

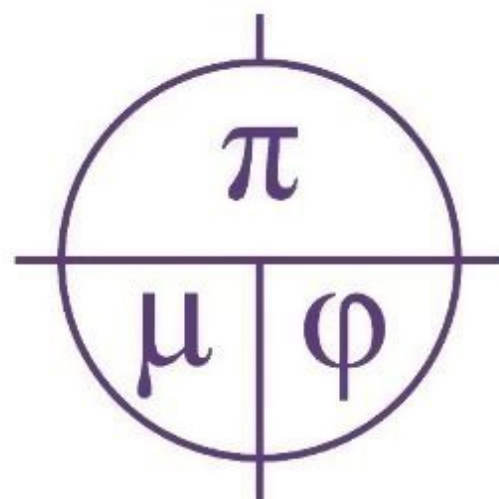


Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)

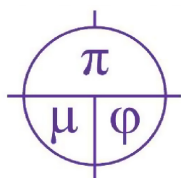
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2025. Том 57, № 4





Прикладная математика & Физика

2025. Том 57, № 4

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

А. В. Глушак, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;
Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;
Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;
Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;
Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;
Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Никуличева Т. Б., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;
Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 6,1

Дата выхода 30.12.2025.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Нестеров А. С.

О максимальных подформациях кратко Ω -расслоенных формаций конечных групп 253

Ощепкова С. Н., Спивак А. С.

Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве 266

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Толстых М. А.

Моделирование диффузии информации в социальной сети 272

Носков А. В., Мачукаев Д. Д., Киперша В. К., Пугина П. Д., Пирматова М. Д.

Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде 279

Аносов Н. В., Вязьмин В. В., Иванов О. Н., Никулин И. С., Никуличева Т. Б., Тельпова О. А.

Особенности электрических свойств композитного материала системы $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$ 290

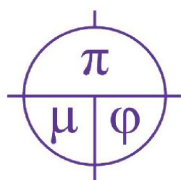
Вирченко Ю. П., Пашкова В. С.

Кластерное разложение вероятности перколяции на дереве Кэйли 298

ОБЪЯВЛЕНИЯ

Информация о журнале

306



Applied Mathematics & Physics

2025. Volume 57, No 4

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

A. V. Glushak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Nikulicheva T.B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 6,1

Date of publishing 30.12.2025.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate

EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2025

CONTENTS

MATHEMATICS

Nesterov A. S.

On Maximal Subformations of Multiple Ω -foliated Formations of Finite Groups 253

Oshchepkova S. N., Spivak A. S.

The Mean Value Theorem and the Subharmonic Functions on the Stratified Set 266

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Tolstykh M. A.

Mathematical Modeling of Information Diffusion in Social Network 272

Noskov A. V., Machukaev D. D., Kipersha V. K., Pugina P. D., Pirmatova M. D.

The Influence of Electron Beam Divergence on the CXR in a Periodic Layered Medium With Three Layers Per Period 279

Anosov N. V., Vyazmin V. V., Ivanov O. N., Nikulin I. S., Nikulicheva T. B., Telpova O. A.

Features of Electrical Properties of Composite Material of the $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$ System 290

Virchenko Yu. P., Pashkova V. S.

Cluster Expansion of the Percolation Probability on a Caley Tree 298

ADS

Journal Information

306

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 512.542
MSC 20F17
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265
EDN ABZZCW

О максимальных подформациях кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп

Нестеров А. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)
Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского,
Россия, 241036, г. Брянск, ул. Бежицкая, 14
a.s.nest@yandex.ru


Аннотация. Рассматриваются только конечные группы. Изучаются формации конечных групп, т. е. классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Ω -расслоенные формации были построены В. А. Ведерниковым в 1999 году с помощью функциональных методов. В дальнейшем концепция кратной локальности, введенная в рассмотрение А. Н. Скибой, была использована для определения кратно Ω -расслоенных формаций. В настоящей статье изучаются максимальные подформации кратно Ω -расслоенных формаций. Получены свойства функций-спутников таких подформаций, установлены достаточные условия максимальности подформации исследуемой формации, найдено свойство максимальных кратно Ω -расслоенных подформаций, характеризующее группы, в нее входящие.

Ключевые слова: конечная группа, класс групп, формация, Ω -расслоенная формация, максимальная подформация формации

Для цитирования: Нестеров А.С. О максимальных подформациях кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):253–265. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265 EDN ABZZCW

Original Research

On Maximal Subformations of Multiple Ω -foliated Formations of Finite Groups

Alexander S. Nesterov 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasilyev V. B.)
Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky,
14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia
a.s.nest@yandex.ru

Abstract. Only finite groups are considered. Formations of finite groups, i. e. classes of groups closed under homomorphic images and subdirect products, are studied. Ω -foliated formations were constructed by V. A. Vedernikov in 1999 using functional methods. Subsequently, the concept of multiple locality, introduced by A. N. Skiba, was used to define multiple Ω -foliated formations. In this paper, maximal subformations of multiple Ω -foliated formations are studied. Properties of satellite-functions of such subformations are obtained, sufficient conditions for the maximality of a subformation of the formation under study are established, and a property of maximal multiple Ω -foliated subformations that characterizes the groups included in it is found.

Keywords: Finite Group, Class of Groups, Formation, Ω -Foliated Formation, Maximal Subformation of Formation

For citation: Nesterov AS. On Maximal Subformations of Multiple Ω -foliated Formations of Finite Groups. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):253–265 (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-253-265 EDN ABZZCW

1. Введение. Рассматриваются только конечные группы. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. В. Гашюц в работе [1] для изучения формаций предложил использовать функциональные методы, с помощью которых им были построены локальные формации, нашедшие многочисленные применения в теории групп. Развивая функциональный подход В. Гашюца, Л. А. Шеметков в 1978 году ввел в рассмотрение композиционные формации [2]. В статье [3] А. Н. Скибой была разработана концепция кратной локальности для формаций, получившая в дальнейшем интенсивное развитие (см., например, [4]). Позднее А. Н. Скиба и Л. А. Шеметков построили кратно ω -локальные формации [5] и кратно \mathfrak{L} -композиционные формации [6], где ω – непустое множество простых чисел, \mathfrak{L} – непустой класс простых групп. В дальнейшем В. А. Ведерников построил серию ω -веерных формаций [7], в которую вошли ω -локальные формации как один из видов, и

серию Ω -расслоенных формаций [8], включающую Ω -композиционные формации как один из видов, где Ω – непустой класс простых групп. Изучению свойств кратно Ω -расслоенных формаций посвящены работы Ю. А. Еловиковой, М. М. Сорокиной, Е. Н. Деминой, С. П. Максакова и др. (см., например, [9]–[12]).

К актуальным вопросам современной теории формаций относятся вопросы исследования внутреннего строения формаций. При поиске ответа на данный вопрос важную роль играют максимальные подформации исследуемых формаций, их наличие, свойства, внутреннее строение и другие характеристики. В работе [12] установлено существование максимальных n -кратно Ω -расслоенных подформаций для формаций с определенными свойствами, установлена взаимосвязь между максимальным внутренним Ω -спутником 1-кратно Ω -расслоенной формации и максимальным внутренним Ω -спутником ее максимальной 1-кратно Ω -расслоенной подформации. Настоящая работа также посвящена решению ряда вопросов, связанных с исследованием максимальных кратно Ω -расслоенных подформаций кратно Ω -расслоенных формаций.

Как демонстрируют исследования формаций, построенных с помощью функциональных методов, свойства таких формаций и их подформаций во многом определяются строением и особенностями их функций-спутников. Например, в [5, теорема 4] для доказательства модулярности решетки L_n^ω всех n -кратно ω -локальных формаций использовалось строение их ω -локальных L_{n-1}^ω -значных спутников, т. е. таких ω -локальных спутников, все значения которых являются $(n-1)$ -кратно ω -локальными формациями. В [9, теорема 1] с помощью свойств минимальных $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутников исследовались решеточные свойства кратно Ω -расслоенных формаций. В теоремах 1 и 2 настоящей работы проводится исследование взаимосвязи минимальных функций-спутников кратно Ω -расслоенной формации и ее максимальной кратно Ω -расслоенной подформации.

При исследовании максимальных подформаций большую роль играют теоремы-признаки, позволяющие ответить на вопрос, является ли заданная подформация формации \mathfrak{F} максимальной в \mathfrak{F} . Например, в [4, лемма 5.1.20 (1)] установлены достаточные условия максимальности τ -замкнутой кратно локальной подформации τ -замкнутой кратно локальной формации, где τ – подгрупповой функтор. В теореме 3 установлены достаточные условия максимальности кратно Ω -расслоенной подформации кратно Ω -расслоенной формации.

При изучении подформационного строения формаций важную роль играет наличие связи между группами, принадлежащими рассматриваемой формации, и группами, которые входят в ее максимальную подформацию. Например, в [4, теорема 5.1.22] доказано, что для любой разрешимой группы G из неединичной τ -замкнутой локальной формации \mathfrak{F} фактор-группа $G/F(G)$ принадлежит пересечению всех максимальных τ -замкнутых n -кратно локальных подформаций формации \mathfrak{F} , где $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G . Развитие данного результата для кратно ω -локальных формаций получено в [5, теорема 6]. В теореме 4 настоящей работы установлено, что для любой неединичной разрешимой Ω -группы G , принадлежащей кратно Ω -расслоенной формации с направлением φ , фактор-группа $G/(\bigcap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)})$ принадлежит пересечению всех максимальных кратно Ω -расслоенных подформаций заданной формации.

2. Предварительные сведения. Используемые определения и обозначения стандартны (см., например, [2], [13]). Символ $:=$ означает равенство по определению. Запись $H \leq G$ ($H < G$, $H \triangleleft G$, $H \triangleleft\triangleleft G$, $H < \cdot G$) означает, что H является подгруппой (соответственно, собственной, нормальной, минимальной нормальной, максимальной подгруппой) группы G ; 1 – единичная группа; через $G = A \times B$ обозначается полупрямое произведение подгрупп A и B группы G , где $A \triangleleft G$; $A \wr B$ – регулярное сплетение групп A и B ; Z_n – циклическая группа порядка n ; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G ; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G ; $\text{Core}_G(H)$ – ядро подгруппы H в группе G ; $\text{Soc}(G)$ – подгруппа группы G , являющаяся произведением всех минимальных нормальных подгрупп группы G . Группа G называется *примитивной*, если в G существует максимальная подгруппа M (примитиватор) такая, что $\text{Core}_G(M) = 1$. Группа G называется *монолитической*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой (монолитом).

Классом групп называется совокупность групп, содержащая вместе с каждой своей группой и все группы, ей изоморфные. Через \mathfrak{G} обозначается класс всех конечных групп, \mathfrak{S} , \mathfrak{N} , \mathfrak{A} – класс всех разрешимых, нильпотентных, абелевых групп из \mathfrak{G} соответственно, \mathfrak{E} – класс всех единичных групп, \mathfrak{Z} – класс всех простых групп.

Класс групп \mathfrak{F} называется *замкнутым относительно*:

- *гомоморфных образов*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $G/N \in \mathfrak{F}$ (1);
- *подпрямых произведений*, если $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ следует $G/(A \cap B) \in \mathfrak{F}$ (2);
- *нормальных подгрупп*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$ следует $N \in \mathfrak{F}$ (3);
- *произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп*, если из $G = AB$, где $A \triangleleft G$, $B \triangleleft G$, $A, B \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (4).

Класс групп \mathfrak{F} , удовлетворяющий условиям (1) и (2), называется *формацией*; класс групп \mathfrak{F} , удовлетворяющий условиям (3) и (4), называется *классом Фиттинга*; \mathfrak{F} – формация Фиттинга, если \mathfrak{F} является формацией и классом Фиттинга.

Наибольшая нормальная подгруппа группы G , принадлежащая классу Фиттинга \mathfrak{F} , обозначается $G_{\mathfrak{F}}$ и называется \mathfrak{F} -радикалом группы G [2, гл. I, п. 1].

Пусть \mathfrak{X} – непустое множество групп. Тогда (\mathfrak{X}) – класс групп, порожденный множеством \mathfrak{X} , т. е. (\mathfrak{X}) – пересечение всех классов групп, содержащих \mathfrak{X} , в частности, (G) – класс всех групп, изоморфных группе G ; $\text{form}\mathfrak{X}$ – формация, порожденная множеством \mathfrak{X} ; $K(G)$ – класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы G ; $K(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} K(G)$. Через Ω обозначается непустой подкласс класса \mathfrak{F} . Группа G называется Ω -группой, если $K(G) \subseteq \Omega$ [14, с. 126].

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – классы групп. Произведением классов \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 называется класс групп $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{существует } N \triangleleft G, \text{ где } N \in \mathfrak{F}_1, G/N \in \mathfrak{F}_2)$ [13, II, (1.3)].

Для произвольного класса групп $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ будем использовать следующие обозначения:

$\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}} := (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \subseteq \mathfrak{X})$; $\mathfrak{G}_{\mathfrak{X}'} := (G \in \mathfrak{G} \mid K(G) \cap \mathfrak{X} = \emptyset)$ [14, с. 126].

Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда $(A)' = \mathfrak{F} \setminus (A)$, $\mathfrak{G}_A := \mathfrak{G}_{(A)}$, $\mathfrak{G}_{A'} := \mathfrak{G}_{(A)'}$, $\mathfrak{R}_p := \mathfrak{G}_{Z_p}$. Главный фактор H/L группы G называется *главным A -фактором*, если $K(H/L) \subseteq (A)$. Через \mathfrak{S}_{cA} обозначается класс всех групп, у которых каждый главный A -фактор централен; $O_{\Omega}(G) := G_{\mathfrak{G}_{\Omega}}$, $O_A(G) := G_{\mathfrak{G}_A}$, $O_p(G) := O_{Z_p}(G)$, $O_{A',A}(G) := G_{\mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A}$, $F_A(G) := G_{\mathfrak{S}_{cA}}$ [14, с. 126].

Замечание 1. В любой конечной группе G , имеющей главные A -факторы (здесь $A \in \mathfrak{F}$), подгруппа $F_A(G)$ совпадает с пересечением централизаторов всех главных A -факторов группы G . Если в G нет главных A -факторов, то полагают $F_A(G) = G$ [14, с. 126].

Пусть $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, где $f(\Omega') \neq \emptyset$ (здесь символ Ω' обозначает элемент из области определения функции f , не принадлежащий Ω), $h : \mathfrak{F} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$, $\varphi : \mathfrak{F} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ – функции, принимающие одинаковые значения на изоморфных группах из области определения, называемые соответственно ΩF -функцией, F -функцией, FR -функцией [14, определение 1]. Если ψ_1, ψ_2 – ΩF -функции (F -функции, FR -функции), то полагают $\psi_1 \leq \psi_2$ тогда и только тогда, когда $\psi_1(X) \subseteq \psi_2(X)$ для любого $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ (соответственно для любого $X \in \mathfrak{F}$). Если $\psi_1 \leq \psi_2$ и $\psi_1 \neq \psi_2$, то пишут $\psi_1 < \psi_2$ [14, замечание 3]. Формация

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap K(G))$$

называется Ω -расслоенной формацией с направлением φ (коротко, $\Omega\varphi$ -расслоенной формацией) с Ω -спутником f и обозначается $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$; формация

$$\mathfrak{H} = (G \in \mathfrak{G} \mid G/G_{\varphi(A)} \in h(A) \text{ для всех } A \in K(G))$$

называется *расслоенной формацией* с направлением φ (коротко, φ -расслоенной формацией) со спутником h и обозначается $\mathfrak{H} = F(h, \varphi)$ [14, определение 2].

Ω -спутник f Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} называется *внутренним*, если $f(X) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$ [8].

Ω -расслоенная (расслоенная) формация с направлением φ называется:

- Ω -свободной (свободной), если $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 – FR -функция, имеющая следующее строение $\varphi_0(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой группы $A \in \mathfrak{F}$ [14, определение 3];
- Ω -биканонической (биканонической), если $\varphi = \varphi_2$, где φ_2 – FR -функция, имеющая следующее строение $\varphi_2(A) = \mathfrak{G}_{A'}\mathfrak{G}_A$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ и $\varphi(A) = \mathfrak{G}_{A'}$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ [8, определение 2];
- Ω -композиционной (композиционной), если $\varphi = \varphi_3$, где φ_3 – FR -функция, имеющая следующее строение $\varphi_3(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ для любой $A \in \mathfrak{F}$ [14, определение 4].

Направление φ Ω -расслоенной (расслоенной) формации называется:

- r -направлением, если $\mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$ для любой группы $A \in \mathfrak{F}$ [14, определение 6];
- b_A -направлением, где $A \in \mathfrak{F}$, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ [8, определение 1];
- b -направлением, если $\varphi(A)\mathfrak{G}_A = \varphi(A)$ для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{F}$ [8, определение 1];
- $i_1 i_2 \dots i_k$ -направлением, если φ – i_j -направление для любого $j = \overline{1, k}$ [8, определение 1].

Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, φ – FR -функция. Следуя [4], всякую непустую формацию считают 0-кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной (0-кратно φ -расслоенной); при $n > 0$ $\Omega\varphi$ -расслоенную (φ -расслоенную) формацию \mathfrak{F} называют n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной (n -кратно φ -расслоенной), если \mathfrak{F} обладает хотя бы одним $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником ($\varphi_{(n-1)}$ -спутником), то есть таким Ω -спутником (спутником), все непустые значения которого являются $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенными ($(n-1)$ -кратно φ -расслоенными) формациями. $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутники ($\varphi_{(n-1)}$ -спутники) n -кратно Ω -свободной (n -кратно свободной), n -кратно Ω -биканонической (n -кратно биканонической), n -кратно Ω -композиционной (n -кратно композиционной) формаций называют соответственно $\Omega Fr_{(n-1)}$ -спутником ($Fr_{(n-1)}$ -спутником), $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником ($B_{(n-1)}$ -спутником), $\Omega C_{(n-1)}$ -спутником ($C_{(n-1)}$ -спутником). Через $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначается n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация, порожденная множеством групп \mathfrak{X} , т. е. $\Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ – пересечение всех n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных формаций, содержащих \mathfrak{X} ; в частности, $\Omega F_1(\mathfrak{X}, \varphi) := \Omega F(\mathfrak{X}, \varphi)$ и $\Omega F_0(\mathfrak{X}, \varphi) := \text{form}\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $\Omega F_n(\{G\}, \varphi)$ пишут $\Omega F_n(G, \varphi)$ [8, с. 56]. Через $\Omega B_n(\mathfrak{X})$ ($B_n(\mathfrak{X})$), $\Omega C_n(\mathfrak{X})$ ($C_n(\mathfrak{X})$), $F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обозначаются

соответственно n -кратно Ω -биканоническая (n -кратно биканоническая), n -кратно Ω -композиционная (n -кратно композиционная), n -кратно φ -расслоенная формации, порожденные множеством \mathfrak{X} .

Через $\Omega\varphi^n F$ (соответственно $\varphi^n F$) обозначим множество всех n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных (n -кратно φ -расслоенных) формаций.

Замечание 2. Множество $\Omega\varphi^n F$ является полной и модулярной решеткой для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и любого направления φ [11, теорема 4 (6)].

Следуя [15], для любых n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 полагаем:

$$\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2 := \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2 := \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \varphi).$$

Аналогично, для $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$, $i \in I$:

$$\bigwedge_{i \in I} \mathfrak{F}_i := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \quad \bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}_i := \Omega F_n(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \varphi).$$

Следуя [4], через $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_1$ обозначим множество всех n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных формаций \mathfrak{H} , удовлетворяющих условию $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Замечание 3. Поскольку $\Omega\varphi^n F$ является модулярной решеткой, то, согласно [16, теорема 13], для любых формаций $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ следующие интервалы формаций $(\mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2) /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{F}_1 \wedge_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{F}_2)$ изоморфны.

Собственная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{F} называется максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} , если для любой n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{H} , удовлетворяющей условию $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, имеет место либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, либо $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$ [12, с. 19]. Через $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ обозначается пересечение всех максимальных n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} .

Замечание 4. n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной формации \mathfrak{F} является максимальной в \mathfrak{F} тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{F} /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}$ двухэлементно.

В лемме 1 приведены используемые далее известные результаты теории групп.

Лемма 1.

(1) Пусть K и H – группы и ψ – гомоморфизм группы K в $\text{Aut}(H)$. Тогда существует группа G , содержащая подгруппы $H^* \cong H$ и $K^* \cong K$, причем $G = H^* \rtimes K^*$ [17, теорема 2.47].

(2) Пусть G – разрешимая неединичная примитивная группа и M – ее примитиватор. Тогда группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем $N = C_G(N)$ и $C = N \rtimes M$ [17, теорема 4.42 (1)].

(3) Пусть A – некоторая группа автоморфизмов p -группы G . Если A действует тождественно на каждом факторе субнормального A -допустимого ряда $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_t = 1$, $t > 0$, то A является p -группой [2, лемма 3.10].

(4) Пусть $G = A \wr B = KB$, где $K = \prod_{b \in B} A_1^b$ – база сплетения G и A_1 – первая копия A в K . Тогда $\text{Soc}(G) \subseteq \prod_{b \in B} M^b$, где $M = \text{Soc}(A_1)$ [4, лемма 3.1.9 (3)].

(5) $\Phi(G) \leq F(G)$ для любой группы G . В частности, если G является неединичной разрешимой группой, то $\Phi(G) \neq F(G)$ [17, лемма 4.21 (1)].

(6) $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ для любой группы G [17, лемма 4.21 (2)].

В дальнейшем используются следующие свойства Ω -расслоенных формаций.

Лемма 2.

(1) Пусть $A \in \mathfrak{F}$, \mathfrak{F} – Ω -расслоенная формация с b_A -направлением φ . Тогда $O_A(G/G_{\varphi(A)}) = 1$ для любой группы G [8, лемма 6 (1)].

(2) Пусть \mathfrak{F} – Ω -расслоенная формация с Ω -спутником f и br -направлением φ . Тогда $\mathfrak{N}_p f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех p таких, что $Z_p \in \Omega$ [8, следствие 3 (1)].

(3) Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если \mathfrak{X} – непустой класс групп, то формация $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ обладает единственным минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f таким, что $f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}((G/O_\Omega(G) \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi)$, $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{X})$, и $f(A) = \Omega F_{(n-1)}((G/G_{\varphi(A)} \mid G \in \mathfrak{X}), \varphi)$ для всех $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{X})$ [10, теорема 2].

(4) Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$, $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$ и f_i – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{F}_i , $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$ [10, следствие 2.1].

(5) Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{F}_i \in \Omega\varphi^n F$, $i \in I$, и $\mathfrak{F} = \bigvee_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, то $\mathfrak{F} \in \Omega\varphi^n F$ [18, следствие леммы 3].

(6) Пусть \mathfrak{F} – Ω -расслоенная формация с Ω -спутником f и r -направлением φ . Если $A \in \Omega$, $G/O_A(G) \in \mathfrak{F}$ и $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$, то $G \in \mathfrak{F}$ [8, лемма 2 (1)].

Замечание 5. Если \mathfrak{F} – n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация, то, ввиду равенства $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{F}, \varphi)$, из леммы 2 (3) следует, что минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{F} является внутренним.

Используя методы доказательств, разработанные в [4] для исследования τ -замкнутых n -кратно локальных формаций, где τ – подгрупповой функтор, предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR-функция, $\varphi_0 \leq \varphi$, G – группа, $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$, $\mathfrak{H} \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Тогда \mathfrak{H} содержится в некоторой максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформации формации \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} := \{ \mathfrak{X} \in \Omega\varphi^n F \mid \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \}$, $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – произвольная цепь в \mathcal{X} и $\mathfrak{D} := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i$. Тогда $\mathfrak{D} = \bigvee_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$ и по лемме 2 (5) $\mathfrak{D} \in \Omega\varphi^n F$, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{D}$ и найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{X}_j$ и $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{X}_j$, что противоречит выбору \mathcal{X} . Следовательно, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{D} \in \mathcal{X}$. Тогда, согласно лемме Цорна, в \mathcal{X} имеется максимальный элемент \mathfrak{M} .

Покажем, что \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} . Действительно, пусть $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{T} \subset \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{T} \in \Omega\varphi^n F$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{T}$ и поэтому $\mathfrak{T} \in \mathcal{X}$. Тогда из $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{T}$ следует, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{T}$. Таким образом, \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} , содержащая \mathfrak{H} . Лемма доказана.

3. Основные результаты.

3.1. Спутники максимальных подформаций кратно Ω -расслоенных формаций. В следующих двух теоремах проводится исследование связи между функциями-спутниками кратно Ω -расслоенной формации и ее максимальной кратно Ω -расслоенной подформации.

В теореме 1 установлены условия, при которых для подходящего простого числа p значение $f(Z_p)$ минимального спутника f кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} определяется посредством соответствующего значения минимального спутника ее максимальной кратно Ω -расслоенной подформации.

Теорема 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником m , где φ – br -направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leq \varphi_3$. Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus m(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}((\{H\} \cup m(Z_p)), \varphi).$$

Доказательство. Пусть p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus m(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$. Покажем, что $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}((\{H\} \cup m(Z_p)), \varphi)$.

Предположим, что H имеет по крайней мере две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 . Так как класс групп $f(Z_p)$ замкнут относительно гомоморфных образов, то $H/N_1, H/N_2 \in f(Z_p)$. Отсюда, в силу выбора группы H , получаем, что $H/N_1, H/N_2 \in m(Z_p)$. Тогда, ввиду замкнутости класса групп $m(Z_p)$ относительно подпрямых произведений, имеем $H \cong H/(N_1 \cap N_2) \in m(Z_p)$, что противоречит выбору H . Следовательно, группа H является монолитической. Пусть R – монолит группы H . Пусть $G_1 := Z_p \wr H$. Тогда, ввиду леммы 1 (4), $G_1 = T_1 \rtimes H$, где T_1 – база сплетения G_1 и T_1 – элементарная абелева p -группа. Так как $T_1 \neq 1$ и $T_1 \triangleleft G_1$, то существует такая подгруппа $T \triangleleft G_1$, что $T \subseteq T_1$. Пусть $G := TH$. Отметим, что $G = T \rtimes H$.

I. Установим, что $T = G_{\varphi(Z_p)} = O_{Z_p}(G)$.

Предварительно проверим, что $T_1 = C_{G_1}(T_1)$. Пусть $C := C_{G_1}(T_1)$. Так как T_1 – абелева группа, то $T_1 \subseteq C$. Допустим, что $T_1 \subsetneq C$. Рассмотрим $C \cap H := C_1$. Покажем, что $C_1 \neq 1$. Действительно, если $C_1 = 1$, то по модулярному тождеству

$$C = G_1 \cap C = T_1 H \cap C = T_1 (H \cap C) = T_1.$$

Получили противоречие. Таким образом, $C_1 \neq 1$.

Покажем, что $C_1 \triangleleft G_1$. Так как $C \triangleleft N_{G_1}(T_1) = G_1$, то $C \cap H \triangleleft H$, откуда следует, что $H \subseteq N_{G_1}(C_1)$. Далее, так как

$$C_1 = C_{G_1}(T_1) \cap H = \{x \in H \mid xt = tx, \text{ для любого } t \in T_1\},$$

то для любых $x \in C_1$, $t \in T_1$ выполняется $xt = tx$ и поэтому для любого $t \in T_1$ имеет место $tC_1 = C_1 t$. Таким образом, $T_1 \subseteq N_{G_1}(C_1)$. Тем самым установлено, что $G_1 = HT_1 \subseteq N_{G_1}(C_1)$ и, значит, $C_1 \triangleleft G_1$.

Так как $C_1 \triangleleft G_1$ и $C_1 \neq 1$, то существует такая подгруппа $L \triangleleft G_1$, что $L \subseteq C_1$. Покажем, что $L \subseteq T_1$. Действительно, так как $\text{Soc}(Z_p) = Z_p$, то, ввиду леммы 1 (4), имеем $\text{Soc}(G_1) \subseteq T_1$. Таким образом, из $L \subseteq \text{Soc}(G_1)$ получаем $L \subseteq T_1$ и, значит, L – p -группа. Поскольку $L \triangleleft G_1$ и $L \subseteq C_1 \subseteq H$, то $L \triangleleft H$. Следовательно, $L \subseteq O_p(H) = 1$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $T_1 = C_{G_1}(T_1)$.

