth dynamical systems. Appl. Math. Sci. V. 163. London, Springer-Verlag. 2008. 483 p.
7. Guardia M., Seara TM., Teixeira MA. Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems. *Journal of Differential Equations*. 2011;250(4):1967–2023.
8. Kuznetsov YuA., Rinaldi S, Gragnani A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2003;13(8):2157–2188.
9. Simpson DJW. Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems. World scientific series on nonlinear science, series A. Vol. 69. World Scientific Publ. 2010. 238 p.
10. Roitenberg VSh. On bifurcations of separatrix loops of singular points on the line of discontinuity. 1984. Deposited in VINITI. No. 2795-B87 (In Russ).
11. Roitenberg VSh. On generation of a limit cycle from a separatrix loop of a sewn saddle-node. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022; 22(2):159–168 (In Russ).
12. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. New-York; Heidelberg; Berlin. Springer-Verlag. 1982. 198 p.
13. Shilnikov LP., Shilnikov AL., Turaev DV., Chua LO. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics: Part 1. River Edge, N.-J. World Scientific. 1998. 412 p.
14. Marsden JE., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications. New-York. Springer-Verlag. 1986.
15. Andronov AA., Leontovich EA., Gordon II., Maier AG. The qualitative theory of dynamical systems of second order. Moscow, Nauka Publ. 1966. 568 p. (In Russ).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 02.05.2025

Поступила после рецензирования 11.08.2025

Принята к публикации 15.08.2025

Received May 2, 2025

Revised August 11, 2025

Accepted August 15, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Vladimir Sh. Roitenberg – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

[К содержанию](#)

О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка

Архипов В. П.¹, Глушак А. В.²

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для распадающегося на линейные множители вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка найдено общее решение, вид которого зависит от знака коэффициентов при первой производной. Установлена разрешимость задачи Коши с начальным условием в точке вырождения. Определены асимптотики построенных решений. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, начальная задача, степенные асимптотики решений

Для цитирования: Архипов В.П., Глушак А.В. О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):193–207. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-193-207 EDN QQZPAV

Original Research

On the Solvability of the Initial Value Problem for a Factorized Degenerate Second-Order Differential Equation

Viktor P. Arkhipov¹, Alexander V. Glushak²

¹ Orel State University named after I.S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For a degenerate differential equation of the second order that splits into linear factors, a general solution is found whose form depends on the sign of the coefficients at the first derivative. The solvability of the Cauchy problem with an initial condition at the degeneracy point is established. The asymptotics of the constructed solutions are determined. Examples are given.

Keywords: Degenerate Differential Equation, Initial Value Problem, Power Asymptotics of Solutions

For citation: Arkhipov VP., Glushak AV. On the Solvability of the Initial Value Problem for a Factorized Degenerate Second-Order Differential Equation. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):193–207 (In Russ.).
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-193-207 EDN QQZPAV

1. Введение. Исследование вырождающихся дифференциальных уравнений, допускающих обращение в ноль коэффициентов при старшей производной, заключается в построении решений и изучении их гладкости и асимптотики в окрестности точки вырождения. В настоящей работе мы приводим явные формулы для решений и исследование гладкости решений дифференциальных уравнений, порождённых произведением операторов вида

$$p(t) \frac{d}{dt} + q(t), \quad p(0) = 0, \quad p(t) > 0 \text{ при } t > 0.$$

Полученные в статье результаты являются продолжением исследований по разрешимости вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка, проведённых ранее в работах [1, 2, 3, 4, 5]. Основной особенностью рассматриваемых нами вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка является не только вырождение коэффициента при второй производной, но также и вырождение коэффициента при первой производной. Возможность такого исследования обусловлена представлением

рассматриваемого уравнения в виде композиции. Именно этот факт отличает её от исследования в монографии [6, с. 137], в которой требовалась определённая пропорциональность убывания коэффициента при первой производной, когда $t \rightarrow 0$.

2. Асимптотика решений вырождающегося дифференциального уравнения первого порядка.

На промежутке $[0, d]$, $d > 0$ рассмотрим вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка

$$p(t)u'(t) + q(t)u(t) = g(t). \quad (1)$$

Условие 1. Коэффициенты и правая часть $g(t)$ уравнения (1) — действительные функции, причём $p(t), q(t) \in C^\infty[0, d]$, $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ при $t > 0$, $q(0) \neq 0$, $g(t) \in C^m[0, d]$ при некотором $m \in \mathbb{N}_0$.

Уравнение (1) ранее было предметом исследования в статьях [6, 7, 8, 9]. Приведём далее необходимые нам результаты об асимптотике решений уравнения (1), которые не вошли в вышеуказанные работы [6, 7, 8, 9].

Решение уравнения (1) при $g(t) = 0$ имеет вид

$$u_0(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right), \quad t > 0. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнено условие 1. Тогда для определяемой равенством (2) функции $u_0(t)$ справедливы следующие утверждения.

1°. При $q(0) > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(k)}(t) = \infty, \quad u_0(t) \in C^\infty(0, d], \quad u_0(t) \notin C[0, d]. \quad (3)$$

2°. При $q(0) < 0$ и $p'(0) = 0$ для $\varphi_k(t) \in C^\infty[0, d]$ и любых $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_k(t) \exp\left(\int_t^d \frac{q_k(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) = 0, \quad \text{где } q_k(t) = q(t) + kp'(t),$$

$$u_0(t) \in C^\infty[0, d], \quad u_0(t) = o(t^k) \text{ при } t \rightarrow 0+. \quad (4)$$

3°. При $q(0) = q_0 < 0$ и $p(t) = p_1 t + t^2 O(1)$, $p_1 > 0$, $q(t) = q_0 + t O(1)$ справедливо

$$u_0(t) \in C^{[-q_0/p_1]}[0, d], \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(k)}(t) = 0 \text{ для любого } k < \left\lfloor -\frac{q_0}{p_1} \right\rfloor, \quad (5)$$

наконец, $u_0(t) \in C^\infty[0, d]$, если $-\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1°. При $t > 0$, продифференцировав равенство (2), будем иметь

$$u_0^{(k)}(t) = \frac{\phi_k(t)}{p^k(t)} \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) = \varphi_k(t) \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) + kp'(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right),$$

с некоторыми $\phi_k(t)$, $\varphi_k(t) \in C^\infty[0, d]$, и, переходя к пределу при $t \rightarrow 0+$, получим утверждение (3).

2°. Аналогично п. 1°, при $t > 0$ и $q(0) < 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_k(t) \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) + kp'(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right) = 0,$$

и, доопределив $u_0(0) = 0$, получим утверждение (4).

3°. Учитывая асимптотику коэффициентов уравнения (1), при $q(0) = q_0 < 0$ и $Q_k(t) = O(1) \in C^\infty[0, d]$, $k \in \mathbb{N}_0$, после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(k)}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_k(t) \exp\left(\int_t^d \frac{q_0 + \xi O(1) + k(p_1 + 2\xi O(1))}{p_1 \xi (1 + \xi O(1))} d\xi\right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_k(t) \exp\left(\int_t^d \frac{(q_0 + kp_1)(1 + \xi O(1)) d\xi}{p_1 \xi}\right) = \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_k(t) \exp\left(\frac{q_0 + kp_1}{p_1} \int_t^d \frac{d\xi}{\xi}\right) \exp(O(1)) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} Q_k(t) t^{-q_0/p_1-k} = \begin{cases} 0, & \text{если } k < -\frac{q_0}{p_1}, \\ Q_k(0), & \text{если } k = -\frac{q_0}{p_1}, \\ \infty, & \text{если } k > -\frac{q_0}{p_1}. \end{cases}$$

Доопределив функцию $u_0(t)$ нулём $u_0(0) = 0$, получим утверждение (5). Лемма 1 доказана.

Укажем далее асимптотические свойства при $t \rightarrow 0+$ частных решений уравнения (1) для различных значений $q(0)$.

Лемма 2. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) > 0$. Тогда при любой функции $g(t)$ существует единственное ограниченное на $[0, d]$ решение $u_+(t; g)$ этого уравнения, определённое несобственным интегралом

$$u_+(t; g) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right) d\tau \in C^m[0, d] \cap C^{m+1}(0, d], \quad (6)$$

и при этом

$$u_+(0; g) = \frac{g(0)}{q(0)}, \quad u_+^{(k)}(0; g) = \frac{g_k(0)}{q_k(0)} = \frac{g'_{k-1}(0) - q'_{k-1}(0)u_+^{(k-1)}(0; g)}{kp'(0) + q(0)}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (7)$$

$$g_k(t) = g'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_+^{(k)}(t; g) \in C[0, d], \quad g_0(t) = g(t),$$

$$q_k(t) = p'(t) + q_{k-1}(t) = kp'(t) + q(t), \quad q_k(0) > 0, \quad q_0(t) = q(t).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что определяемая равенством (6) функция $u_+(t; g)$ при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (1) и $u_+(t; g) \in C^{m+1}(0, d]$. Используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_+(t; g) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{g(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right) d\tau}{\exp\left(-\int_t^d \frac{g(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right)} = \frac{g(0)}{q(0)}, \quad (8)$$

и, доопределив $u_+(0; g) = \frac{g(0)}{q(0)}$, получим $u_+(t; g) \in C[0, d] \cap C^{m+1}(0, d]$.

Далее проведём процесс повышения гладкости функции $u_+(t; g)$ в точке $t = 0$. Если функция $u_+(t; g) \in C[0, d] \cap C^{m+1}(0, d]$ — решение уравнения (1), то функция $u_1(t; g_1) = u'_+(t; g)$ при $t > 0$, $m \geq 1$ удовлетворяет уравнению $p(t)u'_1(t; g_1) + q_1(t)u_1(t; g_1) = g_1(t)$, где $q_1(t) = p'(t) + q(t)$, $q_1(0) > 0$, $g_1(t) = g'(t) - q'(t)u_+(t; g)$.

Аналогично вычислениям, проведённым ранее в (8), получим

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_1(t; g_1) = \frac{g_1(0)}{q_1(0)},$$

следовательно, $u_1(t; g_1) \in C[0, d]$ и $u_+(t; g) \in C^1[0, d]$.

Повторим этот процесс далее для любого $k \leq m$. Тогда функция $u_k(t; g_k) = u_+^{(k)}(t; g)$ удовлетворяет уравнению $p(t)u'_k(t; g_k) + q_k(t)u_k(t; g_k) = g_k(t)$, где $g_k(t) = g'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_{k-1}(t; g_k)$, и при этом справедливо (7)

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_+^{(k)}(t; g) = \frac{g_k(0)}{q_k(0)} = u_+^{(k)}(0; g), \quad u_+(t; g) \in C^m[0, d].$$

Следовательно, $u_+(t; g) \in C^m[0, d] \cap C^{m+1}(0, d]$.

Единственность ограниченного решения следует из утверждения 1° леммы 1. Лемма 2 доказана.

Таким образом, при $t > 0$ общее решение уравнения (1) для случая $q(0) > 0$ имеет вид

$$u(t) = Cu_0(t) + u_+(t; g) = C \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right) + \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right) d\tau \quad (9)$$

с произвольной постоянной C .

В отличие от случая $q(0) > 0$, при $q(0) < 0$ частное решение уравнения (1) следует выбирать в виде

$$u_-(t; g) = - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right) d\tau. \quad (10)$$

Лемма 3. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) < 0$. Тогда определяемая равенством (10) функции $u_-(t; g)$ является решением уравнения (1) и справедливы утверждения. 1°. В случае сильного вырождения, когда $p(0) = p'(0) = 0$, для любых $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$ выполнено

$$u_-(t; g) \in C^m[0, d] \cap C^{m+1}(0, d], \quad u_-^{(k)}(0; g) = \frac{g_k(0)}{q_k(0)}, \quad (11)$$

где $q_0(t) = q(t)$, $g_0(t) = g(t)$, $q_k(t) = kp'(t) + q(t)$, $q_k(0) < 0$, $g_k(t) = g_{k-1}'(t) - q_{k-1}'(t)u_-^{(k-1)}(t; g)$. 2°. В случае слабого вырождения, если $p(0) = 0$, $p(t) = p_1t + t^2O(1)$, $p_1 > 0$, $q(t) = q_0 + tO(1)$, $q_0 > 0$ и $g(t) = g_0 + \sum_{j=1}^m g_j t^j + t^m o(1)$ при $t \rightarrow 0+$, то справедливы включения

$$u_-(t; g) \in \begin{cases} C^m[0, d], & \text{если } m < -\frac{q_0}{p_1}, \\ C^{[-q_0/p_1]}[0, d], & \text{если } m \geq -\frac{q_0}{p_1}, \quad -\frac{q_0}{p_1} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, \quad k_0 \leq m, \quad g^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^m[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, \quad k_0 \leq m, \quad g^{(k_0)}(0) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

3°. Асимптотика функции $u_-(t; g)$ при $t \rightarrow 0+$ определяется равенствами (11), (12).

Доказательство. Непосредственной подстановкой проверяется тот факт, что функции $u_-(t; g)$ удовлетворяют уравнению (1) и, очевидно, что при этом

$$u_-(t; g) \in C^m[0, d] \cap C^{m+1}(0, d],$$

а гладкость и асимптотика решения $u_-(t; g)$ в точке вырождения далее устанавливается, во многом, аналогично лемме 2.

Используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_-(t; g) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{- \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(- \int_\tau^d \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right) d\tau}{\exp \left(- \int_t^d \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right)} = \frac{g(0)}{q(0)}, \quad (13)$$

и, доопределив $u_-(0; g) = \frac{g(0)}{q(0)}$, получим $u_-(t; g) \in C[0, d] \cap C^{m+1}(0, d]$.

Как и в лемме 2, повторяя процесс повышения гладкости, при $q_k(0) = kp'(0) + q(0) < 0$, установим $u_-(t; g) \in C^k[0, d]$.

В случае 1° неравенство $q_k(0) < 0$ выполняется для любого $1 \leq k \leq m$, что и приводит к соотношениям (11). В случае 2° проведём более точные рассуждения, используя асимптотику коэффициентов.

Если $1 \leq m < -\frac{q_0}{p_1}$, то при $t \rightarrow 0+$ для определяемой равенством (10) функции $u_-(t; g)$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} u_-(t; g) &= - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(- \int_\tau^d \frac{(q(\xi) - p'(\xi))}{p(\xi)} d\xi \right) d\tau \times \exp \left(\int_t^d \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right) = \\ &= - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(- \int_\tau^d \frac{(q(\xi) - p'(\xi))}{p(\xi)} d\xi \right) d\tau \times \exp \left(\frac{q_0}{p_1} \int_t^d \frac{(1 + \xi O(1))}{\xi(1 + \xi O(1))} d\xi \right) = \\ &= t^{-q_0/p_1} \exp(O(1)) \left(- \frac{1}{p(d)} \int_t^d \tau^{(q_0 - p_1)/p_1} \left(g_0 + \sum_{j=1}^m g_j \tau^j + \tau^m o(1) \right) \exp(O(1)) d\tau \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-q_0/p_1} \left(-\frac{1}{p(d)} \int_t^d \tau^{(q_0-p_1)/p_1} \left(g_0 + \sum_{j=1}^m g_j \tau^j + \tau^m o(1) \right) d\tau \right) \exp(O(1)) = \\
&= \left(h_0 t^{-q_0/p_1} + \sum_{j=1}^m h_j t^j + t^m O(1) \right) \exp(O(1))
\end{aligned}$$

с некоторыми постоянными h_0, h_j . Следовательно, $u_-(t; g) \in C^m[0, d]$, если $m < -\frac{q_0}{p_1}$.

Если $m > -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}$, то последние преобразования выглядят иначе. При некотором $k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}$, $k_0 \leq m$ и $g^{(k_0)}(0) \neq 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
u_-(t; g) &= - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(d)} \exp \left(- \int_\tau^d \frac{(q(\xi) - p'(\xi)) d\xi}{p(\xi)} \right) d\tau \times \exp \left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)} \right) = \\
&= t^{-q_0/p_1} \left(\frac{-1}{p(d)} \int_t^d \tau^{(q_0-p_1)/p_1} \left(g_0 + \sum_{j=1}^{k_0-1} g_j \tau^j + g_{k_0} \tau^{k_0} + \sum_{j=k_0+1}^m g_j \tau^j + \tau^m O(1) \right) d\tau \right) \exp(O(1)) = \\
&= \left(h_0 t^{-q_0/p_1} + \sum_{j=1}^{k_0-1} h_j t^j + g_{k_0} t^{k_0} \ln t + \sum_{j=k_0+1}^m h_j t^j + t^m O(1) \right) \exp(O(1)) \in C^{k_0-1}[0, d].
\end{aligned}$$

Наконец, в случае $-\frac{q_0}{p_1} \notin \mathbb{N}$, $m \geq -\frac{q_0}{p_1}$ и $g^{(k_0)}(0) = 0$, очевидно, $u_-(t; g) \in C^{[-q_0/p_1]}[0, d]$, что и завершает доказательство леммы.

Таким образом, при $t > 0$ общее решение уравнения (1) для случая $q(0) < 0$ имеет вид

$$u(t) = Cu_0(t) + u_-(t; g) = C \exp \left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)} \right) - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)} \right) d\tau \quad (14)$$

с произвольной постоянной C .

В заключение пункта отметим, что из равенств (8), (9), (13), (14) вытекает, что для любого ограниченного решения $u(t)$ уравнения (1) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0+} p(t)u'(t) = 0.$$

3. Факторизованное вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Введём в рассмотрение дифференциальные операторы

$$L_1 u(t) = a_1(t)u'(t) + b_1(t)u(t), \quad L_2 v(t) = a_2(t)v'(t) + b_2(t)v(t), \quad Lv(t) = L_1 L_2 v(t),$$

и, таким образом, оператор L задаётся дифференциальным выражением второго порядка

$$Lv(t) = a_1(t)a_2(t)v''(t) + (a_1(t)a_2'(t) + a_1(t)b_2(t) + b_1(t)a_2(t))v'(t) + (a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t))v(t). \quad (15)$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lv(t) = f(t) \quad (16)$$

и, используя результаты п. 2, построим решения этого уравнения. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты оператора L в представлении (15) и в уравнении (16) удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Для $i = 1, 2$ функции $a_i(t), b_i(t) \in C^\infty[0, d]$, $a_i(0) = 0$, $a_i(t) > 0$ при $t > 0$, $b_i(0) \neq 0$, а функция $f(t) \in C^m[0, d]$, $m \in \mathbb{N}_0$.

При нахождении решений уравнения (16) нам придётся рассмотреть несколько существенно различных случаев в зависимости от знаков коэффициентов $b_i(0)$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0) > 0$, $b_2(0) > 0$. Тогда существует единственное ограниченное решение $v_1(t; f) \in C^m[0, d]$ уравнения (16), определяемое равенством

$$v_1(t; f) = \frac{1}{a_2(t)} \int_0^t \exp \left(\int_\tau^t \frac{a_2'(\xi) - b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \times \left(\int_0^\tau \exp \left(\int_\eta^\tau \frac{a_1'(\xi) - b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\tau)} \right) d\tau, \quad (17)$$

и при $t \rightarrow 0+$ справедлива асимптотика

$$v_1(t; f) = \sum_{k=0}^m \frac{v_1^{(k)}(0; f)}{k!} t^k + t^m o(1), \quad (18)$$

где $v_1(0; f) = \frac{u_+(0; f)}{b_2(0)}$, $v_1^{(k)}(0; f) = \frac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}$, $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}'_{k-1}(t) - \tilde{q}'_{k-1}(t)v_1^{(k)}(t; f)$, $\tilde{f}_0(t) = u_+(t; f)$, $\tilde{q}_0(t) = b_2(t)$, $\tilde{q}_k(t) = ka'_2(t) + b_2(t)$, $\tilde{q}_k(0) > 0$ для $1 \leq k \leq m$,

$$u_+(t; f) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)}\right) d\tau, \quad u_+(0; f) = \frac{f(0)}{b_1(0)}, \quad u_+^{(k)}(0; f) = \frac{f_k(0)}{q_k(0)},$$

$$q_0(t) = b_1(t), \quad f_0(t) = f(t), \quad f_k(t) = f'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_+^{(k)}(t; f), \\ q_k(t) = ka'_1(t) + b_1(t), \quad q_k(0) > 0 \quad \text{для } 1 \leq k \leq m.$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right), \quad v_{12}(t) = \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1(\eta) d\eta}{a_1(\eta)}\right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (19)$$

причём

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}(t) = \infty. \quad (20)$$

Доказательство. Решение $v(t)$ уравнения (16) будем строить в два этапа. Запишем это уравнение в виде системы двух уравнений $L_2 v(t) = u(t)$, $L_1 u(t) = f(t)$ и используя леммы 1 и 2, определим последовательно функции $u(t)$, $v(t)$ как решения соответствующих вырождающихся дифференциальных уравнений первого порядка.

Согласно представлению (9), общее решение уравнения $L_1 u(t) = f(t)$ имеет вид:

$$u(t) = C_1 u_{01}(t) + u_+(t; f) = C_1 \exp\left(\int_t^d \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)}\right) + \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)}\right) d\tau \quad (21)$$

с произвольной постоянной C_1 . При этом для любого $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_{01}^{(k)}(t) = \infty, \quad u_+(t; f) \in C^m[0, d] \cap C^{m+1}(0, d], \quad u_+(0; f) = \frac{f(0)}{b_1(0)}, \\ u_+^{(k)}(0; f) = \frac{f_k(0)}{q_k(0)} = \frac{f'_{k-1}(0) - q'_{k-1}(0)u_+^{(k-1)}(0; f)}{ka'_1(0) + b_1(0)}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (22)$$

где $f_k(t) = f'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_+^{(k)}(t; f) \in C[0, d]$, $q_k(t) = p'(t) + q_{k-1}(t) = ka'_1(t) + q(t)$, $q_k(0) > 0$, $q_0(t) = b_1(t)$, $f_0(t) = f(t)$.

Запишем теперь решение уравнения (16), как решение уравнения первого порядка $L_2 v(t) = u(t)$ с правой частью, определённой в (21).

Для этого вначале определим частное решение $v_1(t; f)$ в соответствии с представлением (9), в которое подставим $u_+(t)$ из (21). Будем иметь

$$v_1(t; f) = \int_0^t \frac{u_+(\tau)}{a_2(\tau)} \exp\left(\int_\tau^t \frac{-b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right) d\tau = \frac{1}{a_2(t)} \int_0^t u_+(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \frac{(a'_2(\xi) - b_2(\xi)) d\xi}{a_2(\xi)}\right) d\tau = \\ = \frac{1}{a_2(t)} \int_0^t \left(\exp\left(\int_\tau^t \frac{a'_2(\xi) - b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \int_0^\tau \exp\left(\int_\eta^\tau \frac{a'_1(\xi) - b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\tau)},$$

что и приводит к (17), (18).

Линейно независимые решения однородного уравнения (16) $v_{02}(t)$ и $v_{12}(t)$ имеют вид (19) и образуют фундаментальную систему решений независимо от соотношения знаков $b_1(0)$ и $b_2(0)$. При этом для $b_1(0) > 0$ и $b_2(0) > 0$ после несложных преобразований получим

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right), \quad v_{12}(t) = \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1(\eta) d\eta}{a_1(\eta)}\right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} =$$

$$= \frac{1}{a_2(d)} \exp \left(\int_t^d \left(\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} + \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} \right) d\xi \right) \int_t^d \exp \left(\int_\tau^d \frac{(a_2'(\xi) - b_2(\xi)) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{-b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) d\tau \quad (23)$$

и $v_{12}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0+$, что подтверждает справедливость второго соотношения в (20).

Справедливость же первого соотношения в (20) очевидна. Следовательно, определяемая равенством (17) функция $v_1(t; f)$ является единственным ограниченным решением уравнения (16), что и завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0) > 0$, $b_2(0) < 0$. Тогда существует решение $v_2(t; f) \in C^{m+1}(0, d]$ уравнения (16), определяемое равенством

$$v_2(t; f) = - \int_t^d \left(\int_0^\tau \exp \left(- \int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \quad (24)$$

1°. В случае сильного вырождения, когда $a_2(0) = a_2'(0) = 0$, функция $v_2(t; f) \in C^m[0, d]$ и при $t \rightarrow 0+$ справедлива асимптотика

$$v_2(t; f) = \sum_{k=0}^m \frac{v_2^{(k)}(0; f)}{k!} t^k + t^m o(1), \quad (25)$$

где $v_2(0; f) = \frac{u_+(0; f)}{b_2(0)}$, $v_2^{(k)}(0; f) = \frac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}$, $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}_{k-1}'(t) - \tilde{q}_{k-1}'(t)v_2^{(k)}(t; f)$, а остальные обозначения введены в теореме 1. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$, при этом $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d]$, $v_{02}(t) = o(t^k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0+$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}(t) = \infty$.

2°. В случае слабого вырождения, когда

$$a_2'(0) \neq 0, \quad a_2(t) = a_{21}t + t^2 O(1), \quad a_{21} > 0, \quad b_2(t) = b_{20} + t O(1),$$

функция $v_2(t; f)$ допускает асимптотическое представление (25) и

$$v_2(t; f) \in \begin{cases} C^m[0, d], & \text{если } m < -\frac{b_{20}}{a_{21}}, \\ C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d], & \text{если } m \geq -\frac{b_{20}}{a_{21}}, \quad -\frac{b_{10}}{a_{11}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{10}}{a_{11}}, \quad k_0 \leq m, \quad f^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^m[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{10}}{a_{11}} \in \mathbb{N}, \quad f^{(k_0)}(0) = 0, \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$, при этом $v_{02}(t) \in C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d] \cap C^\infty(0, d]$ для $-\frac{b_{20}}{a_{21}} \notin \mathbb{N}$, $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d]$ для $-\frac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}(t) = \infty$.

Доказательство. Как и в теореме 1 построение решения уравнения (16) проводим в два этапа. Вначале возьмём решение $u_+(t; f)$ уравнения $L_1 u(t) = f(t)$, определённое равенством (21) и с той же асимптотикой (22). Далее, воспользовавшись равенством (9), запишем частное решение $v_2(t; f)$ уравнения первого порядка $L_2(t) = u_+(t; f)$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} v_2(t; f) &= - \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{u_+(\tau; f) d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= - \int_t^d \left(\int_0^\tau \exp \left(- \int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned}$$

что и устанавливает представление (24).

Так же как в теореме 1, фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$.

Поскольку $u_+(t; f) \in C^m[0, d]$, то в случае 1° сильного вырождения утверждение о гладкости функции $v_2(t; f)$ в точке $t = 0$ вытекает из леммы 3. Кроме того, функция $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d]$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}^{(k)}(t) = 0$ для $k \in \mathbb{N}_0$, что приводит к асимптотике (25).

В случае 2° слабого вырождения утверждение о гладкости функций $v_2(t; f)$ и $v_{02}(t)$ в точке $t = 0$ также вытекает из лемм 1 и 3.

Рассмотрим, наконец, поведение $v_{12}(t)$ при $t \rightarrow 0+$. Учитывая равенство (23), для сильного и для слабого вырождения найдём предел, используя правило Лопиталья. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \exp \left(\int_t^d \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \int_t^d \exp \left(\int_\tau^d \left(\frac{b_1(\eta)}{a_1(\eta)} - \frac{b_2(\eta)}{a_2(\eta)} \right) d\eta \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\exp \left(\int_t^d \left(\frac{b_1(\eta)}{a_1(\eta)} - \frac{b_2(\eta)}{a_2(\eta)} \right) d\eta \right) \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right)}{b_2(t) \exp \left(-\int_t^d \frac{b_2(\eta) d\eta}{a_2(\eta)} \right)} = -\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right)}{b_2(t)} = +\infty, \end{aligned}$$

что завершает доказательство теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0) < 0$, $b_2(0) > 0$. Тогда существует решение $v_3(t; f) \in C^{m+1}(0, d]$ уравнения (16), определяемое равенством

$$v_3(t; f) = - \int_0^t \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) d\eta \right) \exp \left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \quad (26)$$

1°. В случае сильного вырождения, когда $a_1(0) = a_1'(0) = 0$, функция $v_3(t; f) \in C^m[0, d]$ и при $t \rightarrow 0+$ справедлива асимптотика

$$v_3(t; f) = \sum_{k=0}^m \frac{v_3^{(k)}(0; f)}{k!} t^k + t^m o(1), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} v_3(0; f) &= \frac{f(0)}{b_1(0)b_2(0)}, \\ v_3^{(k)}(0; f) &= \frac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}, \quad \tilde{f}_k(t) = \tilde{f}'_{k-1}(t) - \tilde{q}'_{k-1}(t)v_3^{(k)}(t; f), \quad \tilde{f}_0(t) = u_-(t; f), \\ u_-(t; f) &= - \int_t^d \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (28)$$

а остальные обозначения введены в теореме 1. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемая равенством (19) функция $v_{02}(t)$ и

$$\tilde{v}_{12}(t) = \int_0^t \exp \left(\int_\tau^d \frac{b_1(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \exp \left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (29)$$

при этом $\tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0, d]$, $\tilde{v}_{12}(t) = o(t^k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \rightarrow 0+$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}(t) = \infty$.

