

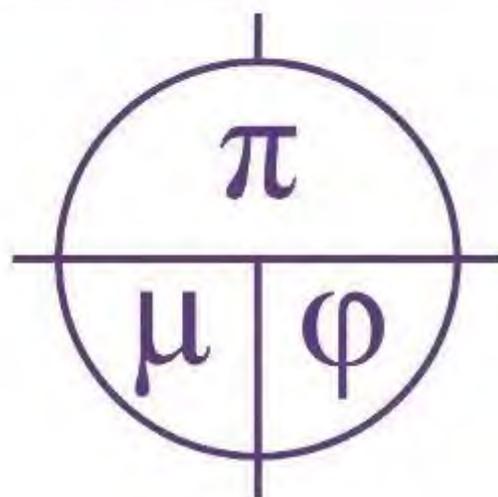


Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2026. Том 58, № 1





Прикладная математика & Физика

2026. Том 58, № 1

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

А. В. Глушак, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;

Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;

Ашыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;

Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;

Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;

Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;

Никуличева Т. Б., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;

Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;

Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;

Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;

Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;

Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;

Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;

Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 11,3

Дата выхода 30.03.2026.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Саенко В. В. Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$	5
Богатов А. В. Задача с нелокальными условиями Стеклова для уравнения в частных производных четвертого порядка и критерии единственности ее решения	22
Ситник С. М., Чернова О. В. О тождествах для степеней сингулярных дифференциальных операторов с особенностями в нуле	29
Соломатин Д. В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли	44
Ал-Гарайхоли И. А. Х., Шабров С. А. Краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью	54

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Шарин Е. П. Электронные и оптические свойства углеродных нанолент	65
Герасименко Е. С., Родин В. А. Геометрический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2	72
Носков А. В., Пирматова М. Д., Мачукаев Д. Д., Бардакова И. Н., Блажевич С. В. Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ	78
Вирченко Ю. П., Пархоменко В. Е. Анализ перколяционной модели сети электрических распределительных станций	88
Чуева А. И. Эффекты динамической дифракции в когерентном рентгеновском излучении релятивистских электронов в трехслойной периодической структуре	96



Applied Mathematics & Physics

2026. Volume 58, No 1

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics (Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

A. V. Glushak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhitov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Nikulicheva T.B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Typeface Times. Publisher's signature 11,3

Date of publishing 30.03.2026.

The layout is presented by Printing production center

Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

Mass media registration certificate
EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

© Belgorod National Research University, 2026

CONTENTS

MATHEMATICS

Saenko V. V. Estimation of the Remainder Term in the Expansion of the Stable Law at $\alpha \rightarrow 0$	5
Bogatov A. V. The Problem with Steklov Conditions for Fourth Order Partial Differential Equation and Criteria for Uniqueness of its Solution	22
Sitnik S. M., Chernova O. V. On Equalities for Powers of Singular Differential Operators with Singularity at Zero	29
Solomatin D. V. Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Apex-Outerplanar Cayley Graphs	44
Al-Garayhali E. A. H., Shabrov S. A. Boundary Value Problems with Derivatives with Respect to «Split» Measures and Monotone Nonlinearity	54

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Sharin E. P. Electronic and Optical Properties of Carbon Nanoribbons	65
Gerasimenko E. S., Rodin V. A. Geometric Approach to Describing Equilibrium Situations in a 2×2 Bimatrix Game	72
Noskov A. V., Pirmatova M. D., Machukaev D. D., Bardakova I. N., Blazhevich S. V. Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry	78
Virchenko Yu. P., Parkhomenko V. E. Analysis of the Percolation Model of the Electric Distribution Stations Network	88
Chueva A. I. Effects of Dynamic Diffraction in Coherent X-ray Radiation of Relativistic Electrons in a Three-layer Periodic Structure	96

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 519.213.7
MSC 60E07
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-5-21
EDN DDORQQ

Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$

Саенко В. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.)

Ульяновский государственный университет,
Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42
vsyaenko@inbox.ru

Аннотация. В работе исследуется разложение устойчивого закона в случае $\alpha \rightarrow 0$. Получены асимптотические разложения функции распределения и плотности вероятности, а также оценки остаточных членов этих разложений. На основе оценок остаточных членов введен критерий, позволяющий определить область значений параметра α , внутри которой относительная ошибка аппроксимации не будет превосходить задаваемый уровень точности ε . Представленные расчеты подтверждают справедливость полученных выражений.

Ключевые слова: устойчивый закон, разложение устойчивого закона, плотность вероятности, функция распределения, асимптотическое разложение, полиномы Белла

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект №123020700216 (FEUF-2023-0004))

Для цитирования: Саенко В.В. Оценка остаточного члена в разложении устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):5–21. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-5-21 EDN DDORQQ

Original Research

Estimation of the Remainder Term in the Expansion of the Stable Law at $\alpha \rightarrow 0$

Viacheslav V. Saenko 

(Article submitted by a member of the editorial board Virchenko Yu. P.)

Ulyanovsk State University,
42 Lev Tolstoy St., Ulyanovsk 432017, Russia
vsyaenko@inbox.ru

Abstract. The paper studies the expansion of a stable law in the case of $\alpha \rightarrow 0$. Asymptotic expansions of the distribution function and probability density, as well as estimates of the remainder terms of these expansions, are obtained. Based on the estimates of the remainder terms, a criterion is introduced that allows one to determine the range of values of the parameter α within which the relative approximation error will not exceed the specified accuracy level ε . The presented calculations confirm the validity of the expressions obtained.

Keywords: Stable Law, Expansion of Stable Law, Probability Density, Distribution Function, Asymptotic Expansion, Bell Polynomials

Funding: The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. 123020700216 (FEUF-2023-0004))

For citation: Saenko VV. Estimation of the Remainder Term in the Expansion of the Stable Law at $\alpha \rightarrow 0$. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):5–21. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-5-21 EDN DDORQQ

1. Введение. Устойчивые законы являются предельными распределениями и возникают в задаче суммирования серий независимых случайных величин. В зависимости от выбранной параметризации этот класс распределений характеризуется четырьмя параметрами α , β , γ , λ . Параметр α называется характеристическим параметром и может принимать значения из интервала $(0, 2]$. Параметр β является параметром асимметрии и принимает значения из интервала $[-1, 1]$. Параметр γ есть параметр сдвига $\gamma \in R$ и $\lambda > 0$ – масштабный параметр.