Покажем, что $C_G(T) = T$. Предварительно установим, что $C_{G_1}(T) = T_1$. Действительно, так как T_1 – абелева группа и $T \subseteq T_1$, то справедливо включение $T_1 \subseteq C_{G_1}(T)$. По модулярному тождеству

$$C_{G_1}(T) = G_1 \cap C_{G_1}(T) = T_1 H \cap C_{G_1}(T) = T_1 (H \cap C_{G_1}(T)).$$

Докажем, что $H \cap C_{G_1}(T) = 1$. Допустим, что $H \cap C_{G_1}(T) \neq 1$. Покажем, что $R \subseteq C_{G_1}(T)$. Действительно, ввиду $C_{G_1}(T) \triangleleft N_{G_1}(T) = G_1$, имеем $H \cap C_{G_1}(T) \triangleleft H$. Так как R – монолит группы H , то $R \subseteq H \cap C_{G_1}(T)$. Получаем $C_R(T) = C_{G_1}(T) \cap R = R$. Таким образом, $C_R(T) = R$.

Рассмотрим гомоморфизм $\gamma : R \rightarrow \text{Aut}(T)$. По лемме 1 (1) существует группа $L = M \rtimes W$, где $M \cong T$, $W \cong R$, т. е. $L \cong T \rtimes R$. Далее, $R/N \cong R^\gamma$, где $N := \text{Ker}(\gamma)$ и $R^\gamma \leq \text{Aut}(T)$. Пусть $A := R^\gamma$.

Установим, что $C_{R/N}(T) = R/N$. Отметим, что

$$C_{R/N}(T) = \{rN \in R/N \mid (rN)t = t(rN) \text{ для любого } t \in T\}.$$

Проверим, что $R/N \subseteq C_{R/N}(T)$. Пусть $rN \in R/N$ и t – произвольный элемент из T . Покажем, что $(rN)t \subseteq t(rN)$. Пусть $x \in (rN)t$. Так как $C_R(T) = R$ и $N \subseteq R$, то $x = rn_1t = rtn_1 = trn_1 \in t(rN)$, где $n_1 \in N$. Поэтому $(rN)t \subseteq t(rN)$. Аналогично рассуждая, получаем $t(rN) \subseteq (rN)t$. Следовательно, $(rN)t = t(rN)$ для любого $t \in T$. Это означает, что $rN \in C_{R/N}(T)$ и поэтому $R/N \subseteq C_{R/N}(T)$. Таким образом, $C_{R/N}(T) = R/N$ и, следовательно, группа R/N действует тождественно на T . Тем самым установлено, что A – группа автоморфизмов группы T , действующая тождественно на T .

Поскольку $T^\alpha = T$ для любого $\alpha \in A$, то субнормальный ряд $1 \triangleleft T$ группы T является A -допустимым. Тогда по лемме 1 (3) A – p -группа и, значит, R/N – p -группа. Так как $R \triangleleft H$, то R является элементарной абелевой p -группой. Поэтому $R \subseteq O_p(H)$. Получили противоречие. Следовательно, $H \cap C_{G_1}(T) = 1$ и $C_{G_1}(T) = T_1$. Тогда по модулярному тождеству

$$C_G(T) = G \cap C_{G_1}(T) = G \cap T_1 = T(H \cap T_1) = T.$$

Таким образом, $C_G(T) = T$.

Покажем, что $T \triangleleft G$. Допустим, что это не так. Тогда существует такая $X \triangleleft G$, что $1 \subset X \subset T$. Так как $X \triangleleft G$, то $H \subseteq N_{G_1}(X)$. Поскольку $X \subset T \subseteq T_1$, то $T_1 = C_{G_1}(T_1) \subseteq C_{G_1}(X) \subseteq N_{G_1}(X)$. Следовательно, $G_1 = HT_1 \subseteq N_{G_1}(X)$ и $X \triangleleft G_1$. Тогда из $1 \subset X \subset T$ следует, что подгруппа T не является минимальной нормальной в G_1 . Получили противоречие. Таким образом, $T \triangleleft G$. Допустим, что существует $K \triangleleft G$ такая, что $K \neq T$. Тогда $KT \leq G$ и $KT = K \times T$. Поэтому $K \subseteq C_G(T) = T$. Получили противоречие. Следовательно, G – монолитическая группа с монолитом T .

Установим, что $F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T)$. Действительно, так как $T \triangleleft G$ и T – p -группа, то $T/1$ – главный p -фактор группы G . Тогда по замечанию 1 $F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T/1) = C_G(T)$.

Поскольку φ является b -направлением, то $\varphi(Z_p) = \varphi(Z_p)\mathfrak{M}_p$. Это означает, что $\mathfrak{M}_p \subseteq \varphi(Z_p)$ и поэтому $T \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. Так как по условию $\varphi \leq \varphi_3$, то $G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G)$.

Таким образом,

$$T \subseteq O_p(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(T) = T.$$

Следовательно, имеют место равенства

$$T = G_{\varphi(Z_p)} = O_{Z_p}(G).$$

II. Покажем, что $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$.

Предварительно установим, что $G \notin \mathfrak{M}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{M}$. Тогда, ввиду $Z_p \in \Omega \cap K(G)$, по определению Ω -расслоенной формации имеем $G/G_{\varphi(Z_p)} \in m(Z_p)$. Отсюда следует, что $H \cong G/T \in m(Z_p)$. Получили противоречие с выбором группы H . Следовательно, $G \notin \mathfrak{M}$.

Проверим, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как f – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{F} , то по замечанию 5 $f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку φ – r -направление, $Z_p \in \Omega$, $G/O_{Z_p}(G) \cong H \in f(Z_p) \subseteq \mathfrak{F}$, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong H \in f(Z_p)$, то по лемме 2 (6) имеем $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, ввиду того, что $G \notin \mathfrak{M}$, имеем $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$. Поскольку \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то из $\mathfrak{M} \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2 (3),

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi) = \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(Z_p)}\} \cup \{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \mathfrak{M}\}, \varphi).$$

Пусть $\mathfrak{M}_1 := \{M/M_{\varphi(Z_p)} \mid M \in \mathfrak{M}\}$. Тогда $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup \mathfrak{M}_1, \varphi)$. Отметим, что по лемме 2 (3) $m(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}_1, \varphi)$. Так как $\{H\} \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$, то $f(Z_p) \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi)$. С другой стороны, ввиду того, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \{H\} \cup \mathfrak{M}_1 \subseteq f(Z_p)$, следует $m(Z_p) \subseteq f(Z_p)$. Поэтому $\Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi) \subseteq f(Z_p)$. Таким образом,

$$f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p), \varphi).$$

Теорема доказана.

Поскольку φ_2 и φ_3 – br -направления и $\varphi_2 \leq \varphi_3$, то из теоремы 1 вытекают результаты для n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций.

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -биканоническая формация с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -биканоническая подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником m . Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus m(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus m(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega B_{(n-1)}(\{H\} \cup m(Z_p)).$$

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -композиционная формация с минимальным $\Omega C_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -композиционная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным

$\Omega C_{(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $Z_p \in \Omega$, $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = \Omega C_{(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p)).$$

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{F}$, из теоремы 1 и следствий 1, 2 получаем соответственно следующие результаты для n -кратно φ -расслоенных, n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций.

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно φ -расслоенная формация с минимальным $\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно φ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $\varphi_{(n-1)}$ -спутником t , где φ – br -направление, удовлетворяющее условию $\varphi \leq \varphi_3$. Если p – такое простое число, что $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = F_{(n-1)}((\{H\} \cup t(Z_p)), \varphi).$$

Следствие 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно биканоническая формация с минимальным $B_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно биканоническая подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $B_{(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = B_{(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p)).$$

Следствие 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно композиционная формация с минимальным $C_{(n-1)}$ -спутником f , \mathfrak{M} – максимальная n -кратно композиционная подформация формации \mathfrak{F} с минимальным $C_{(n-1)}$ -спутником t . Если p – такое простое число, что $f(Z_p) \setminus t(Z_p) \neq \emptyset$, H – группа минимального порядка из $f(Z_p) \setminus t(Z_p)$ и $O_p(H) = 1$, то формация $f(Z_p)$ имеет следующее строение

$$f(Z_p) = C_{(n-1)}(\{H\} \cup t(Z_p)).$$

В теореме 2 доказано, что для любой максимальной n -кратно Ω -расслоенной подформации \mathfrak{M} заданной n -кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} существует такой ее спутник, строение которого определяется строением минимального спутника формации \mathfrak{F} .

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация с минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , $\varphi_0 \leq \varphi$. Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Доказательство. Пусть \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} и t – ее минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник. Так как $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M} \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Отсюда, с учетом максимальнойности \mathfrak{M} в \mathfrak{F} , следует, что $\Omega F_n(\{G\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Покажем, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. Поскольку $\{G\} \cup \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $(K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega \subseteq K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Допустим, что $(K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega \subset K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$. Тогда существует такая группа $X \in K(\mathfrak{F}) \cap \Omega$, что $X \notin (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. Это означает, что $X \in \Omega \setminus (K(G) \cup K(\mathfrak{M}))$ и, в силу леммы 2 (3), $f(X) = \emptyset$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F} = \Omega F_n(\mathfrak{F}, \varphi)$, то, по лемме 2 (3) $f(X) = \Omega F_{(n-1)}((T/T_{\varphi(A)} \mid T \in \mathfrak{F}), \varphi) \neq \emptyset$. Получили противоречие. Тем самым установлено, что $K(\mathfrak{F}) \cap \Omega = (K(G) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$ и, значит,

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{L/O_{\Omega}(L) \mid L \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{L/L_{\varphi(A)} \mid L \in \{G\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Пусть

$$\mathfrak{M}^{\Omega} := \{M/O_{\Omega}(M) \mid M \in \mathfrak{M}\};$$

$$\mathfrak{M}^A := \begin{cases} \{M/M_{\varphi(A)} \mid M \in \mathfrak{M}\}, & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \setminus K(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Тогда

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_{\Omega}(G)\} \cup \mathfrak{M}^{\Omega}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup \mathfrak{M}^A, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Отметим, что, в силу леммы 2 (3), минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник t формации \mathfrak{M} имеет следующее строение:

$$t(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}^{\Omega}, \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\mathfrak{M}^A, \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Пусть $A \in \{\Omega'\}$. Так как $\{G/O_\Omega(G)\} \cup \mathfrak{M}^\Omega \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$, то $f(\Omega') \subseteq \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{M}^\Omega \subseteq \{G/O_\Omega(G)\} \cup \mathfrak{M}^\Omega \subseteq f(\Omega')$, то $m(\Omega') \subseteq f(\Omega')$. Поэтому $\Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi) \subseteq f(\Omega')$. Тем самым установлено, что $f(\Omega') = \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi)$.

Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. Рассуждая, как и выше, получаем равенство $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi)$. Таким образом,

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{G/O_\Omega(G)\} \cup m(\Omega'), \varphi), & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{G/G_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi), & \text{если } A \in \Omega \cap K(\mathfrak{F}); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Поскольку $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $m < f$. Поэтому найдется такой элемент $X \in \Omega \cup \{\Omega'\}$, что $m(X) \subset f(X)$. Рассмотрим случай, когда $X \in \{\Omega'\}$, т. е. $m(\Omega') \subset f(\Omega')$. По лемме 3 в $f(\Omega')$ существует такая максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M}_1 , что $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{M}_1$.

Пусть h – ΩF -функция такая, что $h(\Omega') = \mathfrak{M}_1$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$ и $\mathfrak{H} := \Omega F(h, \varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}$. Так как $h(\Omega') = \mathfrak{M}_1 \subset f(\Omega')$ и $h(A) = f(A)$ для всех $A \in \Omega$, то $h \leq f$. Тогда по определению Ω -расслоенной формации $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $h_1(\Omega') = f(\Omega')$, где h_1 – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} . С другой стороны, по лемме 2 (3) $h_1(\Omega') \subseteq h(\Omega') \subset f(\Omega')$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $m(\Omega') \subseteq \mathfrak{M}_1 = h(\Omega')$ и $m(A) \subseteq f(A) = h(A)$ для всех $A \in \Omega$, то $m \leq h$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как \mathfrak{M} – максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ и h – искомый $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{M} .

Рассмотрим случай, когда $f(\Omega') = m(\Omega')$. Тогда $X \in \Omega$ и $m(X) \subset f(X)$. Если $X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{F})$, то $m(X) = \emptyset = f(X)$, что невозможно. Поэтому $X \in \Omega \cap K(\mathfrak{F})$. По лемме 3 в $f(X)$ существует такая максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M}_2 , что $m(X) \subseteq \mathfrak{M}_2$. Пусть b – ΩF -функция такая, что $b(\Omega') = f(\Omega')$, $b(X) = \mathfrak{M}_2$ и $b(Y) = f(Y)$ для всех $Y \in \Omega \setminus (X)$ и $\mathfrak{B} := \Omega F(b, \varphi)$. Установим, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{M}_2 \subset f(X)$, то $b \leq f$. Следовательно, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (4) $b_1(X) = f(X)$, где b_1 – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{B} . С другой стороны, по лемме 2 (3) $b_1(X) \subseteq b(X) \subset f(X)$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$. Поскольку $m(\Omega') = f(\Omega') = b(\Omega')$, $m(X) \subseteq \mathfrak{M}_2 = b(X)$ и $m(Y) \subseteq f(Y) = b(Y)$ для всех $Y \in \Omega \setminus (X)$, то $m \leq b$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$. Так как \mathfrak{M} – максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация в \mathfrak{F} , то $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ и, значит, b – искомый $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{M} . Теорема доказана.

Поскольку $\varphi_0 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3$, то из теоремы 2 вытекают результаты для n -кратно Ω -свободных, n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций.

Следствие 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -свободная формация с минимальным $\Omega Fr_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -свободная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega Fr_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно Ω -свободной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -биканоническая формация с минимальным $\Omega B_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -биканоническая подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega B_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно Ω -биканонической подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 8. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -композиционная формация с минимальным $\Omega C_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно Ω -композиционная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\Omega C_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in (\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно Ω -композиционной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in ((\Omega \cap K(\mathfrak{F})) \cup \{\Omega'\}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{F}$, из теоремы 2 и следствий 6–8 получаем следующие результаты для n -кратно φ -расслоенных, n -кратно свободных, n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций соответственно.

Следствие 9. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно φ -расслоенная формация с минимальным $\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , $\varphi_0 \leq \varphi$. Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно φ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $\varphi_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно φ -расслоенной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 10. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно свободная формация с минимальным $Fr_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно свободная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $Fr_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно свободной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 11. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно биканоническая формация с минимальным $B_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно биканоническая подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой

$B_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно биканонической подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

Следствие 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно композиционная формация с минимальным $C_{(n-1)}$ -спутником f . Если \mathfrak{M} – максимальная n -кратно композиционная подформация формации \mathfrak{F} , то \mathfrak{M} имеет такой $C_{(n-1)}$ -спутник h , что для некоторого $A \in K(\mathfrak{F})$ формация $h(A)$ является максимальной $(n-1)$ -кратно композиционной подформацией формации $f(A)$, а для всех $B \in K(\mathfrak{F}) \setminus (A)$ имеет место равенство $h(B) = f(B)$.

3.2. Достаточные условия максимальностикратно Ω -расслоенной подформациикратно Ω -расслоенной формации

Теорема 3. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно Ω -расслоенные формации с направлением φ и минимальными $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутниками f и m соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M})$, $\varphi - b_{A\Gamma}$ -направление, $f(\Omega') = m(\Omega')$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A), \varphi)$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} .

Доказательство. Пусть $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M})$, $\varphi - b_{A\Gamma}$ -направление, $f(\Omega') = m(\Omega')$, $f(B) = m(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, $m(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus m(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется $f(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{G\} \cup m(A), \varphi)$. Тогда $m < f$ и, значит, по определению Ω -расслоенной формации $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 2 (3) $m = f$, что невозможно. Следовательно, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{L} – произвольная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная формация, причем $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$, то существует группа $H \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{M}$. Так как $H \notin \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} = \Omega F_n(\mathfrak{M}, \varphi) \subset \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi) \subseteq \mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{H} := \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$, h – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} , l – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{L} .

Ввиду того, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$, по лемме 2 (4) имеем $l \leq f$. Так как $H \in \mathfrak{L}$, то по определению Ω -расслоенной формации $H/H_{\varphi(X)} \in l(X) \subseteq f(X)$ для любого $X \in \Omega \cap K(H)$. Если $A \in K(H)$, то $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Если $A \notin K(H)$, то $H \in \mathfrak{G}_{A'}$. Поскольку $\varphi - r$ -направление, то $H \in \mathfrak{G}_{A'} \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$. Поэтому $H = H_{\varphi(A)}$. Так как $A \in K(\mathfrak{L}) \cap \Omega$, то $l(A) \neq \emptyset$. Следовательно, $H/H_{\varphi(A)} = 1 \in l(A) \subseteq f(A)$, т. е. $H/H_{\varphi(A)} \in f(A)$. Покажем, что $H/H_{\varphi(A)} \notin m(A)$. Предположим, что $H/H_{\varphi(A)} \in m(A)$. Поскольку для любого $B \in (\Omega \cap K(H)) \setminus (A)$ справедливо $H/H_{\varphi(B)} \in f(B) = m(B)$ и $H/O_\Omega(H) \in l(\Omega') \subseteq f(\Omega') = m(\Omega')$, то по определению Ω -расслоенной формации $H \in \mathfrak{M}$, что невозможно. Следовательно, $H/H_{\varphi(A)} \notin m(A)$ и, значит, $H/H_{\varphi(A)} \in f(A) \setminus m(A)$.

Поскольку $\varphi - b_A$ -направление, то по лемме 2 (1) $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = 1$. Так как $H/H_{\varphi(A)} \in f(A) \setminus m(A)$ и $O_A(H/H_{\varphi(A)}) = 1$, то по условию теоремы справедливо равенство

$$f(A) = \Omega F_{n-1}(\{H/H_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi).$$

Покажем, что $l(A) = f(A)$. Так как по лемме 2 (4) $m < h \leq l \leq f$, с учетом равенств $m(\Omega') = f(\Omega')$ и $m(B) = f(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, имеет место

$$\begin{aligned} m(\Omega') &= h(\Omega') = l(\Omega') = f(\Omega'); \\ m(B) &= h(B) = l(B) = f(B) \text{ для любого } B \in \Omega \setminus (A); \\ m(A) &\subset h(A) \subseteq l(A) \subseteq f(A). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\mathfrak{H}, \varphi)$ и $\mathfrak{H} = \Omega F_n(\{H\} \cup \mathfrak{M}, \varphi)$, то, в силу леммы 2 (3), справедливо равенство $K(\mathfrak{H}) \cap \Omega = (K(H) \cup K(\mathfrak{M})) \cap \Omega$. По лемме 2 (3) минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} имеет следующее строение:

$$h(X) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{L/O_\Omega(L) \mid L \in \{H\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } X \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{L/L_{\varphi(X)} \mid L \in \{H\} \cup \mathfrak{M}\}, \varphi), & \text{если } X \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}); \\ \emptyset, & \text{если } X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Рассуждая как и при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, что

$$h(X) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(\{H/O_\Omega(H)\} \cup m(\Omega'), \varphi), & \text{если } X \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(\{H/H_{\varphi(X)}\} \cup m(X), \varphi), & \text{если } X \in \Omega \cap K(\mathfrak{H}); \\ \emptyset, & \text{если } X \in \Omega \setminus K(\mathfrak{H}). \end{cases}$$

Если $A \notin K(\mathfrak{H})$, то $h(A) = \emptyset$ и, значит, $m(A) = \emptyset = h(A)$. Получили противоречие. Следовательно, $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{H})$ и поэтому $h(A) = \Omega F_{(n-1)}(\{H/H_{\varphi(A)}\} \cup m(A), \varphi) = f(A)$. Это, ввиду включения $h(A) \subseteq l(A) \subseteq f(A)$, означает равенство $l(A) = f(A)$. Таким образом, $l = f$ и по определению Ω -расслоенной формации $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что \mathfrak{M} – максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация формации \mathfrak{F} . Теорема доказана.

Поскольку φ_2 и φ_3 являются b_A -направлениями для любой абелевой группы $A \in \mathfrak{A}$, то из теоремы 3 вытекают результаты для n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций.

Следствие 13. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно Ω -биканонические формации с минимальными $\Omega B_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(\Omega') = t(\Omega')$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in (\Omega \cap \mathfrak{A}) \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega B_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно Ω -биканонической подформацией формации \mathfrak{F} .

Следствие 14. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно Ω -композиционные формации с минимальными $\Omega C_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in \Omega \cap K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(\Omega') = t(\Omega')$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in \Omega \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = \Omega C_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно Ω -композиционной подформацией формации \mathfrak{F} .

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{S}$, из теоремы 3 и следствий 13, 14 получаем результаты для n -кратно φ -расслоенных, n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций.

Следствие 15. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно расслоенные формации с направлением φ и минимальными $\varphi_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M})$, φ – b_{AR} -направление, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in \mathfrak{S} \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = F_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A), \varphi)$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно φ -расслоенной подформацией формации \mathfrak{F} .

Следствие 16. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно биканонические формации с минимальными $B_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}) \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = B_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно биканонической подформацией формации \mathfrak{F} .

Следствие 17. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – n -кратно композиционные формации с минимальными $C_{(n-1)}$ -спутниками f и t соответственно. Если $A \in K(\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{A}$, $f(B) = t(B)$ для любого $B \in (\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}) \setminus (A)$, $t(A) \subset f(A)$, причем для любой группы $G \in f(A) \setminus t(A)$ с $O_A(G) = 1$ выполняется равенство $f(A) = C_{(n-1)}(\{G\} \cup t(A))$, то \mathfrak{M} является максимальной n -кратно композиционной подформацией формации \mathfrak{F} .

3.3. О группах, входящих в максимальные подформации кратно Ω -расслоенных формаций. Установим, что для любой неединичной разрешимой Ω -группы G , принадлежащей n -кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} с направлением φ , фактор-группа $G/(\bigcap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)})$ принадлежит пересечению всех максимальных n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенных подформаций формации \mathfrak{F} . Используя методы доказательств, разработанные в [4] для исследования τ -замкнутых n -кратно локальных формаций, где τ – подгрупповой функтор, предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. **Доказательство.** Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2 \in \Omega\varphi^n F$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Предположим, что $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \not\subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. Тогда в \mathfrak{F}_2 существует такая максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} , что $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \not\subseteq \mathfrak{M}$. Ввиду включения $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \mathfrak{F}_1$, имеем $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{M}$. Это означает, что $\mathfrak{M} \subset \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}, \varphi)$ и, следовательно,

$$\mathfrak{F}_2 = \Omega F_n(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}, \varphi) = \mathfrak{F}_1 \vee_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}.$$

Так как, ввиду замечания 3, $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M} \cong \mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$ и по замечанию 4 множество $\mathfrak{F}_2 /_{\Omega\varphi^n F} \mathfrak{M}$ имеет лишь два элемента \mathfrak{M} и \mathfrak{F}_2 , то множество $\mathfrak{F}_1 /_{\Omega\varphi^n F} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$ также является двухэлементным. Тогда по замечанию 4 формация $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}$ является максимальной n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенной подформацией в \mathfrak{F}_1 . Поэтому $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_2)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$, φ – FR -функция, являющаяся br -направлением Ω -расслоенной формации, $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая Ω -группа. Тогда $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G, \varphi))$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка и $\mathfrak{F} := \Omega F_n(G, \varphi)$. Так как $G \neq 1$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ и, значит, $1 \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Тогда из $G/F(G) \notin \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ следует, что $F(G) \neq G$ и, в частности, $\Phi(G) \neq G$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Согласно лемме 1 (6), имеем

$$G/F(G) \cong (G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) = (G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)).$$

Поскольку $G/\Phi(G)$ – неединичная разрешимая Ω -группа и $|G/\Phi(G)| < |G|$, то, в силу выбора группы G , справедливо

$$(G/\Phi(G))/F(G/\Phi(G)) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi)).$$

Из $G \in \mathfrak{F}$ следует, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как φ – r -направление, то $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда по лемме 4 получаем

$$\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(G/\Phi(G), \varphi)) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}).$$

Следовательно, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$, что противоречит выбору группы G . Тем самым установлено, что $\Phi(G) = 1$ и, ввиду леммы 1 (5), $F(G) \neq 1$.

I. Рассмотрим случай, когда G – примитивная группа. Пусть M – примитиватор группы G . Согласно лемме 1 (2), $G = P \rtimes M$ – монолитическая группа с абелевым монолитом $P = C_G(P)$. Пусть $K(P) = (Z_p)$. Так как φ – br -направление и $\varphi \leq \varphi_3$, то

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_{(Z_p)} \mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{(Z_p)} \varphi(Z_p)) \mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p) \subseteq \varphi_3(Z_p).$$

Поэтому $F(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)} \subseteq G_{\varphi_3(Z_p)} = F_{Z_p}(G) \subseteq C_G(P) = P$ и, следовательно, $P = F(G) = G_{\varphi(Z_p)}$.

Поскольку $\mathfrak{F} = \Omega F_n(G, \varphi)$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, то по лемме 2 (3) формация \mathfrak{F} обладает единственным минимальным $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутником f , имеющим, с учетом $K(G) \subseteq \Omega$, следующее строение:

$$f(A) = \begin{cases} \Omega F_{(n-1)}(G/O_{\Omega}(G), \varphi) = \mathfrak{E}, & \text{если } A \in \{\Omega'\}; \\ \Omega F_{(n-1)}(G/G_{\varphi(A)}, \varphi), & \text{если } A \in K(G); \\ \emptyset, & \text{если } A \in \Omega \setminus K(G), \end{cases}$$

в частности, $f(Z_p) = \Omega F_{(n-1)}(G/P, \varphi) = \Omega F_{(n-1)}(M, \varphi)$.

Так как $G/F(G) \notin \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$, то в \mathfrak{F} существует такая максимальная n -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{H} , что $G/F(G) \notin \mathfrak{H}$. Пусть h – минимальный $\Omega\varphi_{(n-1)}$ -спутник формации \mathfrak{H} . Ввиду леммы 2 (4), $h < f$. Если $h(\Omega') \subset f(\Omega')$, то из $f(\Omega') = \mathfrak{E}$ получаем $h(\Omega') = \emptyset$, что противоречит определению Ω -расслоенной формации. Следовательно, $h(\Omega') = f(\Omega')$. Если $h(Z_p) = f(Z_p)$, то $G/F(G) = G/G_{\varphi(Z_p)} \in h(Z_p) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $h(Z_p) \subset f(Z_p)$ и $h(A) \subseteq f(A)$ для любой группы $A \in \Omega \setminus (Z_p)$. По лемме 3 в $f(Z_p)$ существует такая максимальная $(n-1)$ -кратно $\Omega\varphi$ -расслоенная подформация \mathfrak{M} , что $h(Z_p) \subseteq \mathfrak{M}$. Отметим также, что $\Phi_{\Omega\varphi_{(n-1)} F}(f(Z_p)) \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть m – такая ΩF -функция, что $m(\Omega') = f(\Omega')$, $m(Z_p) = \mathfrak{M}$, $m(A) = f(A)$ для любой группы $A \in \Omega \setminus (Z_p)$, и \mathfrak{M}_1 – $\Omega\varphi$ -расслоенная формация с Ω -спутником m . В силу задания функции m , имеем $\mathfrak{M}_1 \in \Omega\varphi^n F$. Покажем, что $M \in \mathfrak{M}_1$. Поскольку $|M| < |G|$ и M – неединичная разрешимая Ω -группа, то, ввиду выбора группы G , справедливо

$$M/F(M) \in \Phi_{\Omega\varphi_{(n-1)} F}(\Omega F_{(n-1)}(M, \varphi)) = \Phi_{\Omega\varphi_{(n-1)} F}(f(Z_p)) \subseteq \mathfrak{M} = m(Z_p).$$

Так как $F(M) \subseteq M_{\varphi(Z_p)}$, то $M/M_{\varphi(Z_p)} \in m(Z_p)$. Поскольку $M \in \mathfrak{F}$, то $M/O_{\Omega}(M) \in f(\Omega') = m(\Omega')$ и $M/M_{\varphi(A)} \in f(A) = m(A)$ для любой группы $A \in K(M) \setminus (Z_p)$. Это, по определению Ω -расслоенной формации, означает, что $M \in \mathfrak{M}_1$. Так как

$$\begin{aligned} h(\Omega') &= m(\Omega') = f(\Omega'); \\ h(Z_p) &\subseteq m(Z_p) \subset f(Z_p); \\ h(A) &\subseteq m(A) = f(A) \text{ для любой группы } A \in \Omega \setminus (Z_p), \end{aligned}$$

то, $h \leq m < f$ и, согласно определению Ω -расслоенной формации, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$, то по лемме 2 (3) $f \leq m$ и, значит, $f(Z_p) \subseteq m(Z_p)$, что противоречит включению $m(Z_p) \subset f(Z_p)$. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$ и, в силу максимальности \mathfrak{H} в \mathfrak{F} , справедливо равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1$. Тогда $G/F(G) \cong M \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Таким образом, в случае, когда G – примитивная группа, мы получаем противоречие с выбором группы G .