2°. В случае слабого вырождения, когда

$$a_1'(0) \neq 0, \quad a_1(t) = a_{11}t + t^2 O(1), \quad a_{11} > 0, \quad b_1(t) = b_{10} + t O(1), \quad b_{10} < 0,$$

функция $v_3(t; f)$ допускает асимптотическое представление (25) и

$$v_3(t; f) \in \begin{cases} C^m[0, d], & \text{если } m < -\frac{b_{10}}{a_{11}}, \\ C^{[-b_{10}/a_{11}]}[0, d], & \text{если } m \geq -\frac{b_{10}}{a_{11}}, \quad -\frac{b_{10}}{a_{11}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{10}}{a_{11}}, \quad k_0 \leq m, \quad f^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^m[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{10}}{a_{11}} \in \mathbb{N}, \quad f^{(k_0)}(0) = 0. \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции $v_{02}(t)$, $\tilde{v}_{12}(t)$, при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}(t) = \infty, \quad \tilde{v}_{12}(t) \in C^{[-b_{10}/a_{11}]}[0, d], \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \tilde{v}_{12}(t) = 0, \quad \tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0, d] \text{ при } -\frac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Как и в предыдущих теоремах построение решения проводим в два этапа. Учитывая условие $b_1(0) < 0$ и лемму 3, вначале построим частное решение $u_-(t; f)$ уравнения $L_1 u(t) = f(t)$, которое имеет вид (28).

В случае 1° $u_-(t; f) \in C^m[0, d]$ и для любого $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$ $u_-^{(k)}(0; f) = \frac{f_k(0)}{q_k(0)}$, где

$$f_0(t) = b_1(t), \quad q_0(t) = b_1(t), \quad q_k(t) = ka'_1(t) + b_1(t), \quad q_k(0) < 0, \quad f_k(t) = f'_{k-1}(t) - q'_{k-1}(t)u_-^{(k)}(0; f).$$

Далее, в соответствии с представлением (16), запишем решение $v_3(t; f)$ уравнения $L_2 v(t) = u_-(t; f)$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} v_3(t; f) &= \int_0^t \frac{u_-(\tau; f)}{a_2(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) d\tau = \\ &= -\int_0^t \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\eta\right) \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned}$$

что и устанавливает представления (26), (27) в случае сильного вырождения.

В условиях теоремы 3 фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют введённые ранее функции $v_{02}(t)$, $\tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0, d]$, при этом

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}(t) = \infty, \quad \tilde{v}_{12}(t) = o(t^k) \text{ для любого } k \in \mathbb{N}.$$

В случае 2° из лемм 2 и 3 также выводим включения для функции $u_-(t; f)$

$$u_-(t; f) \in \begin{cases} C^m[0, d], & \text{если } m < -\frac{b_{10}}{a_{11}}, \\ C^{[-b_{10}/a_{11}]}[0, d], & \text{если } m \geq -\frac{b_{10}}{a_{11}}, -\frac{b_{10}}{a_{11}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{10}}{a_{11}}, k_0 \leq m, f^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^m[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{10}}{a_{11}} \in \mathbb{N}, f^{(k_0)}(0) = 0, \end{cases}$$

а функция $v_3(t; f)$ сохраняет гладкость функции $u_-(t; f)$.

В силу леммы 1 имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}(t) = \infty, \quad v_{01}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \in C^{[-b_1(0)/a_{11}]}[0, d],$$

а, следовательно, и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{01}(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \tilde{v}_{12}(t) = 0, \quad \tilde{v}_{12}(t) \in C^{[-b_1(0)/a_{11}]}[0, d], \quad \tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0, d] \text{ при } -\frac{b_1(0)}{a_{11}} \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнено условие 2 и $b_1(0) < 0$, $b_2(0) < 0$, $a'_1(0) = 0$. Тогда существует решение $v_4(t; f) \in C^{m+1}(0, d]$ уравнения (16), определяемое равенством

$$v_4(t; f) = \int_t^d \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\eta\right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \quad (30)$$

1°. В случае сильного вырождения, когда $a_2(0) = a'_2(0) = 0$, функция $v_4(t; f) \in C^m[0, d]$ и при $t \rightarrow 0+$ справедлива асимптотика

$$v_4(t; f) = \sum_{k=0}^m \frac{v_4^{(k)}(0; f)}{k!} t^k + t^m o(1), \quad (31)$$

где $v_4(0; f) = \frac{u_-(0; f)}{b_2(0)}$, $v_4^{(k)}(0; f) = \frac{\tilde{f}_k(0)}{\tilde{q}_k(0)}$, $\tilde{f}_k(t) = \tilde{f}'_{k-1}(t) - \tilde{q}'_{k-1}(t)v_4^{(k)}(t; f)$, $\tilde{f}_k(t) = u_-(t; f)$, а остальные обозначения введены в теореме 3. Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют определяемые равенством (19) функции $v_{02}(t)$ и $v_{12}(t)$, при этом $v_{02}(t)$, $v_{12}(t) \in C^\infty[0, d]$, для функции $v_{12}(t)$

при $t \rightarrow 0+$ справедлива асимптотика $v_{12}(t) = o(t^k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}^{(k)}(t) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.
 2°. В случае слабого вырождения, когда

$$a_2'(0) \neq 0, a_2(t) = a_{21}t + t^2O(1), a_{21} > 0, b_2(t) = b_{20} + tO(1), b_{20} < 0,$$

функция $v_4(t; f)$ допускает асимптотическое представление вида (31) и

$$v_4(t; f) \in \begin{cases} C^m[0, d], & \text{если } m < -\frac{b_{20}}{a_{21}}, \\ C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d], & \text{если } m \geq -\frac{b_{20}}{a_{21}}, -\frac{b_{20}}{a_{21}} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}, f^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^m[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}, f^{(k_0)}(0) = 0. \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$, при этом

$$v_{02}(t) \in C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d], \lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}^{(k)}(t) = 0 \text{ при } k < \left\lceil -\frac{b_{20}}{a_{21}} \right\rceil,$$

$$v_{12}(t) \in C^{[-b_{20}/a_{21}]}[0, d] \text{ при } -\frac{b_{20}}{a_{21}} \notin \mathbb{N}, v_{12}(t) \in C^{-b_{20}/a_{21}-1}[0, d] \text{ при } -\frac{b_{20}}{a_{21}} \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так же как и в теореме 3, построим частное решение $u_-(t; f)$ уравнения $L_1 u(t) = f(t)$. Далее, в соответствии с представлением (9), запишем частное решение $v_4(t; f)$ уравнения $L_2 v(t) = u_-(t; f)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} v_4(t; f) &= - \int_t^d \frac{u_-(\tau; f)}{a_2(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) d\tau = \\ &= \int_t^d \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\eta \right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}. \end{aligned}$$

Фундаментальную систему решений однородного уравнения (16) образуют введенные в теореме 1 функции $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$.

Асимптотика (31) функции $v_4(t; f)$ в точке $t = 0$ следует из леммы 3 с учётом гладкости решения $u_-(\tau; f)$. В случае сильного вырождения 1° из леммы 1 следует $u_-(\tau; f) \in C^m[0, d]$ с асимптотикой (11) и в силу леммы 3 получим (31).

Асимптотика функции $v_{02}(t)$ в точке $t = 0$ установлена в теореме 2, а по лемме 3 функция $v_{12}(t) \in C^\infty[0, d]$ и для неё справедлива асимптотика вида (11), что завершает доказательство 1°.

В случае слабого вырождения 2° имеем $a_2(t) = a_{21}t + t^2O(1)$, $a_{21}, b_2(t) = b_{20} + tO(1)$, и утверждения теоремы относительно гладкости и асимптотики (31) функции $v_4(t; f)$ справедливы в силу леммы 3. Требуемые утверждения относительно фундаментальной системы решений $v_{02}(t)$, $v_{12}(t)$ однородного уравнения (16) устанавливаются как и в лемме 1, что и завершает доказательство теоремы.

4. Начальная задача для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка. Назовём начальной задачей в точке $t = 0$ задачу нахождения решения уравнения (16), удовлетворяющего условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(t) = v_0. \quad (32)$$

Утверждения теорем 1–4 позволяют установить разрешимость задачи (16), (32).

Теорема 5. Пусть выполнено условие 2. Тогда лишь при единственном значении $v_0 = \frac{f(0)}{b_1(0)b_2(0)}$ задача (16), (32) имеет решение $v(t)$ и для него справедливы следующие утверждения.

1°. Если $b_1(0) > 0$, $b_2(0) > 0$, то существует единственное решение $v(t) = v_1(t; f)$ задачи (16), (32), которое определяется формулой (17), и для этого решения справедлива асимптотика (18).

2°. Если $b_1(0) > 0$, $b_2(0) < 0$ и $a_2'(0) = 0$, то существует однопараметрическое семейство функций $v(t, C_1) = C_1 v_{02}(t) + v_2(t; f)$, где C_1 — произвольная постоянная, $v_{02}(t)$, $v_2(t; f)$ определены соответственно в (19), (24), каждая функция которого является решением задачи (16), (32). При этом для $v_2(t; f)$ справедлива асимптотика (25) и

$$v_{02}(t) \in C^\infty[0, d], v_{02}(t) = o(t^k) \text{ при } t \rightarrow 0+, k \in \mathbb{N}.$$

3°. Если $b_1(0) < 0$, $b_2(0) > 0$, $a_1'(0) = 0$, то существует однопараметрическое семейство функций $v(t, C_2) = C_2 \tilde{v}_{12}(t) + v_3(t; f)$, где C_2 — произвольная постоянная, $\tilde{v}_{12}(t)$, $v_3(t; f)$ определены соответственно в

(29), (26), каждая функция которого является решением задачи (16), (32). При этом для $v_3(t; f)$ справедлива асимптотика (27) и

$$\tilde{v}_{12}(t) \in C^\infty[0, d], \quad \tilde{v}_{12}(t) = o(t^k) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4°. Если $b_1(0) < 0$, $b_2(0) < 0$ и $a'_1(0) = a'_2(0) = 0$, то существует двухпараметрическое семейство функций $v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t) + v_4(t; f)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $v_{02}(t), v_{12}(t), v_4(t; f)$ определены соответственно в (19), (30), каждая функция которого является решением задачи (16), (32). При этом для $v_4(t; f)$ справедлива асимптотика (31) и $v_{02}(t) \in C^\infty[0, d], v_{12}(t) \in C^\infty[0, d], v_{02}(t) = o(t^k), v_{12}(t) = o(t^k)$ при $t \rightarrow 0+, k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Справедливость утверждений во всех случаях 1°–4° вытекает соответственно из теорем 1–4 и того факта, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_i(t; f) = \frac{f(0)}{b_1(0)b_2(0)}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

В случае неограниченности при $t \rightarrow 0+$ функций $v_{02}(t)$ и $v_{12}(t)$ из фундаментальной системы решений однородного уравнения (16), в общем решении постоянные перед этими функциями следует положить равными нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Устранение условия $a'_1(0) = 0$ или $a'_2(0) = 0$ в случае теоремы 5 приводит лишь к изменению гладкости функций $v_{02}(t), v_{12}(t), \tilde{v}_{12}(t)$ в точке $t = 0$ и некоторому усложнению доказательства.

5. Примеры. В этом пункте приведём примеры, иллюстрирующие утверждения теорем 1–5. Отметим, что решения в примерах 1–4 получены с помощью системы Wolfram Mathematica.

Пример 1. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^2, \quad a_2(t) = t^2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = t + 1, \quad f(t) = 1,$$

а начальное значение $v_0 = 1$. Тогда общее решение $v(t, C_1, C_2)$ уравнения (16) и решение $v(t)$ начальной задачи (16), (32) представимы соответственно в виде

$$v(t, C_1, C_2) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \left(C_1 + C_2 \ln t - \text{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right) \right),$$

$$v(t) = v_1(t; f) = -\frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \text{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} v_1(t; f) = 1,$$

где $\text{Ei}(\cdot)$ — интегральная показательная функция. Пример является иллюстрацией к теореме 1 и пункту 1° теоремы 5.

Пример 2. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^2, \quad a_2(t) = t^2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = t - 1, \quad f(t) = -1,$$

а начальное значение $v_0 = 1$. Тогда общее решение $v(t, C_1, C_2)$ уравнения (16) и однопараметрическое семейство решений $v(t, C_1)$ начальной задачи (16), (32) представимы соответственно в виде

$$v(t, C_1, C_2) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \left(C_1 + C_2 t \text{Ei}_1\left(\frac{2}{t}\right) + \text{Ei}_1\left(\frac{1}{t}\right) \right),$$

$$v(t, C_1) = C_1 v_{02}(t) + v_2(t; f) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \left(C_1 + \text{Ei}_1\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} v_2(t; f) = 1,$$

где $\text{Ei}_1(\cdot)$ — модифицированная интегральная показательная функция, которая при действительных $x > 0$ имеет вид

$$\text{Ei}_1(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!},$$

$\gamma = 0,5772157\dots$ — постоянная Эйлера. Пример является иллюстрацией к теореме 2 и пункту 2° теоремы 5.

Пример 3. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^2, \quad a_2(t) = t^2, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = t + 1, \quad f(t) = -1,$$

а начальное значение $v_0 = 1$. Тогда общее решение $v(t, C_1, C_2)$ уравнения (16) и однопараметрическое семейство решений $v(t, C_2)$ начальной задачи (16), (32) представимы соответственно в виде

$$v(t, C_1, C_2) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \left(C_1 + C_2 \text{Ei}\left(-\frac{2}{t}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right) \right),$$

$$v(t, C_2) = C_2 \tilde{v}_{12}(t) + v_3(t; f) = \frac{1}{t} \exp\left(\frac{1}{t}\right) \left(C_2 \operatorname{Ei}\left(-\frac{2}{t}\right) - \operatorname{Ei}\left(-\frac{1}{t}\right) \right), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} v_3(t; f) = 1.$$

Пример является иллюстрацией к теореме 3 и пункту 3° теоремы 5.

Пример 4. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^2, \quad a_2(t) = t^2, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = t - 1, \quad f(t) = 1,$$

а начальное значение $v_0 = 1$. Тогда общее решение $v(t, C_1, C_2)$ уравнения (16) и двухпараметрическое семейство решений начальной задачи (16), (32) совпадают и имеют вид

$$v(t, C_1, C_2) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \left(C_1 + C_2 \ln t - \operatorname{Ei}\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} v_4(t; f) = 1.$$

Пример является иллюстрацией к теореме 4 и пункту 4° теоремы 5.

В следующем примере мы покажем, как находятся решения рассматриваемой задачи с помощью теорем 4 и 5(4°).

Пример 5. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^3, \quad a_2(t) = t^2, \quad b_1 = \operatorname{const} < 0, \quad b_2 = \operatorname{const} < 0, \quad f(t) \in C^\infty[0, d].$$

Для рассматриваемого уравнения, следуя теореме 4, выпишем общее решение уравнения (16). Оно имеет вид $v(t) = v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t) + v_4(t; f)$, где

$$\begin{aligned} v_{02}(t) &= \exp\left(\int_t^d \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_2 d\xi}{\xi^2}\right) = \exp\left(\frac{b_2}{t}\right) \exp\left(\frac{-b_2}{d}\right), \\ v_{12}(t) &= \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1(\eta) d\eta}{a_1(\eta)}\right) \exp\left(\int_\tau^t \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1 d\eta}{\eta^3}\right) \exp\left(\int_\tau^t \frac{b_2 d\xi}{\xi^2}\right) \frac{d\tau}{\tau^2} = \\ &= \exp\left(\int_t^d \frac{b_2 d\xi}{\xi^2}\right) \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \left(\frac{b_1}{\eta^3} - \frac{b_2}{\eta^2}\right) d\eta\right) \frac{d\tau}{\tau^2} = \exp\left(\frac{-b_1}{2d^2}\right) \exp\left(\frac{b_2}{t}\right) \int_t^d \exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2} - \frac{b_2}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau^2}, \\ v_4(t; f) &= \int_t^d \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\eta \right) \exp\left(\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \int_t^d \exp\left(\frac{b_2}{t} - \frac{b_2}{\tau}\right) \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{\eta^3} \exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2} - \frac{b_1}{2\eta^2}\right) d\eta \right) \frac{d\tau}{\tau^2}, \end{aligned}$$

причём нетрудно убедиться, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}(t) = 0,$$

и при $t \rightarrow 0+$ справедлива асимптотика $v_{02}(t) = v_{12}(t) = o(t^k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Далее, используя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} v_4(t; f) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_t^d \exp\left(-\frac{b_2}{\tau}\right) \left(\int_\tau^d \frac{f(\eta)}{\eta^3} \exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2} - \frac{b_1}{2\eta^2}\right) d\eta \right) \frac{d\tau}{\tau^2}}{\exp\left(-\frac{b_2}{t}\right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\int_t^d f(\eta) \exp\left(-\frac{b_1}{2\eta^2}\right) \frac{d\eta}{\eta^3}}{b_2 \exp\left(-\frac{b_1}{2t^2}\right)} = \frac{f(0)}{b_1 b_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (32) будет выполняться для всех функций двухпараметрического семейства $v(t) = v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t) + v_4(t; f)$ лишь при единственном значении $v(0) = \frac{f(0)}{b_1 b_2}$.

Замечание 2. Требование $a'_1(0) = 0$ в условии теоремы 4 исключает из рассмотрения двойное слабое вырождение $a'_1(0) \neq 0, a'_2(0) \neq 0$. Отметим, что в этом случае гладкость решения уравнения (16) проще исследовать непосредственно. Процесс исследования покажем на следующем примере.

Пример 6. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t, a_2(t) = t, b_1 = \text{const} < 0, b_2 = \text{const} < 0, f = \text{const}.$$

Выбрав некоторое $d > 0$ и следуя рассуждениям теоремы 4, построим решения полученного уравнения. Общее решение уравнения (16) имеет вид (30)

$$v(t) = v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t) + v_4(t; f).$$

При $b_2 - b_1 \neq 0$ получим

$$\begin{aligned} v_4(t; f) &= \int_t^d \left(\int_\tau^d \frac{f}{\eta} \exp \left(\int_\tau^\eta \frac{b_1 d\xi}{\xi} \right) d\eta \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2 d\xi}{\xi} \right) \frac{d\tau}{\tau} = \frac{ft^{-b_2}}{b_1} \int_t^d \tau^{b_2-b_1-1} (d^{b_1} - \tau^{b_1}) d\tau = \\ &= \frac{fd^{b_2}}{b_1(b_2-b_1)} t^{-b_2} - \frac{fd^{b_1}}{b_1(b_2-b_1)} t^{-b_1} - \frac{fd^{b_2}}{b_1 b_2} t^{-b_2} + \frac{f}{b_1 b_2}, \end{aligned}$$

а при $b_2 - b_1 = 0$ имеем

$$v_4(t; f) = \frac{ft^{-b_1}}{b_1} \int_t^d \tau^{-1} (d^{b_1} - \tau^{b_1}) d\tau = \frac{fd^{b_1}}{b_1} t^{-b_1} \ln \frac{d}{t} - \frac{fd^{b_1}}{b_1^2} t^{-b_1} + \frac{f}{b_1^2}.$$

Таким образом, при $b_2 - b_1 \neq 0$

$$v_4(t; f) \in \begin{cases} C^\infty[0, d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}, -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_1]}[0, d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0, d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}, -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0, d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, -b_2 \notin \mathbb{N}, -b_2 < -b_1, \end{cases}$$

а при $b_2 - b_1 = 0$

$$v_4(t; f) \in \begin{cases} C^{[-b_1]}[0, d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, \\ C^{-b_1-1}[0, d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Образующие фундаментальную систему решений функции $v_{02}(t), v_{12}(t)$ имеют следующий вид:

$$v_{02}(t) = \exp \left(\int_t^d \frac{b_2 d\xi}{\xi} \right) = \left(\frac{d}{t} \right)^{b_2} \in \begin{cases} C^{[-b_2]}[0, d], & \text{если } -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ C^\infty[0, d], & \text{если } -b_2 \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

при $b_2 - b_1 \neq 0$

$$v_{12}(t) = \int_t^d \exp \left(\int_\tau^d \frac{b_1 d\eta}{\eta} \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2 d\xi}{\xi} \right) \frac{d\tau}{\tau} = d^{b_1} t^{-b_2} \int_t^d \tau^{b_2-b_1-1} d\tau = \frac{d^{b_2} t^{-b_2} - d^{b_1} t^{-b_1}}{b_2 - b_1},$$

следовательно,

$$v_{12}(t) \in \begin{cases} C^\infty[0, d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}, -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_1]}[0, d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, -b_2 \in \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0, d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}, -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ C^{[-b_2]}[0, d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, -b_2 \notin \mathbb{N}, -b_2 < -b_1. \end{cases}$$

При $b_2 - b_1 = 0$

$$v_{12}(t) = d^{b_1} t^{-b_1} \int_t^d \tau^{-1} d\tau = d^{b_1} t^{-b_1} \ln \frac{d}{t} \in \begin{cases} C^{[-b_1]}[0, d], & \text{если } -b_1 \notin \mathbb{N}, \\ C^{-b_1-1}[0, d], & \text{если } -b_1 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Заметим, что в теорему 5 не вошёл случай слабого вырождения, когда в уравнении (16) $a_2(0) \neq 0$. Также на примере покажем процесс построения решения начальной задачи для этого уравнения.

Пример 7. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(t) = t^3, \quad a_2(t) = t, \quad b_1 = \text{const} < 0, \quad b_2 = \text{const} < 0, \quad f = 0.$$

При сделанных предположениях найдём функцию $v(t)$, удовлетворяющую однородному уравнению (16) и условию (32). Следуя теореме 5 (4°), запишем общее решение этого уравнения $v(t) = v(t, C_1, C_2) = C_1 v_{02}(t) + C_2 v_{12}(t)$, где

$$v_{02}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_2 d\xi}{\xi}\right) = \left(\frac{t}{d}\right)^{-b_2},$$

$$v_{12}(t) = \int_t^d \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1 d\eta}{\eta^3}\right) \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_2 d\xi}{\xi}\right) \frac{d\tau}{\tau} = t^{-b_2} \int_t^d \exp\left(\frac{b_1}{2\tau^2} - \frac{b_1}{2d^2}\right) \frac{d\tau}{\tau^{1-b_2}},$$

при этом для $k < -b_2$ $\lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}^{(k)}(t) = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } k < -b_2, \\ d^{b_2}(-b_2)!, & \text{если } k = -b_2 \in \mathbb{N}, \\ \infty, & \text{если } k > -b_2 \notin \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } k > -b_2 \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким образом, условие (32) выполняется для любого решения уравнения лишь при единственном значении $v_0 = 0$. Однако для любой произвольной постоянной v_0 можно найти решение однородного уравнения (16), удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v_{02}^{(k)}(t) = v_0.$$

В следующем примере мы покажем, что дифференциальные операторы L_1, L_2 в уравнении (16) $Lv(t) \equiv L_1 L_2 v(t) = f(t)$ совсем не обязательно должны быть вырождающимися.

Пример 8. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (16) имеют вид

$$a_1(0) = 0, \quad a_1(t) > 0 \text{ при } t > 0, \quad a_1'(0) = 0, \quad a_2(t) = 1, \quad b_1 = \text{const} \neq 0, \quad f(t) \in C^\infty[0, d].$$

Тогда уравнение (16) запишется в виде

$$(a_1(t)v'(t))' + (b_1(t) - a_1'(t) + b_2 a_1(t))v'(t) + b_2 b_1(t)v(t) = f(t). \quad (33)$$

Если $b_1(0) \neq 0$ и $a_1'(0) = 0$, то для произвольной функции $f(t) \in C^\infty[0, d]$ ограниченное на $[0, d]$ решение уравнения (33) может быть построено, как и прежде, в два этапа.

Если $b_1(0) > 0$, то из уравнения $L_1 u(t) = f(t)$, учитывая представление (21), определим

$$u(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{a_1(s)} \exp\left(-\int_s^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)}\right) ds,$$

а затем из невырождающегося уравнения $L_2 v(t) = u(t)$ найдём $v(t)$. Получим

$$v(t) = C \exp(-b_2 t) + \exp(-b_2 t) \int_0^t u(\tau) \exp(b_2 \tau) d\tau =$$

$$= C \exp(-b_2 t) + \exp(-b_2 t) \int_0^t \left(\int_0^\tau \frac{f(s)}{a_1(s)} \exp\left(-\int_s^\tau \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)}\right) ds \right) \exp(b_2 \tau) d\tau.$$

Функция $v(t)$ не зависит от d , т. е. определяет ограниченные решения на полуоси. Заметим, что при $t > 0$ существует неограниченное решение однородного уравнения (33), которое имеет вид

$$v_{12}(t) = \int_t^d \exp(b_2(\tau - t)) \exp\left(\int_\tau^d \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)}\right), \quad \lim_{t \rightarrow 0+} v_{12}(t) = \infty.$$

Полученные в рассматриваемом случае формулы для решений уравнения (33) согласуются с исследованиями авторов, проведёнными в [3].

Список литературы

1. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
2. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(3):197–206.
3. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(2):87–96.
4. Архипов В.П., Глушак А.В. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(4):245–260.
5. Архипов В.П., Глушак А.В. Степенные асимптотики решений двусторонней задачи Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):27–40.
6. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения, Воронеж. 1972. 193.
7. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. I. *Дифференциальные уравнения*. 1968;4(9):1584–1597.
8. Глушко В.П. Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II. *Дифференциальные уравнения*. 1968;4(11):1956–1966.
9. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные уравнения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Фундаментальная и прикладная математика*. 1998.4(3):1063–1095.

References

1. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393 (In Russ).
2. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(3):197–206 (In Russ).
3. Arkhipov VP., Glushak AV. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(2):87–96 (In Russ).
4. Arkhipov VP., Glushak AV. Two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations with conditions at the degeneracy point. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(4): 245–260 (In Russ).
5. Arkhipov VP., Glushak AV. Power asymptotics of solutions of the two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(4):27–40 (In Russ).
6. Glushko VP. 1972. Linear Degenerating Differential Equations, Voronezh. 193 (In Russ).
7. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. I. *Differential Equations*. 1968;4:9:1584–1597 (In Russ).
8. Glushko VP. Degenerate linear differential equations. II. *Differential Equations*. 1968;4:11:1956–1966 (In Russ).
9. Rosov NKh., Sushko VG., Chudova DI. Differential equations with a degenerate coefficient multiplying the highest derivative. *Fundamental and Applied Mathematics*. 1998;4(3):1063–1095 (In Russ).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.06.2025

Поступила после рецензирования 11.08.2025

Принята к публикации 18.08.2025

Received June 20, 2025

Revised August 11, 2025

Accepted August 18, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Абсолютно непрерывные, логарифмически вогнутые унимодальные распределения

Вирченко Ю. П.¹, Теволде А. М.²

¹ Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46
virch@bsuedu.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Аннотация. В работе изучаются сильно одновершинные по И. А. Ибрагимову функции распределения на $\mathbb{R}$. Усовершенствуется доказательство достаточного признака сильной одновершинности, основанного на понятии логарифмической вогнутости плотности распределения.