Параметр α является основным параметром и характеризует закон распределения. В общем случае для вычисления устойчивых законов необходимо использовать интегральные представления [1, 2, 3], которые справедливы во всем диапазоне допустимых значений α , за исключением некоторых частных случаев. В пяти частных случаях устойчивые законы выражаются в элементарных функциях: распределение Леви

($\alpha = 1/2, \theta = 1$), симметричное распределение Леви ($\alpha = 1/2, \theta = -1$), распределение Коши ($\alpha = 1, \theta = 0$), обобщенное распределение Коши ($\alpha = 1, -1 \leq \theta \leq 1$) и распределение Гаусса ($\alpha = 2, \theta = 0$). При этом параметр α инвариантен относительно различных параметризаций. Этот параметр непрерывен в интервалах $(0, 1)$ и $(1, 2)$ независимо от системы параметризации. В окрестности точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ для исследования поведения и вычисления устойчивых законов необходимо использовать соответствующие асимптотические разложения. Данная работа посвящена исследованию устойчивых законов в случае $\alpha \rightarrow 0$.

Изучению свойств устойчивых законов в случае $\alpha \rightarrow 0$ посвящено несколько работ. В статье [4] изучается распределение случайной величины $|Y(\alpha, \theta)|^\alpha$, где $Y(\alpha, \theta)$ – устойчивая случайная величина. В этой статье показано, что $|Y(\alpha, \theta)|^\alpha \xrightarrow{d} E^{-1}$ в случае $\alpha \rightarrow 0$, где E – случайная величина с экспоненциальным распределением (см. также § 4.8 в [5]). В книге [6] (см. § 3.8) автор приходит к аналогичному результату, рассматривая интегральное представление плотности вероятности устойчивого закона. Результаты этих работ позволяют судить о характере поведения устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и соответствуют главному асимптотическому члену разложения. Более содержательный результат получен в работе [7]. В этой работе были исследованы устойчивые законы в окрестности точек $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ и получены асимптотические разложения функции распределения. В дальнейшем результаты этой работы в переработанном варианте и с внесением некоторых исправлений были использованы в монографии [3]. В случае $\alpha \rightarrow 0$ полученное разложение представляет из себя ряд по степеням α , при этом первое слагаемое этого ряда является главным асимптотическим членом и совпадает с результатами упомянутых выше работ.

В случае $\alpha \rightarrow 0$ использование этого разложения в ряд позволяет получить необходимую точность аппроксимации. Однако вопрос о том, сколько слагаемых в разложении необходимо использовать и при каких значениях параметра α возможно использование этого разложения, остается открытым. Для ответа на этот вопрос необходимо получить оценку остаточного члена разложения. Такая оценка позволит ввести критерий, позволяющий определить область допустимых значений параметра α и количество слагаемых в разложении, при которых будет достигаться заданный уровень точности. Данная статья как раз и направлена на решение этой проблемы.

В основе работы лежит разработанный в статье [7] подход и более детально описанный в книге [3]. В этих работах было получено разложение функции распределения устойчивого закона в случае $\alpha \rightarrow 0$. Так как получение оценки остаточного члена разложения тесно связано с получением самого разложения, то по ходу изложения будет получено само разложение плотности вероятности и функции распределения в ряд при $\alpha \rightarrow 0$. Это позволит устранить некоторые опечатки, присутствующие в ранее полученных результатах.

2. Предварительные замечания. Будем рассматривать устойчивые законы с характеристической функцией

$$\hat{g}(t, \alpha, \theta, \lambda) = \exp \left\{ -\lambda |t|^\alpha \exp \left\{ -i \frac{\pi}{2} \alpha \theta \operatorname{sign} t \right\} \right\}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $|\theta| \leq \min(1, 2/\alpha - 1)$, $\lambda > 0$. Согласно терминологии, введенной в книгах [3, 5], такой вид характеристической функции соответствует параметризации «С». Будем обозначать через $g(x, \alpha, \theta, \lambda)$, $G(x, \alpha, \theta, \lambda)$ и $Y(\alpha, \theta, \lambda)$ плотность вероятности, функцию распределения и случайную величину устойчивого закона с характеристической функцией (1) соответственно.

Нам понадобится характеристическое преобразование. Характеристическое преобразование плотности $p_X(x)$ произвольной случайной величины X определяется следующим образом:

$$W_X(t) = \begin{pmatrix} w_0(t)_X & 0 \\ 0 & w_1(t)_X \end{pmatrix} = (\mathcal{W}p_X)(t),$$

где $w_k(t)_X = E|X|^{it} (\operatorname{sign} X)^k$, $t \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1$. Для характеристического преобразования плотности устойчивого закона $g(x, \alpha, \theta, \lambda)$ введем обозначение

$$W(s, \alpha, \theta, \lambda) = (\mathcal{W}g)(-is) = \begin{pmatrix} w_0(s, \alpha, \theta, \lambda) & 0 \\ 0 & w_1(s, \alpha, \theta, \lambda) \end{pmatrix},$$

где $w_k(s, \alpha, \theta, \lambda) = E|Y(\alpha, \theta, \lambda)|^s (\operatorname{sign} Y(\alpha, \theta, \lambda))^k$, $-1 < \Re s < \alpha$, $k = 0, 1$.

Имеет место следующая теорема (см. Теорему 2.6.4 в [3])

Теорема 1. В полосе $-1 < \Re s < \alpha$ характеристические преобразования плотностей строго устойчивых распределений имеют вид

$$w_k(s, \alpha, \theta, \lambda) = \lambda^{s/\alpha} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - \theta s)\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{\alpha}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - s)\right) \Gamma(1 - s)}, \quad k = 0, 1.$$

Связь характеристического преобразования с преобразованием Меллина дается соотношениями

$$w_0(s, \alpha, \theta, \lambda) = m(s, \alpha, \theta, \lambda) + m(s, \alpha, -\theta, \lambda), \quad (2)$$

$$w_1(s, \alpha, \theta, \lambda) = m(s, \alpha, \theta, \lambda) - m(s, \alpha, -\theta, \lambda), \quad (3)$$

где $m(s, \alpha, \theta, \lambda)$ – преобразование Меллина плотности устойчивого закона. За более подробной информацией о характеристическом преобразовании и преобразовании Меллина устойчивых законов отсылаем читателя к монографии [3] и статьям [7, 8].

В дальнейшем будем предполагать параметр масштаба $\lambda = 1$. Такие устойчивые законы называются стандартными и для них приняты обозначения $g(x, \alpha, \theta, 1) \equiv g(x, \alpha, \theta)$, $G(x, \alpha, \theta, 1) \equiv G(x, \alpha, \theta)$, $Y(\alpha, \theta, 1) \equiv Y(\alpha, \theta)$, $w_k(s, \alpha, \theta, 1) \equiv w_k(s, \alpha, \theta)$, $m(s, \alpha, \theta, 1) \equiv m(s, \alpha, \theta)$.