II. Пусть теперь группа G не является примитивной, $\{M_1, \dots, M_k\}$ – совокупность всех максимальных подгрупп группы G , $T_i := G/\text{Core}_G(M_i)$, $i = 1, k$, $T := T_1 \times T_2 \times \dots \times T_k$ и $\mathfrak{T} := \Omega F_n(T, \varphi)$. Тогда $T \in \mathfrak{F}$ и поэтому $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{F}$. С другой стороны, так как $G \cong G/\Phi(G) = G/(\cap_{i=1, k} \text{Core}_G(M_i))$ и класс \mathfrak{T} замкнут относительно подпрямых произведений, то $G \in \mathfrak{T}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{T}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{T}$. Поскольку T_i – неединичная разрешимая Ω -группа и $|T_i| < |G|$, то, в силу выбора группы G , используя лемму 4, получаем

$$T_i/F(T_i) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\Omega F_n(T_i, \varphi)) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{T}) = \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}), \quad i = \overline{1, k}.$$

Ввиду того, что $T_i F(T)/F(T) \cong T_i/T_i \cap F(T) = T_i/F(T_i)$, имеем

$$\begin{aligned} T/F(T) &= (T_1 \times \dots \times T_k)/F(T) = T_1 F(T)/F(T) \times \dots \times T_k F(T)/F(T) \cong \\ &\cong T_1/F(T_1) \times \dots \times T_k/F(T_k) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Так как группа G входит подпрямо в T , то $GF(T)/F(T)$ входит подпрямо в $T/F(T)$ и, значит, $GF(T)/F(T) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Тогда из $GF(T)/F(T) \cong G/G \cap F(T)$ следует

$$G/F(G) \cong (G/(G \cap F(T)))/(F(G)/(G \cap F(T))) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}).$$

Получили противоречие с выбором группы G . Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -расслоенная формация с br -направлением φ , $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая Ω -группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in \Omega$. Поскольку $G \neq 1$, то $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}$ и поэтому $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Покажем, что $G/G_{\varphi(A)} \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Рассмотрим случай, когда $A \notin K(G)$. Так как φ – r -направление, то

$$G \in \mathfrak{G}_{A'} \subseteq \mathfrak{G}_{A'}\varphi(A) = \varphi(A)$$

и, значит, $G = G_{\varphi(A)}$. Следовательно, в этом случае $G/G_{\varphi(A)} = 1 \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Пусть $A \in K(G)$ и $\mathfrak{F}_1 := \Omega F_n(G, \varphi)$. Так как $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$, то, в силу леммы 4, $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 5, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F}_1)$ и, значит, $G/F(G) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Ввиду разрешимости группы G , $A \cong Z_p$ для некоторого простого числа p . Так как φ является br -направлением, то

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{N}_p \subseteq (\mathfrak{G}_{(Z_p)'}\varphi(Z_p))\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p)\mathfrak{N}_p = \varphi(Z_p).$$

Это означает, что $F(G) \subseteq G_{\varphi(Z_p)}$. Следовательно, $G/G_{\varphi(Z_p)} \cong (G/F(G))/(G_{\varphi(Z_p)}/F(G)) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Поскольку $\Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ является классом групп, замкнутым относительно подпрямых произведений, то из $G/G_{\varphi(A)} \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$ для любой группы $A \in \Omega$ следует, что $G/(\cap_{A \in \Omega} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\Omega\varphi^n F}(\mathfrak{F})$. Теорема доказана.

Из теоремы 4 непосредственно вытекают результаты для n -кратно Ω -биканонических и n -кратно Ω -композиционных формаций. Полагаем $\Phi_{\Omega\varphi_2^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{\Omega B^n F}(\mathfrak{F})$, $\Phi_{\Omega\varphi_3^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{\Omega C^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 18. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -биканоническая формация и G – неединичная разрешимая Ω -группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A \in \Omega} O_{A', A}(G)) \in \Phi_{\Omega B^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 19. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно Ω -композиционная формация и G – неединичная разрешимая Ω -группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A \in \Omega} F_A(G)) \in \Phi_{\Omega C^n F}(\mathfrak{F})$.

В случае, когда $\Omega = \mathfrak{Z}$, из теоремы 4 получаем результаты для n -кратно расслоенных формаций, и в частности, для n -кратно биканонических и n -кратно композиционных формаций. Полагаем $\Phi_{\varphi_2^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{B^n F}(\mathfrak{F})$, $\Phi_{\varphi_3^n F}(\mathfrak{F}) := \Phi_{C^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 20. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно расслоенная формация с br -направлением φ , $\varphi \leq \varphi_3$, G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A \in \mathfrak{Z}} G_{\varphi(A)}) \in \Phi_{\varphi^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 21. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно биканоническая формация и G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A \in \mathfrak{Z}} O_{A', A}(G)) \in \Phi_{B^n F}(\mathfrak{F})$.

Следствие 22. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{F} – n -кратно композиционная формация и G – неединичная разрешимая группа. Если $G \in \mathfrak{F}$, то $G/(\cap_{A \in \mathfrak{Z}} F_A(G)) \in \Phi_{C^n F}(\mathfrak{F})$.

4. Заключение. В монографии А. Н. Скибы [4] изучались τ -замкнутые n -кратно локальные формации (здесь τ – подгрупповой функтор), в частности, была исследована взаимосвязь между минимальными экранами (спутниками) таких формаций и их максимальных подформаций [4, лемма 5.1.20 (2)], установлены достаточные условия максимальности подформаций τ -замкнутых n -кратно локальных формаций [4, лемма 5.1.20 (1)]. В теоремах 1–3 получено развитие данных результатов для Ω -расслоенных формаций. Теорема 4 является аналогом результата Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [5, теорема 6] о формации $\Phi_n^\omega(\mathfrak{F})$ (здесь $\Phi_n^\omega(\mathfrak{F})$ – пересечение всех максимальных n -кратно ω -локальных подформаций n -кратно ω -локальной формации \mathfrak{F}) для случая n -кратно Ω -расслоенной формации \mathfrak{F} .

Список литературы

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Math. Z.* 1963;80(4):300–305.
2. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука; 1978. 272 с.
3. Скиба А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины. *Вопросы алгебры.* 1987;3:21–31.
4. Скиба А.Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука; 1997.
5. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Математические труды.* 2000;10(2):112–141.
6. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Кратно \mathfrak{L} -композиционные формации конечных групп. *Украинский математический журнал.* 2000;52(6):783–797.
7. Ведерников В.А. О новых типах ω -всерных формаций конечных групп. *Український математический конгрес. – 2001, Праці, Київ, Секція 1.* 2002;36–45.
8. Ведерников В.А. Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2001;7(2):55–71.
9. Еловикина (Скачкова) Ю.А. Решетки Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика.* 2002;14(2):85–94.
10. Сорокина М.М. О минимальных спутниках кратно Ω -расслоенных классов Фиттинга и формаций конечных групп. *Сборник научных трудов: Брянскому государственному педагогическому университету имени академика И.Г. Петровского – 70 лет.* 2000;199–203.

11. Ведерников В.А., Демина Е.Н. Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп. *Сибирский математический журнал*. 2010;51(5):789–804.
12. Сорокина М.М., Макасов С.П. О максимальных подформациях n -кратно Ω -расслоенных формаций конечных групп. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021;21(1):15–25.
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter: Berlin – New York; 1992. 891 p.
14. Ведерников В.А., Сорокина М.М. Ω -Расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика*. 2001;11(5):507–527.
15. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука; 1989. 252 с.
16. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука; 1984. 568 с.
17. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учебное пособие. Мн.: Выш. шк.; 2006. 207 с.
18. Еловицова Ю.А. Алгебраичность решеток Ω -расслоенных формаций. *Вестник Брянского государственного университета: Точные и естественные науки*. 2013;4:13–16.

References

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. *Math. Z.* 1963;80(4):300–305.
2. Shemetkov LA. Formations of finite groups. Nauka: Moscow; 1978. 272 p (In Russ.).
3. Skiba AN. Characterization of finite solvable groups of given nilpotent length. *Algebra issues*. 1987;3:21–31 (In Russ.).
4. Skiba AN. Algebra of formations. Minsk: Belarusskay Nauka; 1997 (In Russ.).
5. Shemetkov LA., Skiba AN. Multiple ω -local formations and Fitting classes of finite groups. *Siberian Advances in Mathematics*. 2000;10(2):112–141.
6. Skiba AN., Shemetkov LA. Multiple \mathfrak{L} -composition formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2000;52(6):783–797 (In Russ.).
7. Vedernikov VA. On new types of ω -fibered formations of finite groups. *Ukrainian Mathematical Congress – 2001. Section 1. Kiev: Inst. Matematiki NAN Ukrainy*. 2002;36–45 (In Russ.).
8. Vedernikov VA. Maximal satellites of Ω -foliated formations and Fitting classes. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2001;7(2):55–71 (In Russ.).
9. Elovikova (Skachkova) YA. Lattices of Ω -foliated formations. *Discrete Mathematics*. 2002;14(2):85–94.
10. Sorokina MM. On minimal satellites of multiply Ω -foliated Fitting classes and formations of finite groups. *Sbornik of scientific papers: Bryansk State Pedagogical University named after academician I.G. Petrovsky – 70 years*. 2000;199–203. (In Russ.).
11. Vedernikov V.A., Demina E.N. Ω -foliated formations of multioperator T -groups. *Siberian Mathematical Journal*. 2010;51(5):789–804.
12. Sorokina MM., Maksakov SP. On maximal subformations of n -multiple Ω -foliated formations of finite groups. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2021;21(1):15–25 (In Russ.).
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Walter de Gruyter: Berlin – New York; 1992. 891 p.
14. Vedernikov VA., Sorokina MM. Ω -Foliated formations and Fitting classes of finite groups. *Discrete Mathematics and Applications*. 2001;11(5):507–527. (In Russ.).
15. Shemetkov LA., Skiba AN. Formations of algebraic systems. M.: Science; 1989. 252 p. (In Russ.).
16. Birkhoff G. Lattice Theory. M.: Science; 1984. 568 p. (In Russ.).
17. Monakhov VS. Introduction to the theory of finite groups and classes of finite groups: textbook. Mn.: Vyshaya shkola; 2006. 207 p (In Russ.).
18. Elovikova YA. The Algebraicity of lattices of Ω -foliated formations. *The Bryansk State University Herald: Exact and Natural sciences*. 2013;4:13–16 (In Russ.).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.09.2025

Поступила после рецензирования 11.11.2025

Принята к публикации 19.11.2025

Received September 29, 2025

Revised November 11, 2025

Accepted November 19, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Нестеров Александр Сергеевич – преподаватель кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского, г. Брянск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Alexander S. Nesterov – Lecturer of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia

[К содержанию](#)

Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве

Ощепкова С. Н.¹ , Спивак А. С.² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Пенкиным О. М.)

¹ Воронежский государственный университет инженерных технологий,
Россия, 394036, г. Воронеж, пр. Революции, 19
osonia@mail.ru

² Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
alexs1nger@yandex.ru

Аннотация. В данной работе приводится аналог теоремы о среднем для субгармонических функций в следующей ситуации: вместо области пространства \mathbb{R}^d рассматривается стратифицированное множество Ω , а вместо классического лапласиана – «стратифицированный». Ранее похожий результат был получен для так называемого мягкого лапласиана, максимально приближенного по своим свойствам к классическому. Здесь же мы приводим результат – аналог теоремы о среднем, – имеющий место для всех стратифицированных лапласианов. Теорема о среднем играет важную роль при обсуждении качественных свойств субгармонических функций на стратифицированных множествах и в вопросах разрешимости на них задачи Дирихле.

Ключевые слова: стратифицированное множество, стратифицированная мера, лапласиан, теорема о среднем

Для цитирования: Ощепкова С.Н., Спивак А.С. Теорема о среднем и субгармонические функции на стратифицированном множестве. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):266–271.

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-266-271 EDN AXHDEU

Original Research

The Mean Value Theorem and the Subharmonic Functions on the Stratified Set

Sofia N. Oshchepkova¹ , Aleksandra S. Spivak² 

(Article submitted by a member of the editorial board Penkin O. M.)

¹ Voronezh State University of Engineering Technologies,
19 Revolutsii Av., Belgorod 394036, Russia
osonia@mail.ru

² Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh 394018, Russia
alexs1nger@yandex.ru

Abstract. In this paper, an analogue of the mean value theorem for subharmonic functions is presented in the following setting: instead of a domain in \mathbb{R}^d , a stratified set Ω is considered, and instead of the classical Laplacian, a "stratified" one is used. Previously, a similar result was obtained for the so-called soft Laplacian, whose properties are as close as possible to the classical one. Here, we present a result—an analogue of the mean value theorem—that holds for all stratified Laplacians. The mean value theorem plays an important role in discussing the qualitative properties of subharmonic functions on stratified sets and in addressing the solvability of the Dirichlet problem on them.

Keywords: Stratified Set, Stratified Measure, Laplacian, Mean Value Theorem

For citation: Oshchepkova SN., Spivak AS. The Mean Value Theorem and the Subharmonic Functions on the Stratified Set. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):266–271 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-266-271 EDN AXHDEU

1. Основные понятия и вспомогательные факты.

1.1. Стратифицированное множество. Общее определение стратифицированного множества, лапласиана на нем и т. п. можно найти в [1] (см. также [2], [3]). В данной работе мы ограничиваемся случаем, когда все страты, кроме граничных (подробности ниже), являются плоскими, что упрощает описание основных понятий. Плоской стратой σ_{kj} мы называем открытое связное подмножество k -мерного линейного многообразия L пространства \mathbb{R}^d в топологии, индуцированной на L из \mathbb{R}^d .

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ называется стратифицированным, если оно связно и состоит из конечного числа страт σ_{kj} различных размерностей (здесь k – размерность, а j служит для автономной нумерации страт фиксированной размерности), имеющих компактные замыкания и примыкающих друг к другу в соответствии со следующими требованиями:

- пересечение замыканий $\bar{\sigma}_{kj} \cap \bar{\sigma}_{mi}$ различных страт σ_{kj}, σ_{mi} либо пусто, либо состоит из некоторых страт;
- граница $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ либо пуста (так будет, например, при $k = 0$), либо состоит из страт.

Строго говоря, стратифицированное множество – это тройка $(\Omega, \mathcal{S}, \varphi)$, в которой \mathcal{S} – фиксированный набор страт, представляющих множество Ω , а φ – отображение, отождествляющее границы некоторых страт (способ склейки Ω из элементов набора \mathcal{S}), но мы будем называть стратифицированным множеством само Ω , считая \mathcal{S} и φ фиксированными.

1.2. Стратифицированная мера. Пусть $\omega \subset \Omega$ таково, что каждое пересечение $\omega \cap \sigma_{kj}$ измеримо по Лебегу. Нетрудно показать, что семейство таких подмножеств образует σ -алгебру Σ в Ω . Мету любого множества $\omega \in \Sigma$ определим формулой

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{kj}),$$

где μ_k – обычная k -мерная мера Лебега. Определенную таким образом меру будем называть стратифицированной. Легко проверить, что она удовлетворяет стандартным аксиомам меры.

Понятие измеримой функции определяется стандартно. Можно показать, что интеграл Лебега измеримой функции f по измеримому множеству $\omega \subset \Omega$ сводится к сумме обычных интегралов Лебега по фрагментам $\omega \cap \sigma_{kj}$. В частности, при $\omega = \Omega$ имеем

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{kj}} \int_{\sigma_{kj}} f d\mu_k.$$

1.3. Дивергенция и лапласиан на стратифицированном множестве. На сегодняшний день наиболее распространёнными методами определения гармонических функций на сложных множествах, как правило метрических пространствах с мерой, согласованной с метрикой, являются следующие:

- Гармоническими называют функции, удовлетворяющие равенству среднего:

$$u(X) = \frac{1}{\mu(B_r(X))} \int_{B_r(X)} u d\mu.$$

- Гармоническими называют функции, минимизирующие специальным образом определенные интегралы Дирихле.

Первый подход реализован, например, в [4]. Он хорошо приспособлен к изучению качественных свойств гармонических функций, но с ними не всегда можно связать какой-нибудь дифференциальный оператор, похожий на «настоящий» лапласиан.

Второй подход, реализованный, например, в [5], на наш взгляд, является более естественным, но изучение качественных свойств соответствующих гармонических функций оказывается весьма сложным.

В данной работе мы реализуем второй подход, но вместо абстрактного метрического пространства со специальной мерой, удовлетворяющей принципу удвоения, рассматриваем стратифицированные множества, наделенные стратифицированной мерой. Это открывает возможность построения полноценной качественной теории соответствующих гармонических функций; примеры таковой можно найти в [6, 7].

Начнём с определения дивергенции касательных векторных полей.

Всюду далее Ω считается представленным в виде дизъюнктного объединения $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, где Ω_0 – открытое, связанное подмножество Ω , составленное из его страт и плотное в Ω , т. е. $\bar{\Omega}_0 = \Omega$. Все только что упомянутые топологические понятия относятся к топологии Ω , индуцируемой на него стандартной топологией \mathbb{R}^d . Множество $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ оказывается при этом топологической границей Ω_0 . Формально допускается случай, когда $\Omega_0 = \Omega$, $\partial\Omega_0 = \emptyset$, но обычно предполагается $\Omega_0 \neq \Omega$.

Выше уже отмечалось, что мы намерены рассматривать случай, когда все страты, не считая граничных, плоские. Граничные страты из $\partial\Omega_0$ будем считать гладкими многообразиями. Рис. 1. иллюстрирует возможное геометрическое устройство стратифицированного множества; на нем граничные страты выделены жирным.

Векторное поле \vec{F} в \mathbb{R}^d назовём касательным к Ω_0 , если для любой страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и любой точки $X \in \sigma_{kj}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному пространству $T_X \sigma_{kj}$, понимаемому в обычном дифференциально-геометрическом смысле. При $k = 0$ считается, что $T_X \sigma_{kj}$ состоит из одного лишь нуль-вектора.

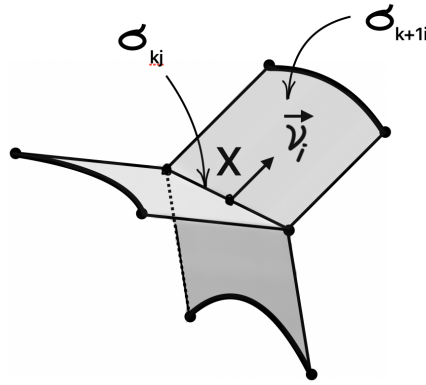


Рис. 1. Стратифицированное множество
Fig.1. Stratified set

Дивергенция касательного векторного поля в точке $X \in \sigma_{kj}$ определяется следующим выражением:

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i,$$

где $\nabla_k \cdot \vec{F}$ – классическая k -мерная дивергенция сужения векторного поля \vec{F} на σ_{kj} ; \vec{v}_i – единичная нормаль к σ_{kj} в точке X , направленная внутрь страты σ_{k+1i} (см. рис. 1), примыкающей к σ_{kj} (факт примыкания σ_{k+1i} к σ_{kj} выражается записью вида $\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}$). Обозначение вида $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i)$ служит для записи предельного значения вектора $\vec{F}(Y)$, когда Y , двигаясь по страте σ_{k+1i} , стремится к X .

Введенное нами понятие дивергенции является точным аналогом классической дивергенции, определяемой как плотность потока векторного поля; только в нашем случае плотность потока нужно относить к стратифицированной мере, упомянутой выше.

Множество векторных полей, для которых эта дивергенция существует, обозначается $\vec{C}^1(\Omega_0)$. В качестве достаточных условий существования дивергенции годятся следующие:

- сужения \vec{F} на страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$ принадлежат классу C^1 ;
- эти сужения допускают продолжения по непрерывности в $(k-1)$ -мерные страты $\sigma_{k-1i} \prec \sigma_{kj}$ при $k > 0$.

Пусть $u : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная скалярная функция. Если через ∇u обозначить векторное поле на Ω_0 , составленное из градиентов сужений u на страты $\sigma_{kj} \subset \Omega_0$, и если $\nabla u \in \vec{C}^1(\Omega_0)$ (множество функций u , обладающих такими свойствами, обозначается $C^2(\Omega_0)$), то можно определить оператор $\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u)$, являющийся аналогом классического лапласиана. Более того, можно определить целый класс операторов вида $\nabla \cdot (p \nabla u)$, где p – так называемая стратифицированная константа, равная на каждой страте из Ω_0 либо тождественной единице, либо нулю. При этом всегда предполагается, что $p = 1$ на свободных стратах; так мы называем страты, не являющиеся граничными для других страт. В частности, если $p = 1$ только на таких стратах, то соответствующий оператор называется мягким лапласианом, а если $p \equiv 1$ на Ω_0 , то соответствующий оператор называется жёстким лапласианом.

В данной работе мы, ради простоты формул, ограничимся случаем жёсткого лапласиана, но приводимые нами результаты имеют место и для всех промежуточных лапласианов.

1.4. Основные интегральные тождества. Ключевую роль в наших рассуждениях играют следующие интегральные тождества. Их обоснования можно найти в [1].

Теорема 1.1 (Теорема о дивергенции). Пусть $\vec{F} \in \vec{C}^1(\Omega_0)$. Тогда

$$\int_{\partial\Omega_0} (\vec{F})_\nu d\mu = - \int_{\Omega_0} \nabla \cdot \vec{F} d\mu,$$

где $(\vec{F})_\nu = \sum_{\substack{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}, \\ \sigma_{k+1i} \subset \Omega_0}} \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{v}_i) \cdot \vec{v}_i$. Знак «-» в формуле связан с тем, что здесь мы используем в граничных стратах внутренние нормали.

В следующей теореме $C^1(\Omega_0)$ означает множество непрерывных на Ω_0 функций, непрерывно дифференцируемых на каждой страте, а ν представляет собой единичный вектор внутренней нормали.

Теорема 1.2 (Формула Грина). Если $u \in C^2(\Omega_0)$ и $v \in C^1(\Omega_0)$, то

$$\int_{\partial\Omega_0} (v \cdot \nabla u)_v d\mu = - \int_{\Omega_0} \nabla v \cdot \nabla u d\mu - \int_{\Omega_0} v \cdot \Delta u d\mu. \quad (1)$$

2. Теорема о среднем для гармонических функций на стратифицированном множестве.

Пусть $X_0 \in \sigma_{kj} \subset \Omega_0$ и пусть также $r > 0$ не превосходит расстояния от X_0 до всех страт σ_{mi} , $m \leq k$, не содержащих X_0 . Здесь мы пользуемся внутренней метрикой на Ω , т. е. расстояние $\text{dist}(X, Y)$ определяется как минимум длин непрерывных кривых, соединяющих X и Y и лежащих в Ω . Если число r удовлетворяет сформулированным требованиям, то оно называется допустимым радиусом, а множество $B_r(X_0) = \{X \in \Omega : \text{dist}(X_0, X) < r\}$ – допустимым открытым шаром радиуса r . Граница этого шара $S_r(X_0) = \{X \in \Omega : \text{dist}(X_0, X) = r\}$ называется допустимой сферой. Эту сферу можно рассматривать как стратифицированное множество (теперь уже с неплоскими стратами), если её стратами объявить пересечение страт из Ω с $S_r(X_0)$. Мера и интеграл на этой сфере интерпретируются так же, как мера и интеграл на всем стратифицированном множестве. Обозначать эту меру будем через μ_r .

Из формулы (1) для стратифицированных множеств легко получается следующее утверждение:

Теорема 2.1. Пусть функция $u \in C^2(\Omega_0)$ такова, что $\Delta u \geq 0$ (естественно назвать такую функцию субгармонической). Тогда на любой допустимой сфере имеет место равенство:

$$\int_{S_r(X_0)} (\nabla u)_v d\mu_r \geq 0; \quad (2)$$

смысл обозначения $(\cdot)_v$ раскрывается в формулировке теоремы 1.1, однако здесь используется единичный вектор внешней нормали.

Справедливость последнего неравенства естественным образом следует из формулы (1), если положить $v \equiv 1$, в качестве Ω_0 взять $B_r(X_0)$, а в качестве $\partial\Omega_0$ – $S_r(X_0)$.

В развернутой форме формулу (2) можно переписать в виде:

$$\sum_{\tilde{\sigma}_{kj}} \int_{\tilde{\sigma}_{kj}} (\nabla u)_v d\mu_r \geq 0,$$

где $\tilde{\sigma}_{kj}$ – страты допустимой сферы, определяемые упомянутым выше способом.

Последнюю формулу можно также записать следующим образом:

$$\sum_{S_r^k(X_0)} \int_{S_r^k(X_0)} (\nabla u)_v d\mu_r \geq 0, \quad (3)$$

где $S_r^k(X_0)$ – k -мерный фрагмент сферы $S_r(X_0)$, составленный из страт $\tilde{\sigma}_{kj}$ размерности k .

На рис. 2. изображён стратифицированный шар с соответствующей сферой, разбитой на фрагменты.

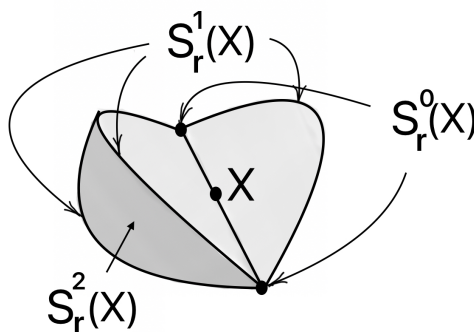


Рис. 2. Стратифицированный шар и сфера

Fig. 2. Stratified Ball and Sphere

Нетрудно показать, что для фрагментов $S_r^k(X_0)$ допустимой сферы имеет место равенство

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{|S_r^k(X_0)|} \int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \right) = \frac{1}{|S_r^k(X_0)|} \int_{S_r^k(X_0)} (\nabla u)_v d\mu_r,$$

являющееся аналогом классической формулы дифференцирования средних.

В знаменателях этой формулы стоит площадь k -мерного фрагмента сферы, равная αr^k , где α – угловая мера этого фрагмента.

Отсюда, после сокращения α , получаем

$$\int_{S_r^k(X_0)} (\nabla u)_v d\mu_r = r^k \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^k} \int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \right),$$

что позволяет переписать выражение (3) в следующем виде:

$$\sum_{S_r^k(X_0)} r^k \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^k} \int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \right) \geq 0.$$

Умножим неравенство выше на r :

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^k} \int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \right) \geq 0.$$

Пусть R – допустимый радиус для данной точки X_0 . Тогда можно проинтегрировать последнее неравенство от 0 до R . В результате получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^R r^{k+1} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^k} \int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \right) dr \geq 0.$$

Интегрируя по частям, преобразуем это выражение к виду

$$\sum_{k=0}^{n-1} r \int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \Big|_0^R - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int_0^R \left(\int_{S_r^k(X_0)} u d\mu_r \right) dr \geq 0.$$

В первом интеграле подстановка $r = 0$ означает предельный переход при $r \rightarrow 0$; за счёт множителя r перед интегралом получаем на нижнем пределе нулевое значение. Далее замечаем, что повторный интеграл равен интегралу по $(k+1)$ -мерному фрагменту $B_R^{k+1}(X)$, составленному из пересечений $(k+1)$ -мерных страт с шаром $B_R(X)$. Таким образом имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} R \int_{S_R^k(X_0)} u d\mu_R - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \int_{B_R^{k+1}(X_0)} u d\mu \geq 0.$$

После очевидных преобразований приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2 (Теорема о среднем для субгармонических функций). Пусть u – субгармоническая функция в смысле жесткого лапласиана. Тогда для любой точки $X_0 \in \Omega_0$ и допустимого $R > 0$ имеет место следующее неравенство:

$$R \int_{S_R(X_0)} u d\mu_R \geq \sum_{k=1}^n k \int_{B_R^k(X_0)} u d\mu.$$

В применении к классическому случаю – лапласиану в области G пространства \mathbb{R}^d , сумма сводится к одному слагаемому и формула преобразуется к

$$\int_{S_R(X_0)} u d\mu_R \geq \frac{d}{R} \int_{B_R(X_0)} u d\mu.$$

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.:Физматлит; 2005. 272с.