Ключевые слова: выпуклые функции, композиция распределений, одномерные распределения вероятностей, одновершинные распределения, сильная одновершинность

Для цитирования: Вирченко Ю.П., Теволде А.М. Абсолютно непрерывные, логарифмически вогнутые унимодальные распределения. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):208–223.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-208-223 EDN RSDTLN

Original Research

Absolutely Continuous, Log-Concave Unimodal Distributions

Yuri P. Virchenko¹, Amanuel M. Tewolde²

¹ Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia
virch@bsuedu.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

Abstract. In this paper, we study strongly unimodal distribution functions on $\mathbb{R}$ according to I. A. Ibragimov. We improve the proof of a sufficient criterion for strongly unimodal distribution based on the concept of logarithmic concavity of the distribution density.

Keywords: Convex Functions, Composition of Distributions, Univariate Probability Distributions, Unimodal Distributions, Strong Unimodality

For citation: Virchenko YuP., Tewolde AM. Absolutely Continuous, Log-Concave Unimodal Distributions. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):208–223 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-208-223 EDN RSDTLN

1. Введение. Пусть $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — функция распределения, определяющая нормированную на единицу положительную меру множеств $(-\infty, x) \subset \mathbb{R}$. Каждая из таких функций определена всюду на $\mathbb{R}$, неотрицательна и монотонно не убывает. Кроме того, каждая из них стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$ и к 0 при $x \rightarrow -\infty$. Не ограничивая общности, в дальнейшем, предполагается, что все такие функции распределения непрерывны справа.

В приложениях особое значение имеют так называемые унимодальные (одновершинные) функции распределения. Это связано с тем, что нарушение свойства унимодальности у распределения связывается с наличием какого-то регулярного «физического» механизма, который приводит к появлению на гистограмме соответствующей случайной величины нескольких максимумов как, например, это имеет место в статистической физике при описании фазовых переходов [1].

С чисто математической точки зрения, при установлении наличия одновершинности функции распределения $F(x)$, удобно исходить из такого определения этого свойства, которое не связано с наличием у этого распределения плотности $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а формулируется в терминах самой функции F .

Определение 1. Функция распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ называется одновершинной, если существует такое число $x_* \in \mathbb{R}$, называемое вершинной точкой распределения, для которого она выпукла при $x \in (-\infty, x_*)$ и вогнута при $x \in (x_*, \infty)$.

Класс всех функций распределения, обладающих свойством одновершинности в указанном смысле, мы будем обозначать посредством $\mathcal{U}(\mathbb{R})$. В приведенной формулировке понятия одновершинности выбор вершинной точки x_* может оказаться не единственным ввиду наличия, например, интервалов

постоянства у плотности f распределения F . Поэтому мы, далее, будем оперировать понятием множества Δ вершинных точек x_* , обладающих свойством, которое указано в определении.

В этой работе нас будет интересовать сохранение свойства одновершинности распределения F при композиции его с другими одновершинными распределениями V . В этой связи И. А. Ибрагимовым [2] было введено понятие *сильной одновершинности*.

Определение 2. Функция распределения V называется *сильно одновершинной*, если она одновершинная и ее композиция

$$G(x) = (V * F)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} V(x - y) dF(y) \quad (1)$$

с любой одновершинной функцией распределения F снова является одновершинной.

Интеграл в (1) и, далее по тексту, все интегралы такого типа понимаются по Стильтесу (см., например, [3]) или, более общо, по Лебегу – Стильтесу (см., например, [4]). Интеграл Стильтеса заведомо существует в предположении о том, что распределения V и F непрерывны справа, так как они являются распределениями статистически независимых случайных величин, а G в этом случае представляет распределение вероятностей их суммы.

В работе [2] посредством довольно тонких построений доказан очень удобный и важный, с точки зрения приложений, достаточный признак сильной одновершинности функции распределения F на $\mathbb{R}$, который заключается в требовании логарифмической вогнутости ее плотности $f = dF/dx$. Там же утверждается, что это свойство функции распределения F является также необходимым для обладания ею свойством сильной одновершинности. Однако наше исследование показало, что это не так. В связи с этим в настоящей работе мы усовершенствовали доказательство достаточного признака сильной одновершинности, установленного в [2].

2. Свойства выпуклых функций. Прежде чем приступить к основному объекту исследования, приведем некоторые необходимые для дальнейшего изложения простые факты о свойствах выпуклых (вогнутых) функций.

Определение 3. Функция p , определенная на (a, b) , называется *выпуклой (вогнутой)*, если для каждой пары $\{x, y\} \subset (a, b)$ выполняется неравенство

$$p(\xi x + \eta y) \leq \xi p(x) + \eta p(y) \quad (p(\xi x + \eta y) \geq \xi p(x) + \eta p(y)) \quad (2)$$

для любых неотрицательных ξ и η таких, что $\xi + \eta = 1$.

Это определение допускает эквивалентную формулировку.

Определение 3'. Определенная на (a, b) функция называется *выпуклой (вогнутой)*, если для любой линейной функции l на (a, b) имеется такой интервал $(\alpha, \beta) \cap (a, b) \neq \emptyset$, для которого при любом $z \in (\alpha, \beta)$ имеют место неравенство $p(z) \leq l(z)$ ($p(z) \geq l(z)$), а при $z \notin (\alpha, \beta)$ выполняется $p(z) \geq l(z)$ ($p(z) \leq l(z)$).

□ Докажем эквивалентность Определений 3 и 3', например, в случае выпуклости функции p . Для вогнутой функции аналогичное утверждение следует из того, что для каждой вогнутой функции p функция $(-p)$ является выпуклой, и поэтому доказательство справедливости утверждения об эквивалентности будет следовать в результате замены p на $(-p)$ в доказательстве для выпуклой функции и обращения всех неравенств на противоположные.

Пусть функция p выпукла согласно Определению 2, то есть для каждой пары $\{x, y\} \subset (a, b)$ выполняется неравенство (2) для любой пары чисел ξ и η , обладающих указанными свойствами. На основе этой пары чисел построим линейную функцию $l(u) = k(u - x) + p(x)$ такую, что $l(x) = p(x)$ и $l(y) = k(y - x) + p(x) = p(y)$ с $k = (p(y) - p(x))/(y - x)$. Пусть $z \in (x, y)$. Тогда, положив $z = \xi x + \eta y \in (x, y)$, имеем для значений $l(z)$ следующее неравенство

$$l(z) = l(\xi x + \eta y) = \xi(kx + p(x)) + \eta(ky + p(x)) = \xi l(x) + \eta l(y) \geq \xi p(x) + \eta p(y) \geq p(z).$$

Пусть $z < x$. Докажем, что в этом случае $l(z) \leq p(z)$. Допустим противное, что $l(z) > p(z)$. Тогда найдутся ξ и η с указанными свойствами такие, что $x = \xi z + \eta y$, и для которых, вследствие выпуклости функции p , выполняется

$$p(x) \leq \xi p(z) + \eta p(y).$$

Следовательно, воспользовавшись предположением, и учитывая, что $l(y) = p(y)$, получаем противоречие

$$p(x) < \xi l(z) + \eta p(y) = l(z) + l(y) = l(x) = p(x).$$

Если положить, что $z > y$, то, допустив, что $l(z) > p(z)$, и рассуждая аналогичным образом, используя неравенство $p(y) \leq \xi p(x) + \eta p(z)$ с числами ξ и η такими, что $y = \xi x + \eta z$, снова получаем противоречие

$$p(y) < \xi p(x) + \eta l(z) = \xi l(x) + \eta l(z) = l(\xi x + \eta z) = l(y) = p(y)$$

и поэтому должно иметь место $p(z) \geq l(z)$. Таким образом, для функции p выполняются условия Определения 3'.

Докажем обратное утверждение. Пусть функция p обладает свойствами, сформулированными в Определении 3'. Тогда, выбрав пару $\{x, y\} \subset (a, b)$ и определив линейную функцию $l(u) = k(u - x) + p(x)$ с коэффициентом $k = (p(y) - p(x))/(y - x)$, получаем, вследствие условия $l(z) \geq p(z)$ для точки $z = \xi x + \eta y$,

$$p(z) \leq l(\xi x + \eta y) = \xi l(x) + \eta l(y) = \xi p(x) + \eta k(y - x) + \eta p(x) = \xi p(x) + \eta p(y),$$

то есть выполняется условие Определения 3. ■

Лемма 1. Если p определена и выпукла (вогнута) на (a, b) , то эта функция непрерывна на (a, b) .

□ Пусть p – выпуклая функция. Докажем сначала, что в каждой точке c интервала (a, b) выполняется неравенство $\limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) \leq \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x)$. Допустим противное, что для некоторой точки $c \in (a, b)$ имеет место $p_+ \equiv \limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) > p_- = \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x)$. Это означает, что существуют последовательность $\langle a_n \in (a, c); n \in \mathbb{N} \rangle$, сходящаяся к точке c слева, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} p(a_n) = p_-$, и – аналогичная последовательность $\langle b_n \in (c, b); n \in \mathbb{N} \rangle$, сходящаяся к этой точке справа, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} p(b_n) = p_+$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$, для последовательности $\langle a_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ найдется номер L такой, что при $n > L$ имеет место $|p(a_n) - p_-| < \varepsilon$, и, точно так же, для последовательности $\langle b_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ найдется номер M , для которого при $n > M$ выполняется $|p(b_n) - p_+| < \varepsilon$. Поэтому для $n > \max\{L, M\}$ имеют место неравенства

$$p(a_n) < p_- + \varepsilon, \quad p(b_n) > p_+ - \varepsilon.$$

Выберем число $\varepsilon < (p_+ - p_-)/2$. Затем определим число $\delta > 0$ и по нему увеличим числа L и M , если возникнет необходимость, так, чтобы $|a_n - c| < \delta$ при $n > L$ и $|b_n - c| < \delta$ при $n > M$.

Рассмотрим линейную функцию $l(x) = k(x - c) + \Delta$, $\Delta = (p_- + p_+)/2$ с коэффициентом $k < \delta^{-1}((p_+ - p_-)/2 - \varepsilon)$. Тогда, при таком выборе номера L , во всех точках a_n с $n > L$ выполняется $p(a_n) < l(a_n)$, так как $k\delta < (p_+ - p_-)/2 - \varepsilon$ и поэтому

$$l(a_n) = k(a_n - c) + \Delta > -k\delta + \Delta = \varepsilon + p_- > p(a_n).$$

Точно так же, во всех точках b_n с $n > M$ выполняется $l(b_n) < p(b_n)$, так как

$$l(b_n) = k(b_n - c) + \Delta < k\delta + \Delta = p_+ - \varepsilon < p(b_n).$$

Таким образом, существует линейная функция $l(u)$ такая, что $l(a_L) = p(a_L)$ и $l(b_M) = p(b_M)$, но на интервале (a_L, b_M) содержатся как точки b_n , в которых $p(b_n) > l(b_n)$, так и точки a_n , в которых $p(a_n) < l(a_n)$, что противоречит выпуклости функции p , согласно Определению 3'. Отсюда следует, что $p_+ = p_-$.

Таким образом, доказано, что $\limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x)$. Но, по этой же причине, имеет место $\limsup_{x \rightarrow c-0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c+0} p(x)$. Кроме того, непосредственно из определения верхнего и нижнего пределов следует, что $\limsup_{x \rightarrow c \pm 0} p(x) \geq \liminf_{x \rightarrow c \pm 0} p(x)$. Тогда, ввиду из получаемой таким образом цепочки отношений

$$\limsup_{x \rightarrow c+0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c-0} p(x) \leq \limsup_{x \rightarrow c-0} p(x) = \liminf_{x \rightarrow c+0} p(x)$$

следует совпадение верхнего и нижнего пределов в точке c , что доказывает утверждение леммы для выпуклой функции. Доказательство для вогнутой функции получается заменой вогнутой функции p на выпуклую $(-p)$. ■

Теорема 1. Определенная на (a, b) выпуклая (вогнутая) функция p имеет в каждой точке x интервала (a, b) конечные правую $(D_+p)(x)$ и левую $(D_-p)(x)$ производные (производные Дини).

□ Пусть $a < s < t < u < b$. Введем

$$\xi = \frac{u-t}{u-s} > 0, \quad \eta = \frac{t-s}{u-s} > 0, \quad \xi + \eta = 1.$$

Запишем неравенство выпуклости для функции p с коэффициентами ξ и η

$$p(\xi s) + p(\eta u) \geq p(\xi s + \eta u).$$

Так как

$$\xi s + \eta u = \frac{u-t}{u-s} s + \frac{t-s}{u-s} u = \frac{s(u-t) + u(t-s)}{u-s} = \frac{t(u-s)}{u-s} = t,$$

то

$$p(t) \leq p(s) \frac{u-t}{u-s} + p(u) \frac{t-s}{u-s}. \quad (3)$$

Отсюда следует

$$\frac{p(t) - p(s)}{t - s} \leq \frac{p(s)}{t - s} \left[\frac{u - t}{u - s} - 1 \right] + \frac{p(u)}{t - s} \frac{t - s}{u - s} = \frac{p(u) - p(s)}{u - s},$$

то есть

$$\frac{p(t) - p(s)}{t - s} \leq \frac{p(u) - p(s)}{u - s}. \quad (4)$$

Тогда у отношения $(p(t) - p(s))/(t - s)$ в точке s , ввиду его монотонного невозрастания при приближении точки t к s , имеется предел справа, равный по определению $(D_+p)(s)$.

С другой стороны, из неравенства (3) следует

$$p(t) \frac{u - s}{u - t} - p(u) \frac{t - s}{u - t} \leq p(s), \quad p(s) - p(u) \geq p(t) \frac{u - s}{u - t} - p(u) \left(1 + \frac{t - s}{u - t} \right),$$

$$\frac{p(s) - p(u)}{s - u} \leq \frac{p(t) - p(u)}{t - u}. \quad (5)$$

Тогда, ввиду монотонного неубывания отношения $(p(t) - p(u))/(t - u)$ при приближении точки t к u , у него существует предел слева в точке u , равный $(D_-p)(u)$.

Приведенное доказательство распространяется на вогнутые функции p ввиду замечания, что если определенная на (a, b) функция p вогнута, то функция $(-p)$ выпукла и, следовательно, она, так же как и выпуклая функция, имеет в каждой точке x интервала (a, b) правую $(D_+(-p))(x)$ и левую $(D_-(-p))(x)$ производные. ■

Следствие 1. Пусть функция p выпукла на (a, b) . Тогда для любой пары точек $\{s, u\}$, $a < s < u < b$ имеют место неравенства

$$(u - s)(D_+p)(s) \leq p(u) - p(s), \quad (u - s)D_-p(u) \geq p(u) - p(s). \quad (6)$$

Если же функция p вогнута на (a, b) , то для любой пары точек $\{s, u\}$, $a < s < u < b$ имеют место неравенства

$$(u - s)(D_+p)(s) \geq p(u) - p(s), \quad (u - s)D_-(u)p \leq p(u) - p(s). \quad (7)$$

□ Для выпуклой функции p первое из неравенств следует из неравенства (3), справедливого для p и любой тройки точек $\{s, t, u\} \subset (a, b)$, $s < t < u$. Оно получается переходом в нем к пределу $t \rightarrow s + 0$. Умножая обе части полученного неравенства на (-1) и пользуясь тем, что $(-p)$ — вогнутая функция, убеждаемся в выполнении первого из неравенств для вогнутой функции.

Далее, переходом к пределу $t \rightarrow u - 0$ в неравенстве (5) убеждаемся в справедливости второго неравенства для выпуклой функции в (6), а затем умножением полученного неравенства на (-1) получаем второе неравенство для вогнутой функции $(-p)$. ■

Интервал (α, β) будем называть *интервалом постоянства* определенной на (a, b) функции q , $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, если $q(x) = \text{const}$ при $x \in (\alpha, \beta)$. Интервал постоянства назовем *максимальным*, если он не является собственным подмножеством никакого другого интервала постоянства.

Лемма 2. Если q — выпуклая (вогнутая) на (a, b) функция, то она имеет на (a, b) не более одного интервала постоянства.

□ Пусть имеется два таких непересекающихся интервала $(\alpha_j, \beta_j) \subset (a, b)$, $j \in \{1, 2\}$ с $\beta_1 \leq \alpha_2$, для которых $q(x) = c_j$, $x \in (\alpha_j, \beta_j)$ $j \in \{1, 2\}$. Выберем две точки s_1, s_2 так, что $s_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $s_2 \in (\alpha_2, \beta_2)$. Тогда точки $\langle s_1 + \delta, c_1 \rangle$ и $\langle s_2 - \delta, c_2 \rangle$ графика линейной функции q , при достаточно малом $\delta > 0$, расположены по разные стороны от прямой, проходящей через точки $\langle s_j, c_j \rangle$, $j \in \{1, 2\}$. В этом случае, согласно Определению 3', функция q не может быть ни выпуклой, ни вогнутой. ■

Число $x_* \in (a, b)$ является точкой локального минимума (максимума) функции p , определенной на (a, b) , если $p(x) \geq p(x_*)$ ($p(x) \leq p(x_*)$) при $|x - x_*| < \varepsilon$, $x \in (a, b)$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$. В дальнейшем мы по отношению к таким числам используем более короткое выражение — точка минимальности (максимальности).

Лемма 3. Если p — выпуклая (вогнутая) на (a, b) функция, то все ее точки минимальности (максимальности) на (a, b) составляют множество $[\alpha, \beta] \cap (a, b)$ с $\alpha \geq a$ и $\beta \leq b$.

□ Допустим, что имеется пара $\{x_1, x_2\}$, $a < x_1 < x_2 < b$ точек минимума таких, что между ними обязательно имеется точка y , в которой $p(y) > p(x_1)$ или $p(y) > p(x_2)$. В противном случае, если такой точки нет, то в каждой точке $y \in (x_1, x_2)$ выполняется $p(y) = p(x_1)$ и $p(x_2) = p(y)$ и поэтому (x_1, x_2) — отрезок постоянства функции $p(y) = \text{const}$. Если $p(y) > p(x_j)$ при каком-то $j \in \{1, 2\}$, то в силу выпуклости функции p , в точке $y = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2$, $\xi_j \in (0, 1)$, $j \in \{1, 2\}$, $\xi_1 + \xi_2 = 1$ должно выполняться неравенство

$$p(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \leq \xi_1 p(x_1) + \xi_2 p(x_2).$$

Но это неравенство не может быть верным, так как

$$p(y) = (\xi_1 + \xi_2)p(y) > \xi_1 p(x_1) + \xi_2 p(x_2).$$

Найдем $\alpha = \inf x_1$ и $\sup x_2 = \beta$, соответственно, левых и правых крайних точек всех таких интервалов. Тогда интервал (α, β) является единственным, в силу Леммы 2, максимальным постоянства функции p . Если какая-либо из точек $\alpha \neq a$, $\beta \neq b$, то значения функции p в крайних точках определены по непрерывности функции p и они должны быть включены в состав множества постоянства функции p .

Утверждение леммы для вогнутой функции получается заменой p на $(-p)$. ■

Таким образом, если функция p определена на (a, b) и выпукла (вогнута), а концы ее интервала минимальности (максимальности) не совпадают с концами интервала (a, b) , то множество минимальности (максимальности) является замкнутым отрезком.

Теорема 2. *Определенная на (a, b) выпуклая (вогнутая) функция p удовлетворяет условию Липшица на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.*

□ Согласно утверждениям Лемм 2 и 3, интервал определения выпуклой на (a, b) функции разбивается на интервал убывания (возрастания), отрезок постоянства и интервал возрастания (убывания). Пусть, для определенности, функция p не убывает в окрестности точки t , $p(t) \geq p(s)$. Зафиксируем число $\delta > 0$. Ввиду непрерывности функции p , отношение $(p(u) - p(s))/(u - s)$ является непрерывной функцией на $[\alpha, \beta]^2 \setminus \{s, u\} : |s - u| < \delta\}$. Тогда, зафиксировав в (4) положительное значение отношения $(p(u) - p(s))/(u - s) \equiv A_+$, получим

$$p(t) - p(s) \leq A_+(t - s), \quad (8)$$

откуда следует, что для пар точек $\{s, t\} \subset [\alpha, \beta]$ из интервала возрастания функции p выполняется условие Липшица.

Рассмотрим функцию p на интервале убывания. Тогда $p(u) \leq p(s)$, рассуждая аналогичным образом, (4) следует

$$A_- \geq \frac{|p(s) - p(t)|}{t - s} \geq \frac{p(s) - p(u)}{u - s},$$

где зафиксировано значение отношения $A_- = |p(s) - p(t)|/(t - s)$. Следовательно,

$$|p(s) - p(u)| \leq A_-|s - u| \quad (9)$$

для любых точек u и s , $s < t < u$, что означает выполнение условия Липшица для p для пар точек $\{s, u\} \subset [\alpha, \beta]$, находящихся на интервале убывания.

На интервале постоянства функции p условие Липшица выполняется очевидным образом. Для граничных точек рассмотренных интервалов нужно применить оба неравенства, справедливые на соседних интервалах, для которых эта точка является граничной.

В частности, если точка t является единственной граничной точкой между интервалом неубывания и невозрастания (единственной точкой минимальности), то условие Липшица имеет место при выборе постоянной $A = \max\{A_+, A_-\}$.

Доказательство распространяется на вогнутые функции p при замене ее на $(-p)$. ■

Теорема 3. *Производные Дини определенной на (a, b) выпуклой (вогнутой) функции p удовлетворяют в каждой точке интервала неравенству $(D_+p)(x) \geq (D_-p)(x)$ ($(D_+p)(x) \leq (D_-p)(x)$).*

□ Рассмотрим три произвольные точки s, t, u такие, что $s < t < u$. На основе неравенств (4) и (5) получим

$$\frac{p(t) - p(s)}{t - s} \leq \frac{p(u) - p(s)}{u - s}.$$

Переходя к пределу $s \rightarrow t - 0$ в обоих неравенствах и воспользовавшись непрерывностью функции p , находим

$$(D_-p)(t) \leq \frac{p(u) - p(t)}{u - t}.$$

Далее переходим к пределу $u \rightarrow t + 0$ и получаем требуемое неравенство $(D_-p)(t) \leq (D_+p)(t)$ для производных Дини.

Доказательство распространяется на вогнутые функции p при замене вогнутой функции p на выпуклую функцию $(-p)$. ■

Лемма 4. *Ограниченная сверху монотонно неубывающая функция p , не равная тождественно постоянной, не может быть выпуклой на интервале (a, ∞) при любом $a \in \mathbb{R}$. И, точно так же, ограниченная снизу монотонно невозрастающая функция p , не равная тождественно постоянной, не может быть вогнутой на интервале $(-\infty, a)$.*

□ Если выпуклая функция p не равна постоянной и не убывает, то найдется такая точка a , в которой $(D_+p)(a) \geq \varepsilon > 0$. Тогда из первого неравенства в (6) при $s = a$ получаем $p(u) \geq p(a) + \varepsilon(u - a)$, где в правой части стоит неограниченно возрастающая функция.

Умножая полученные неравенства на (-1) , и учитывая, что для неубывающей выпуклой функции p , функция $(-p)$ вогнутая и невозрастающая, убеждаемся в справедливости второй части утверждения. ■

Лемма 5. Для того чтобы непрерывная функция $p(x)$ была выпуклой (вогнутой) на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы функция $p(x + \delta) - p(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на интервале $(a, b - \delta)$.

□ Пусть p — выпуклая функция на (a, b) . Рассмотрим пару точек $\{x, y\} \subset (a, b)$, $x > y$. Определим числа

$$\xi = \frac{x - y}{x - y + \delta}, \quad \eta = \frac{\delta}{x - y + \delta}$$

и запишем следующие неравенства (2) выпуклости для функции p с крайними точками y и $x + \delta$, используя коэффициенты ξ и η ,

$$p(y + \delta) \leq \xi p(y) + \eta p(x + \delta), \quad p(x) \leq \eta p(y) + \xi p(x + \delta).$$

Складывая правые и левые части этих двух неравенств, получаем

$$p(y + \delta) + p(x) \leq \xi(p(y) + p(x + \delta)) + \eta(p(x + \delta) + p(y)) = p(x + \delta) + p(y),$$

откуда следует

$$p(y + \delta) - p(y) \leq p(x + \delta) - p(x). \quad (10)$$

Это означает, ввиду произвольности точек x и y на интервале $(a, b - \delta)$, что на этом интервале функция $p(x + \delta) - p(x)$ возрастает.

Пусть, наоборот, функция $p(x + \delta) - p(x)$ возрастает и допустим, что верно утверждение, противоположное тому, что утверждает лемма. Пусть существует интервал $(a', b') \subset (a, b)$, в котором $p(x + \delta) - p(x)$ вогнута. Запишем для произвольной пары точек из этого интервала неравенства вогнутости с крайними точками $y + \delta$ и x

$$p(y + \delta) \geq \xi p(y) + \eta p(x + \delta), \quad p(x) \geq \eta p(y) + \xi p(x + \delta).$$

Суммируя по отдельности правые и левые части этих неравенств получаем неравенство

$$p(y + \delta) + p(x) \geq p(x + \delta) + p(y),$$

которое противоречит возрастанию функции $p(x + \delta) - p(x)$. ■

Следствие 2. Если p — выпуклая (вогнутая) на (a, b) функция, то производные Дини $D_+p(x)$ — неубывающие (невозрастающие) функции на (a, b) .

□ Пусть функция p выпукла и имеется пара точек $\{x, y\} \subset (a, b)$ при $y > x$. Неравенство (10) для выпуклой функции в этом случае записывается в виде

$$p(y + \delta) - p(y) \geq p(x + \delta) - p(x). \quad (11)$$

Поделив на δ и перейдя к пределу $\delta \rightarrow +0$, получим неравенство $D_+p(y) \geq D_+p(x)$ для любой пары $\{x, y\} \subset (a, b)$ при $y > x$, которое означает неубывание правой производной. Заменяя в неравенстве (11) y на $y - \delta$ и x на $x - \delta$ и проделав точно такие же операции, получим в результате неравенство $D_-p(y) \geq D_-p(x)$, которое показывает неубывание левой производной. Неравенства для вогнутой функции получаются умножением полученных неравенств на (-1) . ■

Теорема 4. Если p выпуклая (вогнутая) монотонно неубывающая функция на (a, b) , то ее производная p' на этом интервале существует всюду за исключением не более чем счетного множества точек разрыва первого рода и ее производные Дини D_+p и D_-p являются, соответственно, непрерывными справа и непрерывными слева неубывающими (невозрастающими) функциями.

□ Из утверждения Следствия 3 получаем, что D_+p и D_-p монотонно не убывают (не возрастают). Следовательно, для этих функций применимо разложение Лебега, в котором дискретная составляющая имеет не более чем счетное множество точек роста. Из Теоремы 3 следует, что в этих точках функции D_+p и D_-p имеют положительные и отрицательные скачки. ■

3. Слабая сходимость распределений. Функции распределения F могут обладать интервалами постоянства. Обозначим посредством C_F подмножество из $\mathbb{R}$, которое является объединением всех интервалов постоянства фиксированной функции распределения F . Сопоставим, далее, каждой функции распределения F множество $\mathcal{G}(F)$ ее точек роста, определяемое как дополнение $\mathbb{R} \setminus C_F$. Это множество назовем носителем распределения F .

Заметим, что если последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ непрерывных распределений сходится поточечно к распределению F , то предельное распределение может быть разрывным. В связи с этим вводится следующее

Определение 4. Последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределений слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к распределению F , если она сходится поточечно к этому распределению во всех точках непрерывности этой функции.

Для слабой сходимости последовательности распределений $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ к распределению F необходимо и достаточно, чтобы поточечно сходилась последовательность

$$\langle Q^{(n)}(-is) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} dF^{(n)}(x); n \in \mathbb{N} \rangle$$

их характеристических функций к характеристической функции $Q(-is) = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} dF(x)$ (см. [5]). Доказательство эквивалентности этих определений основано на следующих фактах.

Лемма 6. Если последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределения слабо сходится при $n \rightarrow \infty$ к распределению F и все функции — компоненты последовательности выпуклы (вогнуты) при $x \leq a$ (при $x \geq a$), то функция распределения F непрерывна при $x \leq a$ (при $x \geq a$) и последовательность сходится к F равномерно на $(-\infty, a]$ (на $[a, \infty)$).