Получение асимптотического разложения устойчивых законов при $\alpha \rightarrow 0$ тесно связано со случайной величиной

$$Z(\alpha, \theta) = |Y(\alpha, \theta)|^\alpha \operatorname{sign} Y(\alpha, \theta). \quad (4)$$

Плотность вероятности и функцию распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ будем обозначать $f(y, \alpha, \theta)$ и $F(y, \alpha, \theta)$ соответственно.

3. Разложение $f(y, \alpha, \theta)$ и $F(y, \alpha, \theta)$ в ряд в случае $\alpha \rightarrow 0$. Теорема 1 является отправной точкой получения разложения функции распределения $F(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$. Для случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ элементы характеристического преобразования принимают вид

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = E|Z(\alpha, \theta)|^s (\operatorname{sign} Z(\alpha, \theta))^k = E|Y(\alpha, \theta)|^{\alpha s} (\operatorname{sign} Y(\alpha, \theta))^k = w_k(\alpha s, \alpha, \theta).$$

Таким образом,

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - \theta\alpha s)\right) \Gamma(1 - s)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(k - \alpha s)\right) \Gamma(1 - \alpha s)}, \quad k = 0, 1. \quad (5)$$

За более детальной информацией о свойствах случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ отсылаем читателя к монографии [3]. Основным результатом сформулируем в форме теоремы.

Теорема 2. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in \mathbb{R}^1$ асимптотическое разложение функции распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ имеет вид

$$F(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta)e^{-\frac{1}{|y|}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{|y|}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) \operatorname{sign} y + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_n(|y|) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad (6)$$

где для остаточного члена $R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta)$ справедлива оценка

$$R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) \leq \mathbb{R}_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) e^{-\frac{1}{|y|}} \bar{P}_{N+1}(|y|) + o\left(\alpha^{N+1}\right). \quad (7)$$

Здесь

$$C_n^{(k)}(\theta) = Y_n \left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_n^{(k)}(\theta) \right), \quad k = 0, 1, \quad (8)$$

$$a_n^{(k)}(\theta) = \begin{cases} -\mathbb{C}, & n = 1, \\ \frac{1}{n}(2^n - 1)^{1-k} \pi^n (1 - \theta^n) |B_n| - (n-1)! \zeta(n), & n \geq 2, \end{cases} \quad (9)$$

$$\bar{C}_n^{(k)}(\theta) = Y_n \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_n^{(k)}(\theta) \right), \quad k = 0, 1, \quad (10)$$

$$\bar{a}_n^{(k)}(\theta) = \begin{cases} \mathbb{C}, & n = 1, \\ \frac{1}{n}(2^n - 1)^{1-k} \pi^n (1 - \theta^n) |B_n| + (n-1)! \zeta(n), & n \geq 2, \end{cases} \quad (11)$$

где $\mathbb{C} = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера, B_n – числа Бернулли, $\zeta(n)$ – Дзета-функция Римана, $Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – полные полиномы Белла, $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ – полиномы, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$P_{n+1}(y) = -\frac{1}{y} P_n(y) - y P_n'(y), \quad P_0(y) = 1, \quad (12)$$

$$\bar{P}_{n+1}(y) = \frac{1}{y} \bar{P}_n(y) - y \bar{P}_n'(y), \quad \bar{P}_0(y) = 1 \quad (13)$$

и в явном виде определяются формулами

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(-\frac{1}{y} \right)^k, \quad \bar{P}_n(y) = \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(\frac{1}{y} \right)^k, \quad (14)$$

где $S(n, k)$ – числа Стирлинга второго рода, $S(n, 0) = \delta_{n0}$, δ_{nm} – символ Кронекера, $n = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Запишем в явном виде элементы характеристического преобразования (5)

$$w_0^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) \Gamma(1-s)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) \Gamma(1-\alpha s)}, \quad (15)$$

$$w_1^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) \Gamma(1-s)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) \Gamma(1-\alpha s)}. \quad (16)$$

Представим их в виде

$$\begin{aligned} w_0^Z(s, \alpha, \theta) &= \Gamma(1-s) \exp\left\{\ln \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) - \ln \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) - \ln \Gamma(1-\alpha s)\right\}, \\ w_1^Z(s, \alpha, \theta) &= \Gamma(1-s) \exp\left\{\ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\theta s\right) - \ln \sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha s\right) - \ln \Gamma(1-\alpha s)\right\}. \end{aligned}$$

Используя теперь известные разложения в ряд $\ln \cos(x)$, $\ln \sin(x)$ и $\ln \Gamma(1+z)$ (см. [9], 1.518, 8.342.1), а также свойства чисел Бернулли

$$B_{2l} = -(-1)^l |B_{2l}|, \quad B_{2l+1} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

функции $w_k^Z(s, \alpha, \theta)$ можно представить в виде

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(\theta) \frac{(\alpha s)^n}{n!}\right\}, \quad k = 0, 1, \quad (18)$$

где коэффициенты $a_n^{(k)}(\theta)$ определяются выражением (9).

Вычисляя (15) и (16) при $\alpha \rightarrow 0$, и используя для $w_1^Z(s, \alpha, \theta)$ правило Лопиталья, получаем

$$w_k^Z(s, 0, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s), \quad k = 0, 1. \quad (19)$$

Представим теперь (18) в виде $w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) H(h^{(k)}(\alpha))$, где

$$H(h) = e^h, \quad h \equiv h^{(k)}(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(\theta) s^n \frac{\alpha^n}{n!}. \quad (20)$$

Разложим теперь $w_k^Z(s, \alpha, \theta)$ в ряд Тейлора по параметру α при $\alpha \rightarrow 0$. Используя (19), получаем

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{d^n H(h^{(k)}(\alpha))}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0} \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta)\right), \quad k = 0, 1. \quad (21)$$

Здесь

$$R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \frac{d^{N+1} H(h^{(k)}(\alpha'))}{d\alpha'^{N+1}} \Big|_{\alpha'=\zeta\alpha} \quad (22)$$

остаточный член разложения в форме Лагранжа и $0 < \zeta < 1$.