2. Oshchepkova S.N., Penkin O.M. The mean-value theorem for elliptic operators on stratified sets. *Mathematical Notes*. 2007;81(3):365-372 <https://doi.org/10.1134/S0001434607030108>
3. Oshchepkova S.N., Penkin O.M., Savasteev D.V. Strong maximum principle for an elliptic operator on a stratified set. *Mathematical Notes*. 2012;92(2):249–259 <https://doi.org/10.1134/S0001434612070267>
4. Adamowicz T., Gaczkowski M., Gorka P. Harmonic functions on metric measure spaces. *Revista Matematica Complutense*. 2019;32:141-186 <https://doi.org/10.1007/s13163-018-0272-7>
5. Ambrosio L., Gigli N., Savare G. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. *Inventiones Mathematicae*. 2014;195:289-391 <https://doi.org/10.1007/s00222-013-0456-1>
6. Dairbekov N.S., Penkin O.M., Savasteev D.V. On Removable Singularities of Harmonic Functions on a Stratified Set. *Doklady Mathematics*. 2024;110:297-300 <https://doi.org/10.1134/S1064562424601379>
7. Dairbekov N.S., Penkin O.M., Savasteev D.V. Harnack's Inequality for Harmonic Functions on Stratified Sets. *Siberian Mathematical Journal*. 2023;64(5):1137–1144 <https://doi.org/10.1134/S0037446623050063>

References

1. Pokornyi YV., Penkin OM., Priadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential'nye uravneniia na geometricheskikh grafakh [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272p (In Russ.).
2. Oshchepkova SN., Penkin OM. The mean-value theorem for elliptic operators on stratified sets. *Mathematical Notes*. 2007;81(3):365-372 <https://doi.org/10.1134/S0001434607030108>
3. Oshchepkova SN., Penkin OM., Savasteev DV. Strong maximum principle for an elliptic operator on a stratified set. *Mathematical Notes*. 2012;92(2):249-259 <https://doi.org/10.1134/S0001434612070267>
4. Adamowicz T., Gaczkowski M., Gorka P. Harmonic functions on metric measure spaces. *Revista Matematica Complutense*. 2019;32:141-186 <https://doi.org/10.1007/s13163-018-0272-7>
5. Ambrosio L., Gigli N., Savare G. Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below. *Inventiones Mathematicae*. 2014;195:289-391 <https://doi.org/10.1007/s00222-013-0456-1>
6. Dairbekov NS., Penkin OM., Savasteev DV. On Removable Singularities of Harmonic Functions on a Stratified Set. *Doklady Mathematics*. 2024;110:297-300 <https://doi.org/10.1134/S1064562424601379>
7. Dairbekov NS., Penkin OM., Savasteev DV. Harnack's Inequality for Harmonic Functions on Stratified Sets. *Siberian Mathematical Journal*. 2023;64(5):1137–1144 <https://doi.org/10.1134/S0037446623050063>

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.09.2025

Поступила после рецензирования 06.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025

Received September 8, 2025

Revised November 6, 2025

Accepted November 20, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ощепкова Софья Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

Спивак Александра Сергеевна – бакалавр 4 года обучения направления подготовки «Прикладная математика», Воронежский государственный университет инженерных технологий, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sofia N. Oshchepkova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Aleksandra S. Spivak – 4-year Bachelor's Degree in Applied Mathematics, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.63:004.773

MSC 35K05, 91D30

Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-272-278

EDN NBUBRS

Моделирование диффузии информации в социальной сети

Толстых М. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.)

Донецкий государственный университет,
Россия, 283001, г. Донецк, ул. Университетская, 24
physicisto@yandex.ru

Аннотация. Целью работы является разработка модифицированной диффузионной модели распространения информации в социальных сетях на основе одномерного параболического уравнения. Ключевым отличием модели является строгое физическое обоснование ее параметров, что позволяет перейти от качественных к количественным оценкам. Информация рассматривается как непрерывная функция числа пользователей, распространяющих новость. Для адекватного учета дискретной структуры социального графа применяется метод интегрального осреднения. Новизна модели заключается в явном задании распределенных источников информации с помощью свободного члена, включающего пороговую функцию Хевисайда, что отражает реальный механизм активации пользователей в качестве вторичных источников. Численные эксперименты проведены на реальных данных Twitter, касающихся распространения новости об открытии бозона Хиггса. Результаты расчетов демонстрируют высокую точность модели: нормализованная среднеквадратическая ошибка между модельными и экспериментальными данными составила 0,7%. Полученные результаты подтверждают гипотезу о применимости законов физической диффузии для описания информационных потоков.

Ключевые слова: математическое моделирование, социальные сети, диффузия информации

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075–02–2025–1608).

Для цитирования: Толстых М.А. Моделирование диффузии информации в социальной сети. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):272–278. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-272-278 EDN NBUBRS

Original Research

Mathematical Modeling of Information Diffusion in Social Network

Margarita A. Tolstykh 

(Article submitted by a member of the editorial board Virchenko Yu. P.)

Donetsk State University,
24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russia
physicisto@yandex.ru

Abstract. This work aims to develop a modified diffusion model of information spreading in social networks based on a one-dimensional parabolic equation. The model's key feature is its strict physical basis for all parameters, enabling a transition from qualitative to quantitative estimates. The study treats information as a continuous function of the number of users distributing the news. The method of integral averaging applied in the model ensures an adequate transition to the discrete structure of the social graph. The novelty of the approach lies in the explicit definition of distributed information sources through the free term of the equation, which includes a Heaviside theta function. This formulation reflects the real activation mechanism of users who become secondary sources. We conducted numerical experiments using real Twitter data on the spread of news about the Higgs boson discovery. The test results demonstrate the model's high accuracy: the normalized root-mean-square error between the simulated and experimental data was 0,7%. The obtained results confirm the hypothesis about the applicability of physical diffusion laws for describing information flows in social networks.

Keywords: Mathematical Modeling, Social Networks, Information Diffusion

Acknowledgements: The work was supported by the Azov-Black Sea Mathematical Center (Agreement № 075-02-2025-1608 of February 27, 2025).

For citation: Tolstykh MA. Mathematical Modeling of Information Diffusion in Social Network. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):272–278 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-272-278 EDN NBUBRS

1. Введение. Моделирование распространения информации в социальных сетях – актуальная задача, обусловленная стремительным ростом влияния онлайн-платформ на общественное мнение, политические процессы, экономику и др. Первые работы, заложившие основу для понимания социальных сетей, такие как исследование Грановеттера 1978 года [1], фокусировались на структуре организационных сетей. Однако современные онлайн-социальные сети представляют собой гораздо более сложные системы, характеризующиеся разнообразием структур, алгоритмов и форм взаимодействия пользователей. Распространение информации в таких сетях базируется как на графовой структуре сети (распространение от узла к узлу через подписки, дружеские связи и т. д.), так и на содержании информации (независимые источники информации, плагиат). Этот сложный процесс может быть описан с помощью различных математических моделей, которые позволяют изучать динамику распространения информации, прогнозировать её охват и выявлять ключевые влияющие факторы.

Необходимо отметить, что «информация», «репост», «новость» – это эквивалентные понятия в социальных сетях. Количество информации в социальной сети тождественно равно количеству экземпляров одной новости (репостов, ретвитов).

2. Обзор моделей распространения информации в социальных сетях. Наиболее популярными моделями распространения информации в социальных сетях (далее – РИСС) являются эпидемиологические, каскадные, пороговые, диффузионные модели и модели на основе машинного обучения. Выбор наиболее подходящей модели зависит от конкретных целей исследования и доступных данных. Часто используется комбинированный подход, объединяющий преимущества различных моделей.

Пороговые модели [2] предполагают, что пользователь принимает информацию только тогда, когда количество или интенсивность сигналов от его окружения превышает определенный порог. Эти модели часто используются для изучения коллективного поведения. Для линейной пороговой модели:

$$\sum_{v \in N(u)} w_{uv} \geq \theta_u,$$

где $N(u)$ – соседи узла u , w_{uv} – вес влияния узла v на узел u , θ_u – порог активации узла u . Эти модели учитывают влияние социального давления, подходят для анализа критических точек в распространении информации, однако не учитывают динамику процесса распространения информации.

Каскадные модели [2] описывают распространение информации как последовательность активаций узлов. В модели независимых каскадов (ICM) каждый узел v имеет вероятность $p_u v$ активировать соседний узел u . Процесс продолжается до тех пор, пока не будут активированы все доступные узлы. Такие модели учитывают структуру сети, однако не учитывают динамику и сильно упрощают социальные взаимодействия.

Эпидемиологические модели [3], такие как SIR (Susceptible-Infected-Recovered), заимствованы из биологии и описывают распространение информации аналогично распространению заболеваний. В этих моделях множество пользователей (популяция) делится на группы: S – восприимчивые пользователи, которые еще не получили информацию; I – инфицированные пользователи, распространяющие информацию; R – выздоровевшие пользователи, которые больше не распространяют информацию.

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

где β – скорость передачи информации, γ – скорость «выздоровления».

Данные модели просты и наглядны, учитывают динамику распространения информации, однако не учитывают структуру сети и содержание информации, предполагают однородность популяции, что редко выполняется в реальности.

Модели на основе машинного обучения [4] используют данные для обучения и прогнозирования. Графовые нейронные сети используют структуру социальной сети для прогнозирования распространения информации, учитывают связи между узлами и их свойства. Рекуррентные нейронные сети подходят для моделирования временных зависимостей в распространении информации. Модели на основе обучения с подкреплением оптимизируют стратегии распространения информации, учитывая динамику сети. Такие модели обладают высокой точностью при наличии больших объемов данных, учитывают сложные нелинейные зависимости, однако требуют больших вычислительных ресурсов и данных, сложны в интерпретации (проблема «черного ящика»).

Предложенные в 2012 году диффузионные модели [5], такие как линейная диффузионная, модель диффузионной логистики, описывают распространение информации как процесс, аналогичный диффузии вещества в среде. Их преимущества: универсальность и гибкость, возможность учета пространственных и временных факторов, интерпретируемость. Это важно для создания моделей, не привязанных к специфическим алгоритмам конкретных социальных сетей и способных адаптироваться к изменениям в их функционировании [6]. Однако предложенные модели требуют сложных вычислений, идентификации параметров, а также неясно, какой смысл относительно социальной сети несут входящие в данные

модели параметры. Эти модели могут быть улучшены, если их параметры приобретут физическую интерпретацию.

Параметры моделей в ранних работах [4] приближались некоторыми полиномами с эвристически подобранными коэффициентами, что давало приблизительное соответствие модели реальным данным из социальных сетей. Предполагалось, что коэффициент диффузии $p(x)$ – это некоторая экспоненциальная функция, в некоторых работах $p(x)$ выносилось за знак дифференциала, что некорректно, однако в дальнейших работах авторов моделей эта неточность была устранена. Были попытки идентификации оптимальных параметров диффузионных моделей в виде полиномов [7], а также решалась задача об источнике [8, 9]. Также для соответствия закону Фика данных моделей правая часть домножалась на состояние модели v , на логистическую функцию, зависящую от v . Это обеспечивало соответствие модели закону Фика, однако искажало смысл входящих в модель параметров – было невозможно дать им какую-либо количественную оценку.

В настоящей работе предлагается модификация существующей диффузионной модели распространения информации в социальных сетях, представленной в [2], которая учитывает эти аспекты и позволяет решать широкий круг задач, включая прогнозирование распространения информации, выявление лидеров мнений и обнаружение экстремистских кластеров.

3. Моделирование распространения информации на основе уравнения диффузии. Известно, что распространение информации в сети происходит в основном под действием градиента информации, из областей, где информации больше, в области, где ее меньше. Подобные процессы в физике описываются законом Фика диффузии молекул в среде. Предлагается гипотеза, что распространение информации в глобальных социальных сетях подчиняется физическим законам диффузии. Подобный подход, связывающий динамические процессы в сложных сетях с формализмом теоретической физики использовался в работе [10]. Информация трактуется как непрерывная функция количества распределённых пользователей, участвующих в распространении конкретной новости с течением времени.

Соответствующее параболическое уравнение диффузии имеет вид:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) - \phi = 0, \quad x, t \in \Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1), \quad (1)$$

где t – время; x – расстояние в графе сети, на которое распространяется информация, например, в виде репостов какой-либо новости; $v(x, t)$ – количество репостов (количество активных пользователей) рассматриваемой новости к моменту t в точке x ; p – коэффициент диффузии информации, который определяет степень проникновения новости в более глубокие слои социальной сети, возможно $p(x)$; свободный член $\phi(x, t)$ – распределённые источники информации.

Здесь необходимо обсудить, что собой представляет координата x . В реальной сети – это расстояние в графе, измеряемое минимальным набором рёбер $i = 1, 2, 3, \dots$, по которым может быть передана информация из источника с номером $i = 0$. То есть расстояние дискретно, $x = x_i = i$. Физическая диффузия (1) предполагает непрерывность пространства. Поэтому, моделируя поток информации уравнением (1), нам придётся результаты диффузии отображать в дискретное пространство $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$. Это можно делать интегральным осреднением (математическим ожиданием) состояния новости на i -том отрезке единичной длины в виде:

$$v_i(t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x, t) dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Данная проблема перехода между дискретными сетевыми структурами и их непрерывными приближениями рассматривается, например, в работе [11].

В данной работе уравнение (1) будем дополнять следующими граничными и начальными условиями:

$$v = 1 \text{ на } \Gamma_a = x_a \times (t_0, t_1), \quad \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 \text{ на } \Gamma_b = x_b \times (t_0, t_1), \quad v = 0 \text{ на } \Gamma_0 = (x_a, x_b) \times t_0. \quad (3)$$

Одна новость зарождается одним автором в момент t_0 на левой границе Γ_a . Справа на границе Γ_b поток новости равен нулю к моменту t_1 , когда стабилизируется процесс насыщения сети новостью. Предполагается, что изначально рассматриваемой новости в сети нет. При этом полагается, что до точки x_b информация также не доходит. Возможно рассмотрение и других граничных и начальных условий.

Свободный член в уравнении (1)

$$\phi(x, t) = r(t)h(x)\Theta(v - \varepsilon),$$

где $r(t)$ – средняя скорость изменения активности пользователей, $h(x)$ – максимальное количество активных пользователей, участвующих в распространении новости, вплоть до насыщения сети. Функция

$\phi(x, t)$ – это распределённый источник информации в виде действия активных пользователей сети, которые становятся вторичными источниками рассматриваемой новости. Тэта-функция

$$\Theta(v - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{если } v(x, t) \geq \varepsilon; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

задаёт порог $\varepsilon > 0$, который предотвращает «зарождение» информации в каждой точке x сети, пока до активных пользователей в точке x не дошла новость, т. е. не дошёл фронт потока новости высотой ε .

В рассматриваемой модели (1) её параметры приобретают не только физический смысл, но и понятные, наглядные количественные значения. Разработка подобных интерпретируемых моделей, в противовес «черным ящикам», выделяется как одно из ключевых направлений в моделировании социальных сетей [6, 12].

Максимальное количество активных пользователей $h(x)$ характеризует пропускную способность кластера сети, где информация зародилась, была активно поддержана заинтересованной цепочкой пользователей и, достигнув пика распространения, стабилизировалась так, что поток информации вне кластера интересов прекратился. При этом каждый активный пользователь имеет по одному экземпляру новости. Это означает, что

$$h(x) = \max_t v(x, t). \quad (4)$$

Если активные участники не удаляют репосты новости, то, очевидно, $h(x) = v(x, t_1)$. По дискретному значению функции $h_i(x)$ можно судить о количестве узлов кластера, характеризующих глубину и ширину проникновения информации в сеть, можно судить о заинтересованности участников кластера в текущем типе новости, т. е. выделять группы по интересам.

Получается, что распределённые в кластере источники вторичной новостной информации, во-первых, заранее (к моменту t_0) известны и их количества новостей равно $h(x)$. Во-вторых, источники начинают работать после прихода к ним количества новостей $v \geq \varepsilon$. В-третьих, мощность источников определяется параметром $r(t)$, при этом сначала мощность (интерес к новости) постепенно возрастает до максимума, далее убывает до значения, обеспечивающего стабилизацию процесса распространения новости.

Функция $r(t)$ имеет размерность обратную времени и характеризует среднюю в пространстве интенсивность источников h , т. е. активность заинтересованных пользователей кластера. Из уравнения (1) следует

$$\frac{\partial v_{cp}(t)}{\partial t} = r(t)h_{cp},$$

где $h_{cp} = \frac{1}{x_b - x_a} \int_{x_a}^{x_b} h(x) dx$, $v_{cp}(t) = \frac{1}{x_\varepsilon - x_a} \int_{x_a}^{x_\varepsilon} v(x, t) dx$. Здесь $x_\varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_1} x_b$ – точка фронта потока новости в сети. Проинтегрируем по времени предыдущее выражение:

$$\int_{t_0}^{t_1} r(t) dt = \frac{1}{h_{cp}} v_{cp}(t_1).$$

Здесь было учтено, что $v_{cp}(t_0) = 0$. Если учесть (4) в последний момент времени, когда $x_\varepsilon = x_b$, то $v_{cp}(t_1) = h_{cp}$ и мы получим условие нормировки функции активности пользователей:

$$\int_{t_0}^{t_1} r(t) dt = 1. \quad (5)$$

Таким образом, функция $r(t)$ представляет собой долю от общего количества пользователей, которые будут делиться информацией, в единицу времени.

Обсудим коэффициент диффузии p . Он влияет на накопление новостной информации всеми активными пользователями в каждой точке x с течением времени t . С точки зрения физики, с одной стороны, малое значение коэффициента диффузии приводит к медленному проникновению субстанции в среду, с другой стороны, – к высокой концентрации диффундирующей субстанции возле источника диффузии. В нашем случае мы имеем много источников – это единичный источник на границе Γ_a и распределённые источники переменной мощности вдоль всего кластера сети.

Из натурных наблюдений известно [13], что распределение $v(x_i, t \approx t_1)$ имеет максимум в нескольких «шагах» $i = 2 - 3$ от первоисточника x_a и затяжной «хвост» с $v \rightarrow 0$ в конце кластера x_b . Как на это может влиять коэффициент диффузии?

Если предположить, что коэффициент диффузии не постоянный в пространстве, т. е. $p = p(x)$, то уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \phi + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{на } \Omega. \quad (6)$$

Поскольку $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$, то даже при $\phi = 0$ справа в (6) будет присутствовать ненулевой источник (сток) концентрации новости и стабилизировать поток информации будет крайне сложно. Возле Γ_b для формирования «хвоста» необходимо $\frac{\partial v}{\partial x} < 0$. С другой стороны, чтобы там и $v \rightarrow 0$ необходимо существенно усилить диффузию т. е. необходимо $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$ для стока (при этом $\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} < 0$) лишней концентрации новости. Это значит, что необходимо $p(x \approx x_b) \rightarrow \infty$. Такое поведение коэффициента диффузии кажется экзотическим, поэтому далее примем $p(x) = p$ и уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = rh\Theta(v - \varepsilon) \quad \text{на } \Omega. \quad (7)$$

4. Тестовые расчеты моделирования потока информации. Исследуем поведение модели (7) и оценим насколько реалистично она может описать реальные процессы распространения информации в социальной сети. Рассмотрим экспериментальные данные сети twitter.com [13] о распространении новости об открытии бозона Хиггса. Наблюдаемое состояние информации достигло насыщения новостью и приняло значения $v_i(t_1) = \{1, 6370, 136366, 167164, 65276, 396, 38\}$ в узлах $i = 0 \dots 6$ к моменту $t_1 = 175$ (часов).

Для уравнения (7) с граничными условиями (3) были подобраны следующие коэффициенты модели: коэффициент диффузии информации $p = 0.0001$; $h(x) = v(t_1)$ – пропускная способность; скорость реакции пользователей в виде гауссовой функции $r(t) = 0.018e^{\frac{(t-87.5)^2}{1936}}$; порог был принят $\varepsilon = 0.001$.

На рис. 1 (а) сплошная линия – это функция $h(x)$, полученная кубической интерполяцией по вершинам дискретных наблюдений в виде столбцов. На рис. 1 (б) показана функция $r(t)$ с пиком активности пользователей в момент $t \approx 87$ (часов). Эти параметры подбирались с учётом условий (4), (5). Расчёт параболического уравнения (7) производился по неявной конечно-разностной схеме Кранка – Николсона на сетке $\{x_i = x_a + i\Delta x, i = 0 \dots n, \Delta x = \frac{x_b - x_a}{n}\}$, $\{t_j = t_0 + j\Delta t, j = 0 \dots m, \Delta t = 0.5 \frac{\Delta x^2}{p}\}$, $n = 60$, $m = 350$.

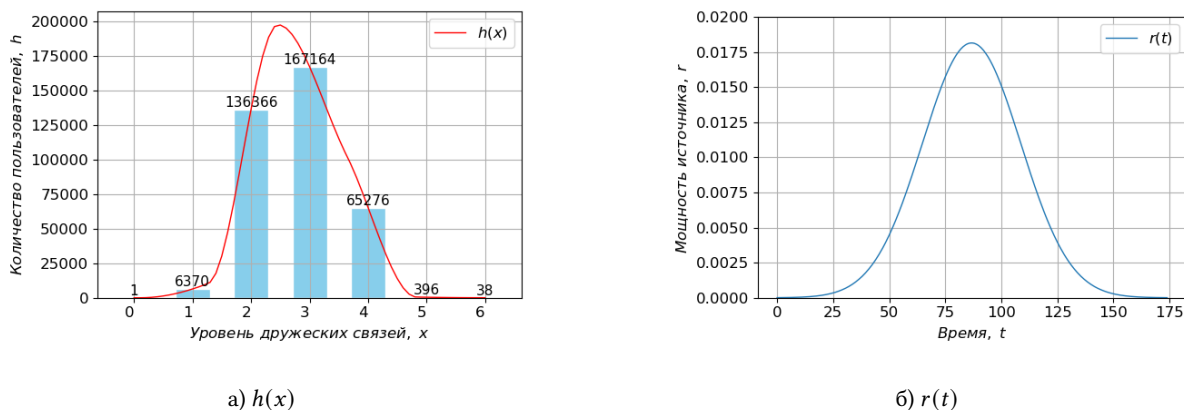


Рис. 1. Подобранные функции: (а) пропускная способность $h(x)$; (б) функция активности $r(t)$

Fig. 1. Fitted functions: (a) capacity $h(x)$; (b) activity function $r(t)$

На рис. 2 показаны результаты моделирования. Сплошная линия – это полученное значение состояния $v(x, t_1)$ модели (7) к моменту стабилизации потока информации. Диаграмма на том же рисунке – это дискретное представление информации в графе кластера сети, полученное осреднением, согласно формуле (2). Как видно, дискретизация состояний модели в точках i визуальнo совпадает с реальными данными.

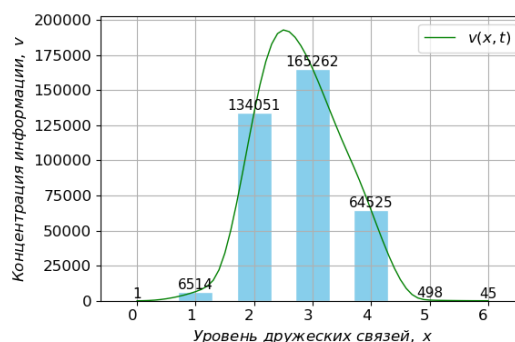


Рис. 2. Моделирование состояния информации в сети в момент t_1

Fig. 2. Simulation of the information state in the network at time t_1

Значения смоделированного состояния $v_i(t_1) = \{1, 6514, 134051, 165262, 64525, 498, 45\}$, нормализованная среднеквадратическая ошибка 0,7%. Это свидетельствует о высокой достоверности модели (7) и справедливости изначальной гипотезы о физических принципах диффузии информации в социальной сети.

Для практического использования диффузионной модели (7) необходимо автоматизировать процесс подбора достоверных коэффициентов модели. Это может реализовываться с помощью параметрической идентификации оптимальных значений коэффициентов. Для её решения целесообразно использовать методы оптимизации с регулируемым направлением спуска [14], которые могут обеспечить равномерную сходимость к оптимальным значениям функций $h(x)$ и $r(t)$ за конечное, небольшое число итераций. Постановка и решение подобной задачи для линейной диффузионной модели имеется в работе [15]. Стоит отметить, что аналогичные подходы к решению коэффициентных обратных задач, основанные на сведении к задаче оптимизации и применении градиентных методов с использованием сопряженных задач, успешно применяются и в других областях, например, в иммунологии и эпидемиологии [16].

5. Заключение. В предложенной модели диффузии информации, в отличие от существующих диффузионных моделей, параметры имеют физическую интерпретацию, что позволяет оценивать источник информации и кластер сети вокруг него, а также позволяет перейти от качественных к количественным оценкам, значимым для прикладного анализа. Также получено условие нормировки функции активности пользователей для предложенной модели.

Результаты тестовых расчётов на реальных данных показали возможность моделирования с высокой точностью. Это подтверждает правомерность исходной гипотезы о применимости законов физической диффузии к описанию информационных потоков в социальных сетях.