□ Докажем, что имеет место равномерная сходимость на $(-\infty, a]$. Распределение F , которое является неубывающей функцией на $\mathbb{R}$, может иметь не более чем счетное множество точек разрыва. Поэтому, если на $(-\infty, a]$ имеется точка x_0 разрыва этого распределения, то при любом $\varepsilon > 0$ на интервале $(-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$ имеется плотное в этом интервале множество точек, в которых функция $F(x)$ непрерывна, и поэтому последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится в каждой такой точке $x \in (-\varepsilon + x_0, x_0 + \varepsilon)$ к $F(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $x_- \in (-\varepsilon + x_0, x_0)$ и $x_+ \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ такие точки. Тогда, ввиду монотонного неубывания функций $F^{(n)}$, выполняются неравенства $F^{(n)}(x_+) \geq F^{(n)}(x_0)$ и $F^{(n)}(x_-) \leq F^{(n)}(x_0)$. Из числовой последовательности $\langle F^{(n)}(x_0); n \in \mathbb{N} \rangle$, ввиду ее ограниченности, можно выбрать подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}(x_0); k \in \mathbb{N} \rangle$, сходящуюся к некоторому числу F_0 . Тогда, переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ в вышеприведенных неравенствах, пользуясь непрерывностью функции F в точках $x_{\pm}$, имеем $F(x_-) \leq F_0 \leq F(x_+)$.

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и, как следствие, выбора точек $x_{\pm}$ среди всех точек непрерывности функции F при $x < a$, переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем $\liminf_{\varepsilon \rightarrow +0} F(x) \leq F_* \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow +0} F(x)$, причем, хотя бы одно из неравенств является строгим, так как, в противном случае, функция F является непрерывной в точке x_0 , вопреки предположению. Это означает, что существует линейная функция $l(x)$ такая, что для достаточно больших значений k и достаточно малых $\varepsilon > 0$ в интервале $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ имеются точки $x > x_0$, в которых $F^{(n_k)}(x) > l(x)$, и точки $x < x_0$, в которых $F^{(n_k)}(x) < l(x)$, что противоречит выпуклости этих функций $F^{(n_k)}$ при $x \leq a$, согласно Определению 3'. Таким образом, предположение о наличии точки разрыва x_0 при $x \leq a$ неверно. Точно так же устанавливается отсутствие точки разрыва у $F(x)$ при $x \geq a$ в случае, когда все функции $F^{(n)}$ вогнуты на $[a, \infty)$. Следовательно, в обоих случаях предельная функция F непрерывна на этих интервалах.

Для доказательства равномерности сходимости последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Найдется число $M > 0$ такое, что $F(-M) < \varepsilon$ и, следовательно, $F(x) \leq F(-M) < \varepsilon$ при $x < -M$, ввиду неубывания функции F . Так как числовая последовательность $\langle F^{(n)}(-M); n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $F(-M)$, то можно выбрать такой номер K , что при $n > K$ имеет место $|F^{(n)}(-M) - F(-M)| < \varepsilon$. Тогда, ввиду монотонного неубывания всех функций $F^{(n)}(x)$ при $x < M$, справедливы оценки

$$|F^{(n)}(x) - F(x)| \leq F^{(n)}(x) - F(x) \leq F^{(n)}(-M) + F(-M) \leq |F^{(n)}(-M) - F(-M)| + 2F(-M) < 3\varepsilon.$$

Докажем, что последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ равномерно сходится на конечном отрезке $[-M, a]$. Допустим противное, что для выбранного числа $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\limsup_{x \in [-M, a]} |F^{(n)}(x) - F(x)| \geq \varepsilon. \quad (12)$$

Это означает, что найдется последовательность номеров $\langle n_k; k \in \mathbb{N} \rangle$ и связанная с ней числовая последовательность $\langle c_k \in [-M, a]; k \in \mathbb{N} \rangle$, для которых, при всех достаточно больших k , имеет место неравенство $|F^{(n_k)}(c_k) - F(c_k)| \geq \varepsilon$. Ввиду того, что последовательность $\langle c_k \in [-M, a]; k \in \mathbb{N} \rangle$ является ограниченной, можно считать, что она является сходящейся к некоторому числу $c \in [-M, a]$. Более того, можно считать, что она возрастающая, если $c = a$ и убывающая, если $c = -M$. Наконец, можно считать, что она выбрана так, что последовательность $\langle F^{(n_k)}(c_k) \in [-M, a]; k \in \mathbb{N} \rangle$ также является сходящейся. Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$ в указанном выше неравенстве и пользуясь непрерывностью функции $F(x)$ при $x \leq a$, находим

$$|\lim_{k \rightarrow \infty} F^{(n_k)}(c_k) - F(c)| \geq \varepsilon. \quad (13)$$

Пусть $c \in (-M, a)$ (обобщение на случаи $c = a$ и $c = -M$ осуществляется очевидным образом). Выберем число $\delta > 0$ так, что $(c - \delta, c + \delta) \subset (-M, a)$. Тогда, ввиду монотонного неубывания всех функций $F^{(n_k)}$, имеют место неравенства $F^{(n_k)}(c - \delta) \leq F^{(n_k)}(c_k) \leq F^{(n_k)}(c + \delta)$. Перейдем к пределу $k \rightarrow \infty$ в этих неравенствах. Пользуясь поточечной сходимостью функций $F^{(n_k)}$, в результате, получаем $F(c - \delta) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F^{(n_k)}(c_k) \leq F(c + \delta)$. Ввиду произвольности числа $\delta > 0$, пользуясь непрерывностью функции F , перейдем в этих неравенствах к пределу $\delta \rightarrow +0$. Тогда получается, что $F(c) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} F^{(n_k)}(c_k) \leq F(c)$. Но эти неравенства противоречат (13). ■

Так как F – функция распределения, то она, согласно теореме Лебега (см., например, [6]), однозначным образом представима в виде суммы двух функций распределения $F = F_c + F_d$, где F_c – непрерывная монотонно неубывающая функция, а F_d – монотонно неубывающая функция скачков, у которой множество разрывов первого рода счетно. Следовательно, если последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ слабо сходится к F при $n \rightarrow \infty$, то она сходится поточечно всюду на $\mathbb{R}$ за исключением точек, составляющих не более чем счетное множество $\mathcal{E}$, которое может быть погружено в множество $\mathcal{E}_\delta \supset \mathcal{E}$ сколь угодно малой меры δ так, что множество $\mathbb{R} \setminus \mathcal{E}_\delta$ представляется в виде дизъюнктивного объединения отрезков непрерывности распределения F .

4. Одновершинные распределения. Используя свойства выпуклых и вогнутых функций, докажем ряд утверждений об одновершинных распределениях.

Теорема 5. *Множество Δ вершинных точек одновершинного распределения F состоит либо из одной точки, либо является отрезком $\Delta \subset \mathbb{R}$ конечной длины.*

□ Пусть Δ не является одноточечным множеством и пусть a и b – две точки, которые являются вершинными точками одновершинного распределения F и $a < b$. Тогда так как функция F выпукла в точках, меньших b , то выполняется

$$F(\xi a + \eta b) \leq \xi F(a) + \eta F(b)$$

при $\eta = 1 - \xi$, $0 \leq \xi \leq 1$. С другой стороны, функция F должна быть вогнута в точках, больших a , и поэтому для тех же пар $\langle \xi, \eta \rangle$ выполняется

$$F(\xi a + \eta b) \geq \xi F(a) + \eta F(b).$$

Отсюда следует, что

$$F(\xi a + \eta b) = \xi F(a) + \eta F(b). \quad (14)$$

Положим $z = \xi a + \eta b$. Тогда из (14) следует, что для каждого $z \in (a, b)$ имеет место

$$F(z) = (z - b) \frac{F(a) - F(b)}{a - b} + F(b),$$

то есть F является линейной функцией от $z \in (a, b)$. Следовательно, для любой точки $c \in (a, b)$ функция F выпукла при $z < c$ и вогнута при $z > c$. Поэтому каждая такая точка c является вершинной. Отсюда, максимально расширяя интервал (a, b) вершинных точек, получаем, что если вершинная точка распределения F не единственна, то все ее вершинные точки образуют интервал в $\mathbb{R}$.

Рассмотрим максимальный интервал (a, b) , составленный из вершинных точек. Тогда крайние точки a и b также являются вершинными. Докажем это, например, для точки a . Для любой точки $a - \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$ функция F выпукла при $x < a - \varepsilon$ и, следовательно, она выпукла при $x < a$. С другой стороны, так как функция F вогнута при $x > a + \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то она вогнута во всех точках $x > a$. Тогда точки в интервале $(a - \varepsilon, a)$ также являются вершинными для функции распределения F , что противоречит выбору точки a . Для правого конца интервала (a, b) доказательство аналогично. При этом вместе с заменой a на b , нужно рассмотреть интервал $(b - \varepsilon, b)$ и использовать тот факт, что функция F вогнута при $x > b$. ■

В дальнейшем отрезок Δ будем называть множеством вершинных точек.

Следствие 3. *Если a – вершинная точка распределения F , то функция F непрерывна на (a, ∞) и $(-\infty, a)$. Если же множество вершинных точек одновершинного распределения F состоит более чем из одной точки, то F – непрерывная функция.*

□ Первое утверждение следует непосредственно из Леммы 1, второе же является следствием первого при рассмотрении каких-либо двух различных вершинных точек a и b из Δ . ■

Следствие 4. *Одновершинная функция распределения F имеет в каждой точке x правую $D_+F(x)$ и левую $D_-F(x)$ производные, которые конечны за исключением, может быть, одной точки x_* , которая является единственной вершинной точкой функции F . Для производных Дини справедливы неравенства $D_+F(x) \geq D_-F(x)$ при $x < x_*$ и $D_+F(x) \leq D_-F(x)$ при $x > x_*$.*

□ Доказательство утверждения получается применением Теорем 1 и 3 отдельно к выпуклой и вогнутой частям функции F . ■

Следствие 5. *Множество $\mathcal{G}(F)$ одновершинного распределения F является замкнутым отрезком конечным или бесконечным.*

□ Пусть a – вершинная точка распределения F . Тогда вся действительная ось $\mathbb{R}$ представляется в виде $\{a\} \cup (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ так, что распределение F выпукло на первом интервале и вогнуто на втором. Согласно Лемме 2, на каждом из них может находиться только один интервал постоянства функции F . Так как $F(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$ и $F(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$, то на первом интервале $(-\infty, a)$ такой интервал постоянства либо пуст, либо бесконечен и имеет вид $(-\infty, a_-)$. На этом интервале $F(x) = 0$ и,

следовательно, $(D_-F)(a_-) = 0$. То же самое справедливо относительно второго интервала (a, ∞) . Он либо пуст, либо бесконечен — (a_+, ∞) . В последнем случае на этом интервале $F(x) = 1$ и $(D_+F)(a_+) = 0$. ■

Замечание 1. Так как множество $\{x : D_+F(x) \cdot D_-F(x) \neq 0\}$ открыто, то для любого непрерывного одновершинного распределения это множество является интервалом (конечным или бесконечным), который представляет собой внутреннюю часть множества $\mathcal{G}(F)$ [2].

Замечание 2. Если множество Δ вершинных точек одновершинного распределения F одноточечно $\Delta = \{a\}$, то в точке a распределение F может иметь разрыв первого рода. При этом правая и левая производные распределения в этой точке могут быть как конечными, так и бесконечными.

На основании доказанных свойств одновершинных распределений и Определения 4, сформулируем

Определение 4'. Последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинных функций распределений слабо сходится к распределению F , если она сходится к функции F поточечно во всех точках за исключением, может быть, вершинной точки x_* распределения в том случае, если она единственна и является точкой разрыва 1-го рода функции F .

Нам понадобится далее

Лемма 7. Если $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — одновершинное распределение, то $F(x-c)$, $x \in \mathbb{R}$ — также одновершинное распределение при любом $c \in \mathbb{R}$.

□ Если a — вершинная точка распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то $F(x)$ выпукла при $x < a$ и вогнута при $x > a$. Тогда функция $F(x-c)$ выпукла при $x < c+a$, и вогнута при $x > a+c$ и поэтому $(c+a)$ — вершинная точка распределения $F(x-c)$, $x \in \mathbb{R}$. ■

Из этой леммы следует следующее утверждение.

Теорема 6. Если $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ — одновершинное распределение, то $F(\lambda x - c)$, $x \in \mathbb{R}$ — также одновершинное распределение при любых $c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0, \infty)$.

□ Достаточно доказать, что из одновершинности распределения $F(x)$ следует одновершинность функции распределения $F(\lambda x)$ при $\lambda > 0$. Пусть a — вершинная точка распределения F . Тогда F выпукла при $x < a$ и вогнута при $x > a$. Поэтому функция $F(\lambda x)$ выпукла при $\lambda x < a$, $x < a/\lambda$ и вогнута при $\lambda x > a$, $x > a/\lambda$. ■

Главным достоинством Определения 1 понятия одновершинности распределения оказывается то, что класс одновершинных распределений оказывается полным относительно применения операции предельного перехода в смысле слабой топологии. Это открывает возможность создания аналитического метода установления одновершинности распределений посредством построения последовательных приближений в виде одновершинных распределений для изучаемого распределения. Поэтому утверждение имеет исключительное значение для теории одновершинных распределений.

Теорема 7. Пусть $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ является последовательностью одновершинных распределений, которая слабо сходится к функции распределения F . Тогда предельное распределение F одновершинно. При этом последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к F поточечно во всех точках, за исключением, может быть, вершинной точки x_* распределения F в том случае, если она единственна и в ней предельная функция F имеет разрыв первого рода.

□ Так как последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ слабо сходится к распределению F , то есть сходится поточечно во всех точках его непрерывности, то любая подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ сходится поточечно во всех точках множества непрерывности к этому распределению F , то есть любая подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ слабо сходится к F .

Положим, что все функции $F^{(n)}$ в последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинны. Тогда каждая из этих функций имеет, по крайней мере, одну вершинную точку $a^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ так, что каждая из функций $F^{(n)}$ выпукла при $x < a^{(n)}$ и вогнута при $x > a^{(n)}$. Рассмотрим последовательность $\langle a^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$. Эта числовая последовательность ограничена. В самом деле, допустим противное, что в ней имеется неограниченно монотонно возрастающая подпоследовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. Тогда выберем соответствующую подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределения, слабо сходящуюся к F , причем каждый из членов этой подпоследовательности является выпуклой функцией при $x < a^{(n_k)}$. Так как последовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ превосходит при достаточно больших k любое наперед заданное число a , то предельная функция F , согласно Лемме 4, является непрерывной и выпуклой во всех точках $x \leq a$, а так как a может быть выбрано произвольным образом, то во всех точках $x \in \mathbb{R}$. Но это невозможно, так как в этом случае F является выпуклой и ограниченной сверху на всей оси, что невозможно в силу Леммы 5. Точно так же разбирается случай, когда имеется неограниченно монотонно убывающая подпоследовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. В этом случае, согласно той же лемме, не может существовать предельная функция распределения F всюду вогнутая на $\mathbb{R}$ и ограниченная снизу.

Так как последовательность $\langle a^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ ограничена, то в ней найдется сходящаяся к некоторой точке $a \in \mathbb{R}$ подпоследовательность $\langle a^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$. Согласно выбору этой подпоследовательности, построим соответствующую ей подпоследовательность $\langle F^{(n_k)}; k \in \mathbb{N} \rangle$ функций распределения. Тогда, согласно сказанному выше, эта подпоследовательность сходится в слабом смысле к распределению F . Следовательно, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое K , что при $k > K$ выполняется неравенство $|a^{(n_k)} - a| < \varepsilon$. Следовательно, при всех $k > K$ функции $F^{(n_k)}(x)$ непрерывны и выпуклы при $x \leq a - \varepsilon$, и

поэтому, согласно Лемме 4, при таких значениях x предельная функция $F(x)$ непрерывна и выпукла. Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, можно сделать вывод о том, что предельная функция $F(x)$ непрерывна и выпукла при всех $x < a$. По этой же причине, при всех $k > K$ функции $F^{(n_k)}(x)$ непрерывны и вогнуты при $x \leq a + \varepsilon$. Поэтому предельная функция $F(x)$ непрерывна и вогнута во всех точках $x > a + \varepsilon$ и, ввиду произвольности ε , получаем, что она непрерывна и вогнута при $x > a$. Следовательно, во-первых, $F(x)$ непрерывна при $x \neq a$. Во-вторых, предельное распределение F одновершинно и точка $x = a$ является его вершинной точкой.

Если эта вершинная точка не единственна, то есть имеется, по крайней мере, еще одна такая вершинная точка $a' \neq a$, то в этой вершинной точке функция $F(x)$, наверняка, непрерывна. Тогда, например, если $a' > a$ (либо $a' < a$), то функция F выпукла при всех $x < a'$ (вогнута при всех $x > a'$), и поэтому, согласно Лемме 1, она непрерывна в точке a . Если вершинная точка a единственна, то она может быть точкой разрыва функции F , причем, так как в этой точке у функции F существуют и конечны пределы справа и слева, то в ней эта функция имеет разрыв первого рода. ■

Теорема 8. Пусть $\langle \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ — последовательность отрезков вершинных точек, каждый из которых соответствует одновершинной функции распределения $F^{(n)}$, входящей в состав последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ функций, которая стремится в слабом смысле к функции распределения F . Тогда множество Δ_∞ предельных точек всех сходящихся при $n \rightarrow \infty$ последовательностей $\langle a^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ вершинных точек $a^{(n)} \in \Delta_n$ функций распределения $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ совпадает с множеством множества Δ вершинных точек распределения F .

□ Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим правую крайнюю точку $a_+^{(n)} = \inf \Delta_n$ каждого из отрезков Δ_n вершинных точек, соответствующего функции $F^{(n)}$ из последовательности в условии теоремы. Для каждого фиксированного номера $n \in \mathbb{N}$ функция $F^{(n)}$ выпукла при $x < a_+^{(n)}$. Пусть, далее, $a_- = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_+^{(n)}$. Выберем $\delta > 0$ и пусть при всех $n > N$ имеет место $|a_- - a_+^{(n)}| < \delta$. Поэтому при всех таких n каждая из функций $F^{(n)}$ выпукла при $x < a_- - \delta$. Следовательно, предельная функция F выпукла при $x < a_- - \delta$. Тогда, ввиду произвольности δ , функция F выпукла при $x < a_-$.

С другой стороны, любая точка $a_+^{(n)}$ является вершинной для функции $F^{(n)}$, и поэтому функция $F^{(n)}$ вогнута при $x > a_+^{(n)}$. По этой причине для точек $x > a_+ + \delta$ при всех $n > N$ функции $F^{(n)}$ являются вогнутыми. Следовательно, предельная функция F также является вогнутой при $x > a_- + \delta$. Опять, в силу произвольности δ , функция F вогнута при $x > a_-$. Таким образом, a_- является вершинной точкой функции F .

Точно такими же рассуждениями доказывается, что верхний предел $a_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_-^{(n)}$ последовательности левых крайних точек отрезков Δ_n является вершинной точкой для предельной функции F . Так как $a_+ < a_-$, то, согласно Теореме 5, отрезок $\Delta = [a_+, a_-]$ состоит из вершинных точек распределения F . Если, теперь, $\langle a_n \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ — любая сходящаяся последовательность вершинных точек распределений $F^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, предел которой равен a , то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $a_-^{(n)} \leq a^{(n)} \leq a_+^{(n)}$. Переходя отдельно к нижнему и верхнему пределам при $n \rightarrow \infty$ в этих неравенствах, находим

$$a_- \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a, \quad a_+ \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{(n)} = a,$$

то есть предельная точка $a \in \Delta$ и, следовательно, она является вершинной точкой. Ввиду произвольности выбора предельной точки a и определения множества Δ_∞ , убеждаемся, что справедливо включение $\Delta_\infty \subset \Delta$. С другой стороны, выбирая в качестве последовательности $\langle a_n \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ поочередно последовательности $\langle a_-^{(n)} \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ и $\langle a_+^{(n)} \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, получаем, что их предельные точки a_- и a_+ обязательно принадлежат Δ_∞ и поэтому имеет место включение $\Delta_\infty \supset \Delta$. Следовательно, $\Delta_\infty = \Delta$. ■

Множество Δ вершинных точек предельного распределения F может быть одноточечным $\Delta = \{x_*\}$. В этом случае любая последовательность $\langle a^{(n)} \in \Delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к x_* . При этом распределение F в точке x_* может иметь разрыв 1-го рода.

Следствие 6. Если множество Δ вершинных точек F не является одноточечным, то в каждой точке a этого множества распределение F обязательно непрерывно, и поэтому последовательность $\langle F^{(n)}(a); n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится к $F(a)$. Кроме того, сходимость последовательности $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ распределений равномерна.

□ Утверждение следует из Леммы 6 и Теоремы 7. ■

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8 [7]. Пусть $F(x)$ — одновершинная функция распределения. Тогда существует последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинных функций распределения, которая слабо сходится к F и все ее компоненты имеют абсолютно непрерывные производные $dF^{(n)}/dx$, $n \in \mathbb{N}$.

□ Прежде всего заметим, что если имеется какое-то линейно упорядоченное множество $\langle F_\delta; \delta \in [0, 1] \rangle$ распределений, слабо сходящееся при $\delta \rightarrow +0$ к F , и для каждого распределения F_δ этого множества имеется линейно упорядоченное множество $\langle F_{\delta, \varepsilon}; \varepsilon \in [0, 1] \rangle$ распределений, слабо сходящееся при $\varepsilon \rightarrow +0$ к F_δ и, наконец, для каждого распределения $F_{\delta, \varepsilon}$ имеется линейно упорядоченное множество $\langle F_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}; \varepsilon' \in [0, 1] \rangle$ распределений, слабо сходящееся при $\varepsilon' \rightarrow +0$ к $F_{\delta, \varepsilon}$, то из этих множеств распределений,

применяя диагональный процесс, всегда можно выбрать такую последовательность $\langle F^{(n)} = F_{\delta_n, \varepsilon_n, \varepsilon'_n}; n \in \mathbb{N} \rangle$ с соответствующими стремящимися к нулю последовательностями $\langle \delta_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle \varepsilon_n; n \in \mathbb{N} \rangle$, $\langle \varepsilon'_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ при $n \rightarrow \infty$, которая слабо стремится к распределению F при $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, для доказательства леммы нужно построить указанные семейства.

Если одновершинная функция распределения F имеет разрыв в точке x_* , то всегда имеется последовательность $\langle F_\delta; n \in \mathbb{N} \rangle$ непрерывных одновершинных распределений, слабо сходящаяся к ней при $\delta \rightarrow +0$. Каждая из функций F_δ совпадает с F при $x \in [x_* + \delta, \infty) \cup (-\infty, x_* - \delta]$, а на отрезке $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ представляется отрезком прямой, соединяющей точки $\langle x_* - \delta, F(x_* - \delta) \rangle$ и $\langle x_* + \delta, F(x_* + \delta) \rangle$. Рассмотрим фиксированное непрерывное распределение F_δ и построим на его основе для каждого $\varepsilon \in (0, 1]$ функцию

$$F_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} \int_{x-\varepsilon}^x F_\delta(y) dy.$$

Она монотонно не убывает, так как

$$\frac{dF_{\delta, \varepsilon}(x)}{dx} = \varepsilon^{-1} (F_\delta(x) - F_\delta(x - \varepsilon)) \geq 0, \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

ввиду монотонного неубывания F_δ . Каждая такая функция стремится к 1 при $x \rightarrow \infty$, так как, согласно теореме о среднем значении интеграла, имеем

$$F_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} \int_{x-\varepsilon}^x F_\delta(y) dy = F(y(x)),$$

где срединная точка $y(x)$ подчинена ограничениям $x - \varepsilon < y(x) < x$ и поэтому

$$F(x - \varepsilon) \leq F(y(x)) \leq F(x).$$

Переходя к пределу $x \rightarrow \infty$, получаем $1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} F(y(x)) \leq 1$. Точно так же устанавливается, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\delta, \varepsilon}(x) = 0$. Следовательно, все функции $F_{\delta, \varepsilon}$ являются функциями распределения. Каждая из них непрерывно дифференцируема, то есть имеет непрерывную плотность

$$f_{\delta, \varepsilon} = F'_{\delta, \varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} (F_\delta(x) - F_\delta(x - \varepsilon)) \geq 0.$$

Каждое из этих распределений $F_{\delta, \varepsilon}$ поточечно стремится к F_δ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Определим на основе каждой из плотностей $f_{\delta, \varepsilon}$ следующие семейства плотностей распределения

$$f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) = \varepsilon'^{-1} \int_{x-\varepsilon'}^x f_{\delta, \varepsilon}(y) dy \geq 0, \quad \varepsilon' \in (0, 1),$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) dx = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} dx \int_{x-\varepsilon}^x f_{\delta, \varepsilon}(y) dy = \varepsilon^{-1} \int_{\mathbb{R}} f_{\delta, \varepsilon}(y) dy \int_y^{y+\varepsilon} dx = \int_{\mathbb{R}} f_{\delta, \varepsilon}(y) dy.$$

Эти плотности непрерывно дифференцируемы,

$$\frac{d}{dx} f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) = \varepsilon'^{-1} (f_{\delta, \varepsilon}(x) - f_{\delta, \varepsilon}(x - \varepsilon'))$$

и для каждой пары $\langle \delta, \varepsilon \rangle$ плотность $f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x)$ стремится поточечно к $f_{\delta, \varepsilon}(x)$ при $\varepsilon' \rightarrow +0$. На основе плотностей $f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x)$ определим соответствующие каждой из них функции распределения

$$F_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}(y) dy.$$

Для каждой пары $\langle \delta, \varepsilon \rangle$ эти функции поточечно сходятся к функции распределения $F_{\delta, \varepsilon}$ при $\varepsilon' \rightarrow +0$, так как сходимости интеграла на нижнем пределе равномерная относительно ε' .

Таким образом, мы построили требуемое семейство функций распределения $F_{\delta, \varepsilon, \varepsilon'}$, линейно упорядоченное по каждому из параметров $\delta, \varepsilon, \varepsilon'$. Применив утверждение, приведенное в начале доказательства леммы, мы убеждаемся в правильности ее утверждения. ■

5. Сильно одновершинные распределения. Согласно Определению 2, если распределение V абсолютно непрерывно, то есть обладает плотностью v , то его свойство сильной одновершинности состоит в том, что для любого одновершинного распределения F функция

$$g(x) = (v * f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} v(x - y) dF(y) \quad (15)$$

представляет плотность одновершинного распределения $G, g = dG/dx$. В частности, если F абсолютно непрерывно с плотностью f , то для любой такой плотности g , определяемая композицией плотности v с плотностью f ,

$$g(x) = (v * f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} v(x - y)f(y)dy,$$

соответствует одновершинному распределению G .

Для применения сильно одновершинных распределений, при установлении одновершинности конкретных распределений, являются важными следующие их свойства.

Теорема 9. Множество сильно одновершинных распределений замкнуто относительно операции композиции.

□ Пусть $V_j, j \in \{1, 2\}$ — два сильно одновершинных распределения. Это означает, что для них, наряду с их одновершинностью, одновершинными являются композиции $V_j * F$ с любым одновершинным распределением F . Тогда из одновершинности распределения $V_2 * F$ следует одновершинность распределения $V_1 * (V_2 * F) = (V_1 * V_2) * F$, что означает сильную одновершинность одновершинного распределения $V_1 * V_2$. ■

Теорема 10. Предел V в смысле слабой сходимости последовательности $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сильно одновершинных функций распределения является сильно одновершинным распределением.

□ Так как компоненты $V^{(n)}$ последовательности $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ — сильно одновершинные распределения, то для любого одновершинного распределения F последовательность $\langle V^{(n)} * F; n \in \mathbb{N} \rangle$ состоит из одновершинных распределений. Так как последовательность $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сходится в слабом смысле к распределению V , то последовательность $\langle V^{(n)} * F; n \in \mathbb{N} \rangle$ также стремится в слабом смысле к функции распределения $V * F$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} F(x - y)dV^{(n)}(y) = \int_{\mathbb{R}} F(x - y)dV(y),$$

где переход под знаком интеграла обоснован второй теоремой Хелли (см., например, [5]). Согласно Теореме 6, это предельное распределение одновершинно. ■

Установление наличия свойства сильной одновершинности у данного распределения представляет собой самостоятельную задачу, решению которой посвящена настоящая работа. Ее решение несколько упрощается, если учесть следующее утверждение.