Рассмотрим в начале N -ю частичную сумму. Используя формулу Фаа-ди-Бруно, получаем

$$\frac{d^n H(h^{(k)}(\alpha))}{d\alpha^n} = \sum_{m=1}^n H^{(m)}(h) B_{n,m}(h_1, h_2, \dots, h_{n-m+1}),$$

где $B_{n,m}(h_1, h_2, \dots, h_{n-m+1}) = \sum \frac{n!}{l_1! l_2! \dots} \frac{h_1^{l_1}}{(1!)^{l_1}} \frac{h_2^{l_2}}{(2!)^{l_2}} \dots$ – частичные полиномы Белла. Суммирование ведется по всем $l_1, l_2, l_3, \dots \geq 0$ таким, что $l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots = n$, $l_1 + l_2 + l_3 + \dots = m$. За более подробной информацией отсылаем читателя к книгам [10, 11].

$$H^{(m)}(h) = \frac{d^m H(h)}{dh^m} = e^{h^{(k)}(\alpha)}, \quad h_m = \frac{d^m h^{(k)}(\alpha)}{d\alpha^m} = s^m \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+m}^{(k)}(\theta) \frac{\alpha^i}{i!}. \quad (23)$$

В точке $\alpha = 0$ имеем $H^{(m)}(h)|_{\alpha=0} = 1$, $h_m|_{\alpha=0} = s^m a_m^{(k)}(\theta)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{d^n H(h^{(k)}(\alpha))}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0} &= \sum_{m=1}^n B_{n,m} \left(s a_1^{(k)}(\theta), s^2 a_2^{(k)}(\theta), \dots, s^{n-m+1} a_{n-m+1}^{(k)}(\theta) \right) \\ &= s^n Y_n \left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_{n-m+1}^{(k)}(\theta) \right) = s^n C_n^{(k)}(\theta), \quad (24) \end{aligned}$$

где использованы свойства полиномов Белла

$$B_{n,m}(abx_1, ab^2x_2, \dots, ab^{n-m+1}x_{n-m+1}) = a^m b^n B_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_{n-m+1}), \quad (25)$$

$$Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m=1}^n B_{n,m}(x_1, x_2, \dots, x_{n-m+1}), \quad (26)$$

и введено обозначение $C_n^{(k)}(\theta) = Y_n(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_n^{(k)}(\theta))$. Здесь $Y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – полные полиномы Белла.

Используя теперь (24) в разложении (21), получим

$$w_k^Z(s, \alpha, \theta) = \theta^k \Gamma(1-s) \left(1 + \sum_{n=1}^N C_n^{(k)}(\theta) \frac{(s\alpha)^n}{n!} + R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) \right), \quad k = 0, 1. \quad (27)$$

Воспользуемся теперь формулами (2) и (3). Из этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} m^Z(s, \alpha, \theta) &= \frac{1}{2}(w_0^Z(s, \alpha, \theta) + w_1^Z(s, \alpha, \theta)), \\ m^Z(s, \alpha, -\theta) &= \frac{1}{2}(w_0^Z(s, \alpha, \theta) - w_1^Z(s, \alpha, \theta)). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $m^Z(s, \alpha, \theta)$ обозначает преобразование Меллина плотности вероятности случайной величины $Z(\alpha, \theta)$. Используя разложение (27), получим

$$w_0^Z(s, \alpha, \theta) + w_1^Z(s, \alpha, \theta) = \Gamma(1-s)(1+\theta) + \sum_{n=1}^N (C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta)) s^n \Gamma(1-s) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta), \quad (29)$$

где

$$R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta) = \Gamma(1-s) (R_{N+1}^{(0)}(s, \alpha, \theta) + \theta R_{N+1}^{(1)}(s, \alpha, \theta)). \quad (30)$$

Рассмотрим множитель $s^n \Gamma(1-s)$, входящий в это выражение. В случае $n = 0$, используя определение Гамма-функции и делая замену переменной интегрирования $x = 1/y$, получим

$$\Gamma(1-s) = \int_0^\infty x^{-s} e^{-x} dx = \int_0^\infty y^s d \left[e^{-\frac{1}{y}} \right] = \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right],$$

где $\hat{P}_0(y) \equiv 1$ – некоторый полином нулевого порядка.

Рассмотрим теперь случай $n = 1$. Используя предыдущее выражение, получаем

$$\begin{aligned} s\Gamma(1-s) &= s \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] = s \int_0^\infty y y^{s-1} \left(\hat{P}_0'(y) + \frac{1}{y^2} \hat{P}_0(y) \right) e^{-\frac{1}{y}} dy \\ &= s \int_0^\infty y^{s-1} \hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} dy = y^s \hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $\hat{P}_1(y) = y\hat{P}_0'(y) + \frac{1}{y}\hat{P}_0(y)$ – полином первого порядка. Используя это соотношение, нетрудно получить, что $\hat{P}_1(y) = \frac{1}{y}$. Далее было выполнено интегрирование по частям, в котором $dv = sy^{s-1} dy$ и $u = \hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}}$. Принимая во внимание, что $-1 < \Re s < \alpha$, и предполагая $\alpha < 1$, видно, что первое слагаемое в последнем выражении будет равно нулю. Таким образом,

$$s\Gamma(1-s) = - \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_1(y) e^{-\frac{1}{y}} \right].$$

Продолжая аналогичным образом, можно показать, что в случае произвольного n справедливо выражение

$$s^n \Gamma(1-s) = (-1)^n \int_0^\infty y^s d \left[\hat{P}_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right],$$

где полиномы $\hat{P}_n(y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $\hat{P}_n(y) = y\hat{P}_{n-1}'(y) + \frac{1}{y}\hat{P}_{n-1}(y)$, $\hat{P}_0(y) \equiv 1$. Для удобства дальнейшего изложения введем полиномы $P_n(y)$ следующим образом: $P_n(y) = (-1)^n \hat{P}_n(y)$, $P_0(y) \equiv 1$. Нетрудно показать, что полиномы $P_n(y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (12). В результате

$$s^n \Gamma(1-s) = \int_0^\infty y^s d \left[P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right]. \quad (31)$$

Несложно проверить, что производящая функция полиномов $P_n(y)$ равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(y) \frac{t^n}{n!} = \exp \left\{ -\frac{1}{y} (e^t - 1) \right\}.$$

Сравнивая теперь эту производящую функцию с производящей функцией чисел Стирлинга второго рода $S(n, k)$ [11, 12]

$$\exp \{x(e^t - 1)\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n S(n, k) x^k \frac{t^n}{n!},$$

видим, что явный вид полинома $P_n(y)$ определяется первой формулой в (14).