Список литературы

1. Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior. *American Journal of Sociology*. 1978;83(6):1420–1443.
2. Kempe D., Kleinberg J., Tardos E. Maximizing the Spread of Influence through a Social Network. *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. 2003:137–146.
3. Daley D.J., Gani J. Epidemic Modelling: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 234 p.
4. Dritsas E., Trigka M. Machine Learning in Information and Communications Technology: A Survey. *Information*. 2024;16(1):8. <https://doi.org/10.3390/info16010008>
5. Wang F., Wang H., Xu K. Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model. *2013 IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems*. 2013:307–316. <https://doi.org/10.1109/ICDCS.2013.14>
6. Hu Y., Song R.J., Chen M. Modeling for Information Diffusion in Online Social Networks via Hydrodynamics. *IEEE Access*. 2017;5:128–135. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2605009>
7. Krivorotko O., Zvonareva T., Zyatkov N. Numerical Solution of the Inverse Problem for Diffusion-Logistic Model Arising in Online Social Networks. In: A. Strekalovsky et al. (eds.) MOTOR 2021, CCIS 1476. Cham: Springer; 2021:444–459. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86433-0_31
8. Arabov M., Shaydullina A. Identification of the Original Author of a Social Media Post Based on Text Analysis, Time Dependencies, and the Structure of Reposts Using Combined Neural Networks. *2025 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. 2025:437–441.
9. Звонарева Т.А., Кабанихин С.И., Криворотко О.И. Численный алгоритм определения источника диффузионно-логистической модели по данным интегрального типа, основанный на тензорной оптимизации. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2023;63(9):1513–1523. <https://doi.org/10.31857/S0044466923090193>
10. Ben-Avraham D., Barrat A., Barthélemy M., Vespignani A. Dynamical Processes on Complex Networks. *Journal of Statistical Physics*. 2009;135:773–774. <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9761-x>
11. Nicosia V., Latora V. Measuring and modeling correlations in multiplex networks. *Physical Review E*. 2015;92:032805. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032805>
12. Lazer D.M.J., Pentland A., Watts D.J., et al. Computational social science: Obstacles and opportunities. *Science*. 2020;369(6507):1060–1062. <https://doi.org/10.1126/science.aaz8170>
13. De Domenico M., Lima A., Mougél P., Musolesi M. The Anatomy of a Scientific Rumor. *Scientific Reports*. 2013;3(2980):1–9. <https://doi.org/10.1038/srep02980>
14. Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределенных систем. М.: Наука; 2025. 355 с.
15. Tolstykh M.A. Identifying the Capacity of a Social Network. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. 2024;48(1):59–64. <https://doi.org/10.3103/S0278641924010084>
16. Кабанихин С.И., Криворотко О.И. Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60(4):590–600. <https://doi.org/10.31857/S0044466920040109>

References

1. Granovetter M. Threshold Models of Collective Behavior. *American Journal of Sociology*. 1978;83(6):1420–1443.
2. Kempe D, Kleinberg J, Tardos E. Maximizing the Spread of Influence through a Social Network. *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. 2003:137–146.
3. Daley DJ, Gani J. Epidemic Modelling: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 234 p.
4. Dritsas E, Trigka M. Machine Learning in Information and Communications Technology: A Survey. *Information*. 2024;16(1):8. <https://doi.org/10.3390/info16010008>
5. Wang F, Wang H, Xu K. Characterizing Information Diffusion in Online Social Networks with Linear Diffusive Model. *2013 IEEE 33rd International Conference on Distributed Computing Systems*. 2013:307–316. <https://doi.org/10.1109/ICDCS.2013.14>
6. Hu Y, Song RJ, Chen M. Modeling for Information Diffusion in Online Social Networks via Hydrodynamics. *IEEE Access*. 2017;5:128–135. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2605009>
7. Krivorotko O, Zvonareva T, Zyatkov N. Numerical Solution of the Inverse Problem for Diffusion-Logistic Model Arising in Online Social Networks. In: A. Strekalovsky et al. (eds.) MOTOR 2021, CCIS 1476. Cham: Springer; 2021:444–459. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86433-0_31
8. Arabov M, Shaydullina A. Identification of the Original Author of a Social Media Post Based on Text Analysis, Time Dependencies, and the Structure of Reposts Using Combined Neural Networks. *2025 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. 2025:437–441.
9. Zvonareva TA, Kabanikhin SI, Krivorotko OI. Numerical Algorithm for Source Determination in a Diffusion-Logistic Model from Integral Data Based on Tensor Optimization *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2023;63:1654–1663. <https://doi.org/10.1134/S0965542523090166>
10. Ben-Avraham D, Barrat A, Barthélemy M., Vespignani A. Dynamical Processes on Complex Networks. *Journal of Statistical Physics*. 2009;135:773–774. <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9761-x>
11. Nicosia V, Latora V. Measuring and modeling correlations in multiplex networks. *Physical Review E*. 2015;92:032805. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032805>
12. Lazer D.M.J., Pentland A., Watts D.J., et al. Computational social science: Obstacles and opportunities. *Science*. 2020;369(6507):1060–1062. <https://doi.org/10.1126/science.aaz8170>
13. De Domenico M, Lima A, Mougél P, Musolesi M. The Anatomy of a Scientific Rumor. *Scientific Reports*. 2013;3(2980):1–9. <https://doi.org/10.1038/srep02980>
14. Tolstykh VK. Prakticheskaya optimizatsiya, identifikatsiya raspredelennykh sistem [Practical optimization, identification of distributed systems]. Moscow: Nauka; 2025. 355 p. (In Russian)
15. Tolstykh MA. Identifying the Capacity of a Social Network. *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*. 2024;48(1):59–64. <https://doi.org/10.3103/S0278641924010084>
16. Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. Optimization Methods for Solving Inverse Immunology and Epidemiology Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60:580–589. <https://doi.org/10.1134/S0965542520040107>

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.09.2025

Поступила после рецензирования 10.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025

Received September 30, 2025

Revised November 10, 2025

Accepted November 20, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Толстых Маргарита Анатольевна – младший научный сотрудник НОМЦ «Математический центр ДонГУ», Донецкий государственный университет, г. Донецк, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Margarita A. Tolstykh – Junior Research Assistant of SEMC “Mathematical Center of DonSU”, Donetsk State University, Donetsk, Russia

К содержанию

Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде

Носков А. В.¹, Мачукаев Д. Д.², Киперша В. К.², Пугина П. Д.¹, Пирматова М. Д.¹

¹ Московский технический университет связи и информатики,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а

² Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

noskovbupk@mail.ru

Аннотация. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения пучков релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Когерентное рентгеновское излучение рассматривается в геометрии рассеяния Брэгга в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции в виде суммы вкладов параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения с учетом их интерференции. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности параметрического рентгеновского излучения, дифрагированного переходного излучения и их интерференции с учетом угловой расходимости электронного пучка. На основе полученных выражений проведены численные расчеты для конкретных параметров процесса излучения.

Ключевые слова: периодическая слоистая структура, трехслойная структура, динамическая дифракция, угловая расходимость пучка электронов, когерентное рентгеновское излучение

Для цитирования: Носков А.В., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К., Пугина П.Д., Пирматова М.Д. Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):279–289. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289 EDN PMLNAZ

Short Communication

The Influence of Electron Beam Divergence on the CXR in a Periodic Layered Medium With Three Layers Per Period

Anton V. Noskov¹, Deni D. Machukaev², Vladislav K. Kipersha², Polina D. Pugina¹,

Maria D. Pirmatova¹

¹ Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8a Aviamotornaya St., Moscow 111024, Russia

² Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia

noskovbupk@mail.ru

Abstract. A dynamic theory of coherent X-ray radiation of relativistic electron beams in a periodic layered medium with three layers per period has been developed. Coherent X-ray radiation is considered in the Bragg scattering geometry within the framework of the two-wave approximation of the dynamic diffraction theory as a sum of contributions from parametric X-ray radiation and diffracted transition radiation, taking into account their interference. Expressions are obtained that describe the spectral-angular and angular densities of parametric X-ray radiation, diffracted transition radiation and their interference, taking into account the angular divergence of the electron beam. Based on the expressions obtained, numerical calculations are performed for specific parameters of the radiation process.

Keywords: Periodic Layered Structure, Three-layer Structure, Dynamic Diffraction, Angular Divergence of the Electron Beam, Coherent X-ray Radiation

For citation: Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugina PD., Pirmatova MD. The Influence of Electron Beam Divergence on the CXR in a Periodic Layered Medium With Three Layers Per Period. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):279–289 (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289 EDN PMLNAZ

1. Введение. Впервые когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистских электронов, пересекающих мишень, имеющую периодическую слоистую структуру, в рамках динамической теории дифракции рентгеновских волн исследовалось в работе [1]. Параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) в такой мишени генерируется вследствие дифракции псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях, аналогично генерации ПРИ в монокристалле на атомных плоскостях [2, 3]. Дифрагированное переходное излучение (ДПИ) возникает вследствие дифракции на слоях мишени

переходного излучения (ПИ), генерируемого вблизи передней поверхности мишени, так же как ДПИ в монокристалле возникает вследствие дифракции ПИ на атомных плоскостях [4, 5]. Следует отметить, что формулы динамической теории [1] хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [6]. КРИ релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного относительно поверхности мишени отражения поля электрона в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [7], а в геометрии рассеяния Брэгга – в работе [8]. В работах [7, 8] было показано, что в периодической слоистой среде интенсивность КРИ релятивистских электронов должна быть в несколько раз выше, чем КРИ релятивистского электрона в монокристалле в аналогичных условиях. Также в работах [7, 8] была показана возможность увеличения интенсивности параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения за счет изменения параметров динамического рассеяния, определяющих степень отражения и поглощения рентгеновского излучения в периодической слоистой среде.

Примечательно, что слоистые структуры представляют большой интерес для генерации излучения в мягком рентгеновском диапазоне (100-2000 эВ), текущие исследования активно изучают эту область [9, 10, 11]. Стоит отметить недавние исследования по генерации мягкого рентгеновского излучения электронами низких энергий порядка десятков и сотен кэВ из структур Ван-дер-Ваальса [12, 13, 14]. В недавних работах авторов [15, 16, 17, 18] исследовалось когерентное рентгеновское излучение в периодической слоистой среде и монокристалле в динамической дифракции рентгеновских волн.

Во всех цитируемых выше работах излучение релятивистских электронов рассматривалось в периодической слоистой среде с двумя различными слоями на периоде.

Когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую структуру с тремя слоями на период, впервые рассматривалось в работе [19].

В работе [19] получены выражения, описывающие спектрально-угловые ПРИ и ДПИ в трехслойной структуре. Показано, что, меняя параметры слоев рассматриваемой трехслойной структуры, можно влиять на параметры динамического рассеяния рентгеновского излучения. Показана возможность значительного роста параметров динамического рассеяния рентгеновских волн в слоистой среде с тремя слоями в периоде. В работах [20, 21] исследовалась возможность проявления эффектов динамической дифракции в ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в рассматриваемой трехслойной структуре.

Так как в реальном эксперименте пучок релятивистских электронов обладает определенной угловой расходимостью, то интерес представляет вопрос о влиянии расходимости электронного пучка на спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ, генерируемых в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями на один период. Расходимость электронного пучка может повлиять также на эффекты динамической дифракции при рассеянии и генерации когерентного рентгеновского излучения в периодической среде. Настоящая работа посвящена исследованию влияния угловой расходимости электронного пучка на когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности ПРИ и ДПИ с учетом угловой расходимости пучка релятивистских электронов.

2. Геометрия процесса излучения. Рассмотрим излучение релятивистских электронов, пересекающих в геометрии рассеяния Брэгга периодическую слоистую структуру, состоящую из трех различных чередующихся слоев с толщинами a , b и c на периоде $T = a + b + c$ (рис. 1). Диэлектрические восприимчивости атомных веществ, из которых состоят слои, обозначим соответственно: χ_a , χ_b и χ_c . Отражающие слои периодической слоистой структуры расположены под некоторым углом δ к поверхности мишени (рис. 1), что соответствует случаю асимметричного отражения поля излучения ($\delta=0$ – частный случай симметричного отражения).

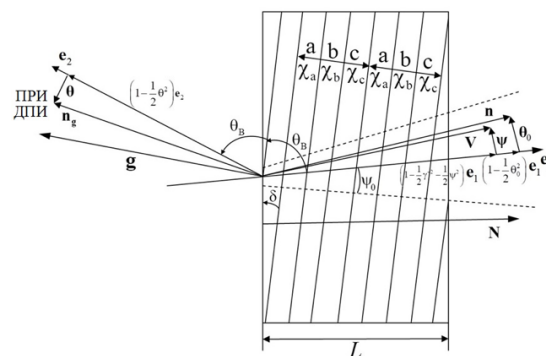


Рис. 1. Геометрия когерентного рентгеновского излучения в многослойной структуре

Fig. 1. Geometry of coherent X-ray radiation in a multilayer structure

Введем угловые переменные Ψ , θ и θ_0 в соответствии с определениями скорости релятивистского электрона V и единичных векторов: \mathbf{n} – в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона, и \mathbf{n}_g – в направлении рассеяния Брэгга:

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\Psi^2\right)\mathbf{e}_1 + \Psi, \quad \mathbf{e}_1\Psi = 0 \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right)\mathbf{e}_1 + \theta_0, \quad \mathbf{e}_1\theta_0 = 0, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\mathbf{e}_2 + \theta, \quad \mathbf{e}_2\theta = 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где θ – угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения \mathbf{e}_2 , Ψ – угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка \mathbf{e}_1 , θ_0 – угол между направлением распространения падающего фотона и осью \mathbf{e}_1 , $\gamma = 1/\sqrt{1-V^2}$ – Лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка: $\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}$, $\theta_0 = \theta_{0\parallel} + \theta_{0\perp}$, $\Psi = \Psi_{\parallel} + \Psi_{\perp}$.

Вектор \mathbf{g} (рис. 1) аналогичен вектору обратной решетки в монокристалле. Его длина может принимать значения $g = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Число n определяет гармонику отраженной волны.

Излучаемое релятивистским электроном электромагнитное поле в рентгеновском диапазоне частот является практически поперечным, значит Фурье-образы напряженностей электрического поля падающего излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ и дифрагированного излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}$ в периодической слоистой среде представим в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} &= E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}, \\ \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}} &= E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(1)}\mathbf{e}_g^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(2)}\mathbf{e}_g^{(2)},\end{aligned}$$

где векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_g^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}_g^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация). Векторы поляризации имеют вид:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}_g^{(1)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{g}]}{|\mathbf{k}, \mathbf{g}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{e}^{(1)}]}{k}, \quad \mathbf{e}_g^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}_g, \mathbf{e}^{(1)}]}{k_g}.$$

Разложение диэлектрической восприимчивости в рассматриваемой структуре по векторам обратной решетки имеет вид:

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}),$$

где средняя диэлектрическая восприимчивость χ_0 и $\chi_{\mathbf{g}}$ в рассматриваемой периодической структуре имеет вид:

$$\begin{aligned}\chi_0(\omega) &= \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b + \frac{c}{T}\chi_c, \\ \chi_{\mathbf{g}} &= \frac{1}{igT} (\chi_c - \chi_a + (\chi_a - \chi_b)e^{iga} + (\chi_b - \chi_c)e^{-igc}).\end{aligned}$$

3. Спектрально-угловые и угловые плотности излучений. В работе [19] были получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ, ДПИ и их интерференцию:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi_0')^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (2)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left| \frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta^{(s)}} \frac{1 - \exp(-iB^{(s)}\Delta_+^{(s)})}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta^{(s)}} \frac{1 - \exp(-iB^{(s)}\Delta_-^{(s)})}{\Delta_-^{(s)}} \right|^2, \quad (3)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi_0'} \right)^2 R_{\text{ДПИ}}^{(s)}, \quad (4)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{(s)} = \varepsilon^2 \left| \frac{\exp\left(-iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - \exp\left(iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)}{P_-^{(s)} \exp\left(-iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - P_+^{(s)} \exp\left(iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)} \right|^2, \quad (5)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ИНТ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{\Gamma - \chi'_0} \left(\frac{1}{\Gamma - \chi'_0} - \frac{1}{\Gamma} \right) R_{\text{ИНТ}}^{(s)}, \quad (6)$$

$$R_{\text{ИНТ}}^{(s)} = 2\varepsilon R_e \left(\left(\frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \frac{1 - \exp\left(-iB^{(s)} \Delta_+^{(s)}\right)}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta_-^{(s)}} \frac{1 - \exp\left(-iB^{(s)} \Delta_-^{(s)}\right)}{\Delta_-^{(s)}} \right) \times \left(\frac{\exp\left(-iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - \exp\left(iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)}{P_-^{(s)} \exp\left(-iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right) - P_+^{(s)} \exp\left(iB^{(s)} \frac{K^{(s)}}{\varepsilon}\right)} \right)^* \right), \quad (7)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm}^{(s)} &= \varepsilon \left(\left(\sigma^{(s)} - i\rho^{(s)} \right) e^{-ib^{(s)} \Delta_{\mp}^{(s)}} + \Delta_{\pm}^{(s)} \right), \quad \Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2, \quad \Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \Psi_{\perp}, \\ \Omega^{(2)} &= \theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel}, \quad \sigma^{(s)} = \omega L_{\text{ext}}^{(s)} (\Gamma - X'_0), \quad \Delta_{\pm}^{(s)} = P_{\mp}^{(s)} \exp\left(-iB^{(s)} \Delta_{\pm}^{(s)}\right) - P_{\pm}^{(s)} \exp\left(-iB^{(s)} \Delta_{\mp}^{(s)}\right), \\ P_{\pm}^{(s)} &= \xi^{(s)} \pm K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{2}, \quad \Delta_{\pm}^{(s)} = \frac{\xi^{(s)} \pm K^{(s)}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} + i \frac{\rho^{(s)}(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}, \quad \chi'_0 = \frac{a}{T} \chi'_a + \frac{b}{T} \chi'_b + \frac{c}{T} \chi'_c, \\ K^{(s)} &= \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)} \left((1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon \right) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon \right)}, \quad \xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 + \varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \\ \eta^{(s)}(\omega) &= \frac{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{V^2 T^2 \omega_B} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2 n^2} - 1} \right) \right), \quad \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}, \quad B^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta + \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}, \\ \sigma^{(s)} &= \frac{1}{\nu^{(s)} |\chi'_0|} \left(\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0| \right), \quad \chi'_0 = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Параметры динамического рассеяния:

$$\nu^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{\pi n} \frac{\sqrt{(1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi)}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} \right|}, \quad (9)$$

$$\rho^{(s)} = \frac{\pi n}{C^{(s)}} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}{\sqrt{(1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi)}}, \quad (10)$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{\pi n} \frac{\sqrt{(\rho_1 \sin^2(I_1 \pi) + \rho_2 \sin^2(I_2 \pi) + \rho_3 \sin^2(I_3 \pi))}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \delta'_1 &= \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c}, \quad \rho_a = \frac{\chi''_a}{|\chi'_a|}, \quad \rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|}, \quad \rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_c|}, \\ \rho_1 &= (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c), \quad \rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c), \quad \rho_3 = (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b), \\ I_1 &= \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_2 = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

При $s = 1$ выражения (2)–(8) описывают поля σ -поляризованные, а при $s = 2$ поля π -поляризованные. $\xi^{(s)}(\omega)$ и $\eta^{(s)}(\omega)$ – спектральные функции, быстро изменяющиеся с изменением частоты излучения ω в окрестности частоты Брэгга ω_B . Значение параметра $\nu^{(s)}$ показывает степень интерференции рентгеновских волн, отраженных от различных слоев на периоде рассматриваемой мишени. Если $\nu^{(s)} \approx 1$, то интерференция наиболее конструктивна, а при $\nu^{(s)} \approx 0$ интерференция наиболее деструктивна. Параметр

$\rho^{(s)}$ определяет степень фотопоглощения рентгеновского излучения в слоистой среде. Фотопоглощение излучения в слоях мишени определены отношениями ρ_a, ρ_b и ρ_c . Чем меньше значение параметра $\rho^{(s)}$, тем меньше фотопоглощение рентгеновского излучения. Этот параметр может быть представлен как отношение $\rho^{(s)} = \frac{L_{ext}^{(s)}}{L_{abs}^{(s)}}$ длины экстинкции рентгеновского излучения $L_{ext}^{(s)}$ в слоистой среде к средней длине его фотопоглощения $L_{abs} = T/\omega(a\chi_a'' + b\chi_b'' + c\chi_c'')$. Значение параметра $\kappa^{(s)}$ определяет расположение в слоистой среде пучностей стоячей волны, которая образуется в результате интерференции падающей и дифрагированной волн. Параметр $\kappa^{(s)}$ принимает значения из промежутка $0 \leq \kappa^{(s)} \leq 1$. Если максимумы пучностей лежат на слое с большей электронной плотностью, то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к нулю, если максимумы пучностей лежат на слое с меньшей плотностью электронов (меньше фотопоглощение рентгеновского излучения), то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к единице.

Параметр ε определяет асимметрию отражения поля электрона и рентгеновского излучения относительно поверхности мишени. При фиксированном θ_B параметр ε определяет угол между поверхностью мишени и отражающими слоями δ . На рис. 1 показано положительное направление угла δ . В случае симметричного отражения поля электрона и рентгеновских волн относительно поверхности мишени, когда отражающие слои и поверхность мишени параллельны ($\delta = 0$), параметр асимметрии равен единице $\varepsilon = 1$.

Спектральная функция $R_{ПРИ}^{(s)}$ (3) описывает спектр ПРИ в виде вкладов двух ветвей возбужденных рентгеновских волн ПРИ и их интерференции. Вклад первой и второй ветви в спектр ПРИ существует, когда соответственно выполняются приближенные равенства $\text{Re}(\Delta_+^{(s)}) \approx (\xi^{(s)}(\omega) + \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon})/\varepsilon - \sigma^{(s)} = 0$, $\text{Re}(\Delta_-^{(s)}) \approx (\xi^{(s)}(\omega) - \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon})/\varepsilon - \sigma^{(s)} = 0$. Эти уравнения имеют решение $\xi^{(s)*}(\omega^*) = \sqrt{\varepsilon} + \frac{(\sigma^{(s)}\sqrt{\varepsilon}-1)^2}{2\sigma^{(s)}}$.

Так как $\sigma^{(s)} > 1$, то в случае симметричного отражения ($\varepsilon = 1$) и при $\varepsilon > 1$ вклад в ПРИ будет давать только первая ветвь ПРИ. При этом спектрально-угловая плотность второй ветви ПРИ при условии $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)2}$ пренебрежимо мала по сравнению со спектрально-угловой плотностью первой ветви ПРИ при условии $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)2}$. В связи с этим в настоящей работе ограничимся рассмотрением первой ветви ПРИ и случаем симметричного отражения.

Проинтегрируем выражения (2), (4) и (6) по спектральной функции $\eta^{(s)}(\omega)$, используя соотношение $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{T^2\omega_B}{2\pi^2 n^2 L_{ext}^{(s)}} d\eta^{(s)}(\omega)$, следующее из $\eta^{(s)}(\omega)$ (8). Так как спектральный пик ПРИ расположен в интервале $\xi^{(s)}(\omega) > \sqrt{\varepsilon}$, то интервал интегрирования для спектра ПРИ и интерференции ПРИ и ДПИ имеет диапазон $\eta^{(s)}(\omega) > \sqrt{\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}$. Получим выражения для угловых плотностей ПРИ, ДПИ и их интерференцию:

$$\frac{d^2 N_{ПРИ}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2 T^2 \omega_B}{2\pi^4 n^2 L_{ext}^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi_0')^2} \int_{\sqrt{\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}}^{\infty} \left| \frac{\Omega_+^{(s)} 1 - \exp(-iB^{(s)}\Delta_+^{(s)})}{\Delta_+^{(s)}} \right|^2 d\eta^{(s)}, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 N_{ДПИ}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2 T^2 \omega_B}{2\pi^4 n^2 L_{ext}^{(s)}} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi_0'} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{ДПИ}^{(s)} d\eta^{(s)}, \quad (14)$$

$$\frac{d^2 N_{ИНТ}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2 T^2 \omega_B}{2\pi^4 n^2 L_{ext}^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{\Gamma - \chi_0'} \left(\frac{1}{\Gamma - \chi_0'} - \frac{1}{\Gamma} \right) \int_{\sqrt{\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}}^{\infty} R_{ИНТ}^{(s)} d\eta^{(s)}. \quad (15)$$

Полученные выражения (16)–(18), (13)–(15) описывают спектрально-угловую плотность излучения, возбуждаемого в мишени одним электроном, движущимся в пучке под углом $\Psi(\Psi_{\perp}, \Psi_{\parallel})$ к оси электронного пучка. Чтобы получить характеристики излучения, возбуждаемого всеми электронами расходящегося пучка, усредним выражения для спектрально-угловых и угловых плотностей ПРИ, ДПИ и их интерференционного слагаемого по всем его возможным прямолинейным траекториям электрона в пучке. Так как в основном угловое распределение электронов в пучке близко к нормальному, то усреднение проведем по функции распределения Гаусса

$$f(\Psi) = \frac{1}{\pi\Psi_0^2} \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right).$$

Параметр Ψ_0 будем называть расходимостью пучка излучающих электронов (см. рис. 1). Угол Ψ_0 определяет конус, ограничивающий часть пучка электронов, за пределами которого плотность электронов уменьшается более чем в e раз по сравнению с плотностью на оси пучка. В этом случае выражения для

усредненных спектрально-угловых и угловых плотностей ПРИ, ДПИ и интерференционного слагаемого, нормированных на число электронов в пучке, принимают вид:

$$\left\langle \omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{\pi \Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} \left| \frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \frac{1 - \exp(-iB^{(s)} \Delta_+^{(s)})}{\Delta_+^{(s)}} \right|^2 \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right) d\Psi_{\perp} d\Psi_{\parallel}, \quad (16)$$

$$\left\langle \frac{d^2 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \frac{e^2 T^2 \omega_B}{2\pi^4 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} \frac{1}{\pi \Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} \left[\int_{\sqrt{\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}}^{\infty} \left| \frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \frac{1 - \exp(-iB^{(s)} \Delta_+^{(s)})}{\Delta_+^{(s)}} \right|^2 d\eta^{(s)} \right] \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right) d\Psi_{\perp} d\Psi_{\parallel}, \quad (17)$$

$$\left\langle \omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \frac{e^2}{\pi^2} R_{\text{ДПИ}}^{(s)} \frac{1}{\pi \Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0} \right)^2 \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right) d\Psi_{\perp} d\Psi_{\parallel}, \quad (18)$$

$$\left\langle \frac{d^2 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \frac{e^2 T^2 \omega_B}{2\pi^4 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} \frac{1}{\pi \Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0} \right)^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{ДПИ}}^{(s)} d\eta^{(s)} \right] \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right) d\Psi_{\perp} d\Psi_{\parallel}, \quad (19)$$

$$\left\langle \omega \frac{d^3 N_{\text{ИНТ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{1}{\pi \Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)2}}{\Gamma - \chi'_0} \left(\frac{1}{\Gamma - \chi'_0} - \frac{1}{\Gamma} \right) R_{\text{ИНТ}}^{(s)} \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right) d\Psi_{\perp} d\Psi_{\parallel}, \quad (20)$$

$$\left\langle \frac{d^2 N_{\text{ИНТ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} \right\rangle = \frac{e^2 T^2 \omega_B}{2\pi^4 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} \frac{1}{\pi \Psi_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega^{(s)2}}{\Gamma - \chi'_0} \left(\frac{1}{\Gamma - \chi'_0} - \frac{1}{\Gamma} \right) \left[\int_{\sqrt{\varepsilon} - \frac{1+\varepsilon}{2\nu^{(s)}}}^{\infty} R_{\text{ИНТ}}^{(s)} d\eta^{(s)} \right] \exp\left(-\frac{\Psi_{\perp}^2 + \Psi_{\parallel}^2}{\Psi_0^2}\right) d\Psi_{\perp} d\Psi_{\parallel}. \quad (21)$$

Полученные выражения (16)–(21) для когерентного рентгеновского излучения пучка релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде являются главным результатом настоящей работы. Они получены с учетом расходимости электронного пучка, учитывают фотопоглощение рентгеновского излучения материалом мишени и асимметрию дифракции рентгеновского излучения на слоистой структуре материала, которая определяется параметром ε . Выражения получены в явном виде и могут быть использованы для анализа свойств спектрально-угловых характеристик ПРИ, ДПИ и их интерференции при различных параметрах мишени и электронного пучка. Для примера проведем некоторые расчеты.

4. Численные расчеты. Для вычисления спектрально-угловых и угловых плотностей излучений для определенности положим угол между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями (угол Брэгга) $\theta_B = 2.25^\circ$, при этом частота Брэгга $\omega_B = 8$ кэВ. Период слоистой среды равен: $T = a + b + c = 0.002$ мкм. Действительную часть диэлектрической восприимчивости второго слоя положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi'_b = -2.25 \times 10^{-5}$. Вычисления проведем для значения параметра $s = 1$ (σ -поляризации) и для первой гармоники дифрагированных волн $n = 1$. Диэлектрические свойства первого и третьего слоев определим с помощью отношений: $\delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b} = 3$, $\delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c} = 0.7$. Толщины слоев определим с помощью отношений: $\frac{a}{b} = 0.5$ и $\frac{a}{c} = 1$ при фиксированном периоде T . Фотопоглощение в каждом слое определим с помощью отношений: $\rho_a = \frac{\chi''_a}{|\chi'_b|} = 0.05$, $\rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|} = 0.01$, $\rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_b|} = 0.04$. В этом случае параметры динамического рассеяния и поглощения (9), (10) и (11) принимают значения: $\nu^{(1)} = 0.373$, $\kappa^{(1)} = 0.4$, $\rho^{(1)} = 0.032$. Параметр асимметрии равен единице $\varepsilon = 1$, то есть слои мишени параллельны ее поверхности.

На рис. 2 показаны кривые, построенные по формуле (2), описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ релятивистского электрона с Лоренц-фактором $\gamma = 500$ при фиксированном угле наблюдения $\theta_{\perp} = 7.5$ мрад, $\theta_{\parallel} = 0$, соответствующему максимуму угловой плотности ПРИ ($\theta_{\perp} = \sqrt{\gamma^2 - \chi'_0}$). Электрон движется вдоль оси электронного пучка $\Psi_{\perp} = \Psi_{\parallel} = 0$, при этом расходимость электронного пучка равна нулю ($\Psi_0 = 0$). Кривые построены для разных толщин мишени L . Из рис. 2 следует, что для рассматриваемых параметров мишени насыщение спектрально-угловой плотности ПРИ наступает при толщине мишени $L = 15$ мкм. На рис. 3 представлены кривые, построенные по формуле (13), описывающие угловые плотности ПРИ для разных толщин мишени L . Из рисунка следует, что насыщение угловой плотности ПРИ наступает при толщине мишени $L = 5$ мкм.