Теорема 11. Для того чтобы одновершинное распределение V с вершинной точкой a было сильно одновершинным, необходимо и достаточно чтобы одновершинной была функция распределения G , определяемая композицией (1), для любого распределения F с той же самой вершинной точкой.

□ Необходимость обладания распределением V свойством, указанным в условии теоремы, следует из Определения 2. Докажем достаточность этого условия. Пусть V — одновершинное распределение, обладающее указанным свойством. Пусть, далее, F — произвольное одновершинное распределение с вершинной точкой b . Тогда распределение $F(x - a + b)$ является одновершинным, согласно Лемме 7, так как получается трансляцией одновершинного распределения и обладает вершинной точкой a . Согласно Определению 2, распределение, получаемое посредством (1) из распределения $F(x - a + b)$,

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} V(x - y)dF(y - a + b)$$

одновершинно. Следовательно, производя трансляцией замену переменной в интеграле $y - a + b \Rightarrow y$,

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} V(x - a + b - y)dF(y)$$

получаем одновершинное распределение. Отсюда, снова применяя Лемму 7 о трансляции, получаем, что распределение

$$G(x + a - b) = \int_{\mathbb{R}} V(x - y)dF(y)$$

одновершинно. Таким образом, композиция V с любым одновершинным распределением F является одновершинным распределением. ■

Замечание 3. В связи с доказанным утверждением, в дальнейшем, если это не будет оговорено особо, предполагается, что у рассматриваемых распределений имеется вершинная точка $x_* = 0$. Тогда для описания класса всех сильно одновершинных распределений достаточно описать класс распределений, у которых имеется такая вершинная точка и проверять выполнения условия, определяющего свойство сильной одновершинности, только привлекая одновершинные распределения с вершиной в $x_* = 0$.

Примером сильно одновершинного распределения служит нормальное распределение.

Теорема 12. Пусть $F(x)$ — одновершинная функция распределения и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy \quad (16)$$

есть функция распределения Гаусса. Тогда функция распределения

$$G(x) = F(x) * \Phi(x\nu^{1/2}) \equiv \int_{\mathbb{R}} \Phi((x-t)\nu^{1/2})dF(t) \quad (17)$$

одновершинна.

□ Подставим в формулу (17) явное выражение для функции распределения Гаусса $\Phi(x\nu^{1/2})$ в форме (16) и, далее, будем понимать этот интеграл более общо – как интеграл Лебега–Стилтьеса по произведению мер $dydF(t)$. Ввиду измеримости подынтегральной функции $\exp\left(-\nu(y-t)^2/2\right)$ относительно такой меры, допустима перестановка порядка интегрирований с заменой переменных. В результате таких операций получим

$$\begin{aligned} G(x) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dy \left[\int_{-\infty}^{x-t} \exp\left(-\frac{\nu y^2}{2}\right) dF(t) = \right. \\ &= \left. \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\nu(y-t)^2}{2}\right) dF(t) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Сначала рассмотрим положение, когда одновершинная функция распределения F имеет абсолютно непрерывную производную плотности $f = F'$. В этом случае композиция (17) дается формулой

$$G(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{-\infty}^x dy \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\nu(y-t)^2}{2}\right) f(t) dt.$$

Так как интеграл сходится равномерно относительно параметра x при изменении его в любом конечном интервале, то, дифференцируя, найдем выражение для плотности $g(x) = dG(x)/dx$,

$$g(x) = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\nu(x-t)^2}{2}\right) f(t) dt.$$

Снова, ввиду равномерной сходимости интеграла относительно параметра x , используя предположение об абсолютной непрерывности функции f , то есть о существовании почти всюду по мере Лебега dt производной f' , дифференцированием по x , а затем преобразованием получившегося интеграла по частям, находим

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\exp\left\{-\frac{\nu(x-t)^2}{2}\right\} \right]' f(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{\nu(x-t)^2}{2}\right\} f'(t) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

где последний интеграл, в общем случае, нужно понимать в смысле Лебега.

Ввиду утверждения Теоремы 8 и сделанного в связи с ней Замечания 3, достаточно доказать сильную одновершинность распределения Гаусса в случае, если распределение F имеет вершинную точку $x_* = 0$. В таком случае при $t > 0$ почти всюду выполняется $f'(t) \leq 0$ и $f'(-t) \geq 0$. При этом достаточно доказать, что из условия $g'(x_*) = 0$, следует $g'(x_* + \delta) \leq 0$, если только $\delta > 0$. В самом деле, в таком случае у распределения G отсутствует точка a , в которой $g'(a) < 0$, $a < x_*$ и для которой имеется точка $b \in (a, x_*)$, в которой $g'(b) > 0$. Это связано с тем, что при реализации указанного положения, ввиду непрерывности функции g' , на интервале (a, b) найдется точка x_{**} , в которой $g'(x_{**}) = 0$ и, следовательно, мы приходим к противоречию.

Положим x_* удовлетворяет указанному условию,

$$\begin{aligned} g'(x_*) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \left[\int_0^\infty f'(t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*-t)^2}{2}\right) dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^\infty f'(-t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*+t)^2}{2}\right) dt \right] = 0, \\ g'(x_* + \delta) &= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \exp\left(-\nu\delta(x_* + \delta/2)\right) \times \\ &\times \left(\int_0^\infty f'(t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*-t)^2}{2}\right) e^{\nu t \delta} dt + \int_0^\infty f'(-t) \exp\left(-\frac{\nu(x_*+t)^2}{2}\right) e^{-\nu t \delta} dt \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись знакопостоянством функций $f'(t)$ и $f'(-t)$ на $[0, \infty)$, применим теорему о средних значениях функций $e^{vt\delta}$ и $e^{-vt\delta}$ (см., например, [8]), определив для них, соответственно, точки t_+ и t_- на $[0, \infty)$, в которых эти средние значения реализуются. В результате, находим

$$g'(x_* + \delta) = \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \exp\left(-v\delta(x_* + \delta/2)\right) \times \\ \times \left(e^{vt_+\delta} \int_0^\infty f'(t) \exp\left(-\frac{v}{2}(x_* - t)^2\right) dt + e^{-vt_-\delta} \int_0^\infty f'(-t) \exp\left(-\frac{v}{2}(x_* + t)^2\right) dt\right) \leq 0,$$

где неравенство возникает в связи с тем, что, с учетом (20), сумма интегралов в отсутствии множителей $e^{\pm vt_\pm\delta}$ равна нулю.

Перейдем к доказательству общего случая. Согласно утверждениям Теоремы 6 и Леммы 8, для любого одновершинного распределения F имеется слабо сходящаяся к нему последовательность $\langle F^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ одновершинных распределений, которые имеют непрерывно дифференцируемые плотности $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждой из этих функций, согласно доказательству, приведенному выше, композиция $\Phi(v^{1/2}x) * F^{(n)}(x)$ представляет собой одновершинное распределение при любом $v > 0$. Тогда предельное в слабом смысле распределение $\Phi(v^{1/2}x) * F$ последовательности $\langle \Phi(v^{1/2}x) * F^{(n)}(x); n \in \mathbb{N} \rangle$ распределений также является одновершинным, согласно Теореме 6. Ввиду произвольности функции распределения $F(x)$, согласно Определению 2, функция распределения $\Phi(v^{1/2}x)$ сильно одновершинна при любом $v > 0$. ■

6. Достаточный признак сильной одновершинности. Установим, следуя конструкции работы [8], достаточное условие сильной одновершинности данного распределения V . Докажем, что справедлива следующая

Теорема 13 [2]. *Для того, чтобы одновершинная функция распределения V была сильно одновершинной, достаточно, чтобы функция V была абсолютно непрерывной, а функция $\ln V'(x)$ была вогнутой функцией на множестве $\mathcal{G}(V)$.*

□ Пусть V удовлетворяет условиям теоремы и $\mathcal{G}(V) = \mathbb{R}$. Для доказательства утверждения теоремы выберем, в соответствии с Теоремой 11, произвольную одновершинную функцию распределения F с вершинной точкой $x_* = 0$. Будем считать функцию F двукратно непрерывно дифференцируемой так, что она обладает непрерывно дифференцируемой плотностью $f = F'$. Это не ограничивает общности рассуждений, так как в противном случае можно вместо F рассмотреть $F(x) * \Phi(v^{1/2}x)$, $v > 0$, и, после установления одновершинности композиции $V(x) * (F(x) * \Phi(v^{1/2}x))$, перейти к пределу $v \rightarrow \infty$. Так как предельной функцией при таком переходе является распределение $V * F$, то, воспользовавшись Теоремой 7, тем самым мы докажем, что $V * F$ — одновершинная функция распределения.

Обозначим $V * F = G$, где распределение G обладает непрерывно дифференцируемой плотностью $g = G'$. Точно так же, как и при доказательстве Теоремы 12, нам достаточно доказать, что если $g'(a) = 0$, то для $x > a$ имеет место $g'(x) \leq 0$. Пусть $g'(a) = 0$ и $\delta > 0$. Тогда, воспользовавшись теоремой о среднем значении рассматриваемых интегралов, что допустимо вследствие постоянства знаков их подынтегральных выражений, получим следующее выражение для $g'(a + \delta)$,

$$g'(a + \delta) = \int_0^\infty f'(t)V'(a - t) \frac{V'(a + \delta - t)}{V'(a - t)} dt + \int_0^\infty f'(-t)V'(a + t) \frac{V'(a + \delta + t)}{V'(a + t)} dt = \\ = \frac{V'(a + \delta - t_+)}{V'(a - t_+)} \int_0^\infty f'(t)V'(a - t) dt + \frac{V'(a + \delta + t_-)}{V'(a + t_-)} \int_0^\infty f'(-t)V'(a + t) dt,$$

где введены обозначения $t_\pm$ для точек, в которых реализуются средние значения функций $V'(a + \delta - t)/V'(a - t)$, $V'(a + \delta + t)/V'(a + t)$ от t и которые зависят от x .

Так как $f'(t) \leq 0$ при $t > 0$, то для выполнимости требуемого неравенства $g'(a + \delta) \leq 0$ достаточно доказать, что при любом значении числа a и при всех неотрицательных t_+ , t_- и $\delta > 0$ имеет место неравенство

$$\frac{V'(a + \delta - t_+)}{V'(a - t_+)} \geq \frac{V'(a + \delta + t_-)}{V'(a + t_-)}. \quad (21)$$

При его выполнимости требуемое неравенство $g'(a + \delta) \leq 0$ является следствием условия

$$g'(a) = \int_0^\infty f'(t)V'(a - t) dt + \int_0^\infty f'(-t)V'(a + t) dt = 0.$$

Положим, $a - t_+ = a_-$, $a + t_- = a_+$. Допустим, существуют такие $t_\pm \geq 0$ и $\delta > 0$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{V'(a + \delta - t_+)}{V'(a - t_+)} < \frac{V'(a + \delta + t_-)}{V'(a + t_-)}.$$

Так как обе его части положительны, то, логарифмируя их, получим неравенство

$$H(a_- + \delta) - H(a_-) < H(a_+ + \delta) - H(a_+), \quad (22)$$

где функция $\ln V'(\cdot) = H(\cdot)$ вогнута. Для доказательства достаточности условия, сформулированного в теореме, положим, что (22) имеет место при произвольном выборе чисел $a_{\pm}$, которые подчинены только условию $a_+ > a_-$. Тогда из (22) следует, что функция H должна быть монотонно возрастающей. Однако это, согласно утверждению Леммы 5, противоречит ее вогнутости. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (21) и, следовательно, справедливость утверждения теоремы в случае, когда $\mathcal{G}(V) = \mathbb{R}$.

Пусть теперь $\mathcal{G}(V) \neq \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{G}(V)$ представляет собой, согласно Следствию 5, отрезок на $\mathbb{R}$ конечный или бесконечный. Покажем, что всегда существует последовательность $\langle V^{(n)}; n \in \mathbb{N} \rangle$ сильно одновершинных функций, слабо сходящаяся к распределению V с носителем $\mathcal{G}(V) = \mathbb{R}$.

На основе вогнутой на отрезке $\mathcal{G}(V)$ функции $H = \ln V'$, для любого номера $m \in \mathbb{N}$ определим функции H_m , продолжив H на $\mathbb{R}$, дополняя ее график на $\mathcal{G}(V)$ прямолинейными лучами $\mp m(x - c_{\pm}) + d_{\pm}(m)$. Здесь c_+ и c_- — правая и левая точки отрезка $\mathcal{G}(V)$, соответственно, в том случае если они конечны, а числа $d_{\pm}(m)$ соответственно определяются из условия, что вершины лучей должны совпадать с точками $\langle c_{\pm}, 0 \rangle$ на оси переменной x . Причем, в случае, когда отрезок $\mathcal{G}(V)$ полубесконечный справа или слева, то соответствующий луч не используется. Функции H_m непрерывны на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательность $\langle H_m; m \geq M \rangle$, где число M определяется условием $M \geq \max\{|D_+H(c_+)|, |D_-H(c_-)|\}$. При таком ограничении чисел m эта последовательность состоит из вогнутых функций. На ее основе введем последовательность $\langle V_m(x) = \int_{-\infty}^x \exp[H_m(y)] dy; m \geq M \rangle$ непрерывно дифференцируемых функций, которая сходится в слабом смысле к распределению V при $m \rightarrow \infty$, так как в точках $y \in C(V)$ функции $H_m(y)$ стремятся к $-\infty$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно по $|y| > A$ при фиксированном $A > 0$. Это следует из того, что при $y < c_-$, если носитель $\mathcal{G}(V)$ ограничен снизу, то выполняется $H_m(y) < m(y - c_-)$, а при $y > c_+$, если носитель $\mathcal{G}(V)$ ограничен сверху, то выполняется $H_m(y) < -m(y - c_+)$. Множество $\mathcal{G}(V_m)$ для каждой из этих функций распределения совпадает с $\mathbb{R}$, и поэтому каждая из них является сильно одновершинной, в силу проведенного выше доказательства. Ввиду сходимости последовательности $\langle V_m(x); m \geq M \rangle$ в слабом смысле при $m \rightarrow \infty$ к функции распределения V , согласно Теореме 11, предельное распределение V также сильно одновершинно. ■

7. Заключение. Теорема 13 представляет собой довольно сильный результат, полученный в [2]. Однако ввиду доказанного в разд. 7 утверждения, он представляет только лишь достаточное условие сильной одновершинности, которое не является необходимым, вопреки утверждению той же работы. В этой связи представляют интерес дальнейшие исследования класса сильно одновершинных распределений с целью ослабления достаточного признака, сформулированного в этой теореме.

Заметим также, что если ограничиться рассмотрением только распределений с носителем на полуоси $[0, \infty)$, отдельное изучение которых очень важно с точки зрения приложений, то возможна иная постановка задачи о сохранении одновершинности распределений в результате композиций с другими распределениями и, соответственно, несколько видоизмененное определение сильной одновершинности. А именно, одновершинное распределение V с носителем на полуоси $[0, \infty)$ назовем сильно одновершинным, если его композиция (1) с любым одновершинным распределением F на $[0, \infty)$ снова является одновершинным распределением. При таком подходе к понятию сильной одновершинности одновершинность композиции $V * F$ должна проверяться на более узком классе распределений F . Поэтому возникает задача о нахождении эффективно проверяемых достаточных (и необходимых) условий для того, чтобы распределение V обладало описанным выше свойством, которые в этом случае могут быть существенно ослаблены по сравнению с теми, которые представляются Теоремой 13.

Наконец, заметим, что изучаемое в настоящей работе понятие сильной одновершинности было введено для решения задачи об установлении одновершинности распределений, связанных тем или иным образом с суммами независимых случайных величин. Однако имеется класс распределений, который связан с классической теоретико-вероятностной проблемой — изучение распределений экстремумов выборок независимых случайных величин, для которых установление условий, при которых они являются одновершинными, также важно, и для решения этой задачи приходится привлекать совершенно иной математический подход (см., например, [5], [9]).

References

1. Кас М. Mathematical mechanisms of phase transitions / Statistical Physics Phase Transitions and Superfluidity ed. M.Chretliln at al, Vol 1, 2 / New York: Gordon and Beach Science Publishers, 1968.
2. Ibragimov I. A. On the Composition of Unimodal Distributions. – Theory of Probability and its Applications. – 1956. – 1;2. – P. 255–260.
3. 6. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis / New York: MsGrow-Hill Book Company, 1964. – 320 p.

4. 7. As Lebesgue-Stieljes Integral /Leizig: G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1956. – 328 p.
5. 11. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D. Unimodality of probability distributions for sample maximums of the Erlang independent random values.– Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics. – 2019. – 51(3). – С. 366–373.
6. 8. Kolmogorov A. N., Fomin S.V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis 2 / Albany, New York: Graylock Press, 1961. – 148 p.
7. 10. Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. Limit Distributions For Sums Of Independent Random Variables / Cambridge: Addison-Wensley Publishing Company, Inc., 1954. – 284 p.
8. 9. Zorich V. A. Mathematical Analysis I/ New York: Springer-Verlag, 2002. – 552 p.
9. 12. Virchenko Yu. P., Novoseltsev A. D. Probability distributions unimodality of finite sample extremes of independent Erlang random variables. – Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – 1479. – 012104. doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012104.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 23.06.2025

Received June 23, 2025

Поступила после рецензирования 25.08.2025

Revised August 25, 2025

Принята к публикации 29.08.2025

Accepted August 29, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Теволде Амануэль Мехари – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Software for Computing Equipment and Automated Systems, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Amanuel M. Tewolde – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Существование решений анизотропных эллиптических неравенств с переменными нелинейностями в неограниченных областях

Кожевникова Л. М.^{ID}, Гилемьянова А. А.^{ID}
Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450076, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32
kosul@mail.ru, aliya.gilemyanova@mail.ru

Аннотация. Исследование посвящено задаче существования обобщенных решений анизотропных эллиптических вариационных неравенств с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях. Основная цель – установить условия разрешимости для класса неравенств, содержащих младшие члены с нестепенным ростом, что расширяет известные результаты, ограниченные изотропными случаями или полиномиальным ростом. Методология основана на применении теории псевдомонотонных операторов, функционального анализа и свойств анизотропных пространств Лебега и Соболева – Орлича с переменными показателями. Доказана теорема существования решений анизотропных вариационных неравенств второго порядка для операторов, включающих старшие члены со степенным ростом переменного порядка и младшие члены с неполиномиальным ростом. Результаты применимы в качественной теории краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений и могут быть использованы для дальнейшего развития теории неравенств в неограниченных областях.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое неравенство, переменные показатели нелинейностей, пространства Соболева – Орлича с переменными показателями, теорема существования, неограниченная область

Для цитирования: Кожевникова Л.М., Гилемьянова А.А. Существование решений анизотропных эллиптических неравенств с переменными нелинейностями в неограниченных областях. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):224–234. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-224-234 EDN RUUQMD

Original Research

Existence of Solutions to Anisotropic Elliptic Inequalities with Variable Exponents in Unbounded Domains

Larisa M. Kozhevnikova^{ID}, Aliya A. Gilemyanova^{ID}
Ufa University of Science and Technology,
32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia
kosul@mail.ru, aliya.gilemyanova@mail.ru

Abstract. The study addresses the problem of the existence of generalized solutions to anisotropic elliptic variational inequalities with variable nonlinearity exponents in unbounded domains. The primary objective is to establish solvability conditions for a class of inequalities containing lower-order terms with non-polynomial growth, thereby extending known results limited to isotropic cases or polynomial growth. The methodology is based on the application of the theory of pseudomonotone operators, functional analysis, and properties of anisotropic Lebesgue and Sobolev-Orlicz spaces with variable exponents. An existence theorem is proven for solutions to second-order anisotropic variational inequalities for operators that include higher-order terms with variable exponent power growth and lower-order terms with non-polynomial growth. The results are applicable to the qualitative theory of boundary value problems for quasilinear elliptic equations and can be used for the further development of the theory of inequalities in unbounded domains.

Keywords: Anisotropic Elliptic Inequality, Variable Nonlinearity Exponents, Sobolev – Orlicz Spaces with Variable Exponents, Existence Theorem, Unbounded Domain

For citation: Kozhevnikova LM., Gilemyanova AA. Existence of Solutions to Anisotropic Elliptic Inequalities with Variable Exponents in Unbounded Domains. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):224–234 (In Russ.).
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-224-234 EDN RUUQMD

1. Введение. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В статье рассматривается вариационное неравенство, соответствующее оператору

$$Au(x) + Bu(x) + Cu(x), \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

где

$$Au(x) = - \sum_{i=1}^n (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(x, u, \nabla u),$$
$$Bu(x) = b(x, u),$$

$$Cu(x) = - \sum_{i=1}^n (c_i(x, u_{x_i}))_{x_i}.$$

Предполагается, что функции $a_i(x, s_0, s_1, \dots, s_n)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(x) \in (1, \infty)$, $i = 0, 1, \dots, n$, и удовлетворяют обобщенным условиям теории псевдомонотонных операторов. Функции $b(x, s_0)$ и $c_i(x, s_i)$, $i = 1, \dots, n$ являются сильно нелинейными, т. е. не удовлетворяют условиям полиномиального роста по s_0 и s_i соответственно. Условия и примеры на эти функции будут сформулированы в разделе 3.

Для изотропного уравнения с полиномиальным ростом существование решения задачи Дирихле в произвольной области установлено Ф. Браудером [1]. В работах Л.М. Кожевниковой [2, 3, 4] для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей найдены условия разрешимости в неограниченных областях и, в частности, во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В работе [6] М.М. Бокало, О.В. Кушнир в неограниченных областях доказана однозначная разрешимость анизотропных вариационных неравенств с переменными нелинейностями, определяемыми монотонными операторами. Отметим, что в работах [3, 4, 6], существование решений доказано без ограничений на рост данных при $x \rightarrow \infty$.

В работе [5] В. Мустонен установлено существование решений вариационных неравенств для операторов высокого порядка со старшими членами степенного роста и младшими членами, допускающими неполиномиальный рост. В настоящей работе этот результат распространен на анизотропные операторы второго порядка с переменными показателями нелинейностей.

2. Анизотропные пространства Лебега и Соболева с переменными показателями. Рассмотрим произвольную область $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Введем множество непрерывных функций с ограниченными показателями:

$$C^+(\bar{Q}) = \{p \in C(\bar{Q}) : 1 < p^- \leq p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf_{x \in Q} p(x)$, $p^+ = \sup_{x \in Q} p(x)$.

Пусть $p(x) \in C^+(\bar{Q})$. Справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq |y|^{p(x)} + |z|^{p'(x)}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q, \quad p'(x) = p(x)/(p(x) - 1),$$

кроме того, ввиду выпуклости имеет место неравенство:

$$|y + z|^{p(x)} \leq 2^{p^+-1}(|y|^{p(x)} + |z|^{p(x)}), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q. \quad (2)$$

Пространство Лебега с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ состоит из измеримых функций $v : Q \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что

$$\rho_{p(\cdot), Q}(v) = \int_Q |v(x)|^{p(x)} dx < \infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве $L_{p(\cdot)}(Q)$ задается выражением:

$$\|v\|_{p(\cdot), Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \rho_{p(\cdot), Q}(v/k) \leq 1 \right\}.$$

Ниже будут использоваться обозначения $\|v\|_{p(\cdot), \Omega} = \|v\|_{p(\cdot)}$, $\rho_{p(\cdot), \Omega}(v) = \rho_{p(\cdot)}(v)$. Норма пространства $L_p(Q)$, $p \in [1, \infty]$, будет обозначаться как $\|v\|_{p, Q}$, причем $\|v\|_{p, \Omega} = \|v\|_p$. Пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством [7].

Для любых $u \in L_{p'(\cdot)}(Q)$, $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \int_Q u(x)v(x) dx \right| \leq 2\|u\|_{p'(\cdot), Q} \|v\|_{p(\cdot), Q}. \quad (3)$$

В дальнейшем будут использоваться следующие соотношения [7]:

$$\begin{aligned} \min\{\|v\|_{p(\cdot), Q}^{p^-}, \|v\|_{p(\cdot), Q}^{p^+}\} &\leq \rho_{p(\cdot), Q}(v) \leq \max\{\|v\|_{p(\cdot), Q}^{p^-}, \|v\|_{p(\cdot), Q}^{p^+}\}, \\ \min\{\rho_{p(\cdot), Q}^{1/p^+}(v), \rho_{p(\cdot), Q}^{1/p^-}(v)\} &\leq \|v\|_{p(\cdot), Q} \leq \max\{\rho_{p(\cdot), Q}^{1/p^+}(v), \rho_{p(\cdot), Q}^{1/p^-}(v)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть задан вектор функций $\vec{p}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\bar{Q}))^n$, определим

$$p_-(x) = \min_{i=1, n} p_i(x), \quad p_+(x) = \max_{i=1, n} p_i(x), \quad x \in Q.$$

Определим анизотропное пространство Лебега $L_{\vec{p}(\cdot)}(Q) = L_{p_1(\cdot)}(Q) \times \dots \times L_{p_n(\cdot)}(Q)$ с нормой:

$$\|v\|_{\vec{p}(\cdot), Q} = \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{p_i(\cdot), Q}, \quad v = (v_1, \dots, v_n) \in L_{\vec{p}(\cdot)}(Q).$$

Рассмотрим расширенный вектор

$$\vec{p}(\cdot) = (p_0(\cdot), \vec{p}(\cdot)) \in (C^+(\bar{Q}))^{n+1},$$

предполагая $p_+(\cdot) \leq p_0(\cdot)$. Пространство Соболева с переменными показателями $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\vec{p}(\cdot), Q}^1 = \|v\|_{p_0(\cdot), Q} + \|\nabla v\|_{\vec{p}(\cdot), Q}.$$

Пусть

$$\bar{p}(x) = n \left(\sum_{i=1}^n 1/p_i(x) \right)^{-1}, \quad \bar{p}_*(x) = \begin{cases} \frac{n\bar{p}(x)}{n-\bar{p}(x)}, & \bar{p}(x) < n, \\ +\infty, & \bar{p}(x) \geq n, \end{cases}$$

$$p_\infty(x) = \max\{\bar{p}_*(x), p_+(x)\}, \quad x \in Q.$$

Приведем теорему вложения для пространства $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q)$ [8, Теорема 2.5].

Лемма 2.1. Пусть Q — ограниченная область. Если $q \in C^+(\bar{Q})$ и

$$q(x) < p_\infty(x), \quad x \in Q,$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Важной особенностью изотропного пространства Соболева с переменным показателем

$$\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q) = \{v \in \dot{W}_1^1(Q) : \rho_{p(\cdot), Q}(|\nabla v|) < \infty\}$$

является то, что гладкие функции могут не быть плотными в нем без дополнительных ограничений на показатель $p(x)$. Это было отмечено В.В. Жиковым [9] в связи с эффектом Лаврентьева. Однако, если модуль непрерывности $p(x)$ удовлетворяет логарифмическому условию:

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{K}{\ln|x-y|}, \quad x, y \in Q, \quad |x-y| \leq \frac{1}{2},$$

то гладкие функции плотны в пространстве $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$.

3. Формулировка полученных результатов. Пусть $\vec{p}(\cdot) = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\bar{\Omega}))^{n+1}$. Будем считать, что

$$p_+(x) \leq p_0(x) < \bar{p}_*(x), \quad x \in \Omega.$$

Предполагается, что функции $a_i(x, s_0, s)$, $i = 0, \dots, n$, измеримы по $x \in \Omega$ для $s = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, существуют положительные константы $\widehat{a}$, $\bar{a}$ и неотрицательные измеримые функции $\Phi_i(x) \in L_{p'_i(\cdot)}(\Omega)$ и $\phi(x) \in L_1(\Omega)$, такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и любых $s, t \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_i(x, s_0, s)| \leq \widehat{a} P(x, s_0, s)^{1/p'_i(x)} + \Phi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad (5)$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0, \quad s \neq t; \quad (6)$$

$$a(x, s) \cdot s = a(x, s_0, s) \cdot s + a_0(x, s_0, s)s_0 \geq \bar{a} P(x, s_0, s) - \phi(x). \quad (7)$$

Здесь $P(x, s_0, s) = |s_0|^{p_0(x)} + P(x, s)$, $P(x, s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p_i(x)}$; $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$ и $a(x, s_0, s) = (a_0(x, s_0, s), a(x, s_0, s)) = (a_0(x, s_0, s), a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$. Кроме того, будем использовать обозначение $P'(x, s) = \sum_{i=1}^n |s_i|^{p'_i(x)}$.