Используя теперь (29) и (31) в выражении (28), мы получим

$$m^Z(s, \alpha, \theta) = \frac{1+\theta}{2} \int_0^{\infty} y^s d \left[P_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{\infty} y^s d \left[P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \frac{1}{2} R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta). \quad (32)$$

Рассмотрим теперь остаточный член $R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta)$, определяемый формулой (30). Принимая во внимание (22), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s) \theta^k R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left| \theta^k \Gamma(1-s) \frac{d^{N+1} H(h^{(k)}(\alpha'))}{d\alpha'^{N+1}} \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} = \\ &= \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left| \theta^k \Gamma(1-s) \sum_{m=1}^{N+1} H^{(m)}(h) B_{N+1,m}(h_1, h_2, \dots, h_{N+1-m+1}) \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} \leq \\ &= \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} |\theta|^k \left(\sum_{m=1}^{N+1} |H^{(m)}(h)| \left| \Gamma(1-s) B_{N+1,m}(h_1, h_2, \dots, h_{N+1-m+1}) \right| \right)_{\alpha'=\zeta\alpha}. \quad (33) \end{aligned}$$

Оценим множители, стоящие под знаком суммы. Используя (23), (20) и принимая во внимание то, что $0 < \zeta \leq 1$ и $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} |H^{(m)}(h)|_{\alpha'=\zeta\alpha} &= \left| \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)}(\theta) s^n \frac{\alpha'^n}{n!} \right\} \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} \leq \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(k)}(\theta)| \left| s^n \frac{(\zeta\alpha)^n}{n!} \right| \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(k)}(\theta)| \left| \frac{(s\alpha)^n}{n!} \right| \right\} = \exp \left\{ |a_1^{(k)}(\theta)| |s\alpha| + o(\alpha) \right\} = 1 + o(1). \end{aligned}$$

Здесь, в последнем неравенстве мы предположили, что $\zeta = 1$.

Далее, используя (23) и принимая во внимание, что $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$h_m |_{\alpha'=\zeta\alpha} = s^m \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+m}^{(k)}(\theta) \frac{(\zeta\alpha)^i}{i!} = s^m \left(a_m^{(k)}(\theta) + o(1) \right).$$

Используя этот результат, а также свойство (25) для частичных полиномов Белла, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(1-s) B_{N+1,m}(h_1, h_2, \dots, h_{N+1-m+1}) \right|_{\alpha'=\zeta\alpha} \\ &= \left| \Gamma(1-s) B_{N+1,m} \left(s \left(a_1^{(k)}(\theta) + o(1) \right), s^2 \left(a_2^{(k)}(\theta) + o(1) \right), \dots, s^{N+2-m} \left(a_{N+2-m}^{(k)}(\theta) + o(1) \right) \right) \right| \\ &= \left| s^{N+1} \Gamma(1-s) \left(B_{N+1,m} \left(a_1^{(k)}(\theta), a_2^{(k)}(\theta), \dots, a_{N+2-m}^{(k)}(\theta) \right) + o(1) \right) \right| \leq \\ &\leq |s^{N+1} \Gamma(1-s)| \left(B_{N+1,m} \left(|a_1^{(k)}(\theta)|, |a_2^{(k)}(\theta)|, \dots, |a_{N+2-m}^{(k)}(\theta)| \right) + o(1) \right) \\ &\leq |s^{N+1} \Gamma(1-s)| \left(B_{N+1,m} \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_{N+2-m}^{(k)}(\theta) \right) + o(1) \right). \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $B_{n,m}(x_1 + o(1), \dots, x_{n-1+m} + o(1)) = B_{n,m}(x_1, \dots, x_{n-1+m}) + o(1)$, которое легко получить из определения частичных полиномов Белла. Коэффициенты $\bar{a}_n^{(k)}(\theta)$ определяются

выражением (11). Используя (9), несложно показать, что коэффициенты $\bar{a}_n^{(k)}(\theta)$ удовлетворяют неравенству $|\bar{a}_n^{(k)}(\theta)| \leq \bar{a}_n^{(k)}(\theta)$.

Используя теперь полученные выше оценки в (33), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(1-s)\theta^k R_{N+1}^{(k)}(s, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}|\theta|^k}{(N+1)!} |\Gamma(1-s)s^{N+1}| \sum_{m=1}^{N+1} \left(B_{N+1,m} \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_{N+2-m}^{(k)}(\theta) \right) + o(1) \right) \\ &= \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} |\theta|^k |\Gamma(1-s)s^{N+1}| \left(\bar{C}_{N+1}^{(k)}(\theta) + o(1) \right). \end{aligned}$$

Здесь использовано свойство (26) и введено обозначение $\bar{C}_n^{(k)}(\theta) = Y_n \left(\bar{a}_1^{(k)}(\theta), \bar{a}_2^{(k)}(\theta), \dots, \bar{a}_n^{(k)}(\theta) \right)$.

Учитывая полученную оценку, а также соотношение (31) для остаточного члена $R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta)$, справедлива оценка

$$R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta) \leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \left| \int_0^\infty y^s d \left[P_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] \right| + o\left(\alpha^{N+1}\right).$$

Вернемся теперь к выражению (32). В левой части этого равенства стоит преобразование Меллина плотности $f(y, \alpha, \theta)$. Согласно определению

$$m^Z(s, \alpha, \theta) = \int_0^\infty y^s f(y, \alpha, \theta) dy.$$

Следует отметить, что при работе с устойчивыми законами вместо общепринятого ядра y^{s-1} в преобразовании Меллина более удобно использовать ядро y^s . Именно для такого вида ядра в [3] доказана теорема 1. Из этой формулы видно, что преобразование Меллина определено только для положительной части плотности $f(y, \alpha, \theta)$, т. е. для $y > 0$. Таким образом,

$$m^Z(s, \alpha, \theta) = \int_0^\infty y^s f(y, \alpha, \theta) dy = \int_0^\infty y^s dF_{(+)}(y, \alpha, \theta) = \int_0^\infty y^s d [F(y, \alpha, \theta) - F(0, \alpha, \theta)].$$

Здесь $F(y, \alpha, \theta)$ – функция распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$, $F_{(+)}(y, \alpha, \theta)$ – функция распределения положительной части распределения и $F(0, \alpha, \theta)$ – значение функции распределения в нуле. Таким образом, выражение (32) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^s d [F(y, \alpha, \theta) - F(0, \alpha, \theta)] &= \frac{1+\theta}{2} \int_0^\infty y^s d \left[P_0(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^\infty y^s d \left[P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right] + \frac{1}{2} R_{N+1}^F(s, \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Выполняя теперь формально обратное преобразование Меллина этого выражения, получаем

$$\begin{aligned} F(y, \alpha, \theta) &= F(0, \alpha, \theta) + \frac{1+\theta}{2} P_0(y) e^{-\frac{1}{y}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} + \frac{1}{2} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad y > 0, \quad (34) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) |P_{N+1}(y)| e^{-\frac{1}{y}} + o\left(\alpha^{N+1}\right) \\ &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \bar{P}_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} + o\left(\alpha^{N+1}\right) \equiv \mathbb{R}_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad y > 0. \quad (35) \end{aligned}$$

Используя явное выражение для полиномов $P_n(y)$, несложно показать, что для $|P_n(y)|$ справедлива оценка

$$|P_n(y)| = \left| \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(-\frac{1}{y} \right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^n S(n, k) \left(\frac{1}{y} \right)^k = \bar{P}_n(y),$$

где $S(n, 0) = \delta_{n0}$, δ_{n0} – символ Кронекера, $n = 0, 1, 2, \dots$, $y > 0$. Таким образом, явный вид полиномов $\bar{P}_n(y)$ определяется второй формулой в (14). Несложно показать, что полиномы $\bar{P}_n(y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (13).