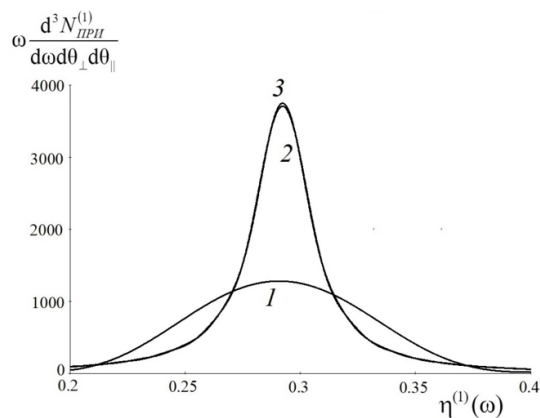


Рис. 2. Спектрально-угловые плотности ПРИ для различных толщин мишени L : 1 – $L = 3$ мкм, 2 – $L = 15$ мкм, 3 – $L = 17$ мкм. Параметры: $\gamma = 500$, $\Psi_0 = 0$

Fig. 2. Spectral-angular densities of PXR for different target thicknesses L : 1 – $L = 3 \mu m$, 2 – $L = 15 \mu m$, 3 – $L = 17 \mu m$. Parameters: $\gamma = 500$, $\Psi_0 = 0$

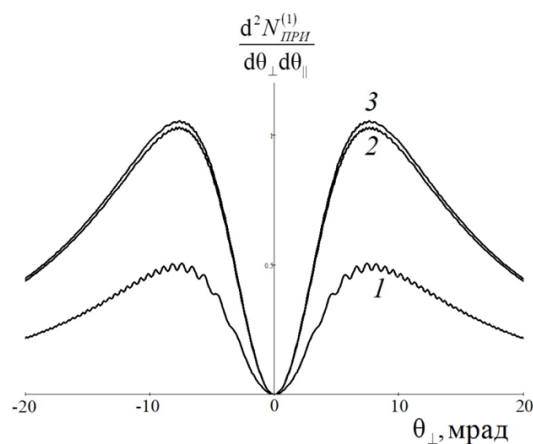


Рис. 3. Угловые плотности ПРИ для различных толщин мишени L : 1 – $L = 1$ мкм, 2 – $L = 5$ мкм, 3 – $L = 6$ мкм. Параметры: $\gamma = 500$, $\Psi_0 = 0$

Fig. 3. Angular densities of PXR for different target thicknesses L : 1 – $L = 1 \mu m$, 2 – $L = 5 \mu m$, 3 – $L = 6 \mu m$. Parameters: $\gamma = 500$, $\Psi_0 = 0$

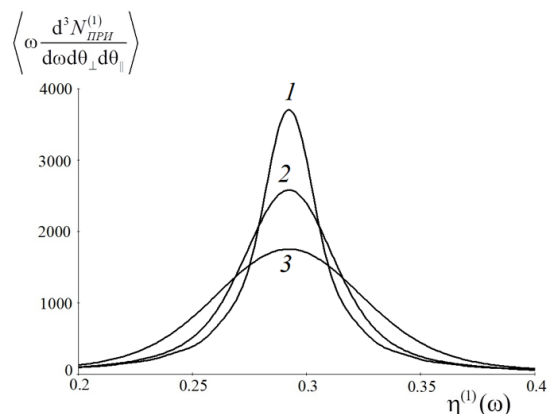


Рис. 4. Спектрально-угловые плотности ПРИ для различной угловой расходимости электронного пучка Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ мрад, 2 – $\Psi_0 = 0.1$ мрад, 3 – $\Psi_0 = 0.5$ мрад. Параметры: $\gamma = 500$, $L = 15$ мкм

Fig. 4. Spectral-angular densities of PXR for different angular divergences of the electron beam Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ mrad, 2 – $\Psi_0 = 0.1$ mrad, 3 – $\Psi_0 = 0.5$ mrad. Parameters: $\gamma = 500$, $L = 15 \mu m$

Рассмотрим влияние расходимости электронного пучка Ψ_0 на спектрально-угловую плотность ПРИ в трехслойной структуре. На рис. 4 представлены кривые, построенные по формуле (16), описывающие угловые плотности ПРИ для различной угловой расходимости электронного пучка Ψ_0 . Из рисунка следует, что при увеличении Ψ_0 амплитуда спектра ПРИ уменьшается, а ширина спектра возрастает. Расчеты по формуле (17) показывают, что угловая плотность ПРИ при рассматриваемых на рис. 4 параметрах

практически не зависит от Ψ_0 . Расчеты в статье не приведены. Это связано с тем, что угол максимума угловой плотности ПРИ ($\theta_{\perp} = 7.5$ мрад, $\theta_{\parallel} = 0$) значительно превышает угловую расходимость пучка релятивистских электронов $\Psi_0 = 0.5$ мрад.

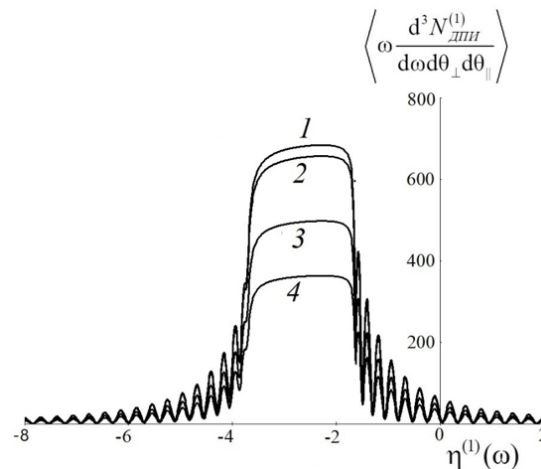


Рис. 5. Спектрально-угловые плотности ДПИ для различной расходимости Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ мрад, 2 – $\Psi_0 = 0.1$ мрад, 3 – $\Psi_0 = 0.3$ мрад, 4 – $\Psi_0 = 0.5$ мрад. Параметры: $\gamma = 2000$, $L = 1$ мкм, $\theta_{\perp} = 0.5$ мрад, $\theta_{\parallel} = 0$

Fig. 5. Spectral-angular densities of DTR for different divergences Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ mrad, 2 – $\Psi_0 = 0.1$ mrad, 3 – $\Psi_0 = 0.3$ mrad, 4 – $\Psi_0 = 0.5$ mrad. Parameters: $\gamma = 2000$, $L = 1 \mu m$, $\theta_{\perp} = 0.5$ mrad, $\theta_{\parallel} = 0$

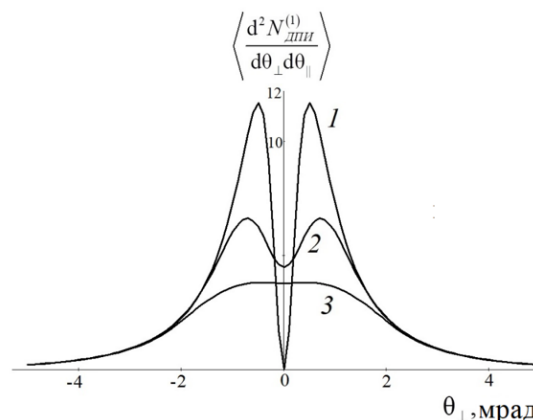


Рис. 6. Угловые плотности ДПИ для различной расходимости Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ мрад, 2 – $\Psi_0 = 0.5$ мрад, 3 – $\Psi_0 = 1$ мрад. Параметры: $\gamma = 2000$, $L = 1$ мкм

Fig. 6. Angular densities of DTR for different divergences Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ mrad, 2 – $\Psi_0 = 0.5$ mrad, 3 – $\Psi_0 = 1$ mrad. Parameters: $\gamma = 2000$, $L = 1 \mu m$

Рассмотрим влияние угловой расходимости электронного пучка на спектрально-угловую плотность ДПИ релятивистского электрона с Лоренц-фактором $\gamma = 2000$ при фиксированном угле наблюдения $\theta_{\perp} = 0.5$ мрад, $\theta_{\parallel} = 0$, соответствующему максимуму угловой плотности ДПИ ($\theta_{\perp} = \gamma^{-1}$). Толщину мишени возьмём $L = 1$ мкм, так как ДПИ формируется на еще более малой длине. На рис. 5 представлены кривые, построенные по формуле (4). Из рисунка следует, что при увеличении угловой расходимости электронного пучка до $\Psi_0 = 0.5$ мрад, амплитуда спектра ДПИ уменьшается в 2 раза. Это связано с тем, что угол максимума ДПИ при рассматриваемой энергии релятивистского электрона $\theta_{\perp} = 0.5$ мрад равен угловой расходимости электронного пучка Ψ_0 . Рассмотрим влияние угловой расходимости электронного пучка Ψ_0 на угловую плотность ДПИ. На рис. 6 представлены кривые, построенные по формуле (19), описывающие угловые плотности для различных Ψ_0 при Лоренц-факторе электронов $\gamma = 2000$. Из рисунка следует, что при такой энергии релятивистских электронов расходимость будет оказывать влияние на угловую плотность при $\Psi_0 = 0.5$ мрад. На рис. 7 представлены кривые, аналогичные кривым на рис. 6, но при большем Лоренц-факторе $\gamma = 10000$. Видно, что в этом случае угловая плотность ДПИ чувствительна к более малой расходимости Ψ_0 электронного пучка. Это связано с тем, что при увеличении γ , угловая плотность ДПИ смещается в сторону малых углов наблюдения.

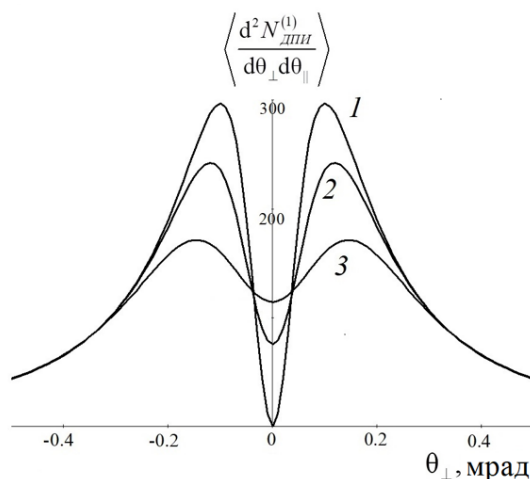


Рис. 7. Угловые плотности ДПИ для различной расходимости Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ мрад, 2 – $\Psi_0 = 0.05$ мрад, 3 – $\Psi_0 = 1$ мрад. Параметры: $\gamma = 10000$, $L = 1$ мкм

Fig. 7. Angular densities of DTR for different divergences Ψ_0 : 1 – $\Psi_0 = 0$ mrad, 2 – $\Psi_0 = 0.05$ mrad, 3 – $\Psi_0 = 1$ mrad. Parameters: $\gamma = 10000$, $L = 1 \mu m$

5. Заключение. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения пучка релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую мишень, содержащую три различных аморфных слоя на периоде, с учетом угловой расходимости электронного пучка. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции рентгеновских волн в периодической слоистой среде получены выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности ПРИ, ДПИ и их интерференции. Выражения получены с учетом расходимости электронного пучка, учитывают фотопоглощение рентгеновского излучения материалом мишени и асимметрию дифракции рентгеновского излучения на слоистой структуре материала, которая определяется параметром ε . Выражения получены в явном виде и могут быть использованы для анализа свойств спектрально-угловых характеристик ПРИ, ДПИ и их интерференции при различных параметрах мишени и электронного пучка. Проведены численные расчеты, которые показали, что при определенных условиях амплитуда и ширина спектра ПРИ резко зависят от расходимости электронного пучка. Однако угловая плотность ПРИ слабо зависит от характерных значений угловой расходимости электронного пучка, так как максимум угловой плотности ПРИ существенно превышает ее величину. Угловая плотность ДПИ при Лоренц-факторе $\gamma = 2000$ и выше в рассматриваемых условиях значительно зависит от характерной угловой расходимости электронного пучка.

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504.
2. Garibian G.M. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x-rays. *Physical Review A*. 1989; 40(8):4322.
5. Nasonov N.N. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Phys. Lett. A*. 1998;246:148.
6. Kaplin V.V. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Appl. Phys. Lett.* 76. 2000;24:3647-3649.
7. Blazhevich S.V., Kolosova I.V. and Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *J. Exp. Theor. Phys.* 2012;114:547-554.
8. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nucl. Instrum. Meth. B*. 2013;309:70-75.
9. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p.
10. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics:Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.

12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light Sci Appl*. 2023;12(1):148.
15. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223–234.
16. Blazhevich S.V., Drygina Yu.A., Shevchuk O.Yu., Noskov A.V. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586-595.
17. Носков А.В., Бондаренко В.А., Блажевич С.В., Юрьева А.А., Федосеев А.Э. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(2):183–192.
18. Носков А.В., Киперша В.К., Блажевич С.В., Плесканев А.А., Ильинский Р.Ю., Волошкина Е.В. Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(1):66-74.
19. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007.
20. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835.
21. Носков А.В., Блажевич С.В., Чуева А.И., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):59-67.

References

1. Nasonov NN., Kaplin VV., Uglov SR., Piestrup MA. and Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504.
2. Garibian GM. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky VG., Feranchuk ID. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Cerenkov emission of x-rays. *Physical Review A*. 1989; 40(8):4322.
5. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Phys. Lett. A*. 1998;246:148.
6. Kaplin VV. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Appl. Phys. Lett.* 76. 2000;24:3647-3649.
7. Blazhevich SV., Kolosova IV. and Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *J. Exp. Theor. Phys.* 2012;114:547-554.
8. Blazhevich SV., Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nucl. Instrum. Meth. B*. 2013;309:70-75.
9. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p.
10. Uglov SR., Kaplin VV., Kubankin AS. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev MV., Uglov SR., Vukolov AV. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light Sci Appl*. 2023;12(1):148.
15. Blazhevich SV., Noskov AV. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223–234.
16. Blazhevich SV., Drygina Yu.A., Shevchuk O.Yu., Noskov AV. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586-595.
17. Noskov AV., Bondarenko VA., Blazhevich SV., Yuryeva AA., Fedoseev AE. On the influence of multiple scattering on transition radiation in a single crystal. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(2):183–192 (In Russ.).

18. Noskov AV., Kipersha VK., Blazhevich SV., Pleskaney AA., Ilyinsky RYu., Voloshkina EV. Spectral-angular densities of transition radiation and diffracted transition radiation of relativistic electrons in a periodic layered medium. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(1):66-74 (In Russ.).
19. Noskov AV., Blazhevich SV. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007 (In Russ.).
20. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835.
21. Noskov A.V., Blazhevich S.V., Chueva A.I., Machukaev D.D., Kipersha V.K. The influence of asymmetric diffraction on the spectral-angular density of the CRI of a relativistic electron in a three-layer structure. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(1):59-67 (In Russ.).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.09.2025

Поступила после рецензирования 06.11.2025

Принята к публикации 20.11.2025

Received September 8, 2025

Revised November 6, 2025

Accepted November 20, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Носков Антон Валерьевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Мачукаев Дени Даудович – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Киперша Владислав Константинович – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Пугина Полина Дмитриевна – студентка факультета «Сети и системы связи», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Пирматова Мария Дмитриевна – студентка факультета «Информационные технологии», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anton V. Noskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Deni D. Machukaev – Graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia







Vladislav K. Kipersha – Graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Polina D. Pugina – Student of the Faculty of Networks and Communication Systems, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Maria D. Pirmatova – Student of the Faculty of Networks and Communication Systems, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Особенности электрических свойств композитного материала системы $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$

Аносов Н. В. , Вязьмин В. В. , Иванов О. Н. , Никулин И. С. , Никуличева Т. Б. , Тельпова О. А. 
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
nikulicheva@bsuedu.ru

Аннотация. В работе представлены результаты исследования особенностей электрофизических характеристик композитного микроструктурно-неоднородного материала системы сульфат кальция – фосфорная кислота – углерод. Изучены электропроводность и механизм проводимости образцов материала при комнатной температуре. Электропроводность материала оказалась достаточно большой и типичной для твердых электролитов.

Ключевые слова: сульфат кальция, твердый электролит, метод импедансной спектроскопии, ионная проводимость

Для цитирования: Аносов Н.В., Вязьмин В.В., Иванов О.Н., Никулин И.С., Никуличева Т.Б., Тельпова О.А. Особенности электрических свойств композитного материала системы $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):290–297. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-290-297 EDN PQQQGH

Short Communication

Features of Electrical Properties of Composite Material of the $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$ System

Nikita V. Anosov , Vitaly V. Vyazmin , Oleg N. Ivanov , Ivan S. Nikulin , Tatiana B. Nikulicheva ,
Olga A. Telpova 
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
nikulicheva@bsuedu.ru

Abstract. This paper presents the results of a study of the electrical properties of a microstructurally heterogeneous composite material consisting of a calcium sulfate, phosphoric acid, and carbon system. The electrical conductivity and conductivity mechanism of the material samples at room temperature were studied. The material's electrical conductivity was found to be quite high and typical of solid electrolytes.

Keywords: Calcium Sulfate, Solid Electrolyte, Impedance Spectroscopy Method, Ionic Conductivity

For citation: Anosov NV., Vyazmin VV., Ivanov ON., Nikulin IS., Nikulicheva TB., Telpova OA. Features of Electrical Properties of Composite Material of the $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$ System. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):290–297 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-290-297 EDN PQQQGH

1. Введение. Разработка стабильных твердых электролитов является важнейшим вопросом в решении проблем нехватки энергии, поскольку она может максимально повысить эффективность использования возобновляемых и устойчивых альтернативных источников энергии. Тем не менее немаловажным также является вопрос обеспечения безопасности эксплуатации устройств на основе твердых электролитов из-за использования легковоспламеняющихся органических электролитов [1]. Твердотельные литий-ионные аккумуляторы привлекли большой интерес благодаря негорючести твердых электролитов и дальнейшему повышению безопасности и надежности. Кроме того, неорганические твердые электролиты имеют более низкую электропроводность, лучшие электрохимические характеристики при высоких температурах и более широкий диапазон электрохимической стабильности, чем жидкие, полимерные и гелевые электролиты. К классификации проводящих материалов следует добавить также смешанные ионно-электронные проводники, сочетающие оба типа проводимости: электрический заряд переносится посредством движения свободных электронов и свободных или слабосвязанных положительно и/или отрицательно заряженных ионов [2, 3] Хотя эти привлекательные свойства неорганических твердых электролитов широко известны, их достаточно низкая ионная проводимость и плохая химическая и электрохимическая стабильность препятствуют их практическому использованию [4, 5]. В этом отношении разработка новых материалов для твердых электролитов остается актуальной задачей современного физического материаловедения. Одним из эффективных способов решения этой задачи является легирование твердых электролитов различными элементами для увеличения ионной проводимости при комнатной температуре как, например, описано в [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Целью данной работы является исследование возможности использования в качестве твердых электролитов композитных образцов, состоящих из матрицы сульфата кальция CaSO_4 , обработанного ортофосфорной кислотой H_3PO_4 , и углерода.

2. Получение и характеристика образцов композитного материала системы $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$. В качестве исходного материала для получения разрабатываемого твердотельного электролита использовали полугидрат сульфата кальция $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$. Сначала из цитрогипса, являющегося отходом биохимического производства лимонной кислоты, получали дигидрат сульфата кальция $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Оксидный состав цитрогипса приведен в таблице 1.

Таблица 1
Table 1

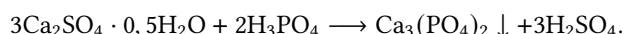
Химический состав цитрогипса
Chemical composition of citrogypsum

Оксид	SO_3	CaO	SiO_2	FeO	SrO	Al_2O_3	MgO	Na_2O	P_2O_5	K_2O
Содержание, %	55,47	43,36	0,54	0,15	0,14	0,13	0,06	0,04	0,08	0,03

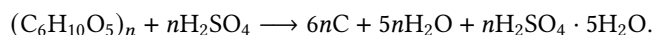
По результатам дифференциальной сканирующей калориметрии (ДСК) и термогравиметрического анализа (ТГ) было установлено, что цитрогипс представляет собой двухфазный материал, состоящий из дигидрата сульфата кальция $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (85 мас.%) и полугидрата сульфата кальция $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$ (15 мас. %).

Для получения исследуемого композитного материала был разработан следующий технологический процесс. Сначала цитрогипс был переведен в однофазный материал $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. Для этого просеивали 100 г исходного цитрогипса через сито 100 мкм. Затем цитрогипс растворяли с избытком в дистиллированной воде из расчета 250 мл H_2O на 10 г цитрогипса. Не растворившийся осадок отфильтровывали и сушили в сушильном шкафу при температуре 60°C в течение 2 ч. Полученный $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ выдерживали в сушильном шкафу при температуре 170°C в течение 4 часов. В результате $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ был полностью переведен в ангидрит сульфата кальция CaSO_4 , который далее выдерживали при комнатной температуре в течение 24 ч для превращения CaSO_4 в $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$. Полученный порошок обрабатывали при температуре 90°C в течение 15 мин в 85%-м водном растворе ортофосфорной кислоты H_3PO_4 из расчета 50 мл ортофосфорной кислоты на 20 г сухого вещества. После этого полученную смесь разбавляли 500 мл дистиллированной воды и отфильтровывали через бумажный фильтр с размером пор 2-3 мкм (синяя лента). После фильтрации порошок на бумажном фильтре сушили при комнатной температуре в течение 24 часов, а затем в сушильном шкафу при температуре 60°C в течение 5 суток. В процессе сушки происходило разрушение фильтровальной бумаги и порошок постепенно приобретал черный цвет. Фазовые превращения материала, выявленные для данного технологического процесса, определяются процессами гидратации, дегидратации, кислотно-основного взаимодействия и карбонизации, которые можно выразить следующими соответствующими реакциями.

1. Ортофосфорная кислота H_3PO_4 реагирует с полугидратом сульфата кальция $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$ (источник ионов Ca^{2+}), образуя фосфат кальция:



2. Серная кислота H_2SO_4 выступает как сильный дегидратирующий агент, разрывая гликозидные связи и отнимая воду от глюкозных звеньев целлюлозы, из которой состоит бумажный фильтр:



В результате выделяется практически чистый углерод в аморфной форме (черный углеродистый остаток), смешанный с гидратами, которые за счет капиллярного эффекта постепенно равномерно обволакивают частицы порошка сульфата кальция с небольшим содержанием фосфата кальция.

Из полученного порошкового материала методом одноосного прессования при давлении 5 МПа были скомпактированы объемные образцы диаметром 12 мм и толщиной 2 мм. Для прессования использовали универсальную испытательную машину Instron 3369. Прессование проводили без добавления воды в прессуемый порошок. Фотография типичного объемного образца на основе исходного порошка после обработки ортофосфорной кислотой и сушки на фильтровальной бумаге показана на рисунке 1 (слева). Для визуального сравнения приведена на рисунке 1 (справа) фотография объемного образца, исходный порошок для компактирования которого сушили не на бумажном фильтре, а на поверхности корундовой керамики. Объемный образец, полученный после его сушки на фильтровальной бумаге, имеет черный цвет, что связано с внедрением в этот образец аморфного углерода в процессе сушки, т. е. такой материал следует рассматривать как микроструктурно-неоднородный композитный материал,

состоящий из матрицы и наполнителя. Объемный образец, полученный после сушки на керамической поверхности, остается светло-серым, как и исходный порошок, т. е. его можно рассматривать как микроструктурно-однородный материал. То есть сушка скомпактированного образца на фильтровальной бумаге позволяет получить композитный материал на основе CaSO_4 с добавлением аморфного углерода, играющего роль наполнителя композита.

Рентгеноструктурный анализ полученного композитного материала проводили на дифрактометре Rigaku SmartLab с фокусировкой по Брэггу-Брентано с использованием CuK_α -излучения при напряжении 60 кВ и токе 60 мА. Съемки проводили в диапазоне углов 2θ от 5 до 80° . Шаг сканирования составлял $0,02^\circ$, время экспозиции – 20 с. На дифрактограмме (рисунок 2) наблюдаются рефлексы только от одной фазы – ангидрита сульфата кальция CaSO_4 .



Рис. 1. Фотографии объемного образца композитного микроструктурно-неоднородного материала $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{SO}_4\text{-C}$ после сушки на фильтровальной бумаге (слева), и объемного образца микроструктурно-однородного материала $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{SO}_4$ после сушки на поверхности корундовой керамики (справа)

Fig. 1. Photographs of a bulk sample of the composite microstructurally inhomogeneous material $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{SO}_4\text{-C}$ after drying on filter paper (left), and a bulk sample of the microstructurally homogeneous material $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{SO}_4$ after drying on the surface of corundum ceramics (right)

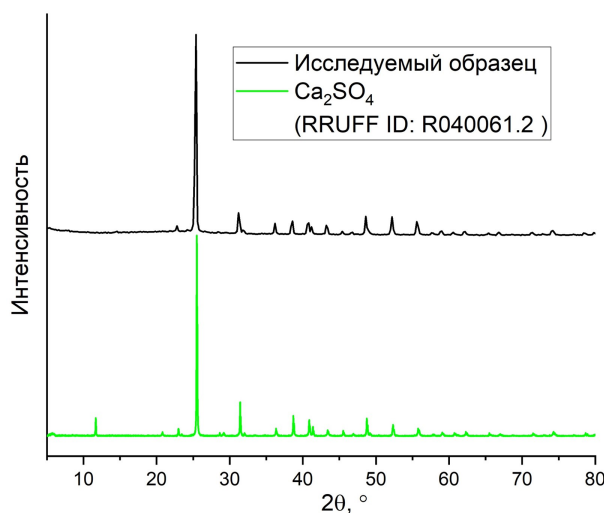


Рис. 2. Рентгеновский спектр исследуемого образца и положение пиков из базы данных RRUFF

Fig. 2. X-ray spectrum of the studied sample and peak positions from the RRUFF database

Аморфный углерод в композитном материале является рентгеноаморфным и на дифрактограмме не фиксируется. На данном этапе исследований его наличие в исследуемых образцах подтверждается только характерным черным цветом образцов и химическими превращениями, которые происходят в процессе обработки $\text{CaSO}_4 \cdot 0,5\text{H}_2\text{O}$ ортофосфорной кислотой и последующим взаимодействием

образовавшейся кислоты H_2SO_4 с материалом бумажного фильтра в процессе сушки. Также в образцах композитного материала, на основе EDX анализа, был обнаружен фосфор P (таблица 2). Наличие P обусловлено обработкой материала ортофосфорной кислотой и является ожидаемым [16]. Анализ выполняли с помощью сканирующего электронного микроскопа высокого разрешения Nova NanoSem 450, оснащенного EDX детектором.

Таблица 1

Table 1

Результаты EDX анализа исследуемого образца композитного материала системы $CaSO_4-H_3PO_4-C$

Results of EDX analysis of the studied sample of composite material of the $CaSO_4-H_3PO_4-C$ system

O, мас.%	Al, мас.%	Si, мас.%	P, мас.%	S, мас.%	K, мас.%	Ca, мас.%	Ni, мас.%
59,14	0,22	0,25	7,74	12,57	0,06	18,14	1,88

3. Электрические свойства образцов композитного материала системы $CaSO_4-H_3PO_4-C$. Электрические характеристики (тангенс угла диэлектрических потерь и полный импеданс, включающий действительную и мнимую части), образцов композитного материала изучали с помощью импедансного спектрометра Novocontrol Concept-43 в диапазоне частот 20–2400 Гц при комнатной температуре. Электрические контакты наносили серебряной проводящей пастой на контактные площадки противоположных граней образцов, к которым крепили измерительные зонды.

На рисунке 3 представлена частотная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь $\tan \delta$. С увеличением частоты $\tan \delta$ вначале быстро возрастает, при частоте $f = 820$ Гц достигает максимума, а затем медленно уменьшается, стремясь к постоянному значению. Вид кривой $\tan \delta(f)$ отражает частотную зависимость диэлектрических потерь с учетом влияния релаксационных механизмов и электропроводности материала. Наличие максимума на кривой $\tan \delta(f)$ свидетельствует о наличии релаксационных потерь в образце, поэтому для дальнейшего анализа особенностей его электрических свойств применяли метод диаграмм Коула – Коула.