Предполагается, что существует положительная константа $\widehat{b}$, непрерывная ограниченная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ и неотрицательные функции $h_1(x)$ и $h_2(x) \in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и любых $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|b(x, s_0)| \leq h_1(x)f(s_0), \quad (8)$$

$$b(x, s_0)s_0 \geq 0, \quad (9)$$

$$b(x, t_0)s_0 \leq b(x, t_0)t_0 + \widehat{b}b(x, s_0)s_0 + h_2(x). \quad (10)$$

Кроме того, предполагается, что $c_i(x, s_i) = q_i(x)g_i(s_i)$, $i = 1, \dots, n$, с неотрицательными функциями $q_i(x) \in L_1(\Omega)$ и непрерывными неубывающими функциями $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такими, что функции

$$G_i(s_i) = s_i \cdot g_i(s_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

выпуклые.

Приведем примеры функций, удовлетворяющих условиям (5)–(11):

$$a_i(s_i, x) = |s_i|^{p_i(x)-2}s_i + \Phi_i(x), \quad i = 0, \dots, n, \quad \Phi_i(x) \in L_{p'_i(\cdot)}(\Omega);$$

$$g_i(s_i) = \frac{P_i(s_i)}{s_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $P_i(s_i)$ – функции Орлича [10]. В качестве функции Орлича можно выбрать, например: $P(t_0) = e^{t_0^2} - 1$, $P(t_0) = \frac{|t_0|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 1$, $P(t_0) = e^{|t_0|} - |t_0| - 1$.

Положим

$$b(x, t_0) = \begin{cases} \frac{1}{M(x, 1)} \frac{M(x, t_0)}{t_0}, & |t_0| \leq 1, \\ \text{sign } t_0, & |t_0| > 1, \end{cases}$$

где $M(x, t_0)$ – функция Муселяка – Орлича. Примерами функции Муселяка – Орлича являются: $M(x, t_0) = |t_0|^{p(x)}$, $M(x, t_0) = |t_0|^{p(x)} - 1$, $M(x, t_0) = e^{|t_0|^{p(x)}} - 1$, где $p \in C^+(\overline{\Omega})$ [11].

Поскольку $t_0 b(x, t_0) = \begin{cases} \frac{1}{M(x, 1)} M(x, t_0), & |t_0| \leq 1, \\ |t_0|, & |t_0| > 1, \end{cases}$, то условие (9) выполнено.

Проверим условие (10):

1) пусть $0 < t_0, s_0 < 1$, тогда применяя неравенство Юнга для функций Муселяка – Орлича, выводим

$$\begin{aligned} s_0 b(x, t_0) &= \frac{M(x, t_0)}{t_0 M(x, 1)} s_0 \leq \frac{1}{M(x, 1)} \left(\overline{M}\left(x, \frac{M(x, t_0)}{t_0}\right) + M(x, s_0) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{M(x, 1)} (M(x, t_0) + M(x, s_0)) = t_0 b(x, t_0) + s_0 b(x, s_0); \end{aligned}$$

2) пусть $1 < t_0, s_0$, тогда

$$s_0 b(x, t_0) = s_0 \cdot 1 < s_0 + t_0 = s_0 b(x, s_0) + t_0 b(x, t_0);$$

3) пусть $0 < t_0 < 1 < s_0$, тогда, пользуясь неубыванием функции $\frac{M(x, t_0)}{t_0}$ по t_0 , выводим

$$s_0 b(x, t_0) = s_0 \frac{M(x, t_0)}{M(x, 1)t_0} < s_0 \frac{M(x, 1)}{M(x, 1)t_0} = s_0 = s_0 b(x, s_0) < s_0 b(x, s_0) + t_0 b(x, t_0);$$

4) пусть $0 < s_0 < 1 < t_0$, тогда

$$s_0 b(x, t_0) = s_0 < t_0 + \frac{M(x, s_0)}{M(x, 1)} = t_0 b(x, t_0) + s_0 b(x, s_0).$$

Определим пространство $W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega)$ сопряженное к $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$:

$$W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega) = \{f = f_0 - \text{div} f: f_0 \in L_{p'_0(\cdot)}(\Omega), f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in L_{\vec{p}'(\cdot)}(\Omega)\}.$$

Здесь действие функционала $\langle f, w \rangle$ задается формулой

$$\langle f, w \rangle = \int_{\Omega} f_0 w \, dx + \int_{\Omega} \nabla w \cdot f \, dx \quad \forall w \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega).$$

Заметим, что для $\forall w \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ справедливы неравенства

$$|\langle f, w \rangle| \leq \|f_0\|_{p'_0(\cdot)} \|w\|_{p_0(\cdot)} + \|\nabla w\|_{\vec{p}(\cdot)} \|f\|_{\vec{p}'(\cdot)} \leq \|f\|_{\vec{p}'(\cdot)} \|w\|_{\vec{p}(\cdot)}^1 = \|f\|_{W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega)} < \infty,$$

следовательно $f \in W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega)$ вполне определен.

Применяя (2) из неравенств (5), выводим оценки:

$$|a_i(x, s_0, s)|^{p'_i(x)} \leq \widehat{A} \cdot P(x, s_0, s) + \Psi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5')$$

с неотрицательными измеримыми функциями $\Psi_i(x) \in L_1(\Omega)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Из неравенства (5'), пользуясь (4), для любого $u \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ выводим оценку

$$\begin{aligned} \|a(x, u, \nabla u)\|_{\vec{p}'(\cdot)} &= \sum_{i=0}^n \|a_i(x, u, \nabla u)\|_{p'_i(\cdot)} \leq \sum_{i=0}^n [\rho_{p'_i(\cdot)}(a_i(x, u, \nabla u)) + 1]^{1/p'_i} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^n [\hat{A} \cdot \|P(x, u, \nabla u)\|_1 + \|\Psi_i\|_1 + 1]^{1/p'_i} < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, по элементу $a(x, u, \nabla u) \in L_{\vec{p}'(\cdot)}(\Omega)$ для $v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ определим функционал $A(u)$ равенством:

$$\langle A(u), v \rangle = \int_{\Omega} (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v) dx. \quad (13)$$

Используя неравенство Гельдера (3), для функций $u, v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ выводим неравенства:

$$|\langle A(u), v \rangle| \leq 2 \sum_{i=0}^n \|a_i\|_{p'_i(\cdot)} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \leq 2 \|a(x, u, \nabla u)\|_{\vec{p}'(\cdot)} \|v\|_{\vec{p}(\cdot)}^1. \quad (14)$$

Из (12), (14) следует, что функционал $A(u)$, $u(x) \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, определяемый равенством (13) в пространстве $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, является ограниченным. В анизотропном пространстве $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ определим полулинейную форму

$$a(u, v) = \langle A(u), v \rangle \quad \forall u, v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega). \quad (15)$$

Равенство (15) задает нелинейное отображение $A : \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \rightarrow W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega)$.

Определим подпространство:

$$V_1 = \{u \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) : b(x, u) \in L_1(\Omega), b(x, u)u \in L_1(\Omega)\}.$$

Очевидно, что $C_0^\infty(\Omega) \subset V_1 \subset \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и определена полулинейная форма

$$b(u, w) = \int_{\Omega} b(x, u)w dx \quad \forall u \in V_1, w \in C_0^\infty(\Omega). \quad (16)$$

Заметим, что каждому $u \in V_1$ сопоставляется элемент $B(u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по правилу

$$\langle B(u), w \rangle = b(u, w), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \quad (17)$$

которое задает нелинейное отображение $B : V_1 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Введем подпространство V_2 так, что

$$V_2 = \{u \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) : q_i g_i(u_{x_i}) \in L_1(\Omega), q_i g_i(u_{x_i})u_{x_i} \in L_1(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Легко видеть, что $C_0^\infty(\Omega) \subset V_2 \subset \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и полулинейная форма

$$c(u, w) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n q_i(x) g_i(u_{x_i}) w_{x_i} dx \quad (18)$$

корректно определена для всех $u \in V_2$ и $w \in C_0^\infty(\Omega)$.

Заметим, что каждому $u \in V_2$ сопоставляется элемент $C(u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ по правилу

$$\langle C(u), w \rangle = c(u, w), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \quad (19)$$

которое задает нелинейное отображение $C : V_2 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество пространства $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, содержащее нулевую функцию. Основным результатом настоящей работы является

Определение 3.1. Решением вариационного неравенства, соответствующего оператору вида (1), в области Ω называется функция $u \in V_1 \cap V_2 \cap K$, удовлетворяющая интегральному неравенству

$$\langle A(u), w - u \rangle + \langle B(u), w - u \rangle + \langle C(u), w - u \rangle \geq \langle f, w - u \rangle \quad \forall w \in K \cap C_0^\infty(\Omega). \quad (20)$$

Решением задачи Дирихле

$$Au(x) + Bu(x) + C(x) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (21)$$

называется элемент $u(x) \in V_1 \cap V_2$ такой, что справедливо равенство

$$\langle A(u), w \rangle + \langle B(u), w \rangle + \langle C(u), w \rangle = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Теорема 3.1. Если выполнены условия (5)–(11), тогда для любого $f \in W_{\overline{P}(\cdot)}^{-1}(\Omega)$ существует решение вариационного неравенства (20). В частности, существует решение задачи Дирихле (21).

4. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 3.1 основано на утверждении о псевдомонотонности, коэрцитивности и свойствах абстрактных операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ [5].

Пусть $\mathcal{V}$ — рефлексивное банахово пространство и $\mathcal{W}$ — нормированное подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, плотное в $\mathcal{V}$. Обозначим через $\langle f, v \rangle$ значение f из сопряженного пространства $\mathcal{V}^*$ на элементе $v \in \mathcal{V}$.

Определение 4.1. Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ называется псевдомонотонным, если

(i) $\mathcal{A}$ — ограниченный оператор;

(ii) из условия $u^j \rightharpoonup u$ слабо в $\mathcal{V}$ и $\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(u^j), u^j - u \rangle \leq 0$ следует, что для любого $v \in \mathcal{V}$

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(u^j), u^j - v \rangle \geq \langle \mathcal{A}(u), u - v \rangle.$$

Определение 4.2. Оператор $\mathcal{A}$ называется коэрцитивным, если

$$\|u\|^{-1} \langle \mathcal{A}(u), u \rangle \rightarrow +\infty \text{ при } \|u\| \rightarrow +\infty,$$

то есть существует функция $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, и для всех $u \in \mathcal{V}$ выполняется

$$\langle \mathcal{A}(u), u \rangle \geq g(\|u\|)\|u\|.$$

Пусть $\mathcal{B} : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{W}^*$, где $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}$. Будем считать, что оператор $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

($\mathcal{B}_1$) Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует ограниченное отображение $\mathcal{B}_m : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$, удовлетворяющее условию $\langle \mathcal{B}_m(u), u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{V}$. Кроме того, если $u^j \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, то $\langle \mathcal{B}_m(u^j), u^j - u \rangle \rightarrow 0$ и $\langle \mathcal{B}_m(u^j), v \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B}_m(u), v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V}, j \rightarrow \infty$.

($\mathcal{B}_2$) Если $u^m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$ и $\langle \mathcal{B}_m(u^m), u^m \rangle \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$, то $u \in \mathcal{V}_1$, $\limsup_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{B}_m(u^m), u - u^m \rangle \leq 0$ и $\langle \mathcal{B}_m(u^m), w \rangle \rightarrow \langle \mathcal{B}(u), w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{W}, m \rightarrow \infty$.

($\mathcal{B}_3$) Для любого $u \in \mathcal{V}_1$ существует вещественное число $\lambda(u)$ такое, что $\lambda(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{B}_m(u^m), u^m \rangle$ для любой последовательности $\{u^m\}$, удовлетворяющей ($\mathcal{B}_2$). Число $\lambda(u) \in \mathbb{R}$ вводится для замены $\langle \mathcal{B}(u), u \rangle$, которое может быть не определено для произвольного $u \in \mathcal{V}_1$, так как $\mathcal{B}(u) \in \mathcal{W}^*$.

Также рассмотрим отображение $\mathcal{C} : \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{W}^*$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{V}$. Предполагаем, что оператор $\mathcal{C}$ удовлетворяет условиям:

($\mathcal{C}_1$) Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует ограниченное отображение $\mathcal{C}_m : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$, которое является монотонным, полунепрерывным и $\mathcal{C}_m(0) = 0$. Кроме того, если $u^j \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, то $\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{C}_m(u^j), u - u^j \rangle \leq 0$.

($\mathcal{C}_2$) Если $u^m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$ и $\langle \mathcal{C}_m(u^m), u^m \rangle \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$, то $u \in \mathcal{V}_2$ и $\limsup_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{C}_m(u^m), u - u^m \rangle \leq 0$.

($\mathcal{C}_3$) Если $u^m \rightharpoonup u$ в $\mathcal{V}$, $\langle \mathcal{C}_m(u^m), u^m \rangle \leq c \quad \forall m \in \mathbb{N}$ и $\limsup_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}(u^m), u^m - u \rangle \leq 0$, то $\langle \mathcal{C}_m(u^m), w \rangle \rightarrow \langle \mathcal{C}(u), w \rangle \quad \forall w \in \mathcal{W}$.

($\mathcal{C}_4$) Для любого $u \in \mathcal{V}_2$, существует вещественное число $\mu(u)$ такое, что $\mu(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{C}_m(u^m), u^m \rangle$ для любой последовательности $\{u^m\}$, удовлетворяющей ($\mathcal{C}_3$).

Теорема 4.1. [5, Теорема 1] Пусть K — замкнутое выпуклое подмножество пространства $\mathcal{V}$, содержащее 0, $\mathcal{A}$ — коэрцитивное псевдомонотонное отображение из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{V}^*$, $\mathcal{B}$ — отображение из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{W}^*$, удовлетворяющие условиям ($\mathcal{B}_1$)–($\mathcal{B}_3$), а $\mathcal{C}$ — отображение из $\mathcal{V}_2$ в $\mathcal{W}^*$, удовлетворяющие условиям ($\mathcal{C}_1$)–($\mathcal{C}_4$). Тогда для любых $f \in \mathcal{V}^*$, $w \in K \cap \mathcal{W}$ вариационное неравенство

$$\langle \mathcal{A}(u), w - u \rangle + \langle \mathcal{B}(u), w - u \rangle + \langle \mathcal{C}(u), w - u \rangle - \lambda(u) - \mu(u) \geq \langle f, w - u \rangle$$

имеет решение $u \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \cap K$.

Для доказательства основных результатов потребуется следующая лемма о слабой сходимости в пространствах Лебега с переменным показателем.

Лемма 4.1. Пусть $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, v — такие функции из $L_{p(\cdot)}(\Omega)$, что

$$\|v^j\|_{p(\cdot)} \leq C, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$v^j \rightarrow v, \quad j \rightarrow \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega,$$

тогда $v^j \rightharpoonup v$, $j \rightarrow \infty$, слабо в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Доказательство леммы 4.1 для ограниченной области Ω проведено в [12], для неограниченной области оно также справедливо.

В настоящей работе для операторов A, B, C доказаны утверждения 4.1–4.3.

Утверждение 4.1. [2] Пусть выполнены условия (5)–(7), тогда оператор

$$A : \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \rightarrow W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega),$$

определяемый равенством (13), является псевдомонотонным, непрерывным и коэрцитивным. Кроме того, если $u^j \rightharpoonup u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и $\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle A(u^j), u^j - u \rangle \leq 0$, то $u^j \rightarrow u$, $\nabla u^j \rightarrow \nabla u$ п.в. в Ω , $j \rightarrow \infty$, для подпоследовательности.

Введем усеченные функции

$$v^{(m)}(x) = \begin{cases} m, & v(x) > m, \\ v(x), & |v(x)| \leq m, \\ -m, & v(x) < -m \end{cases}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим отображение $B_m : \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \rightarrow W_{\vec{p}'(\cdot)}^{-1}(\Omega)$:

$$\langle B_m(u), v \rangle = \int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u) v \, dx, \quad (22)$$

где

$$\chi_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega(m), \\ 0, & x \notin \Omega(m), \end{cases} \quad \Omega(m) = \{x \in \Omega : |x| < m\}.$$

Утверждение 4.2. Пусть выполнены условия (8)–(10), тогда отображение $B : V_1 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, определяемое равенствами (16), (17), (22), удовлетворяет условиям (B_1) – (B_3) с $\lambda(u) = b(u, u)$.

Доказательство. Из условия (9) следует, что $\langle B_m(u), u \rangle \geq 0$ для всех $u \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и любого $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, из условия (8) следует

$$|b^{(m)}(x, u)| \leq |b(x, u)| \leq h_1(x) f(u) \leq D h_1(x), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega; \quad (23)$$

$$|b^{(m)}(x, u)| \leq m \chi_m(x), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega. \quad (24)$$

Применяя неравенства (24) и Гельдера для любого $v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, выводим:

$$|\langle B_m(u), v \rangle| \leq \int_{\Omega(m)} m |v| \, dx \leq 2 \|m\|_{p'_0(\cdot), \Omega(m)} \|v\|_{p_0(\cdot)} \leq D_1(m) \|v\|_{\vec{p}(\cdot)}^1.$$

Последнее влечет ограниченность B_m в пространстве $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$.

Пусть u^j — последовательность в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и $u^j \rightharpoonup u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$. Так как пространство $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ рефлексивное, тогда последовательность u^j ограничена в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$. По лемме 2.1 из ограниченности последовательности $\{u^j\}$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ следует сильная сходимость

$$u^j \rightarrow u \text{ в } L_{p_-(\cdot)}(\Omega(m)), \quad j \rightarrow \infty, \quad (25)$$

и сходимость

$$u^j \rightarrow u \text{ п.в. в } \Omega. \quad (26)$$

Из (26) следует сходимость

$$b^{(m)}(x, u^j) \rightarrow b^{(m)}(x, u) \text{ п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Применяя неравенство (24) и Гельдера, получаем:

$$\begin{aligned} |\langle B_m(u^j), u^j - u \rangle| &\leq \int_{\Omega} \chi_m |b^{(m)}(x, u^j)| |u^j - u| \, dx \leq \\ &\leq 2 \|m\|_{p'_-(\cdot), \Omega(m)} \|u^j - u\|_{p_-(\cdot), \Omega(m)} = D_2(m) \|u^j - u\|_{p_-(\cdot), \Omega(m)}. \end{aligned}$$

Тогда, благодаря (25), устанавливаем $\langle B_m(u^j), u^j - u \rangle \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$.

Ввиду (24), (27), по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для $v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ имеем:

$$\int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u^j) v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u) v \, dx, \quad j \rightarrow \infty.$$

Это эквивалентно $\langle B_m(u^j), v \rangle \rightarrow \langle B_m(u), v \rangle \, \forall v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, следовательно (B_1) доказано.

Для проверки условия (B_2) предположим, что $u^m \rightharpoonup u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и $\langle B_m(u^m), u^m \rangle = \int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u^m) u^m \, dx \leq c$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из слабой сходимости $u^m \rightharpoonup u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и компактности вложения для некоторой подпоследовательности имеем:

$$u^m \rightarrow u \quad \text{п. в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Пользуясь (9) и (28), по лемме Фату устанавливаем:

$$\int_{\Omega} b(x, u) u \, dx = \int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} \chi_m b^{(m)}(x, u^m) u^m \, dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u^m) u^m \, dx \leq c.$$

Принадлежность $b(x, u) u \in L_1(\Omega)$ доказана. Применяя (23), выводим $b(x, u) \in L_1(\Omega)$. Таким образом, $u \in V_1$.

Применяя (23), выводим

$$|\chi_m b^{(m)}(x, u) w| \leq \chi_m D h_1(x) \|w\|_{C(\bar{\Omega})} \leq D_3 h_1(x), \quad w \in C_0^\infty(\Omega). \quad (29)$$

Для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что:

$$\int_E h_1(x) \, dx < \epsilon, \quad \text{для } |E| < \delta, \quad \text{где } E \subset \Omega.$$

Тогда, пользуясь (29), для любого $\epsilon > 0$ найдем $\delta > 0$:

$$\int_E |\chi_m b^{(m)}(x, u^m) w| \, dx \leq \epsilon D_3, \quad \text{для } |E| < \delta.$$

Отсюда, так как $b^{(m)}(x, u^m) \rightarrow b(x, u)$ п.в. в Ω , применима теорема Витали, следовательно

$$\int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u^m) w \, dx \rightarrow \int_{\Omega} b(x, u) w \, dx, \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega), \quad m \rightarrow \infty.$$

Это доказывает $\langle B_m(u^m), w \rangle \rightarrow \langle B(u), w \rangle, \forall w \in C_0^\infty(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$.

Применяя (10), выводим

$$\begin{aligned} \chi_m b^{(m)}(x, u^m) (u - u^m) &\leq [\chi_m b^{(m)}(x, u^m) (u - u^m)]^+ \leq \\ &\leq [b^{(m)}(x, u^m) (u - u^m)]^+ \leq \widehat{b} b(x, u) u + h_2(x) \in L_1(\Omega). \end{aligned}$$

С другой стороны, применяя (28), имеем

$$\chi_m b^{(m)}(x, u^m) (u - u^m) \rightarrow 0 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty.$$

По теореме Лебега заключаем

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \langle B_m(u^m), u - u^m \rangle \leq 0.$$

Таким образом, условие (B_2) выполнено.

Для доказательства условия (B_3) достаточно положить $\lambda(u) = b(u, u)$, пользуясь леммой Фату, имеем:

$$\lambda(u) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \chi_m b^{(m)}(x, u^m) u^m \, dx = \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle B_m(u^m), u^m \rangle.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим отображение $C_m : \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \rightarrow \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^{-1}(\Omega)$:

$$\langle C_m(u), v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) v_{x_i} \, dx \quad \forall u, v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega), \quad (30)$$

где $g_i^{(m)}(s_i) := g_i(s_i^{(m)})$.

Утверждение 4.3. Пусть выполнено условие (11), тогда отображение $C : V_2 \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, определяемое равенствами (18), (19), (30), удовлетворяет условиям $(C_1) - (C_4)$ с $\mu(u) = c(u, u)$.

Доказательство. Докажем условие (C_1) . Покажем, что отображение $C_m : \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega) \rightarrow W_{\vec{p}(\cdot)}^{-1}(\Omega)$ является ограниченным, монотонным, полунепрерывным и $C_m(0) = 0$.

Применяя (11), выводим оценку

$$\begin{aligned} |\langle C_m(u), v \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}) v_{x_i} dx \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} m \chi_m g_i(m) |v_{x_i}| dx \leq \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^n m \|g_i(m)\|_{p_i'(\cdot, \Omega(m))} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \leq D_4(m) \|v\|_{\vec{p}(\cdot)}^1, \quad \forall v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega). \end{aligned}$$

Из полученной оценки следует ограниченность C_m при фиксированном m .

Применяя монотонность функций $g_i^{(m)}(s_i)$, $i = \overline{1, n}$, выводим

$$\langle C_m(u) - C_m(v), u - v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(x) (g_i^{(m)}(u_{x_i}) - g_i^{(m)}(v_{x_i})) (u_{x_i} - v_{x_i}) dx \geq 0.$$

Отсюда следует монотонность C_m .

Из условия (11) следует $g_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n}$, тогда $C_m(0) = 0$.

Пусть $u^j \rightarrow u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, тогда существует подпоследовательность такая, что

$$\nabla u^j \rightarrow \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty,$$

следовательно

$$\chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^j) \rightarrow \chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad j \rightarrow \infty.$$

Заметим, что для $v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ справедлива оценка

$$\left| \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^j) v_{x_i} \right| \leq \sum_{i=1}^n m \chi_m g_i(m) |v_{x_i}| \in L_1(\Omega).$$

Поэтому, применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, устанавливаем:

$$\langle C_m(u^j), v \rangle \rightarrow \langle C_m(u), v \rangle, \quad \forall v \in \dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega).$$

Это доказывает полунепрерывность C_m .

Пусть $u^j \rightarrow u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$, так как C_m монотонен, то справедливо неравенство $\langle C_m(u^j) - C_m(u), u - u^j \rangle \leq 0$, следовательно $\langle C_m(u^j), u - u^j \rangle \leq \langle C_m(u), u - u^j \rangle$. Отсюда следует

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup \langle C_m(u^j), u - u^j \rangle \leq 0.$$

Следовательно, условие (C_1) доказано.

Условие (C_2) доказано в соответствии с леммами 7 и 8 из [13].

Для доказательства условия (C_3) пусть $u^m \rightarrow u$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup \langle A(u^m), u^m - u \rangle \leq 0$. Из утверждения 4.1 следует существование подпоследовательности $\{u^m\}$ такой, что

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду ограниченности $\{u^m\}$ в $\dot{W}_{\vec{p}(\cdot)}^1(\Omega)$ и непрерывности $g_i(s_i)$, следует сходимость

$$g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) \rightarrow g_i(u_{x_i}) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда из оценки

$$\langle C_m(u^m), u^m \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) u_{x_i}^m dx \leq c,$$

согласно [13, лемма 3], имеем:

$$\chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) \rightarrow q_i(x) g_i(u_{x_i}) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Для любого $w \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\langle C_m(u^m), w \rangle - \langle C(u), w \rangle| &\leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) - q_i(x) g_i(u_{x_i})| |w_{x_i}| dx \leq \\ &\leq \|w\|_{\infty} \sum_{i=1}^n \|\chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) - q_i(x) g_i(u_{x_i})\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (31), для любого $w \in C_0^\infty(\Omega)$ устанавливаем сходимость

$$\langle C_m(u^m), w \rangle \rightarrow \langle C(u), w \rangle, \quad m \rightarrow \infty,$$

которая завершает доказательство условия (C_3) .

Докажем (C_4) . Для любого $u \in V_2$ определим $\mu(u) = c(u, u)$. Из условия (11) $G_i(s_i) = s_i \cdot g_i(s_i)$ неотрицательны, тогда по лемме Фату:

$$\mu(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n q_i(x) g_i(u_{x_i}) u_{x_i} dx \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \chi_m q_i^{(m)}(x) g_i^{(m)}(u_{x_i}^m) u_{x_i}^m dx = \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle C_m(u^m), u^m \rangle.$$

Из утверждений 4.1–4.3, согласно теореме 4.1, следует существование функции $u \in V_1 \cap V_2 \cap K$ такой, что справедливо неравенство (20).

Список литературы

1. Browder F.E. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 1977;74(7):2659–2661. DOI: 10.1073/pnas.74.7.2659
2. Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях. *Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика*. 2016;5(36):29–41. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.5.4
3. Кожевникова Л.М., Камалетдинов А.Ш. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в $\mathbb{R}^n$. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*. 2019;160:49–60. DOI: 10.1007/s10958-021-05469-1
4. Kozhevnikova L.M, Kamaletdinov A.Sh, Melnik L.Yu. Existence of Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponents in Unbounded Domains. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018;39(2):224–235. DOI: 10.1134/S199508021802011X
5. Mustonen V. A Class of Strongly Nonlinear Variational Inequalities in Unbounded Domains. *Journal of the London Mathematical Society*. 1979;19(2):319–328.
6. Бокало М.М., Кушнір О.В. Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності. *Науковий вісник Чернівецького університету. Математика*. 2006;288:28–38.
7. Diening L, Harjulehto P, Hästö P, Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin: Springer; 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8
8. Fan X. Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$ -Laplacian equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2011;56(7–9):623–642. DOI: 10.1080/17476933.2010.487211
9. Жиков В.В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. *Проблемы математического анализа*. 2011;54:23–112.
10. Красносельский М.А., Рутцкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы; 1958. 271 с.
11. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin: Springer; 1983. 227 с.
12. Benboubker M.B, Azroul E, Barbara A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2011;(62):1–16.
13. Simader C.G. Über schwache Lösungen des Dirichletproblems für streng nichtlineare elliptische differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*. 1976;150:1–26.