Разложение функции распределения, полученное выше, справедливо только для $y > 0$. Для получения разложения при $y < 0$ воспользуемся свойством инверсии

$$F(-y, \alpha, \theta) = 1 - F(y, \alpha, -\theta), \quad y > 0. \quad (36)$$

Справедливость этого свойства непосредственно вытекает из определения (4). Как из него видно, случайная величина $Z(\alpha, \theta)$ является масштабным преобразованием случайной величины $Y(\alpha, \theta)$. При таком преобразовании сохраняются свойства симметрии устойчивой случайной величины относительно точки $y = 0$. Одним из таких свойств является свойство инверсии, которое для функции распределения устойчивого закона $G(x, \alpha, \theta)$ имеет вид $G(-x, \alpha, \theta) = 1 - G(x, \alpha, -\theta)$ (см., например, [3, 1]). Следовательно, будет справедливо и свойство (36). Также сразу получим значение $F(0, \alpha, \theta)$

$$\begin{aligned} F(0, \alpha, \theta) &= P\{Z(\alpha, \theta) \leq 0\} = P\{|Y(\alpha, \theta)|^\alpha \text{sign } Y(\alpha, \theta) \leq 0\} = \\ &= P\{\text{sign } Y(\alpha, \theta) = -1\} = P\{Y(\alpha, \theta) \leq 0\} = G(0, \alpha, \theta) = \frac{1 - \theta}{2}. \end{aligned}$$

Используя теперь свойство инверсии (36) и (34), (35), для отрицательной части $F(y, \alpha, \theta)$ получаем

$$\begin{aligned} F(-y, \alpha, \theta) &= 1 - F(0, \alpha, -\theta) - \frac{1 - \theta}{2} e^{-\frac{1}{y}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(-\theta) - \theta C_n^{(1)}(-\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} - \frac{1}{2} R_{N+1}^F(y, \alpha, -\theta), \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$R_{N+1}^F(y, \alpha, -\theta) \leq R_{N+1}^F(y, \alpha, -\theta) = \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(-\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(-\theta) \right) \bar{P}_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} + o\left(\alpha^{N+1}\right), \quad y > 0.$$

Принимая во внимание свойство чисел Бернулли (17), а также определение коэффициентов $a_n^{(k)}(\theta)$ (9), легко увидеть, что параметр θ входит в коэффициенты разложения $C_n^{(k)}(\theta)$ только с четными степенями. Следовательно, $C_n^{(k)}(\theta)$ являются четными функциями параметра θ и $C_n^{(k)}(-\theta) = C_n^{(k)}(\theta)$. Аналогично, для коэффициентов $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ получаем $\bar{C}_n^{(k)}(-\theta) = \bar{C}_n^{(k)}(\theta)$. Таким образом, отрицательная часть $F(y, \alpha, \theta)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned} F(y, \alpha, \theta) &= \frac{1 - \theta}{2} + \frac{-1 + \theta}{2} e^{\frac{1}{y}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) - \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_n(-y) e^{\frac{1}{y}} - \frac{1}{2} R_{N+1}^F(-y, \alpha, \theta), \quad y < 0. \quad (37) \end{aligned}$$

Объединяя теперь (34) и (37), получаем разложение (6), в котором для остаточного члена справедлива оценка (7). Теорема доказана.

Зная выражение для функции распределения, можно получить выражение для плотности вероятности. Сформулируем результат в виде следствия к теореме 2.

Следствие 1. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in R^1$ асимптотическое разложение плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$ случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ имеет вид

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{e^{-\frac{1}{|y|}}}{2|y|} \left(\frac{(1 + \theta \text{sign } y)}{|y|} - \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \text{sign } y \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_{n+1}(|y|) \right) + R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta), \quad (38)$$

где для остаточного члена $R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta)$ справедлива оценка

$$R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta) \leq R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{e^{-\frac{1}{|y|}}}{2|y|} \bar{P}_{N+2}(|y|) + o\left(\alpha^{N+1}\right). \quad (39)$$

Здесь коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ определяются формулами (8) и (10) соответственно. Полиномы $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ определяются формулами (14) и удовлетворяют рекуррентным соотношениям (12) и (13).

Доказательство. Для получения асимптотического разложения плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$ воспользуемся выражением (34), определяющим разложение функции распределения для $y > 0$. В результате

$$\begin{aligned} f(y, \alpha, \theta) &= \frac{dF(y, \alpha, \theta)}{dy} = \frac{(1 + \theta)}{2y^2} e^{-\frac{1}{y}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d}{dy} \left(P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dy} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta), \quad y > 0. \quad (40) \end{aligned}$$

Из рекуррентного выражения (12) получаем

$$\frac{d}{dy} \left(P_n(y) e^{-\frac{1}{y}} \right) = -\frac{1}{y} \left(-\frac{1}{y} P_n(y) - y P_n'(y) \right) e^{-\frac{1}{y}} = -\frac{1}{y} P_{n+1}(y) e^{-\frac{1}{y}}. \quad (41)$$

Для оценки остаточного члена понадобится следующая оценка производной:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left| P_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} \right| &= e^{-\frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y^2} |P_{N+1}(y)| + P_{N+1}'(y) \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) \right) = \\ &= -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) \left(-\frac{1}{y} P_{N+1}(y) - y P_{N+1}'(y) \right) = -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) P_{N+2}(y) \leq \\ &\leq \left| -\frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \operatorname{sign}(P_{N+1}(y)) P_{N+2}(y) \right| \leq \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} |P_{N+2}(y)| \leq \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \bar{P}_{N+2}(y). \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что $y > 0$ и была использована формула производной модуля функции. Используя теперь эту оценку в первом неравенстве в (35), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} R_{N+1}^F(y, \alpha, \theta) &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{d}{dy} \left| P_{N+1}(y) e^{-\frac{1}{y}} \right| + o\left(\alpha^{N+1}\right) \leq \\ &\leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{y}} \bar{P}_{N+2}(y) + o\left(\alpha^{N+1}\right). \quad (42) \end{aligned}$$

Используя теперь (41) и (42) в (40), получаем разложение плотности вероятности для $y > 0$