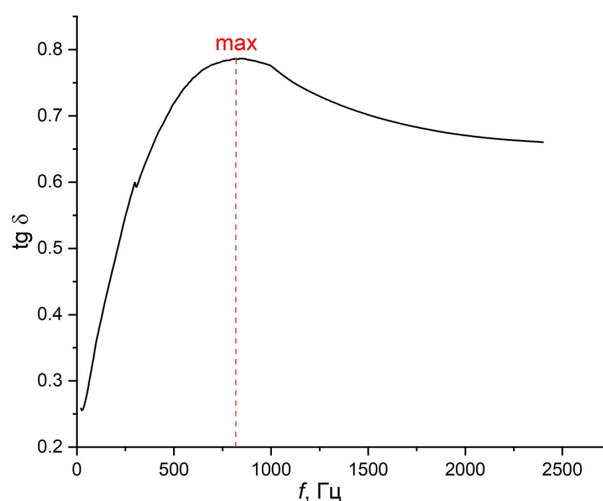


Рис. 3. Частотная зависимость тангенса угла диэлектрических потерь для образца композитного материала системы $CaSO_4-H_3SO_4-C$

Fig. 3. Frequency dependence of the dielectric loss tangent for a sample of composite material of the $CaSO_4-H_3SO_4-C$ system

Типичный вид спектра импеданса в координатах Найквиста (зависимость мнимой части полного импеданса $-Im(Z)$ от его действительной части $Re(Z)$) представлен на рисунке 4. Диаграмма Найквиста представляет собой одну дугу, близкую к полуокружности, что объясняется наличием одного механизма проводимости.

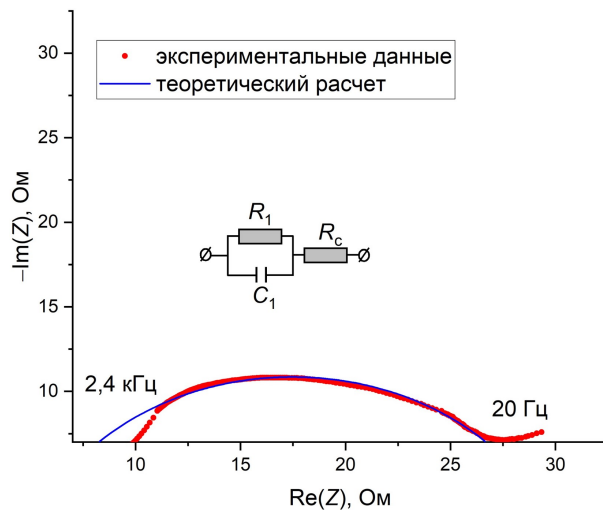


Рис. 4. Спектр импеданса и эквивалентная схема образца композитного материала системы $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{SO}_4\text{-C}$ при комнатной температуре

Fig. 4. Impedance spectrum and equivalent circuit of a sample of composite material of the $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{SO}_4\text{-C}$ system at room temperature

Эквивалентная схема, соответствующая такой диаграмме, также приведена на рисунке. Она состоит из контура, который включает параллельно подключенные сопротивление и емкость, а также сопротивления контактов и элемента постоянной фазы. Контур R_1C_1 , предположительно, характеризует проводимость по объему зеренных глобул, которые составляют матрицу сульфата кальция. Элемент постоянной фазы (прямой участок на рисунке 4) может быть связан с протонной диффузией в образце на основе сульфата кальция, обработанного ортофосфорной кислотой, при низких частотах [16]. Величина сопротивления ($Z_{\max} = (\text{Im}(Z)^2 + \text{Re}(Z)^2)^{-1/2} = 19,7 \text{ Ом}$) указывает на существенный вклад в проводимость аморфного углерода, т. к. сульфат кальция является диэлектриком. Для примера на рисунке 5 приведен спектр импеданса в координатах Найквиста для сульфата кальция, также обработанного при температуре 90°C в течение 15 мин в 85%-м водном растворе фосфорной кислоты, но высушенного на керамической подложке. Хорошо видно, что в отсутствие аморфного углерода сопротивление меняется более чем в 10 раз, полуокружность не завершенная.

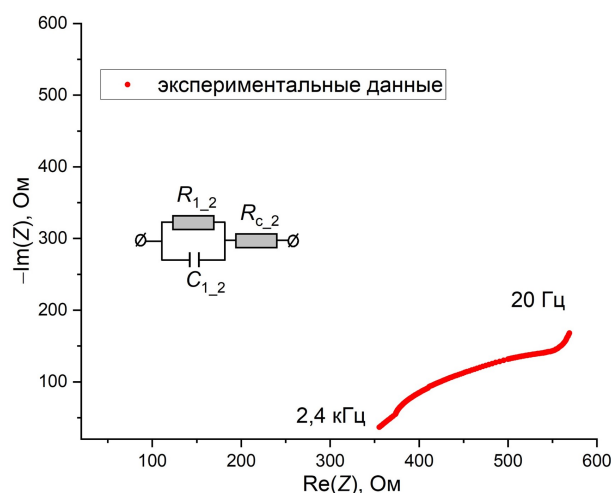


Рис. 5. Спектр импеданса образца, высушенного на керамической подложке, при комнатной температуре

Fig. 5. Impedance spectrum of a sample dried on a ceramic substrate at room temperature

Электрический импеданс модели Коула – Коула [17] на угловой частоте ω_i ($i = 1 \div N$) определяется как:

$$Z(\omega_i) = \text{Re}(Z)(\omega_i) + j\text{Im}(Z)(\omega_i) = R_\infty + \frac{R_0 - R_\infty}{1 + (R_0 - R_\infty)C(j\omega_i)^\alpha},$$

где $\text{Re}(Z)(\omega_i)$ – действительная часть полного сопротивления:

$$\operatorname{Re}(Z)(\omega_i) = R_\infty + \frac{(R_0 - R_\infty) \left(1 + \omega_i^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} (R_0 - R_\infty) C \right)}{\left(1 + \omega_i^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} (R_0 - R_\infty) C \right)^2 + \left(\omega_i^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} (R_0 - R_\infty) C \right)^2},$$

и $\operatorname{Im}(Z)(\omega_i)$ – мнимая часть полного сопротивления:

$$\operatorname{Im}(Z)(\omega_i) = - \frac{\left(\omega_i^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} (R_0 - R_\infty)^2 C \right)}{\left(1 + \omega_i^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} (R_0 - R_\infty) C \right)^2 + \left(\omega_i^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} (R_0 - R_\infty) C \right)^2}.$$

Коэффициент распределения времени релаксации α и время релаксации τ определяются как:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{b}{R},$$

$$\tau = \frac{\left(\frac{R_0 - R_\infty}{Z_c - R_\infty} - 1 \right)^{1/\alpha}}{\omega_c} \arccos \frac{b}{R},$$

где ω_c – частота, на которой абсолютное значение мнимой части полного сопротивления имеет максимум. Затем в соответствии с алгоритмом [17] определяются остальные параметры:

$$R_\infty = \operatorname{Re}(Z_c) + \frac{\operatorname{Im}(Z_c)}{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{4}},$$

$$R_0 = \operatorname{Re}(Z_c) - \frac{\operatorname{Im}(Z_c)}{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{4}},$$

$$C = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{4}}{2 \cdot \operatorname{Im}(Z_c) \omega_c^\alpha}.$$

Для исследуемого образца эти параметры были оценены как $R_\infty \approx 4,75$ Ом, $R_0 \approx 30,8$ Ом, $C \approx 0,2$ мкФ, $\alpha \approx 0,87$ и $\tau \approx 0,14$ мс.

4. Заключение. Таким образом, исследованы особенности электрических свойств композитного материала системы $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4\text{-C}$, полученного путем обработки сыпучего прессованного порошкообразного материала CaSO_4 85 мас.% водным раствором ортофосфорной кислоты с последующей сушкой на бумажном фильтре. Установлено, что введение углерода в систему $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4$ существенно влияет на электрофизические свойства. Наблюдается увеличение электропроводности более чем в 10 раз по сравнению с двухкомпонентной системой $\text{CaSO}_4\text{-H}_3\text{PO}_4$. Механизм проводимости носит преимущественно ионный характер. Полученные результаты демонстрируют перспективность исследуемой системы для применения в электротехнических устройствах. Выявленные закономерности могут быть использованы при разработке новых функциональных материалов.

Список литературы

1. Пехотиков В.А., Смелков Г.И., Назаров А.А., Грузинова О.И. Анализ нормативных требований в области обеспечения пожарной безопасности литий-ионных аккумуляторных батарей. *Актуальные проблемы пожарной безопасности*. 2020:487–493.
2. Lei C., Simpson M.F., Virkar A.V. Investigation of ion and electron conduction in the mixed ionic-electronic conductor-La-Sr-Co-Fe-oxide (LSCF) using alternating current (AC) and direct current (DC) techniques. *Journal of the Electrochemical Society*. 2022;169:014506.
3. Ghosh S., Majhi J., Sharma S., Priya K., Bandyopadhyay A. A review on the development of electron and ion conductive polymer hydrogels and their composites for flexible and smart supercapacitors. *Journal of Energy Storage*. 2023;74(B):109423.

4. Liu H.M., Saikia D., Wu C.G., Fang J., Kao H.M. Solid polymer electrolytes based on coupling of polyetheramine and organosilane for applications in electrochromic devices. *Solid State Ionics*. 2017;303:144–153.
5. Уваров Н.Ф., Пономарёва В.Г., Лаврова Г.В. Композиционные твердые электролиты *Электрохимия*. 2010;46;№7:772–784.
6. Гусейнов Р.М., Гаджиев С.М. Методы активации твердых электролитов. *Известия высших учебных заведений. Серия: Химия и химическая технология*. 2009;52;№11:3–6.
7. Wu Y., Ao X., Wang Y., Liu Y., Zhao S., Yang X., Zhou N. Innovative doping strategies for Li_2ZrC_6 solid electrolytes: A first-principles approach. *Journal of Energy Storage*. 2025;107:115017.
8. Kosir J., Mousavihashemi S., Suominen M., Kobets A., Wilson B.P., Rautama E.-L., Kallio T. Supervalent doping and its effect on the thermal, structural and electrochemical properties of $\text{Li}_7\text{La}_3\text{Zr}_2\text{O}_{12}$ solid electrolytes. *Advanced Materials*. 2024;5:5260–5274.
9. Ali A.A.A., Acharya S., Bhongale K., Shirbhate S., Kulkarni S., Joshi S. Investigation of Sr doping effect on oxygen ion de-localization in $\text{Gd}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ pyrochlore system and its influence on charge relaxation dynamics and ionic conductivity: as electrolyte for IT-SOFCs. *Ionics*. 2024;30:7293–7310.
10. Gupta M., Shirbhate S., Ojha P., Acharya S. Processing and conductivity behavior of La, Sm, Fe singly and doubly doped ceria: As electrolytes for IT-SOFCs. *Solid State Ionics*. 2018;320:199–209.
11. Nguyen M.H., Park S. Synergetic effect of Li-ion concentration and triple doping on ionic conductivity of $\text{Li}_7\text{La}_3\text{Zr}_2\text{O}_{12}$ solid electrolyte. *Nanomaterials*. 2022;12:2946.
12. Yang T., Li Y., Wu W., Cao Z., He W., Gao Y., Liu J., Li G. The synergistic effect of dual substitution of Al and Sb on structure and ionic conductivity of $\text{Li}_7\text{La}_3\text{Zr}_2\text{O}_{12}$ ceramic. *Ceramics International*. 2018;44:1538.
13. Dashjav E., Ma Q., Xu Q., Tsai C.-L., Giarola M., Mariotto G., Tietz F. The influence of water on the electrical conductivity of aluminum-substituted lithium titanium phosphates. *Solid State Ionics*. 2018;321:83–90.
14. Ivanov O.N., Trusova Ya.V. Electrical conductivity peculiarities of $\text{SrTiO}_3\text{-ZrO}_2$ ceramic system. *Ceramics International*. 2016;42:5245–5249.
15. Abe Y., Nishizaki S., Muroi T., Kato Y., Hench L.L. Conversion of gypsum into a superprotonic conductor. *Materials Research Innovations*. 2006;10:93–109.
16. Nikulin I., Nikulicheva T., Vyazmin V., Ivanov O., Anosov N., Telpova O. Effect of high-temperature treatment with orthophosphoric acid on the phase composition, elemental composition, microstructure and electrical properties of calcium sulfate hemihydrate. *Journal of Solid State Chemistry*. 2026;353:125656.
17. Simic M., Jeoti V., Stojanovic G.M. Parameter extraction of the Cole-impedance model for in-situ monitoring of electrochemical sources. *Journal of Energy Storage*. 2024;77:109895.

References

1. Pekhotikov V.A., Smelkov G.I., Nazarov A.A., Gruzina O.I. Analysis of regulatory requirements in the field of fire safety of lithium-ion batteries. *Current issues of fire safety*. 2020:487–493 (In Russ.).
2. Lei C., Simpson M.F., Virkar A.V. Investigation of ion and electron conduction in the mixed ionic-electronic conductor-La-Sr-Co-Fe-oxide (LSCF) using alternating current (AC) and direct current (DC) techniques. *Journal of the Electrochemical Society*. 2022;169:014506.
3. Ghosh S., Majhi J., Sharma S., Priya K., Bandyopadhyay A. A review on the development of electron and ion conductive polymer hydrogels and their composites for flexible and smart supercapacitors. *Journal of Energy Storage*. 2023;74(B):109423.
4. Liu H.M., Saikia D., Wu C.G., Fang J., Kao H.M. Solid polymer electrolytes based on coupling of polyetheramine and organosilane for applications in electrochromic devices. *Solid State Ionics*. 2017;303:144–153.
5. Uvarov N.F., Ponomareva V.G., Lavrova G.V. Composite solid electrolytes *Electrochemistry*. 2010;46;№7:772–784 (In Russ.).
6. Guseynov R.M., Gadzhiev S.M. Methods of Activation of Solid Electrolytes. *News of Higher Educational Institutions. Series: Chemistry and Chemical Technology*. 2009;52;№11:3–6 (In Russ.).
7. Wu Y., Ao X., Wang Y., Liu Y., Zhao S., Yang X., Zhou N. Innovative doping strategies for Li_2ZrC_6 solid electrolytes: A first-principles approach. *Journal of Energy Storage*. 2025;107:115017.
8. Kosir J., Mousavihashemi S., Suominen M., Kobets A., Wilson B.P., Rautama E.-L., Kallio T. Supervalent doping and its effect on the thermal, structural and electrochemical properties of $\text{Li}_7\text{La}_3\text{Zr}_2\text{O}_{12}$ solid electrolytes. *Advanced Materials*. 2024;5:5260–5274.
9. Ali A.A.A., Acharya S., Bhongale K., Shirbhate S., Kulkarni S., Joshi S. Investigation of Sr doping effect on oxygen ion de-localization in $\text{Gd}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ pyrochlore system and its influence on charge relaxation dynamics and ionic conductivity: as electrolyte for IT-SOFCs. *Ionics*. 2024;30:7293–7310.
10. Gupta M., Shirbhate S., Ojha P., Acharya S. Processing and conductivity behavior of La, Sm, Fe singly and doubly doped ceria: As electrolytes for IT-SOFCs. *Solid State Ionics*. 2018;320:199–209.
11. Nguyen M.H., Park S. Synergetic effect of Li-ion concentration and triple doping on ionic conductivity of $\text{Li}_7\text{La}_3\text{Zr}_2\text{O}_{12}$ solid electrolyte. *Nanomaterials*. 2022;12:2946.

12. Yang T., Li Y., Wu W., Cao Z., He W., Gao Y., Liu J., Li G. The synergistic effect of dual substitution of Al and Sb on structure and ionic conductivity of $\text{Li}_7\text{La}_3\text{Zr}_2\text{O}_{12}$ ceramic. *Ceramics International*. 2018;44:1538.
13. Dashjav E., Ma Q., Xu Q., Tsai C.-L., Giarola M., Mariotto G., Tietz F. The influence of water on the electrical conductivity of aluminum-substituted lithium titanium phosphates. *Solid State Ionics*. 2018;321:83–90.
14. Ivanov O.N., Trusova Ya.V. Electrical conductivity peculiarities of $\text{SrTiO}_3\text{-ZrO}_2$ ceramic system. *Ceramics International*. 2016;42:5245–5249.
15. Abe Y., Nishizaki S., Muroi T., Kato Y., Hench L.L. Conversion of gypsum into a superprotonic conductor. *Materials Research Innovations*. 2006;10:93–109.
16. Nikulin I., Nikulicheva T., Vyazmin V., Ivanov O., Anosov N., Telpova O. Effect of high-temperature treatment with orthophosphoric acid on the phase composition, elemental composition, microstructure and electrical properties of calcium sulfate hemihydrate. *Journal of Solid State Chemistry*. 2026;353:125656.
17. Simic M., Jeoti V., Stojanovic G.M. Parameter extraction of the Cole-impedance model for in-situ monitoring of electrochemical sources. *Journal of Energy Storage*. 2024;77:109895.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 02.10.2025

Поступила после рецензирования 19.11.2025

Принята к публикации 21.11.2025

Received October 2, 2025

Revised November 19, 2025

Accepted November 21, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Аносов Никита Витальевич – младший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Вязьмин Виталий Владимирович – младший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Иванов Олег Николаевич – ведущий научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Никулин Иван Сергеевич – заведующий лабораторией физико-химических методов исследования растений, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Никуличева Татьяна Борисовна – заведующий лабораторией перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Тельпова Ольга Александровна – младший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikita V. Anosov – Junior Researcher, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Vitaly V. Vyazmin – Junior Researcher, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Oleg N. Ivanov – Leading Researcher, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Ivan S. Nikulin – Head of the Laboratory of Physical and Chemical Methods of Plant Research, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Tatiana B. Nikulicheva – Head of the Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Olga A. Telpova – Junior Researcher, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Кластерное разложение вероятности перколяции на дереве Кэйли

Вирченко Ю. П.^{id}, Пашкова В. С.^{id}

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308000, г. Белгород, ул. Костюкова, 46
virch@bsuedu.ru

Аннотация. Изучается однородное бернуллиевское случайное поле на бесконечном однородном графе типа дерева Кэйли со степенью вершин $s = 3$. Для вероятности перколяции $P(c)$ случайного поля на бесконечность из фиксированной вершины графа, которая является функцией от вероятности c заполнения вершин, строится кластерное разложение. Находятся гарантированные оценки точности ее аппроксимаций посредством частичных сумм разложения и показывается, что это разложение сходится всюду при $c \in (0, 1)$ так, что порог перколяции c_* не является особой точкой с точки зрения сходимости разложения.

Ключевые слова: бернуллиевское случайное поле, марковская цепь с ветвлением, надкритический режим, порог перколяции, кластерное разложение

Для цитирования: Вирченко Ю.П., Пашкова В. С. Кластерное разложение вероятности перколяции на дереве Кэйли. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):298–305. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-298-305 EDN YCXVFM

Original Research

Cluster Expansion of the Percolation Probability on a Caley Tree

Yuri P. Virchenko^{id}, Valery S. Pashkova^{id}

Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,
46 Kostykova St., Belgorod 308012, Russia
virch@bsuedu.ru

Abstract. The Bernoulli uniform random field on the infinite uniform Caley tree with the vertex degree $s = 3$ is investigated. For this graph, the percolation probability $P(c)$ of the random field from a marked graph vertex to infinity is studied, where it is a function on the vertex filling c . The famous cluster decomposition of the function $P(c)$ is constructed for the graph. Some guaranteed estimates of the accuracy of its approximations are found when they are built by means of partial sums of the decomposition. It is shown that the decomposition converges everywhere in $(0, 1)$ such that the percolation threshold c_* is not a special point from the decomposition convergence viewpoint.

Keywords: Bernoulli's Random Field, Branching Markov Chain, Supercritical Regime, Percolation Threshold, Cluster Expansion

For citation: Virchenko YuP., Pashkova VS. Cluster Expansion of the Percolation Probability on a Caley Tree. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):298–305 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-298-305 EDN YCXVFM

1. Введение. Возникшая в статистической физике, в процессе математического моделирования неупорядоченных сред [1], [2], [3] теория перколяции представляет, в настоящее время, направление исследований, находящееся на стыке между теорией вероятностей и математической физикой или, более общо, математического моделирования. В этой теории разработан адекватный математический язык, позволяющий, в частности, математически описывать на его основе среды со всевозможными случайными нарушениями пространственно упорядоченной внутренней структуры и сформулировать на этом языке математические задачи, направленные на вычисление физических характеристик таких сред, которые связаны только лишь с их стохастической геометрией. Одной из самых важных из таких характеристик является вероятность перколяции P , которая описывает количественно физический эффект перколяции (просачивания), то есть способность среды, опираясь на какое-то понятие пространственной связности элементов, из которых она состоит, устанавливать связи между элементами, удаленными на большие расстояния. Само понятие связности определяется, конечно же, в соответствии с конкретными физическими свойствами изучаемой среды. Эффект перколяции, в частности, заключается в том, что связность между удаленными элементами среды может исчезать и появляться в процессе изменения параметров изучаемой физической системы. Вероятность же перколяции, в этом случае, является функцией этих параметров. Она может, в соответствии со сказанным, обращаться в нуль или принимает ненулевые значения при прохождении параметров системы каких-то пороговых значений.

Несмотря на успехи на начальной стадии развития теории перколяции, которые были связаны, главным образом, с компьютерными экспериментами в простейшей, с математической точки зрения,

ситуации, случайное состояние среды допускало математическое моделирование на основе точечного бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{\rho}(x); x \in V\}$ на некотором бесконечном графе $\langle V, \Phi \rangle$ со счетным множеством вершин V и бинарным отношением смежности Φ . Такое допущение возможно в том случае, когда состояние системы можно охарактеризовать одним параметром $c \in (0, 1)$, который, для любой вершины графа $x \in V$, имеет смысл вероятности события $\{\tilde{\rho}(x) = 1\}$. В описанной ситуации вероятность перколяции из этой вершины на сколь угодно большое удаление от нее является функцией $P(c)$ только одного этого параметра. Эффект перколяции состоит в том, что интервал $(0, 1)$ изменения параметра c разбивается на полуинтервал $(0, c_*)$, где $P(c) = 0$ и интервал $(c_*, 1)$, в котором $P(c) > 0$.

Для моделей теории перколяции, связанных с бернуллиевскими случайными полями на довольно простых бесконечных периодических графах (см., например, [4]), удалось численно определить пороги c_* перколяции, используя метод Монте-Карло, то есть на основе обработки статистических данных, получаемых посредством компьютерных датчиков случайных чисел. В некоторых совершенно простых случаях удалось вычислить пороги перколяции точно. Однако, что касается развития аналитических результатов в математической теории перколяции, то, в настоящее время, здесь поставлено гораздо больше непростых вопросов, чем полученных математически обоснованных результатов (см., например, [4], [5]). В частности, это утверждение относится к задаче вычисления вероятности перколяции $P(c)$ для бернуллиевского случайного поля на периодических графах. Основным аналитическим инструментом при решении этой задачи является т. н. кластерное разложение. Несмотря на то, что, посредством несложных вероятностных рассуждений легко устанавливается сходимость этого разложения на полуинтервале $(c_*, 1]$, вместе с тем точность получаемых на его основе аппроксимаций перколяции $P(c)$ удастся оценивать очень грубо на основе оценки сверху решения комбинаторной задачи о числе конечных кластеров с заданной мерой их границы. Грубость этих оценок заключается в том, что их область сходимости составляет такой полуинтервал значений $(c_*, 1]$, для которого точка c_+ , как правило, существенно превосходит c_* . Различные попытки изменения оценок такого рода (см., например, [6]–[8]) приводили лишь к незначительным улучшениям. В этой связи возникает естественный вопрос, а возможно ли, в принципе, решение задачи о вычислении вероятности перколяции $P(c)$ в окрестности точки c_* посредством последовательных приближений на основе кластерного разложения с гарантированными оценками точности. Результат, полученный в настоящей работе, дает некоторую надежду на положительный ответ.

2. Постановка задачи. Неориентированный граф Γ представляет собой пару $\langle V, \Phi \rangle$, в которой V – множество, элементы которого называются *вершинами*, а Φ – множество парных множеств с элементами из V , которые называются *ребрами*, связывающими вершины, входящие в эти множества. Множество Φ называется отношением смежности на графе. Вершины графов мы будем обозначать посредством букв латинского алфавита x, y, z, u, v, w , а факт смежности пары $\{x, y\}$, то есть ее принадлежности к Φ будем записывать как $\varphi(x, y)$.

Путем $\gamma(x, y)$ с начальной вершиной x и конечной – y называется последовательность $\langle x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \rangle = \gamma(x, y)$ длины $n + 1$, в которой имеет место $\varphi(x_{j-1}, x_j)$, $j = 1 \div n$. Длину пути $\gamma(x, y)$ будем обозначать посредством $|\gamma(x, y)|$. Далее, говоря о путях на графе, мы будем всегда предполагать, что они обладают свойством невозвратности, то есть $x_{j+1} \neq x_{j-1}$, $j \in I_{n-1}$ для любой длины n .

Пара $\{x, y\}$ вершин графа называется связанной, если на графе существует путь $\gamma(x, y)$. Если пара вершин связана на Γ , то мы будем этот факт записывать в виде $\psi(x, y)$. Бинарное отношение ψ является, очевидным образом, симметричным. Оно также является рефлексивным, если установить, по определению, что на графе Γ всегда существуют пути $\gamma(x, x)$ нулевой длины для любой вершины $x \in V$. Несложно доказываем, что отношение ψ является транзитивным, то есть для любых трех вершин x, y, z из $\psi(x, y)$ и $\psi(y, z)$ следует, что имеет место $\psi(x, z)$. Таким образом, отношение ψ является *отношением эквивалентности*. Оно разбивает все множество V вершин на непересекающиеся множества эквивалентных друг другу вершин. Они называются связными компонентами графа Γ . Граф называется связным, если он состоит только из одной связной компоненты.

Пусть Γ – бесконечный связный граф со множеством вершин V со счетной мощностью. Степенью вершины x графа будем называть число $s \in \mathbb{N}$, определяемое как число элементов в множестве $\{y \in V : \varphi(x, y)\}$.

Путь $\langle x = x_0, x_1, \dots, x_n = y \rangle = \gamma(x, y)$ длины n на графе называется *несамопересекающимся*, если $x_j \neq x_k$ для любой пары $\{j, k\} \in I_n \cup \{0\}$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Класс всех *несамопересекающихся* путей на графе Γ обозначим посредством \mathcal{G} . Расстоянием между двумя вершинами x и y на графе называется число

$$r(x, y) = \min\{|\gamma(x, y)|; \gamma(x, y) \in \mathcal{G}\}.$$

Связный граф Γ называется *древесным*, если на нем все пути являются *несамопересекающимися*.

Определение 2.1. *Деревом Кэйли степени s называется древесный граф, у которого степени всех вершин совпадают и равны s .*

Очевидно, что дерево Кэйли полностью характеризуется указанием степени своих вершин, которая принимает значения $s \geq 2$. При $s = 2$ дерево Кэйли не представляет интереса с точки зрения теории перколяции, так как для него $P(c) = 0$ при $c \neq 1$. В этой работе мы будем рассматривать дерево Кэйли степени $s = 3$.

Пусть на графе Γ , который, в соответствии со сказанным, является деревом Кэйли со степенью 3, задано однородное бернуллиевское случайное поле $\{\rho(x) \in \{0, 1\}; x \in V\}$. Его распределение вероятностей полностью определяется условием статистической независимости всех случайных величин $\rho(x)$, $x \in V$ и значением вероятности $\Pr\{\rho(x) = 1\} = c \in (0, 1)$.

Каждая случайная реализация $\tilde{\rho}$ поля определяет подграф $\Gamma[\rho] = \langle V(\rho), \Phi(\rho) \rangle$ с множеством вершин $V(\rho) = \{x : \rho(x) = 1\}$ и определяемым наследственным образом отношением смежности. Этот подграф уже не является, в общем случае, связанным. Его связные компоненты W называются *кластерами*. Пусть $\mathcal{W}(\rho)$ — класс всех кластеров графа $\Gamma(\rho)$. Число вершин в кластере W , если таких вершин конечное множество, будем обозначать посредством $|W|$. Если же это множество бесконечно, то будем писать $|W| = \infty$, а кластер будем называть *бесконечным*.