References

1. Browder FE. Pseudo-monotone operators and nonlinear elliptic boundary value problems on unbounded domains. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 1977;74(7):2659–2661. DOI: 10.1073/pnas.74.7.2659
2. Kozhevnikova LM, Kamaletdinov ASH. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponents of nonlinearities in unbounded domains. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Fizika* [Volgograd State University Journal. Mathematics. Physics]. 2016;36(5):29–41. DOI: 10.15688/jvolsu1.2016.5.4

3. Kozhevnikova LM, Kamaletdinov ASh. Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable indices of nonlinearity in $\mathbb{R}^n$. *Itohi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Journal of Mathematical Sciences]. 2019;160:48-60. DOI: 10.1007/s10958-021-05469-1
4. Kozhevnikova LM, Kamaletdinov ASh, Melnik LYu. Existence of Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Exponents in Unbounded Domains. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018;39(2):224-235. DOI: 10.1134/S199508021802011X
5. Mustonen V. A Class of Strongly Nonlinear Variational Inequalities in Unbounded Domains. *Journal of the London Mathematical Society*. 1979;19(2):319-328.
6. Bokalo MM, Kushnir OV. Variational nonlinear elliptic inequalities with variable exponents of nonlinearity. *Scientific Bulletin of Chernivtsi University. Mathematics*. 2006;288:28-38. (In Ukrainian)
7. Diening L, Harjulehto P, Hästö P, Růžička M. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Berlin: Springer; 2011. 485 p. DOI: 10.1007/978-3-642-18363-8
8. Fan X. Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$ -Laplacian equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2011;56(7-9):623-642. DOI: 10.1080/17476933.2010.487211
9. Zhikov VV. On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions. *Problemy matematicheskogo analiza* [Journal of Mathematical Sciences]. 2011;54:23-112.
10. Krasnoselskii MA, Rutitskii YB. Convex functions and Orlicz spaces. Moscow: Fizmatgiz; 1958. 271 p (In Russ.).
11. Musielak J. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Berlin: Springer; 1983. 227 p.
12. Benboubker MB, Azroul E, Barbara A. Quasilinear elliptic problems with nonstandard growths. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2011;62:1-16.
13. Simader CG. On weak solutions of the Dirichlet problem for strongly nonlinear elliptic differential equations. *Mathematician Zeitschrift*. 1976;150:1-26. (In German)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.07.2025

Поступила после рецензирования 26.08.2025

Принята к публикации 29.08.2025

Received July 21, 2025

Revised August 26, 2025

Accepted August 29, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кожевникова Лариса Михайловна – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Гилемьянова Алия Алфитовна – студентка кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Larisa M. Kozhevnikova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Aliya A. Gilemyanova – student of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 51-7, 519.6, 517

MSC 92B05

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-235-242

EDN SOKAHU

Методы решения задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани

Кудяева Ф. Х. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Черновой О. В.)

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173

kfatimat@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены методы решения задачи с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани. Методом нелинейных вариационных параметров определение свободной границы сведено к задаче Коши. Проведен сравнительный анализ предложенных методов. Сделанные выводы можно распространить и на другие, более сложные, многомерные и многофронтовые постановки задачи Стефана. Сделаны выводы о том, что для одномерных однофронтовых задач Стефана наиболее эффективным из рассмотренных является метод ловли фронта в узел сетки с использованием неявной схемы. Работа может быть полезна специалистам, которые занимаются решением задач с фазовыми переходами.

Ключевые слова: математическое моделирование, задачи с фазовыми переходами, низкотемпературное воздействие, метод нелинейных вариационных параметров, численные методы, однофазная задача, разностная задача

Для цитирования: Кудяева Ф.Х. Методы решения задач с фазовыми переходами при низкотемпературном воздействии на биоткани. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):235–242.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-235-242 EDN SOKAHU

Original Research

Methods for Solving Problems with Phase Transitions under Low-Temperature Exposure to Biological Tissues

Fatimat Kh. Kudayeva 

(Article submitted by a member of the editorial board Chernova O. V.)

Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov,
173 Chernyshevsky St., Nalchik 360004, Russia

kfatimat@yandex.ru

Abstract. Methods for solving the problem with phase transitions under low-temperature exposure to biological tissues are considered. A comparative analysis of the proposed methods is carried out. By the method of nonlinear variational parameters, the determination of the free boundary is reduced to the Cauchy problem for single-phase and two-phase Stefan problems. To solve the single-phase and two-phase Stefan problem, the method of catching the phase front in a grid node was used. The conclusions drawn can be extended to other, more complex, multidimensional and multi-front formulations of Stefan's problem. The advantages and disadvantages of the method of catching the front in a mesh node and the method of nonlinear variational parameters are revealed. It is concluded that for one-dimensional single-front Stefan problems, the most effective of the considered methods is the method of catching the front into a grid node using an implicit scheme, which can be useful for specialists who solve problems with phase transitions.

Keywords: Mathematical Modeling, Problems with Phase Transitions, Low-Temperature Exposure, Method of Nonlinear Variational Parameters, Numerical Methods, Single-Phase Problem, Difference Problem

For citation: Kudayeva FKh. Methods for Solving Problems with Phase Transitions under Low-Temperature Exposure to Biological Tissues. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):235–242 (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-235-242 EDN SOKAHU

1. Введение. В настоящее время существуют аналитические и численные методы решения классической задачи с фазовыми переходами Стефана. Но нахождение решения задачи со свободными границами типа Стефана в замкнутой аналитической форме является не такой простой проблемой, решение которой возможно лишь для ограниченного количества случаев, когда рассматривают более упрощенную постановку задачи.

Проведен анализ существующих работ, где авторы используют в своих исследованиях численные методы. По этим методам, чтобы получить результаты в работах, авторы реализуют программы на различных языках программирования алгоритмы получения решений. По составленным программам проведены численные расчеты с различными данными.

Приведем некоторые из них. Работа А. М. Онишкова «Численное решение задачи для плоской области со свободной границей» посвящается построению математической модели некоторого физического процесса. В данной работе предлагается численный алгоритм для решения двумерной задачи со свободной границей [1].

В работе Н. А. Пинчук, А. М. Столяр «Решение начально-краевых задач с подвижной границей» исследуются начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа с подвижной границей. В данной работе предлагаются численные методы и проводится сравнение асимптотических результатов с численными [2].

Работа С. Л. Бородина «Численные методы решения задачи Стефана» содержит наиболее известные численные методы решения задачи Стефана а также новый метод, разработанный авторами, с целью выбора наиболее эффективного из них с позиций точности и скорости расчетов. В данной работе приводятся численные методы решения задачи с фазовыми переходами «лед-вода» вертикальной скважины, проходящей сквозь толщу многолетних мерзлых пород. Здесь автором сделаны выводы, которые распространяются и на другие многомерные и многофронтовые постановки задачи Стефана [3].

Оказалось, что работ, в которых авторами был проведен сравнительный анализ численных методов, недостаточно, применительно к задачам с фазовыми переходами, описывающим низкотемпературное воздействие на биологические ткани. В связи с этим в данной работе проводится такой анализ для выбора наиболее эффективного численного метода для решения задач Стефана, который бы сочетал высокую точность и скорость расчетов.

Существующие численные методы можно условно разделить на две группы. К первой группе относятся методы сквозного счёта, которые позволяют не выделять границу раздела фаз и использовать общее уравнение во всей расчетной области [3]. А ко второй группе относятся методы, предполагающие явное определение положения межфазных границ [3].

Главной особенностью методов сквозного счёта является то, что отсутствует необходимость точного отслеживания положения межфазных границ, и это оказывается достаточно эффективным при решении многомерных и многофазных задач. Для применения такого подхода исходную задачу необходимо записать в обобщенной формулировке в виде единого уравнения с разрывными коэффициентами на межфазных границах. Для построения численного алгоритма решения полученной задачи проводят процедуру сглаживания разрывных коэффициентов на некотором интервале. Данный подход был предложен в работах А. А. Самарского [4]. Недостатками такого подхода являются зависимость точности разностного решения от выбора параметра сглаживания и низкая точность определения положения межфазных границ.

Основные трудности при решении задач с фазовыми переходами Стефана связаны с тем, что свободные границы раздела фаз формируют переменные области для вычисления значений температуры или концентрации, а положение этих границ считается заранее неизвестным и должно определяться в ходе решения [5, 6, 7]. Аналитическое решение для таких задач можно получить лишь для малого числа постановок, поэтому в большинстве случаев необходимо применять численные методы, которых достаточно много [8, 9, 10, 11, 12, 13]. Однако сразу применить существующие численные методы не удастся. Необходимо разработать методы решения и затем уже применять численные методы.

Среди методов сквозного счёта в настоящее время активно развиваются метод функций уровня и метод фазового поля.

На практике широко применяются такие методы, которые в явном виде отслеживают движение межфазных границ. В основе всех таких методов данной группы лежит идея использования метода конечных разностей, когда расчёты проводятся на равномерных или же неравномерных сетках. При этом всегда определено, между какими узлами расчётной сетки находится подвижная граница, или же через какой узел она проходит.

Наиболее известными среди них являются метод ловли фронта в узел пространственной сетки и метод выпрямления фронтов. Еще имеется один подход к решению задачи Стефана, который предполагает использование метода динамически адаптирующихся сеток. Для решения задачи со свободными границами типа Стефана также может быть использован и метод конечных элементов.

В статье на примере решения одномерной задачи Стефана, возникающей при низкотемпературном воздействии на биоткани, проводится сравнение предложенных методов.

Цель настоящей работы – провести сравнительный анализ методов решения одномерной задачи фазовыми переходами Стефана, возникающей при низкотемпературном воздействии на биологические ткани. Полученные результаты можно распространить и на многомерные и многофронтовые постановки задачи Стефана.

2. Постановка задачи. Определение динамики температурного поля $u = u(x, t)$ и свободной границы $s = s(t)$ в начальный период охлаждения, когда $t > t_1$, при низкотемпературных воздействиях на биологические ткани сводится к решению следующей задачи [14, 15]

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{\partial u}{\partial t} &= u^\beta, & 0 < x < s(t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 < x < s(0), \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi(t), & x = 0, \\ u(s(t), t) &= 0, & \frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Момент времени t_1 определяется по решению задачи из условия $u(0, t) = 1$.

При $t_1 < t < t_2$ для определения $u = u(x, t)$, $s = s(t)$ и границы раздела замороженной и охлажденной области биологической ткани $x^* = x^*(t)$ имеем двухфазную задачу Стефана:

$$\begin{aligned} u_{xx} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, & 0 < x < x^*(t), \\ u_{xx} - \frac{\partial u}{\partial t} &= u^\beta, & x^*(t) < x < s(t), \\ u(x, t_1) &= u_1(x), & 0 < x < s(t_1), \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi(t), & x = 0, \\ [u]_{x^*} &= 0, & [u_x]_{x^*} = Px^*, & u(x^*(t), t) = 1, \\ u(s(t), t) &= 0, & \frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Момент времени t_2 определяется по решению задачи из условия $u(0, t_2) = u_n$.

В задачах (1), (2) H – коэффициент теплообмена с окружающей средой, $u_0(x)$ – начальная температура биологической ткани, $\varphi(t)$ – температура внешней среды, t – временная переменная, x – пространственная переменная, $0 \leq \beta < 1$, $a^2 = \frac{\lambda \bar{c} \bar{\rho}}{\bar{\lambda} \bar{c} \bar{\rho}}$, $u_1(0) = 1$, $H = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{w}}$, $w = \bar{a} w_0$, $w_0 = c_k m_k$, $\bar{a} = [\bar{T}/(\bar{T} - T^*)]^{1-\beta}$, $\varphi = 1 + (\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}) u_a(t) - (\frac{\lambda}{\bar{\lambda}})$, $u_a(t) = u_a(1 - \exp(-\chi t))$, $u_a = (\bar{T} - T_a)/(T - T^*)$, $P = \frac{p}{\bar{c}} \bar{\rho}(\bar{T} - T^*)$, $P = \Lambda \bar{\rho}$. Здесь $\bar{T} = 36.7^\circ\text{C}$, $T^* = -3 \div 0^\circ\text{C}$, T_a – температура аппликатора, $\lambda, c, \alpha, \Lambda, \rho$ теплофизические характеристики биоткани, c_k, m_k – теплоемкость и скорость потока массы крови, χ – параметр выхода на заданный режим охлаждения, β – параметр нелинейности, u_n – температура криопоражения, u_0, u_1, P, P_1 – заданные функции, знак черты сверху относится к незамороженной области биоткани, знак черты снизу – к замороженной области биоткани.

3. Метод нелинейных вариационных параметров. Рассмотрим стационарные задачи, соответствующие (1) и (2):

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u^\beta, & 0 < x < s, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi, & x = 0, \\ u(s) &= 0, & \frac{\partial u(s)}{\partial x} = 0, \\ u_{xx} &= 0, & 0 < x < x^*, \\ u_{xx} &= u^\beta, & x^* < x < s, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - Hu &= -H\varphi, & x = 0, \\ [u]_{x^*} &= 0, & [u_x]_{x^*} = 0, & u(x^*) = 1, \\ u(s) &= 0, & \frac{\partial u(s)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} [u]_{x^*} &= 0, & [u_x]_{x^*} = 0, & u(x^*) = 1, \\ u(s) &= 0, & \frac{\partial u(s)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Задачи (3), (4) имеют важное значение, т. к. их решения позволяют описать установившиеся состояния, когда достигаются максимальные размеры охлажденной и замороженной биологической ткани при заданной криогенной температуре охлаждающей поверхности криоинструмента.

Сначала найдем решение стационарной задачи, соответствующее (3)

$$u(x) = \bar{u} \left(1 - \frac{x}{s}\right)^{\frac{2}{1-\beta}}, \quad s = \frac{2}{1-\beta} \sqrt{\frac{1+\beta}{2}} \bar{u}^{\frac{1-\beta}{2}},$$

где $\bar{u} = \bar{u}(0)$ – положительный корень следующего уравнения

$$\bar{u} + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} \bar{u}^{\frac{1+\beta}{2}} - u_A = 0. \quad (5)$$

Для удобства вычисления запишем (5) в виде: $F(\bar{u}) = 0$, где

$$F(\bar{u}) = \bar{u} + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2}{1+\beta}} \bar{u}^{\frac{1+\beta}{2}} - u_A.$$

Далее применяем метод нелинейных вариационных параметров. Приближенное решение можно искать в виде

$$u(x, t) \approx \bar{u}(x, t) = \bar{u} \left(1 - \frac{x}{s(t)}\right)^{\frac{2}{1-\beta}},$$

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(s) = \frac{(1-\beta)h\varphi s}{2 + (1-\beta)hs}. \quad (6)$$

Краевые условия при этом будут выполняться автоматически для любой функции $s = s(t) \geq 0$. Потребуем, чтобы конструкция (6) удовлетворяла дифференциальному уравнению в смысле равенства нулю интегральной невязки

$$\int_0^s (\bar{u}_{xx} - \bar{u}_t - \bar{u}^\beta) dx = 0.$$

Определяем свободную границу $s(t)$, решив задачу Коши:

$$\frac{d}{dt} \bar{u}s + \frac{3-\beta}{1+\beta} \bar{u}^\beta s - \frac{2(3-\beta)\bar{u}}{(1-\beta)^2 s} = 0, \quad s(0) = 0.$$

Заменяя производную $\frac{d}{dt}(\bar{u}s)$ конечной разностью, получаем нелинейное уравнение для определения значения s на данном временном слое $F(s) = 0$, где

$$F(s) = s\bar{u}(s) - \tau \frac{2(3-\beta)\bar{u}}{(1-\beta)^2 s} + \tau \frac{3-\beta}{1+\beta} \bar{u}^\beta s - \check{s}\check{\bar{u}}.$$

Алгоритм поиска свободной границы реализован на ЭВМ (рис. 1). Проведены расчеты на ЭВМ для различных входных параметров.

Рассмотрим применение данного метода к решению двухфазной задачи Стефана (2).

Для определения $x^* = x^*(t)$ и $s = s(t)$ решается задача Коши:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{2}{1-\beta} \frac{dx^*}{dt} + \frac{3-\beta}{1+\beta} (s - x^*) - \frac{2(3-\beta)}{(1-\beta)^2} \frac{1}{s - x^*} = 0,$$

$$\frac{ds}{dt} + \left\{ \left[\frac{(\varphi-1)x^*}{2a^2(H^{-1} + x^*)} + P \right] x^* \right\} - \frac{\varphi-1}{H^{-1} + x^*} + \frac{2}{(1-\beta)} \frac{1}{s - x^*} = 0.$$

Используя алгоритм решения задачи Коши, находим $x^* = x^*(t)$ и $s = s(t)$.

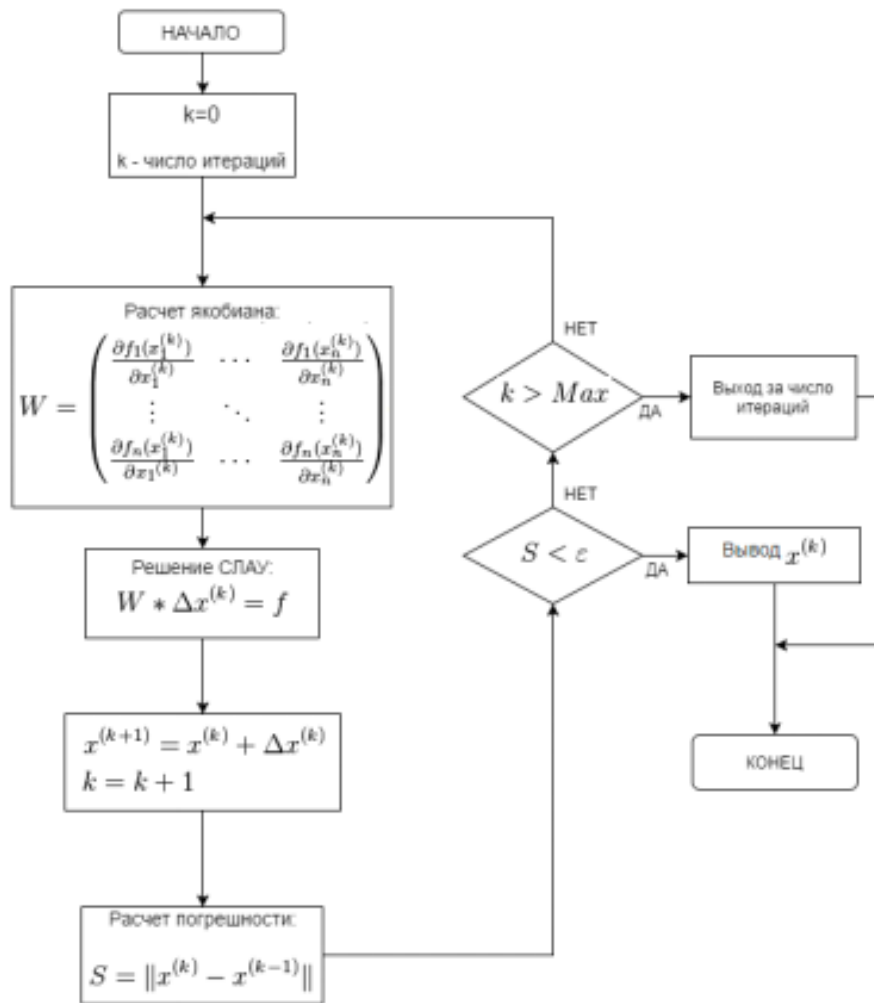


Рис. 1. Алгоритм решения задачи Коши для определения свободной границы
 Fig. 1. Algorithm for solving the Cauchy problem for determining the free boundary

4. Метод ловли фазового фронта в узел сетки. Рассмотрим вначале однофазную задачу (1). Строим разностную сетку на отрезке $[0, s]$, где $s = s(t_1)$, t_1 – конечный момент времени, строим неравномерную пространственную сетку, состоящую из узлов так, чтобы точка совпадала с одним из узлов $x_i = x_{i-1} + h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $x_0 = 0$, $h_i > 0$, $x_m = s$.

На отрезке $[0, t_1]$ также строится неравномерная сетка

$$t_j = t_{j-1} + \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad t_0 = 0, \quad t_{j_0} = t_1, \quad \tau_j > 0.$$

Шаг сетки по времени выбирается таким образом, чтобы за каждый шаг по времени фронт фазового перехода перемещался по координате x ровно на один шаг, т. е. $x(t_j) - x(t_{j-1}) = h_{j+m}$.

Введём обозначения, пусть $\Delta x = h_i$, $\Delta t = \tau_j$. Задачу (1) заменим следующей разностной задачей для определения u_i, τ_j :

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} = u_i^\beta, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$u_i^0 = u_{0i}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - H u_i = -H \varphi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$u_n = 0, \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Предполагая, что искомые величины для всех $j = 1, 2, \dots, m-1, i = 0, 1, \dots, n+j$ найдены, будем определять их значение на j -м временном слое. Если известно τ_{j_0} , то методом прогонки определяются u_{i+1} , а далее следующая итерация и т. д.

Конец итерационного процесса проверяется условиями:

$$\left| 1 - \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right| < \varepsilon_1, \quad |u_{i+1} - u_i| < \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые числа.

Теперь рассмотрим применение данного метода к решению двухфазной задачи Стефана (2). Аналогично предыдущему алгоритму строится разностная сетка с шагами $\Delta x = h_i$, $\Delta t = \tau_j$, и пусть $x^*(t) = x^*$.

Узел, лежащий на фронте фазового перехода, имеет индексы (i, j) . Это будем иметь в виду в дальнейшем при записи разностных уравнений в охлажденной и замороженной частях области. Для численного решения задачи возьмем также чисто неявную разностную схему, которую представим в виде:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} &= u_i^\beta, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ u_i^1 &= u_{1i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \\ \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - Hu_i &= -H\varphi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\ u_n &= 0, \quad \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученная система уравнений (7) является нелинейной и ее решение находится по итерационной схеме.

Процесс итерации продолжаем до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left| 1 - \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}} \right| < \varepsilon_1, \quad |u_{i+1} - u_i| < \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые числа.

Решения системы (7) находятся с помощью метода прогонки.

Таким образом, алгоритм модифицированного метода ловли фронта в узел сетки состоит из следующих этапов: вычисляются прогоночные коэффициенты; вычисляется неизвестный шаг пространственной сетки; на последнем этапе по формуле прогонки определяются значения.

Неизвестные величины по модифицированному методу ловли фронта определяются без использования итерационного процесса. В этом заключается достоинство модифицированного метода ловли фронта в узел сетки.

5. Сравнительный анализ методов. На основе представленных методов для решения поставленной задачи были разработаны программы, которые определяют динамику распределения температуры, границу раздела фаз и свободную границу, а также выдают время расчетов. С помощью этих программ было проведено сравнение используемых методов.

Оказалось, что метод ловли в узел сетки имеет некоторые недостатки, которые следует учитывать при решении задач с фазовыми переходами. Это сложность в реализации и в отладке программного кода для данного метода. Определение свободных границ, имеющие сложные формы, чрезвычайно сложно. Порядок точности часто приводит к снижению точности решения и зависит от размера сетки. Еще одним из недостатков является ограничение по выбору шага по времени, шаг по времени нужно использовать малого размера. Данный метод трудно применить ко всем типам граничных условий.

Из проведенного анализа следует, что метод ловли в узел сетки имеет еще преимущества для решения исследуемых задач. Основные из них следующие: простота в реализации и понимании; легкость применения граничных условий; возможность использования более точных численных схем. Если граница не сложной формы, то данный метод очень эффективен для решения. И еще данный метод можно адаптировать для различных моделей фазового перехода.

Метод нелинейных вариационных параметров относится к аналитическим методам. Основное преимущество данного метода в возможности получения аналитического или приближенно-аналитического решения, что позволяет легко изучать влияние различных параметров на процесс фазового перехода. Для некоторых уравнений, описывающих фазовые переходы, метод является относительно простым в применении. В отличие от метода ловли в узел сетки, данный метод не требует дискретизации пространства и времени. Полученное решение методом нелинейных вариационных параметров может быть использовано для валидации численных методов.

Данный метод имеет и недостатки. К недостаткам можно отнести: ограниченность применимости, не ко всем задачам может быть применен. Для сложных уравнений применение может быть трудоемким и требовать значительных математических усилий. В большинстве случаев дает только приближенное

решение, а не точное. Оценка точности приближенного решения может быть сложной задачей. Метод требует подходящего параметра для вариации, что влияет на точность и сходимость решения.

6. Заключение. На основе результатов сравнительного анализа методов сделаны следующие выводы.

Метод ловли в узел сетки не является универсальным решением для всех типов задач с фазовыми переходами, но данный метод может быть хорошим выбором, когда важна простота реализаций, а требования точности и устойчивости не слишком высоки. Правильная реализация имеет решающее значение для получения надежных решений.

Метод нелинейных вариационных параметров может быть полезным методом для получения аналитических и приближенно-аналитических решений. Однако применимость данного метода ограничена, и для решения более сложных задач требуются численные методы.

Список литературы

1. Онишкова А.М. Численное исследование двумерной задачи, содержащей неизвестную границу. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2012;4(1):136-142.
2. Пинчук Н.А., Столяр А.М. Решение начально-краевых задач с подвижной границей. *Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011;4(5):2423-2424.
3. Бородин С.Л. Численные методы решения задачи Стефана. *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика*. 2015;1(3):164-175. DOI: 10.21684/2411-7978-2015-1-3-164-175
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: ГИТТЛ; 1956. 684 с.
5. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского университета. 2011; 456 с.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2010;268:268–283. DOI: 10.1134/S0081543810010189
7. Васильева А.Б., Нефёдов Н.Н., Радченко И.В. О внутреннем переходном слое в сингулярно возмущенной начальной задаче. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1996;36(9):105–111.
8. Самарский А.А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. 2-ое издание, перераб. и доп. М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит.; 1987. 288 с.
9. Самарский А.А. Локально-одномерные разностные схемы на неравномерных сетках. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1963;3(3):431-466. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90290-8
10. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука; 1986. 288с.
11. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: учебное пособие. М.: Наука; Гл.ред. физ.-мат. лит. 1987. 600 с.
12. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ; 1987. 164 с.
13. Алипова К.А. Сравнение двух численных методов решения задачи Стефана. *XVII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям: программа, тезисы докладов, алфавитный указатель участников, Новосибирск. 30 октября – 3 ноября 2016 г. Новосибирск*. 2016. С. 26.
14. Кудаева Ф.Х. Канонический вид задач со свободными границами в проблемах медицины. *Южно-Сибирский научный вестник*. 2023;5(51):142-147. DOI: 10.25699/SSSB.2023.51.5.019
15. Митропольский Ю.А., Березовский А.А., Плотницкий Т.А. Задачи со свободными границами для нелинейного эволюционного уравнения в проблемах металлургии, медицины, экологии. *Украинский математический журнал*. 1992;44(1):67-76.

References

1. Onishkova AM. Numerical investigation of a two-dimensional problem containing an unknown boundary. *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskiye nauki*. 2012;4(1):136-142.
2. Pinchuk NA., Stolyar AM. Solving initial boundary value problems with a movable boundary. *Fundamental problems of theoretical and applied mechanics. Bulletin of the Nizhny Novgorod Lobachevsky University*. 2011; 4(5):2423-2424.
3. Borodin SL. Numerical methods for solving the Stefan problem. *Bulletin of the Tyumen State University. Physical and mathematical modeling. Oil, gas, and energy*. 2015;1(3):164-175. DOI: 10.21684/2411-7978-2015-1-3-164-175
4. Budak BM., Samarskiy AA., Tikhonov AN. Collection of problems in mathematical physics. Moscow: GITTL; 1956. 684 p.
5. Lomov SA., Lomov IS. Fundamentals of the mathematical theory of the boundary layer. Moscow: Moscow University Press. 2011; 456 p.