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{(1+\theta)}{2y^2} e^{-\frac{1}{y}} - \frac{1}{2y} e^{-\frac{1}{y}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_{n+1}(y) + R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta), \quad y > 0, \quad (43)$$

$$R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta) \leq \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{1}{2y} e^{-\frac{1}{y}} \bar{P}_{N+1}(y) + o\left(\alpha^{N+1}\right) \equiv \mathbb{R}_{N+1}^f(y, \alpha, \theta). \quad (44)$$

Для получения выражения при $y < 0$ воспользуемся свойством инверсии. Для плотности вероятности оно имеет вид $f(-y, \alpha, \theta) = f(y, \alpha, -\theta)$. Так как коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ являются четными функциями θ , получаем

$$f(y, \alpha, \theta) = \frac{(1-\theta)}{2(-y)^2} e^{\frac{1}{y}} - \frac{e^{\frac{1}{y}}}{2(-y)} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) - \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) \frac{\alpha^n}{n!} P_{n+1}(-y) + R_{N+1}^f(-y, \alpha, -\theta), \quad y < 0. \quad (45)$$

Объединяя теперь формулы (43) и (45), приходим к выражению (38), которое справедливо для $y \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha \rightarrow 0$. Для остаточного члена оказывается справедлива оценка (39). Следствие доказано.

4. Разложение $g(y, \alpha, \theta)$ и $G(y, \alpha, \theta)$ в случае $\alpha \rightarrow 0$. Зная разложения плотности вероятности и функции распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$, можно получить асимптотические разложения соответствующих величин для устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$. Сформулируем результат в форме следствия.

Следствие 2. Для любых фиксированных $-1 \leq \theta \leq 1$ и $y \in \mathbb{R}^1$ асимптотические разложения плотности вероятности $g(y, \alpha, \theta)$ и функции распределения $G(y, \alpha, \theta)$ устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \neq 0$ с характеристической функцией (1) имеют вид

$$\begin{aligned} G(y, \alpha, \theta) &= \frac{1}{2}(1-\theta) + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta) e^{-|y|^{-\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) \operatorname{sign} y + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_n(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta), \quad (46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \theta) &= \frac{\alpha}{2} (1 + \theta \operatorname{sign} y) |y|^{-\alpha-1} e^{-|y|^{-\alpha}} - \\ &\quad - \frac{\alpha}{2|y|} e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \operatorname{sign} y \right) P_{n+1}(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta), \quad (47) \end{aligned}$$

где для остаточных членов $R_{N+1}^G(x, \alpha, \theta)$ и $R_{N+1}^g(x, \alpha, \theta)$ справедливы оценки

$$R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta) \leq \mathbb{R}_{N+1}^G(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^{N+1}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) e^{-|y|^{-\alpha}} \bar{P}_{N+1}(|y|^\alpha) + o\left(\alpha^{N+1}\right), \quad (48)$$

$$R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) \leq \mathbb{R}_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) = \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{e^{-|y|^{-\alpha}}}{2|y|} \bar{P}_{N+2}(|y|^\alpha) + o\left(\alpha^{N+2}\right). \quad (49)$$

Здесь коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ определяются выражениями (8) и (10), а полиномы $P_n(y)$ и $\bar{P}_n(y)$ определяются формулами (14) и удовлетворяют рекуррентным соотношениям (12) и (13) соответственно. **Доказательство.** Получим разложение для функции распределения. Для этого понадобится определение (4) случайной $Z(\alpha, \theta)$. Согласно определению функции распределения, получаем

$$\begin{aligned} G(y, \alpha, \theta) &= P\{Y(\alpha, \theta) \leq y\} = P\{|Y(\alpha, \theta)|^\alpha \operatorname{sign}(Y(\alpha, \theta)) \leq |y|^\alpha \operatorname{sign} y\} = \\ &= P\{Z(\alpha, \theta) \leq |y|^\alpha \operatorname{sign} y\} = F(|y|^\alpha \operatorname{sign} y, \alpha, \theta). \end{aligned}$$

Используя теперь в этом выражении разложение (6) и оценку (7) для асимптотического разложения функции распределения устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$, получаем представление (46). А для оценки остаточного члена этого асимптотического разложения получаем оценку (48).

Получим теперь асимптотическое разложение для плотности вероятности $g(x, \alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Предположим что $y > 0$, получаем

$$g(y, \alpha, \theta) = \frac{d}{dy}G(y, \alpha, \theta) = \frac{d}{dy}F(y^\alpha, \alpha, \theta) = \alpha y^{\alpha-1} f(y^\alpha, \alpha, \theta),$$

где $f(t, \alpha, \theta)$ – плотность вероятности случайной величины $Z(\alpha, \theta)$. Используя теперь (43) после несложных преобразований приходим к асимптотическому выражению

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \theta) &= \frac{\alpha}{2}(1+\theta)y^{-\alpha-1}e^{-y^{-\alpha}} - \\ &- \frac{\alpha}{2y}e^{-y^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_{n+1}(y^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta), \quad y > 0, \quad \alpha \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Для получения оценки остаточного члена воспользуемся (44). В результате получаем

$$\begin{aligned} R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) &= \alpha y^{\alpha-1} R_{N+1}^f(y^\alpha, \alpha, \theta) \\ &\leq \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{1}{2y} e^{-y^{-\alpha}} \bar{P}_{N+2}(y^\alpha) \equiv R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta) + o(\alpha^{N+2}), \quad y > 0. \end{aligned}$$

Здесь $R_{N+1}^f(y, \alpha, \theta)$ – остаточный член в разложении (43), для которого справедлива оценка (44).

Для получения разложения при отрицательных y воспользуемся свойством инверсии. Для плотности вероятности оно имеет вид $g(-y, \alpha, \theta) = g(y, \alpha, -\theta)$, $y > 0$. Используя (50) и учитывая, что коэффициенты $C_n^{(k)}(\theta)$ и $\bar{C}_n^{(k)}(\theta)$ являются четными функциями θ , получаем

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \theta) &= \frac{\alpha}{2}(1-\theta)(-y)^{-\alpha-1}e^{-(-y)^{-\alpha}} - \\ &- \frac{\alpha}{2(-y)}e^{-(-y)^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) - \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_{n+1}((-y)^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} + R_{N+1}^g(-y, \alpha, -\theta), \quad y < 0, \quad \alpha \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где для остаточного члена справедлива оценка

$$\begin{aligned} R_{N+1}^g(y, \alpha, -\theta) &\leq \frac{\alpha^{N+2}}{(N+1)!} \left(\bar{C}_{N+1}^{(0)}(\theta) + |\theta| \bar{C}_{N+1}^{(1)}(\theta) \right) \frac{e^{-(-y)^{-\alpha}}}{2(-y)} \bar{P}_{N+2}((-y)^\alpha) + o(\alpha^{N+2}) \\ &\equiv R_{N+1}^g(-y, \alpha, -\theta), \quad y < 0. \end{aligned}$$

Объединяя теперь формулы для случаев $y > 0$ и $y < 0$, получаем разложение (47), где для остаточного члена справедлива оценка (49). Следствие доказано.