Отметим на графе Γ какую-либо из вершин, которую будем называть начальной и отмечать посредством 0 . Если эта вершина принадлежит бесконечному кластеру, то будем говорить, что из этой вершины имеется перколяция. Наличие перколяции из вершины 0 эквивалентно тому, что имеется бесконечный несамопересекающийся путь $\gamma(0)$. Функция $P(c)$, о которой шла речь во введении, определяется как вероятность $P(c) = \Pr\{\exists \gamma(x) : |\gamma(x)| = \infty\}$. Если при данном значении $c \in (0, 1)$ вероятность $P(c)$ того, что случайные реализации ρ обладают перколяцией, положительна, то говорят, что при этом значении c имеется перколяция на графе Γ . Задача состоит в том, чтобы определить для графа Γ множество значений c , которые обладают таким свойством.

Лемма 2.1. Вероятность $P(c)$ перколяции на дереве Кэйли не зависит от $x \in V$.

Доказательство. Ввиду постоянства степеней всех вершин для графа Γ и отсутствия в нем самопересекающихся путей возможно ввести следующее преобразование T трансляции. Оно определяется индуктивно для каждой вершины, согласно ее расстоянию от вершины 0 . Выберем одну из вершин $R_1 = \{e_j; j \in \{1, 2, 3\}\}$, смежных с вершиной 0 , например e_1 , и положим $T0 = e_1$. Вершина e_1 имеет три смежных вершины. Обозначим множество этих вершин посредством R'_1 (оно содержит вершину 0). Установим каким-то образом биекцию множества R_1 на множество R'_1 . Далее, рассмотрим множество из шести вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины 0 . Установим биекцию этого множества на множество R'_2 вершин, находящихся на расстоянии 2 от вершины e_1 . Причем эту биекцию можно сделать так, что каждая пара вершин, смежных с вершиной e_j , $j \in \{1, 2, 3\}$ из R_1 , перейдет в пару вершин, смежных с образом Te_j в R'_1 . Такую биекцию можно всегда построить, так как на рассматриваемом графе – дереве Кэйли со степенью 3 не имеется самопересекающихся путей, и поэтому при выборе вершин множества R'_2 используются вершины, которые не рассматривались на предыдущем шаге.

Продолжим процесс построения, рассматривая последовательно множества R_m всех вершин, находящихся на расстояниях m от вершины 0 . Они состоят, соответственно, из $3 \cdot 2^{m-1}$ вершин. Эти множества отображаются биективно, соответственно, в множества R'_m вершин, находящихся на расстоянии m от вершины e_1 , $m = 1, 2, \dots, n$, которые содержат точно такое же количество вершин. При этом каждое из множеств R'_m состоит из вершин, которые не использовались на предыдущих шагах построения. Рассуждая по индукции, определим биекцию множества R_{n+1} , состоящего из $3 \cdot 2^n$ вершин, находящихся на расстоянии $n + 1$ от вершины 0 , на множество R'_{n+1} , которое состоит из такого же количества вершин, которые находятся на расстоянии $n + 1$ от вершины e_1 . При этом биекция может быть определена так, что она отображает каждую пару вершин из R_{n+1} , смежных с какой-то вершиной $x \in R_n$, в пару вершин из R'_{n+1} , смежных с вершиной Tx . Это возможно в силу того, что степень вершин графа равна 3, и того, что в множество R'_{n+1} входят вершины графа, которые не рассматривались на предыдущих шагах построения.

Продолжая описанный процесс построения неограниченно, увеличивая расстояние n до вершины 0 , определим полностью требуемое отображение T . Так вероятность $\Pr\{\rho(x) = c\}$ не зависит от x , то распределения вероятностей на графах Γ и $T\Gamma$ совпадают. Поэтому вероятность перколяции из вершины 0 на исходном графе Γ совпадает с вероятностью перколяции из вершины $T0$ на графе $T\Gamma$. ■

3. Кластерное разложение. Задача о вычислении вероятности перколяции на дереве Кэйли Γ со степенью $s = 3$ решается точно так, что функция $P(c)$ выражается в виде элементарной функции. В самом деле, представим граф Γ в виде склейки трех подграфов Γ_j , $j = 1, 2, 3$ с общей вершиной 0 . Множествами вершин каждого подграфа с фиксированным значением $j \in \{1, 2, 3\}$ являются $V_j \cup \{0\}$, где V_j – множество всех вершин, до которых можно добраться из начальной вершины 0 по пути с начальным ребром $\langle 0, x_j \rangle$. Ребра подграфа Γ_j состоят из всех ребер, инцидентных вершинам из V_j .

Пусть $Q(c)$ – условная вероятность того, что пересечение бесконечного кластера W , в котором расположен бесконечный путь, реализующий перколяцию, с множеством V_j вершин подграфа Γ_j , конечно, при условии, что $\{\tilde{\rho}(0) = 1\}$. Тогда, вследствие статистической независимости случайного поля на множествах вершин V_j каждого из подграфов Γ_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, вероятность $P(c)$ равна $(1 - Q^3(c))$, так как,

в случае существования перколяции с ненулевой вероятностью на графе Γ , она должна существовать, с ненулевой вероятностью, по крайней мере, на каком-нибудь из подграфов Γ_j , $j \in \{1, 2, 3\}$. Таким образом, нужно вычислить вероятность $Q(c)$.

Точно так же рассуждая, находим, что условная вероятность перколяции из вершины e_j при условии, что $\rho(e_j) = 1$ равна $Q^2(c)$, так как подграф Γ_j представляется в виде склейки по вершине e_j двух изоморфных ему подграфов $\Gamma_{j,1}$ и $\Gamma_{j,2}$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Так как случайное событие, состоящее в отсутствии перколяции из вершины e_j на графе Γ_j , складывается из суммы двух несовместимых событий: $\{\rho(e_j) = 0\}$ и

$$\{\rho(e_j) = 1, \mathbb{C}\{\exists(\gamma(e_j) : |\gamma(e_j)| = \infty, \{\gamma(e_j)\} \subset V_j)\}\},$$

то вероятность $Q(c)$ подчинена квадратному уравнению

$$Q(c) = 1 - c + cQ^2(c). \quad (1)$$

При $c \leq 1/2$ это уравнение имеет единственное решение $Q(c) = 1$, удовлетворяющее условию $0 \leq Q(c) \leq 1$, а при $c > 1/2$, кроме этого решения, имеется еще одно $Q(c) = (1 - c)/c$, так как только в этом случае $(1 - c)/c \leq 1$.

Сформулируем доказанное утверждение в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.1. Вероятность перколяции на дереве Кэйли со степенью $s = 3$ имеет вид $P(c) = c(1 - Q(c))^3$, где функция $Q(c)$ подчинена уравнению (1), которое при $c > 1/2$ имеет два решения $Q(c) = 1$ и $Q(c) = (1 - c)/c$.

Очевидно, что порогом перколяции у рассматриваемой модели является значение $c_* = 1/2$. Однако для установления этого факта нужно указать, что при $c > 1/2$ из двух возможных решений уравнения (1) необходимо выбирать функцию $(1 - c)/c$. Но для этого требуются соображения, связанные с непрерывностью функции $Q(c)$. Однако нас в этой работе интересует не само решение, которое находится элементарными методами, а то, как быстро сходится к истинному решению $Q(c)$ уравнения (1) кластерное разложение, формируемое посредством вероятностных соображений.

Пусть $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ – связный граф и $\{\rho(x); x \in V\}$ – бернуллиевское случайное поле на V с вероятностью заполнения вершин $\Pr\{\rho(x) = 1\} = c$, $x \in V$. Пусть \mathcal{W}_0 – класс всех конечных кластеров на графе Γ , содержащих вершину 0 . Каждой реализации случайного поля ρ соответствует класс $\mathcal{W}(\rho)$ кластеров.

Так как событие $\{\rho(x) = 1\}$ реализуется в тех случаях, когда эта вершина x содержится в каком-то однозначно определяемом конечном кластере W , либо она содержится в бесконечном кластере и поэтому существует несамопересекающийся бесконечный путь γ с началом в этой вершине, то это событие представимо в виде дизъюнктивного разложения

$$\{\rho(x) = 1\} = \left(\bigcup_{W \in \mathcal{W}_0} \{W \ni x : W \in \mathcal{W}(\rho)\} \right) \cup \{W \ni x : \exists(\gamma(x) : |\gamma(x)| = \infty, \{\gamma(x)\} \subset W \in \mathcal{W}(\rho))\}.$$

Следовательно, имеет место разложение

$$c = \sum_{W \ni x: W \in \mathcal{W}_0} P[x; W] + P(c), \quad (2)$$

где

$$P[x; W] = \Pr\{W \ni x : W \in \mathcal{W}(\rho)\}$$

есть вероятность того, что вершина x принадлежит конечному кластеру, который содержится в классе $\mathcal{W}(\rho)$ всех конечных кластеров, порождаемых случайной реализацией ρ . Из разложения (2) следует, что вероятность перколяции $P(c)$ представима в виде

$$P(c) = c - \sum_{W \ni 0: W \in \mathcal{W}_0} P[0; W]. \quad (3)$$

Представление вероятности перколяции из вершины 0 мы будем называть ее *кластерным разложением*. Сумма в правой части (3) заведомо сходится при любом значении c , так как $P(c) \geq 0$. Нашей целью является установление того, с какой скоростью реализуется сходимость этого ряда и тем самым найти гарантированные оценки точности аппроксимаций вероятности $P(c)$ посредством его частичных сумм.

4. Перколяция на Γ и марковские цепи с марковским измельчением. Применим для оценки вероятностей $P[0; W]$ представления теории марковских цепей с марковским измельчением.

Сконструируем древесный граф Γ'_1 с начальной вершиной e_1 такой, что его склейка с ребром $\{0, e_1\}$ в этой вершине представляет введенный выше граф Γ_1 . Представим множество вершин V' графа Γ'_1 в виде дизъюнктивного разложения

$$V' = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m, \quad V_0 = \{e_1\}$$

где V_m – множество вершин в m -го поколения, определяемые индуктивно как $V_{m+1} = V_m \times I_2$, $I_2 = \{1, 2\}$, то есть $V_m = I_2^m$ при $m \in \mathbb{N}$. Вершины множества V_m обозначим метками в виде $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$ последовательностей длины m , в которых $j_k \in \{1, 2\}$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Причем отношение смежности на графе Γ'_1 строится указанием при каждом $m = 0, 1, 2, \dots$ смежных пар $\{\langle j_1, \dots, j_m \rangle, \langle j_1, \dots, j_m, j_{m+1} \rangle\}$, $j_{m+1} \in \{1, 2\}$ для каждой вершины, описываемой последовательностью $\langle j_1, \dots, j_m \rangle$.

Сопоставим бернуллиевскому случайному полю $\{\rho(x); x \in V'\}$ специальный случайный процесс $\{S_m; m \in \mathbb{N}_+\}$ с дискретным временем $m \in \mathbb{N}_+$. Он является марковской цепью общего вида [9]. При каждом значении m состояние процесса S_m является подмножеством в V_m , $S_m \subset V_m$. Таким образом, конструируемый случайный процесс обладает изменяющимся пространством состояний.

Пусть W – случайное множество на V' такое, что $W = \{x \in V' : \tilde{\rho}(x) = 1\}$. Тогда S_m является множеством заполненных узлов в m -м поколении, $S_m = W \cap V_m$. Для фиксированного $S_m \subset V_m$ множество $S_m \times I_2 \subset V_{m+1}$ содержит множество S_{m+1} заполненных вершин случайной реализации W в следующем поколении. Таким образом, траекториями случайного процесса являются последовательности $\langle S_0 = V_0, S_1, S_2, \dots, S_m, \dots \rangle$, где $S_{m+1} \subset S_m \times I_2$. Определим для них операцию проектирования $\text{pr}[S_{m+1}] = S_m$, $m \in \mathbb{N}_+$. Если на графе имеется перколяция, то последовательность множеств $\langle S_0 = V_0, S_1, S_2, \dots, S_m, \dots \rangle$ бесконечна и, наоборот, траектория случайного процесса обрывается в какой-то момент времени, если на случайной реализации W не существует какого-либо бесконечного пути $\gamma(e_1)$, то есть вершина e_1 принадлежит конечному кластеру.

Обозначим посредством $P_m[S]$ вероятность события, которое состоит в том, что в момент m траектория случайного процесса будет находиться в состоянии $S \subset V_m$. Тогда $\text{Pr}\{\tilde{\rho}(x) = 1\} = c$ и поэтому $P_0[e_1] = c$. Кроме того, $P_1[S] = c^{|S|}(1-c)^{2-|S|}$, $S \subset I_2 = V_1$. Так как случайное поле на графе Γ'_1 бернуллиевское и граф Γ'_1 древесный, то при $m > 1$ вероятности $P_m[\cdot]$ вычисляются на основе следующего рекуррентного соотношения

$$P_{m+1}[S'] = \text{Pr}\{\tilde{S}_{m+1} = S'\} = P_m[S]c^{|S'|}(1-c)^{2|S|-|S'|}, \quad (4)$$

где $\text{pr}[S'] = S$, а, в противном случае, если между множествами $S \subset V_m$ и $S' \subset V_{m+1}$ такая связь отсутствует, то $P_{m+1}[S'] = 0$. Это означает, что конструируемый случайный процесс с дискретным временем является марковским. Такого типа случайные процессы были введены при конструировании *случайных множеств фрактального типа*, обладающих дробной размерностью Хаусдорфа-Безиковича (см. [10], [11]). Для их обозначения мы используем термин *марковские цепи с марковским измельчением*. Они связаны с ветвящимися марковскими процессами [12].

Используя уравнение связи (4), получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. Вероятность $P_n(S|0, S-1, \dots, S_{n-1})$ того, что случайный процесс $\{S_m \in V_m; m \in \mathbb{N}_+\}$ вплоть до момента $n \in \mathbb{N}$ обладает траекторией $\langle S_m \in V_m; m \in \{0, 1, \dots, n-1\}; S_n = S \rangle$, у которой $S_j \neq \emptyset$, $S_j \subset S_{j-1} \times I_2$, $j = 0 \div n$, равна

$$P_n(S|0, S_1, \dots, S_{n-1}) = c^{|S|+1}(1-c)^{2-|S_1|}c^{|S_2|}(1-c)^{2|S_1|-|S_2|} \dots c^{|S|}(1-c)^{2|S_{n-1}|-|S|}. \quad (5)$$

5. Оценка точности частичных сумм кластерного разложения. Обозначим посредством P_n вероятность того, что траектория случайного процесса $\{S_m; m \in \mathbb{N}_+\}$, сопоставленного бернуллиевскому случайному полю на графе Γ'_1 , конечна и обрывается на n -м шаге, то есть $S_{n+1} = \emptyset$, $S_n \neq \emptyset$. Тогда вероятность $Q(c)$ отсутствия перколяции на графе Γ_1 выражается в виде ряда

$$Q(c) = 1 - c + \sum_{n=0}^{\infty} P_n,$$

который можно рассматривать как аналог кластерного разложения вероятности $Q(c)$ на Γ_1 .

При $n = 0$ имеем $P_0 = c(1-c)^2$. А при $n \in \mathbb{N}$, согласно (5), –

$$P_n = c \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} P_n(S_n|S_1, \dots, S_{n-1}) = c \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} (1-c)^{2|S_n|} \prod_{j=1}^n c^{|S_j|} (1-c)^{2|S_{j-1}|-|S_j|}. \quad (6)$$

Введем параметр

$$\eta = c(1-c) \in (0, 1/4).$$

Учитывая, что $|S_0| = 1$, находим, что

$$(1-c)^{2|S_n|} \prod_{j=1}^n c^{|S_j|} (1-c)^{2|S_{j-1}|-|S_j|} = (1-c)^2 \prod_{j=1}^n c^{|S_j|} (1-c)^{2|S_j|-|S_j|} = (1-c)^2 \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|}.$$

Таким образом, из разложения (6) следует

$$P_n \equiv c(1-c)^2 Q_n(\eta) = c(1-c)^2 \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|}, \quad (7)$$

то есть справедлива

Теорема 5.1. Вероятность P_n того, что траектория случайного процесса $\{S_m; m \in \mathbb{N}_+\}$, сопоставленного бернуллиевскому случайному полю на графе Γ'_1 , и обрывается на n -м шаге определяется формулой (7).

Теперь, нашей задачей является получение такой оценки для функций

$$Q_n(\eta) = \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|},$$

которая бы позволяла устанавливать гарантированную точность аппроксимаций для функции $Q(\eta)$, получаемых на основе частичных сумм ряда в (7).

Запишем выражение для функции $Q_{n+1}(\eta)$ в виде

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(\eta) &= \sum_{\substack{\langle S_1, S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \sum_{\emptyset \neq S_1 \subset I_2} \eta^{|S_1|} \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \\ &= \eta \sum_{S_1 \in \{\{1\}, \{2\}\}} \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} + \eta^2 \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|}. \end{aligned} \quad (8)$$

С каждым из двух слагаемых при выборе $S_1 = \{k\}$, $k \in \{1, 2\}$ произведем следующее преобразование. Так как в каждом из них происходит суммирование по наборам $\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle$, у которых $S_2 \subset \{k\} \times I_2$ и $S_j \subset S_{j-1}$, $j = 3 \div n+1$ с фиксированным k , то в каждой из этих сумм заменим переменные суммирования $S_2 \Rightarrow S_1 \in I_2$ и $S_{j+1} \Rightarrow S_j$ с тем же условие суммирования $\emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2$, $j = 2 \div n$. В результате оба слагаемых первой суммы в (8), соответствующие $k \in \{1, 2\}$, принимают одинаковый вид, и поэтому эта первая сумма равна

$$\eta \sum_{S_1 \in \{\{1\}, \{2\}\}} \sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \sum_{\substack{\langle S_1, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S_j|} = 2\eta Q_n(\eta). \quad (9)$$

Рассмотрим вторую сумму в (8). Каждую компоненту S_j в наборах $\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle$ представим в виде дизъюнктивного разложения $S_j = S'_j \cup S''_j$ по правилу $S'_1 = \{1\}$ и $S''_1 = \{2\}$ и при $j = 2, \dots, n+1$ установим $S'_j \subset S'_{j-1}, S''_j \subset S''_{j-1}$. В результате рассматриваемая сумма принимает вид

$$\sum_{\substack{\langle S_2, \dots, S_{n+1} \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S_j|} = \left(\sum_{\substack{\langle S'_2, \dots, S'_{n+1} \rangle: \\ S'_1 = \{1\}, \emptyset \neq S'_j \subset S'_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S'_j|} \right) \left(\sum_{\substack{\langle S''_2, \dots, S''_{n+1} \rangle: \\ S''_1 = \{2\}, \emptyset \neq S''_j \subset S''_{j-1} \times I_2, \\ j=2 \div n+1}} \prod_{j=2}^{n+1} \eta^{|S''_j|} \right). \quad (10)$$

После этого произведем такое же преобразование каждой из сумм, записанных в скобках формулы (10), которое было проделано с первой суммой в формуле (8). После этого обе указанные суммы совпадают и, в результате, вторая сумма в этой формуле принимает вид

$$\eta^2 \left(\sum_{\substack{\langle S_1, \dots, S_n \rangle: \\ \emptyset \neq S_j \subset S_{j-1} \times I_2, \\ j=1 \div n}} \prod_{j=1}^n \eta^{|S'_j|} \right)^2 = \eta^2 Q_n^2(\eta). \quad (11)$$

Учитывая (9) и (11), приходим к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. Функции $Q_n(\eta)$, $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяют следующей системе уравнений

$$Q_{n+1}(\eta) = 2\eta Q_n(\eta) + \eta^2 Q_n^2(\eta). \quad (12)$$

На основе полученного уравнения (12), получим теперь искомую оценку для функций $Q_n(\eta)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим, что имеет место неравенство $Q_n(\eta) \leq A(\eta)(M\eta)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ с постоянной $M > 0$ и $A(\eta) = Q_1(\eta) = (1 + \eta)^2 - 1$. Докажем это неравенство индукцией по $n \in \mathbb{N}$. Для этого построим индукционный шаг, допустив, что указанное неравенство имеет место для фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Тогда, на основании (12) и сделанного допущения, имеем

$$Q_{n+1}(\eta) \leq 2\eta A(\eta)(M\eta)^{n-1} + \eta^2 A^2(\eta)(M\eta)^{2(n-1)} = A(\eta)(M\eta)^n \left(\frac{2}{M} + A(\eta)\eta M^{n-2} \right)$$

Учитывая, что $\eta = c(1 - c) \leq 1/4$, имеем $A(\eta) \leq 1/16$, потребуем, чтобы $(2 + A(\eta)\eta^n M^{n-1}) \leq M$ при $n \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно, чтобы $M\eta \leq 1$ и $\max(2 + A(\eta)\eta) = M$. Положив $\eta = 1/4$, найдем значение $M = 2 + (3/2^4)^2$, которое удовлетворяет также условию $M\eta \leq M/4 < 1$. ■

Сформулируем полученный результат в виде отдельного утверждения.

Теорема 5.3. Вероятность перколяции $P(c)$ бернуллиевского случайного поля $\{\tilde{p}(x); x \in V\}$ на дереве Кэйли со степенью вершин $s = 3$ представляется в форме $P(c) = c(1 - Q^3(c))$, где для функции $Q(c)$ имеет место сходящееся при $c \in (0, 1)$ разложение

$$Q(c) = (1 - c)^2 \sum_{n=1}^{\infty} Q_n,$$

в котором для вероятностей Q_n справедлива оценка $Q_n \leq A(\eta)(M\eta)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, где $A(\eta) = (1 + \eta)^2 - 1 \leq (3/4)^2$ и $M = 2 + (3/2^4)^2$ при $\eta = c(1 - c)$.

5. Заключение. Для рассмотренной в работе перколяционной модели вероятность перколяции $P(c)$ выражается явно в виде элементарной функции от параметра c . Эта функция находится явно как «ветвь» одной из двух функций, которые появляются в результате трансверсального пересечения графиков аналитических функций от $c \in (0, 1)$. Это приводит к тому, что $P(c)$ не является аналитической функцией, так как она равна в точности нулю при $c \in (0, c_*)$, $c_* = 1/2$, но не равна нулю при $c \in (c_*, 1)$. Таким образом, несмотря на то, что каждое слагаемое, входящее в кластерное разложение является полиномом от c , аппроксимации для функции $P(c)$ невозможно строить на основе ряда по степеням c^n , $n \in \mathbb{N}$. Однако доказанное в работе утверждение показывает, что аппроксимации вероятности перколяции $P(c)$ на дереве Кэйли с степенью вершин $s = 3$ можно строить в виде частичных сумм кластерного разложения во всем диапазоне изменения концентрации $c \in (0, 1)$, а не только при $c > c_*$, где $P(c) \neq 0$. При этом каждая частичная сумма является полиномом от c так, что при неограниченном возрастании порядка аппроксимации степень полинома также возрастает неограниченно. Существенно, что оценки точности таких аппроксимаций пропорциональны степеням $[c(1 - c)]^n$, $n \in \mathbb{N}$. И это происходит несмотря на то, что функция $P(c)$ зависит от c не аналитически в окрестности точки c_* , которая является ее точкой непрерывности, а производная $P'(c)$ терпит в этой точке разрыв.

В связи с полученным результатом, возникает принципиальный вопрос. Сохраняется ли такое положение для вероятности перколяции на периодических графах, которые являются традиционным и основным объектом изучения в дискретной теории перколяции? В настоящее время априорные оценки точности приближений, получаемые на основе частичных сумм кластерного разложения для периодических графов посредством так называемых контурных оценок для внешних границ конечных кластеров [6]–[8], которые дают вклад в кластерное разложение, не позволяют дать однозначного ответа на этот вопрос. В этой связи сделаем еще одно существенное, на наш взгляд, замечание. Правая производная $P'(c)$ принимает конечное значение, что является следствием указанного выше факта, что $P(c)$ получается как ветвь трансверсального и, в то же время, не ортогонального по отношению друг к другу графиков пары гладких функций. Но конечность производной в критической точке c_* противоречит мнению о том, что перколяция аналогична фазовым переходам второго рода в равновесной статистической механике, так как для таких бифуркационных переходов правая производная по температуре равна бесконечности [13]. Это противоречие, в свою очередь, указывает на то, что для описания поведения функции $P(c)$ в окрестности точки c_* неприменим подход на основе «ренорм-группы» (см. по этому поводу [14], [15], [16]) типа ренорм-группы Каданова, так как не возникает понятия критического индекса параметра порядка, которым в данном случае является функция $P(c)$.

References

1. Hammersley JM. Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics*. 1957;28(3):790–795.
2. Broadbent SR., Hammersley JM. Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1957;53:629–641.
3. CM., Hammersley JM. Percolation processes and related topics. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963;11:894–918.

4. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. New York: Springer Science+Business Media; 1982. 424 p.
5. Grimmet G. Percolation. New York: Springer-Verlag; 1999. 444 p.
6. Virchenko YuP., Tolmacheva YuA. Revision of the upper estimate of percolation threshold in square lattice. *Matematicheskaya fizika, analiz, geometriya*. 2003;10(1):29–39.
7. Virchenko YuP., Tolmacheva YuA. Method of Sequential Approximative Estimates in Discrete Percolation Theory. *Studies in Mathematical Physics Research*. ed. Charles V. Benton. New York: Nova Science Publishers, Inc.; 2004:155–175.
8. Virchenko YuP., Tolmacheva YuA. Majorant estimates of the percolation threshold of a Bernoulli field on a square lattice *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005;57(10):1535–1549.
9. Nummelin E. General irreducible Markov chains and non-negative operators. New York: Cambridge University Press; 1984.
10. Virchenko YuP., Shpilinskaya OL. Point random fields with markovian comminutions and the geometry of fractally disordered media. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2000;124(3):1273–1285.
11. Virchenko YuP., Shpilinskaya OL. Stochastic fractals with markovian comminutions. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2001;128(2):983–995.
12. Sevastyanov BA. Branching Processes. Moscow: Nauka; 1971.
13. Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results. New York: W.A. Benjamin Inc.; 1969.
14. Sykes MF., Essam JW. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*. 1964;5:1117–1127.
15. Essam JW. Percolation Theory *Reports of Progress Physics*. 1986;43:833–912.
16. Stauffer D., Aharony A. Introduction to Percolation Theory. 2nd Ed. London: Taylor and Francis; 1991.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 06.10.2025

Поступила после рецензирования 21.11.2025

Принята к публикации 25.11.2025

Received October 6, 2025

Revised November 21, 2025

Accepted November 25, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Вирченко Юрий Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Пашкова Валерия Сергеевна – аспирант кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Software Department, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

Valery S. Pashkova – Graduate Student of the Software Department, Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

ОБЪЯВЛЕНИЯ

Мы приглашаем участников научных конференций и их коллег присылать свои статьи по материалам тезисов и докладов на конференции для опубликования в журнале «Прикладная математика & Физика» (БелГУ). До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика».

Главный редактор: Васильев В. Б.

Рубрики журнала:

Математика.

Физика. Математическое моделирование.

Публикация статей в журнале бесплатная!

Статьи публикуются по итогам рецензирования.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации СМИ: ЭЛ № ФС 77 – 77959 от 19.02.2020.

Международный стандартный серийный номер журнала (ISSN) 2687-0959.

Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

ADS

We invite participants to scientific conferences and their colleagues to send their articles based on the conference abstracts and reports for publication in the journal «Applied Mathematics & Physics» (BelSU). Until 2020, the journal was published under the title "Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics".

Editor-in-Chief: Vasiliev V. B.

Journal sections:

Mathematics.

Physics. Mathematical modeling.

Publication of articles in the journal is free!

Articles are published based on the results of peer review.

The journal is included in the List of Higher Attestation Commission (HAC) peer-reviewed scientific publications in which the main scientific results of dissertations for the academic degrees of candidate and doctor of sciences in the following groups of scientific specialties must be published:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics (Physical and Mathematical Sciences).

Сайт журнала (Journal Website): <https://maths-physics-journal.ru/index.php/journal/about>

[К содержанию](#)