6. Vasilyeva AB., Butuzov VF., Nefedov NN. Singularly perturbed problems with boundary and inner layers. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*. 2010;268:258–273. DOI: 10.1134/S0081543810010189
7. Vasilyeva AB., Nefedov NN., Radchenko IV. On the inner transition layer in a singularly perturbed initial problem. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1996;36(9):1251–1256.
8. Samarskiy AA. Introduction to numerical methods. Textbook for universities. 2nd edition, revised. and dop. Moscow: Nauka. Gl.ed. fiz.-mat. lit.; 1987. 288 p.
9. Samarskiy AA. Locally one-dimensional difference schemes on uneven grids. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1963;3(3):431-466. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90290-8
10. Ortega J., Poole W. Introduction to numerical methods for solving differential equations. Moscow: Nauka; 1986. 288 p.
11. Bakhvalov NS., Zhidkov NP., Kobelkov G.M. Numerical methods: a textbook. Moscow: Nauka. Gl.ed. fiz.-mat. lit.; 1987. 600 p.
12. Vabishevich PN. Numerical methods for solving problems with a free boundary. Moscow: Publishing House of Moscow State University; 1987. 164 p.
13. Alipova KA. Comparison of two numerical methods for solving Stefan's problem. *XVII All-Russian Conference of Young Scientists on Mathematical Modeling and Information Technologies: program, abstracts, alphabetical index of participants, Novosibirsk, October 30 - November 3, 2016 Novosibirsk*. 2016. p. 26.
14. Kudayeva FK. Canonical type of tasks with free boundaries in medical problems. *South Siberian Scientific Bulletin*. 2023;5(51):142-147. DOI: 10.25699/SSSB.2023.51.5.019
15. Mitropolsky YuA., Berezovsky AA., Plotnitsky TA. Problems with free boundaries for a nonlinear evolutionary equation in metallurgy, medicine, and ecology. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1992; 44(1):67-76.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 21.04.2025

Поступила после рецензирования 15.08.2025

Принята к публикации 18.08.2025

Received April 21, 2025

Revised August 15, 2025

Accepted August 18, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Кудаяева Фатимат Хусейновна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Fatimat Kh. Kudayeva – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nalchik, Russia

[К содержанию](#)

Исследования в области оптимизации химического состава и термической обработки стальных шаров для мельниц

Великородный П. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Никуличевой Т. Б.)
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
pasha.sergeevich.2000@mail.ru

Аннотация. Проведен анализ российских и зарубежных исследований в сфере производителей мелющих шаров различных размеров для металлургической, горно-обогатительной и другой промышленности. Рассмотрены основные направления для улучшения химического состава стали при производстве мелющих шаров, а также исследования, оптимизирующие термическую обработку мелющих тел для повышения их механических характеристик. Повышение твердости шара при сохранении им стойкости к ударным и абразивным нагрузкам является актуальной задачей в настоящее время. Основные же дефекты мелющих тел – это трещины внутри шара, различного рода включения. Дефекты негативно влияют на механические и эксплуатационные характеристики шара, ухудшая их. Для решения данных задач необходимо оптимальное содержание кислорода, углерода и легирующих элементов в стали. Моделирование процесса изготовления шаров перед их реальным производством продукции помогает предварительно высчитать необходимые параметры, что позволяет скорректировать структуру шара.

Ключевые слова: химический состав, термообработка, стальной шар, мелющее тело, шаровая мельница, винтовая прокатка, измельчение руды

Для цитирования: Великородный П.С. Исследования в области оптимизации химического состава и термической обработки стальных шаров для мельниц. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):243–248.
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-243-248 EDN UBLYMP

Review article

Research in the Field of Optimization of Chemical Composition and Heat Treatment of Steel Balls for Mills

Pavel V. Velikorodnyy 

(Article submitted by a member of the editorial board Nikulicheva T. B.)
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
pasha.sergeevich.2000@mail.ru

Abstract. The analysis of Russian and foreign studies in the field of manufacturers of grinding balls of various sizes for metallurgy, mining and processing and other industries is carried out. The main directions for improving the chemical composition of steel in the production of grinding balls, as well as studies optimizing the heat treatment of grinding media to improve their mechanical characteristics are considered. Increasing the hardness of the ball while maintaining its resistance to impact and abrasive loads is an urgent task at present. The main defects of grinding media are cracks inside the ball, various types of inclusions. They negatively affect the mechanical and operational characteristics of the ball, worsening them. To solve these problems, the optimal content of oxygen, carbon and alloying elements in steel is necessary. Modeling the process of manufacturing balls before the production of products helps to pre-calculate the necessary parameters, which allows you to adjust the structure of the ball.

Keywords: Chemical Composition, Heat Treatment, Steel Ball, Grinding Body, Ball Mill, Screw Rolling, Ore Grinding

For citation: Velikorodnyy PV. Research in the Field of Optimization of Chemical Composition and Heat Treatment of Steel Balls for Mills. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):243–248 (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-3-243-248 EDN UBLYMP

1. Введение. Шары для помола из стали являются в настоящее время важным компонентом в процессе измельчения различных материалов. На сегодняшний день стальные и чугунные шары занимают существенную долю общего мирового проката, что можно объяснить применением их на многих производствах, таких как горнодобывающая, цементная, металлургическая, коксохимическая и другая промышленность, в которой необходимо измельчение материалов [1].

Основными параметрами качества мелющих шаров являются твердость, устойчивость к ударным нагрузкам и коррозионная стойкость [2]. Технология получения шаров при помощи винтового вида проката является одной из передовых технологий производства во всем мире, позволяющей получать

изделия с высокими механическими свойствами и точными геометрическими параметрами [3]. На качество изделия также сильно влияет химический состав сплава, из которого делаются шары, и режим термообработки полученного продукта [4].

Производство шаров, которые обладают повышенной износостойкостью и существенной стойкостью к разрушению, представляет объективную проблему, что можно объяснить сложностью технологии производства и возможным наличием трещин конечного продукта, что приведет к повышенной хрупкости. Увеличение ударной стойкости при наличии высокой твердости и прочности стального шара является актуальной задачей в настоящий момент [5]. Существует много исследований, направленных на оптимизацию структуры помольных тел, основными же направлениями увеличения твердости и устойчивости мелющих шаров к ударным нагрузкам являются: совершенствование химического состава мелющих тел, применение новых технологических решений термообработки. От качества стальных шаров зависит экономическая эффективность процесса измельчения, ведь на мелющие тела приходится до 67 процентов затрат при производстве различной продукции [6].

2. Исследования, направленные на улучшение химического состава мелющих шаров высокой твердости. Исследования химического состава стали для мелющих шаров повышенной твердости проводят уже многие годы.

В одной из работ рассматривалось количественное воздействие химических элементов сплава K76Ф на различные характеристики шара. Анализ был проведен при помощи статистического и металлографического критерия. В результате исследования было установлено, что при содержании в стали данной марки углерода и водорода выше допустимых расчетных значений ударная стойкость мелющих тел уменьшается до 50 процентов, что весьма существенно [7].

В статье [8] было установлено влияние химического состава стали на увеличение сопротивления упругой и пластичной деформации мелющих шаров. Авторами доказано, что увеличение доли хрома, никеля, марганца и углерода в некоторых диапазонах сильно влияет на сопротивление деформации шара. Исследование реализовано за счет экспериментальных марок стали, которые получили на основании анализа уже реализованных исследований в России и за рубежом. Работа проводилась в лаборатории при помощи прокручивания горячих заготовок из стали в специальной установке. Углерод оказывает более значительное влияние на свойства шара. Полученные данные дают возможность применения результатов на металлургических комбинатах, производящих мелющие тела [8].

При наличии таких дефектов, как различного рода включения, флокены, неоднородность структуры и трещины, шар имеет неудовлетворительные характеристики. Для минимизации подобных нарушений в компании «ЕВРАЗ» было проведено исследование влияния различных условий производства на характеристики готового продукта. Полученные результаты показывают, что стойкость шара от разрушений сильно зависит от количества кислорода в жидком металле, количества водорода и серы после внепечной обработки стали, а также от времени продувки металла специальным газом в ковше.

При сложении всех влияющих на характеристики шара факторов было установлено, что итоговые значения механических свойств помольных шаров зависят от них на 73 процента. Авторами данной работы, на основании полученных в результате исследования данных, были разработаны общие рекомендации для усовершенствования и подбора оптимальной технологии производства стали при плавке и дальнейшей обработке. Применение данных рекомендаций дало существенные экономические результаты. При улучшении качества стали качество круглого проката также улучшилось, что снизило количество некачественных шаров на 3 процента [9].

3. Исследования, направленные на усовершенствование термической обработки мелющих шаров. Для решения вопроса, связанного с разработкой улучшенной технологии термообработки шаров для мельниц, необходимо применение компьютерных моделей, которые наглядно показывают возможные значения механических характеристик стальных мелющих тел, а также протяженность закаленного слоя вглубь шара при использовании марок стали с различным химическим составом.

В исследовании [10] для улучшения термообработки шаров было проведено моделирование шаров из стали 70ХГС. Моделирование проводилось в программе Deform-3D. Для реализации эксперимента был найден заграничный аналог сплава 70ХГС. Температура 1050 °C приведена из физического опыта при прокатке шаров на стане. По критическим точкам получили температуру 730 °C, что соответствует температуре помольного тела перед закалкой. Прокаливаемость мелющих шаров рассчитана по методике ASTM A255 при помощи значений таблицы химического состава стали. Кривые охлаждения при реальном опыте соответствуют моделированию, что показывает точность готовой модели.

Полученные результаты в Deform-3D показали высокую достоверность и сошлись с результатами физического опыта как по внешней структуре, так и в центре шара. Модель дает возможность её использования для определения времени подстуживания. Экспериментальные данные процесса моделирования подстуживания и закалки показали выравнивание температуры по объему шара через 300 секунд. При использовании стали марки 70ХГС данного времени достаточно для того, чтобы произвести закалку и получить 5-ю группу твердости [10]. Для получения шаров 5 группы твердости диаметром 120 мм из стали

ХГС по ГОСТ необходима твердость шара на поверхности HRC=55...58 единиц со структурой мартенсита и HRC=45...48 в центре со структурой бейнит. Для того чтобы обеспечить подобные характеристики, авторами была сделана попытка уменьшения скорости охлаждения при помощи использования водного раствора наиритового латекса во время закалки. При помощи математического моделирования авторы определили температуру для закалки, которая должна быть равной 830...850°C, температуру ванны охлаждения – 20...30°C. За счет новой технологии скорость охлаждения в центре шаров уменьшилась, благодаря чему была получена необходимая структура. Благодаря уменьшению толщины прокаливаемости до 3 см, на поверхности шара образовалась необходимая мартенситная структура, а в сердцевине – бейнитная. Данная технология обеспечивает заданную твердость по всему объему шара [11].

Для оценки фазового состава, твердости и прочности мелющих шаров из стали 65C2X в другой научной работе было проведено программное исследование термической обработки в JMatPro и Deform. Моделирование процесса закалки реализовано для шаров 100 мм в диаметре. Результаты полученной модели показали, что при всех возможных отклонениях химического состава исходной заготовки в заданных диапазонах расчетная поверхностная твердость мелющих шаров будет не менее 58 HRC, а твердость в центре – около 46 HRC, что удовлетворяет требованиям 5-й группы твердости в соответствии с ГОСТ 7524-2015. Расчетная глубина закаливания составит около 1,5 см, что будет зависеть от содержания в стали легирующих элементов.

Исследование промышленной партии мелющих тел показало твердость на поверхности шара 57–60 HRC, твердость в центре шара – 43–47 HRC. Глубина закаленного слоя 1,5–2,0 см. Полученная модель дает достоверные данные, исходя из чего был сделан вывод о корректности полученного эксперимента. Модель позволяет учитывать неравномерность распределения температур по всему шару, а также она позволяет увидеть влияние разных факторов на процесс термообработки [12].

Еще одна математическая модель была создана для определения зависимости закалочного слоя шара от температуры аустенизации и размера шара. Полученные значения практически совпали с реальными экспериментальными данными. В результате были сделаны выводы: температура закалки и размер шара влияют на прокаливаемость больше, чем охлаждающая среда; перегрев шаров вызывает рост зерна, что в свою очередь провоцирует неправильную поверхность закалки [13]; повышение температуры закалки для некоторых видов стали вызывает уменьшение прочности шаров [14].

4. Патенты в области оптимизации процесса обработки стальных шаров. Одним из изобретений российских ученых является способ обработки, который позволяет получить высокую поверхностную твердость и хорошую прочность мелющих тел из среднеуглеродистой стали.

Обработка шаров по данной технологии включает следующие этапы: прокатка, штамповка или повторный нагрев мелющих шаров при температуре 950–1050°C; подстуживание мелющих шаров до температуры, примерно равной 770 градусов; закалка шаров в устройстве барабанного типа в течение 180–240 секунд; отпуск, который проводится при температуре 220 градусов ± 15 процентов и составляет от 3 до 5 часов по времени; самоотпуск в бункере в течение 0,5–2 суток. Данная технология может быть применена к выполненным из стали шарам с диаметром 80–100 мм.

Для шаров же диаметром 110–140 мм применяется следующая технология. После прокатки подстуживание шаров происходит до такой же температуры, как и для шаров меньшего диаметра; последующая закалка длится от 210 до 300 секунд; дальнейшие операции аналогичны с технологией производства шаров меньшего диаметра.

Разработанная технология позволяет производить шары с высокими механическими характеристиками за счет получения мартенсита по всему объему шара. Для получения такой структуры необходимо, чтобы охлаждение происходило при очень высокой скорости и прокаливаемость материала была на высоком уровне. Глубина прокаливаемости в свою очередь зависит от размера мелющего шара и химического состава стали, из которой он сделан. Сложность достижения необходимой скорости охлаждения заключается в том, что геометрическая форма шара не позволяет отдавать тепло по всему его объему, особенно плохо остывает центр шара. Для минимизации времени остывания по всему объему необходимо подобрать марку стали, легированную химическими элементами, которые позволяют увеличить прокаливаемость и достичь желаемого результата.

Однако при высокой прокаливаемости образуется другая проблема, которая заключается в высокой напряженности в центре шара, из-за чего в шаре могут образовываться трещины, что недопустимо в данном случае. Для минимизации и устранения всех негативных эффектов была взята сталь 77ХГФМН, легированная марганцем, кремнием, алюминием, хромом, никелем и молибденом, обладающая высокой прокаливаемостью. Подстуживание шаров до 770 градусов перед закалкой дает возможность получения необходимой структуры в центре и на поверхности шара. Время закалки шаров нужно регулировать, так как оно зависит от размера шара и его состава. Выбор необходимого времени закалки обеспечит требуемые значения твердости и прочности для помольных тел разного размера. Отпуск при рассчитанной температуре позволяет уменьшить внутренние напряжения и хрупкость, что дает хорошую защиту от разрушения шара.

Все опыты и проверки проводились в Нижнем Тагиле в шаропрокатном цехе АО «ЕВРАЗ НТМК» при помощи шаров диаметрами 100 и 120 мм, прокатанных на винтовом стане при температуре нагрева заготовки 950–1050°C. Закалка шаров производилась в воде с температурой 45 градусов, а отпуск проводился в отпускной печи, работающей на газовом топливе и состоящей из 7 секций. После печи шары попадали в бункеры для самоотпуска. Твердость на поверхности измерялась на специальной установке в соответствии с ГОСТ 9013-59. Объемная твердость рассчитывалась по формулам исходя из полученных опытных значений.

При разделении шаров для опыта на две полусферы трещины на срезе не выявлены, что говорит о хорошем качестве продукции. Данная технология не совпадает с существующими патентами, что показывает новизну данного метода. Разработанная технология производства позволяет получить продукцию с отличной износостойкостью и соответствует ГОСТ 7524-2015 для пятой группы твердости. При внедрении технологии за первый год использования было реализовано более 1000 тонн данной продукции [15].

Еще один метод российских исследователей в области термообработки стальных шаров заключается в подстуживании прокатанных шаров до точки, которая находится ниже фазовых превращений, после чего происходит последующий нагрев шаров до закалочной температуры. Закалка шаров производится в устройстве барабанного типа с трубами, которое обеспечивает доступ воды к шарам и имеет винтовую направляющую в трубе, что обеспечивает закручивание шаров для лучшей терморегуляции. После закалки изделие подвергается отпуску. Цель обработки шаров заключается в придании изделию повышенных механических свойств.

Недостатки существующих способов закалки заключаются в том, что охлаждение шаров производится до температуры выше точки мартенситного превращения, что сказывается на его количестве. Разработанный способ позволяет получать шары с более стабильным высоким качеством за счет изменения размера зерна и однородности структуры.

Получение необходимой структуры шара объясняется тем, что после подстуживания мелющих тел аустенит превращается в перлит по всему объему шара, а дополнительный нагрев позволяет перекристаллизовать полученную структуру еще раз. Вследствие применения такого режима образуется мелкозернистая основа шара. Во время закалки шары приобретают повышенную износостойкость, при этом мелкозернистая структура остается. Конечный отпуск шаров снижает остаточные напряжения и увеличивает их прочность. Данная технология позволяет получить износостойкие мелющие тела, которые хорошо сопротивляются ударным нагрузкам [16].

5. Заключение. Улучшение механических характеристик мелющих тел является актуальной задачей в данный момент. Химический состав и режим термообработки влияют на структуру шара, от которой зависят твердость, прочность и другие характеристики. Рассмотренные исследования позволяют сделать вывод о зависимости характеристик мелющих шаров от химического состава сплава, из которого они сделаны, и от режима термической обработки.

Современные способы исследования зависимостей – это компьютерные модели. При помощи современных программ и экспериментов можно получить модели, которые будут давать результаты, практически неотличимые от результатов физических экспериментов, что сокращает много времени при разработке необходимой технологии получения шаров.

Правильный выбор закалочной среды, температуры закалки и других параметров термообработки существенно влияет на итоговую структуру мелющих шаров. От правильного выбора содержания в стали углерода, кислорода и легирующих элементов также зависит структура и механические характеристики конечного продукта.

Анализ исследований даёт возможность оценить текущее состояние производства мелющих шаров в России и за рубежом. Представленные работы помогают понять данную область и продолжить исследования мелющих тел для получения новых результатов.

В России, СНГ и Китае производство шаров имеет большие объёмы. В этих странах количество шаропрокатных станов только растёт, что делает направление исследования шаропрокатного производства очень перспективным.

Список литературы

1. Крутилин А.Н., Бестужев Н.И., Бестужев А.Н., Каленкович Д.Н. Мелющие тела. Проблемы. Перспективы. *Литье и металлургия*. 2009;4(53):26-33.
2. Umucu Y., Deniz V. The effect of ball type in fine particles grinding on kinetic breakage parameters. *Inzynieria Mineralna*. 2015;16(1):197–203.
3. Tofil A., Pater Z. Overview of the research on roll forging process. *Advances in Science and Technology Research Journal*. 2017;11(2):72-86.

4. Кузьмин С.О. Влияние режима термоупрочнения на объемную износостойкость мелющих шаров из низколегированных марок стали. *Вестник Приазовского государственного технического университета. Технические науки*. 2011;23:117–126.
5. Рахутин М.Г., Бойко П.Ф. Пути совершенствования методов оценки основных характеристик мелющих шаров. *Уголь*. 2017;12:49–51.
6. Вавилкин Н.М., Челноков В.В. К выбору материала для производства мелющих шаров. *Известия вузов. Черная металлургия*. 2002;1:41–46.
7. Уманский А.А., Симачев А.С., Думова Л.В., Сафонов С.О. Исследования влияния химического состава рельсовой стали марки К76Ф на ударную стойкость мелющих шаров. *Металлургия: технологии, инновации, качество. Труды XXIII Международной научно-практической конференции в 2-х частях*. Новокузнецк, 323–327, 2022.
8. Уманский А.А., Байдин В.В., Симачев А.С. Исследование влияния химического состава сталей для производства мелющих шаров на их деформационные характеристики. *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия*. 2024;67(6):637–643. DOI 10.17073/0368-0797-2024-6-637-643
9. Морозов И.С., Уманский А.А., Протопопов Е.В., Симачев А.С. Совершенствование технологии выплавки и внепечной обработки специализированных конвертерных сталей для производства мелющих шаров. *Вестник Сибирского государственного индустриального университета*. 2024;1(47):127–134. DOI 10.57070/2304-4497-2024-1(47)-127-13
10. Шевченко О.И., Лановенко И.Э., Рубцов В.Ю., Опарин А.С. Подстуживание мелющих шаров перед закалкой. Моделирование и эксперимент. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение*. 2022;24(4):35–40. DOI 10.15593/2224-9877/2022.4.04
11. Папоян Р.С. Исследование процесса закалки и прокаливаемости стальных шаров марки ХГС. *Вестник Национального политехнического университета Армении. Металлургия, материаловедение, недропользование*. 2020;2:31–44.
12. Шевченко О.И., Галимьянов И.К., Шварц Д.Л., Рубцов В.Ю. Моделирование термической обработки мелющих шаров в программных пакетах JMATPRO и Deform. *Инновационные технологии в материаловедении и машиностроении (ИТММ-2023). Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием*. Пермь, 329–333, 2023.
13. Rassim Y., Sadeddine A., Bradai M.A., Aissat S., Benabbas A. Investigation on the influence of tempering on microstructure and wear properties of high alloy chromium cast iron. *Advances in Materials Science*. 2021;2(68):65–76.
14. Shi F., Xie W. A specific energy-based size reduction model for batch grinding ball mill. *Minerals*. 2015; 70(20):130–140.
15. Хлыст И.С., Кузьмиченко В.М., Громышев Е.В., Хлыст С.В., Шестаков А.Н., Иванов А.Г. и др. *Способ термической обработки стальных шаров и устройство для закалки стальных шаров*. Патент РФ, № 2766621С1. 2022.
16. Лановенко И.Э., Соколов К.Е., Шведов К.Н., Скороходов А.А., Рубцов В.Ю., Борисов С.В. и др. *Способ производства мелющих шаров из стали*. Патент РФ, № 2804745С1. 2023.

References

1. Krutilin AN, Bestuzhev NI, Bestuzhev AN, Kalenkovich DN. Melyushie tela. Grinding bodies. Problems. Prospects. *Lite i metallurgiya*. 2009;4(53):26–33.
2. Umucu Y, Deniz V. The effect of ball type in fine particles grinding on kinetic breakage parameters. *Inzynieria Mineralna*. 2015;16(1):197–203.
3. Tofil A, Pater Z. Overview of the research on roll forging process. *Advances in Science and Technology Research Journal*. 2017;11(2):72–86.
4. Kuzmin SO. Vliyanie rezhima termouprochneniya na obemnyuyu iznosostoikost melyushih sharov iz nizkolegirovannyh marok stali. [Effect of heat hardening mode on volumetric wear resistance of grinding balls made of low-alloy steel grades.] *Vestnik Priazovskogo tehnologicheskogo universiteta. Inzhenerne nauki*. 2011;23:117–126.
5. Rahutin MG, Boyko PF. Puti sovershenstvovaniya metodov ocenki osnovnyh harakteristik melyushih sharov. [Ways to improve methods for assessing the main characteristics of grinding balls.] *Ugol*. 2017;12:49–51.
6. Vavilkin NM, Chelnokov VV. K vyboru materiala dlya proizvodstva melyushih sharov. [On the selection of material for the production of grinding balls.] *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya*. 2002;1:41–46.
7. Umanskiy A.A., Simachev AS, Dumova LV, Safonov SO. Issledovaniya vliyaniya himicheskogo sostava relsovoi stali marki K76F na udarnuyu stoikost melyushih sharov. [Study of the influence of chemical composition of K76F rail steel on the impact resistance of grinding balls.] *Metallurgiya: tehnologii, innovacii, kachestvo. Trudy XXIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferencii v 2-h chastyah*. Novokuznetsk, 323–327, 2022.
8. Umanskiy AA, Baidin VV, Simachev AS. Issledovanie vliyaniya himicheskogo sostava staley dlya proizvodstva melyushih sharov na ih deformacionnye harakteristiki. [Study of the influence of chemical composition of steels for the production of grinding balls on their deformation characteristics.] *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenii. Chernaya metallurgiya*. 2024;67(6):637–643. DOI 10.17073/0368-0797-2024-6-637-643

9. Morozov IS, Umanskiy AA, Protopopov EV, Simachev AS. Sovershenstvovanie tehnologii vyplavki i vnepech- noi obrabotki specializirovannykh konverternykh stalei dlya proizvodstva melyushih sharov. [Improving the technology of smelting and extra-furnace treatment of specialized converter steels for the production of grinding balls.] Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo industrialnogo universiteta. 2024;1(47):127-134. DOI 10.57070/2304-4497-2024-1(47)-127-13
10. Shevchenko OI, Lanovenko IE, Rubtsov VYu, Oparin AS. Podstuzhivanie melyushih sharov pered zakalkoi. Modelirovanie i eksperiment. [Cooling of grinding balls before hardening. Modeling and experiment.] Vestnik Permskogo nacionalnogo issledovatel'skogo politehnicheskogo universiteta. Mashinostroenie, materialovedenie. 2022;24(4):35-40. DOI 10.15593/2224-9877/2022.4.04
11. Papoyan RS. Issledovanie processa zakalki i prokalivaemosti stalnykh sharov marki HGS. [Study of the process of hardening and hardenability of steel balls of the KhGS brand.] Vestnik Nacionalnogo politehnicheskogo universiteta Armenii. Metallurgiya, materialovedenie, nedropolzovanie. 2020;2:31-44.
12. Shevchenko OI, Galimyanov IK, Shvarts DL, Rubtsov VYu. Modelirovanie termicheskoi obrabotki melyushih sharov v programmykh paketakh JMATPRO i Deform. [Modeling of heat treatment of grinding balls in the JMATPRO and Deform software packages.] Innovacionnye tehnologii v materialovedenii i mashinostroenii (ITMM-2023). Materialy VII Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferencii s mezhdunarodnym uchastiem. Perm, 329-333, 2023.
13. Rassim Y, Sadeddine A, Bradai MA, Aissat S, Benabbas A. Investigation on the influence of tempering on microstructure and wear properties of high alloy chromium cast iron. Advances in Materials Science. 2021;2(68):65-76.
14. Shi F, Xie W. A specific energy-based size reduction model for batch grinding ball mill. Minerals. 2015;70(20): 130–140.
15. RU Patent №2766621C1, 2022.03.15. Sposob termicheskoy obrabotki stalnykh sharov i ustroystvo dlya zakalki stalnykh sharov. [Method of heat treatment of steel balls and device for hardening steel balls.] Khlyst IS., Kuzmichenko VM., Gromyshev EV., Khlyst SV., Shestakov AN., Ivanov AG., Kirichenko MN., Pshenichnikov PA.
16. RU Patent №2804745C1, 2023.10.04. Sposob proizvodstva melyushih sharov iz stali. [Ability to produce small balls from steel.] Lanovenko IE., Sokolov KE., Shvedov KN., Skorokhodov AA., Rubtsov VYu., Borisov SV., Kazakovtsev MA., Gaev DV.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.04.2025

Поступила после рецензирования 16.08.2025

Принята к публикации 19.08.2025

Received April 20, 2025

Revised August 16, 2025

Accepted August 19, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Великородный Павел Сергеевич – аспирант, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Pavel V. Velikorodnyy – Graduate Student, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

ОБЪЯВЛЕНИЯ

Мы приглашаем всех участников конференции и их коллег присылать свои статьи по материалам тезисов и докладов на конференции для опубликования в журнале «Прикладная математика & Физика» (БелГУ). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика».

Главный редактор: Васильев В. Б.

Рубрики журнала:

Математика.

Физика. Математическое моделирование.

Публикация статей в журнале бесплатная!

Статьи публикуются по итогам рецензирования.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 – 77959 от 19.02.2020.

Международный стандартный серийный номер журнала (ISSN) 2687-0959.

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

ADS

We invite all conference participants and their colleagues to send their articles based on the conference abstracts and reports for publication in the journal «Applied Mathematics & Physics» (BelSU). Until 2020, the journal was published under the title "Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics".

Editor-in-Chief: Vasiliev V. B.

Journal sections:

Mathematics.

Physics. Mathematical modeling.

Publication of articles in the journal is free!

Articles are published based on the results of peer review.

The journal is included in the List of Higher Attestation Commission (HAC) peer-reviewed scientific publications in which the main scientific results of dissertations for the academic degrees of candidate and doctor of sciences in the following groups of scientific specialties must be published:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics (Physical and Mathematical Sciences).

Сайт журнала (Journal Website): <https://maths-physics-journal.ru/index.php/journal/about>

[К содержанию](#)