Теорема 2 и следствие 1 определяют асимптотическое разложение плотности вероятности и функции распределения случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ по параметру α при $\alpha \rightarrow 0$. Из разложений (6) и (38) видно, что в предельном случае $\alpha \rightarrow 0$ функция распределения и плотность вероятности случайной величины $Z(\alpha, \theta)$ имеют вид

$$F(y, 0, \theta) = \frac{1}{2}(1-\theta) + \frac{1}{2}(\operatorname{sign} y + \theta)e^{-1/|y|}, \quad f(y, 0, \theta) = (1 + \theta \operatorname{sign} y) \frac{e^{-1/|y|}}{2y^2}.$$

Это распределение является непрерывным по y и имеет устранимую особенность в точке $y = 0$: $\lim_{y \rightarrow 0} F(y, 0, \theta) = (1-\theta)/2$ и $\lim_{y \rightarrow 0} f(y, 0, \theta) = 0$. Несложно показать, что это распределение соответствует распределению случайной величины $U(\theta)/E$, где E – экспоненциально распределенная случайная величина со средним значением равным единице, а $U(\theta)$ – случайная величина, принимающая значения

± 1 с вероятностями $(1 \pm \theta)/2$ и E и $U(\theta)$ независимые случайные величины. Таким образом, $Z(\alpha, \theta) \xrightarrow{d} U(\theta)/E$ при $\alpha \rightarrow 0$. Доказательство этого результата можно найти в [3, 6].

При переходе к устойчивым законам эти слагаемые приводят к главным асимптотическим членам разложения функции распределения и плотности вероятности при $\alpha \rightarrow 0$. Как видно из (46) и (47), они имеют вид

$$G(y, \alpha, \theta) \equiv G_0(y, \alpha, \theta) = \frac{1}{2}(1 - \theta) + \frac{1}{2}(\text{sign } y + \theta)e^{-|y|^{-\alpha}}, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (51)$$

$$g(y, \alpha, \theta) \equiv g_0(y, \alpha, \theta) = (1 + \theta \text{sign } y) \frac{\alpha e^{-|y|^{-\alpha}}}{2|y|^{\alpha+1}}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (52)$$

и имеют особенность при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$. Выражение $G_0(y, \alpha, \theta)$ в пределе $\alpha \rightarrow 0$ в точке $y = 0$ имеет скачок величиной e^{-1} . Таким образом, при $\alpha \rightarrow 0$ главный асимптотический член разложения функции распределения устойчивого закона $G_0(y, \alpha, \theta)$ принимает вид ступенчатой функции с разрывом в точке $y = 0$, что соответствует вырожденному распределению в этой точке. Соответствующим образом ведет себя и главный асимптотический член разложения плотности вероятности $g_0(y, \alpha, \theta)$. Как видно, в выражение (52) входят два множителя $e^{-|y|^{-\alpha}}$ и $|y|^{-\alpha-1}$. В случае $\alpha \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0$ экспоненциальный множитель убывает к нулю значительно медленнее, чем растет множитель $|y|^{-\alpha-1}$. В результате при $\alpha \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ в этом выражении доминирующую роль играет множитель $|y|^{-\alpha-1}$ и, следовательно, $g_0(y, \alpha, \theta)$ растет как $1/|y|$. Такое поведение можно интерпретировать как вырожденное распределение в точке $y = 0$. Таким образом, главные асимптотические члены разложения функции распределения $G_0(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $g_0(y, \alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ стремятся к вырожденному распределению в точке $y = 0$, что полностью соответствует свойствам устойчивых законов. Формулы (51) и (52) позволяют оценить функцию распределения и плотность вероятности устойчивых законов в случае $\alpha \rightarrow 0$, когда интегральные представления этих величин уже не позволяют их вычислить. Учет последующих членов разложения позволяет улучшить точность вычислений этих величин. Следует отметить, что приведенные формулы для главных асимптотических членов не являются новыми и были ранее получены в работах [7, 3, 4, 5, 6].

В самом начале мы условились рассматривать стандартные устойчивые законы, т. е. устойчивые законы в случае $\lambda = 1$. Однако используя известные свойства устойчивых законов, можно без особых трудностей получить устойчивый закон для произвольного $\lambda > 0$. В случае функции распределения и плотности вероятности переход от стандартного устойчивого закона к устойчивому закону с произвольным λ осуществляется при помощи формул

$$G(y, \alpha, \theta, \lambda) = G(y\lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta), \quad g(y, \alpha, \theta, \lambda) = \lambda^{-1/\alpha} g(y\lambda^{-1/\alpha}, \alpha, \theta).$$

Более детальную информацию об этих свойствах можно найти в работах [1, 3] (см. замечание 5 и 7 в [1], и свойство 2.1 в [3]).

5. Уравнение для порогового параметра. Разложения из следствия 2 позволяют вычислять функцию распределения и плотность вероятности устойчивых законов, а оценки для остаточных членов позволяют получить критерий применимости этих разложений. Представим разложения (46) и (47) в виде

$$G(y, \alpha, \theta) = G_N(y, \alpha, \theta) + R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta), \quad g(y, \alpha, \theta) = g_N(y, \alpha, \theta) + R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta),$$

где

$$G_N(y, \alpha, \theta) = G_0(y, \alpha, \theta) + \frac{1}{2}e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) \text{sign } y + \theta C_n^{(1)}(\theta) \right) P_n(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!}, \quad (53)$$

$$g_N(y, \alpha, \theta) = g_0(y, \alpha, \theta) - \frac{\alpha}{2|y|} e^{-|y|^{-\alpha}} \sum_{n=1}^N \left(C_n^{(0)}(\theta) + \theta C_n^{(1)}(\theta) \text{sign } y \right) P_{n+1}(|y|^\alpha) \frac{\alpha^n}{n!} \quad (54)$$

и $G_0(y, \alpha, \theta)$ и $g_0(y, \alpha, \theta)$ определяются формулами (51) и (52). Принимая во внимание неравенства (48) и (49) видно, что эти выражения удовлетворяют неравенствам $|G(y, \alpha, \theta) - G_N(y, \alpha, \theta)| \leq R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta)$ и $|g(y, \alpha, \theta) - g_N(y, \alpha, \theta)| \leq R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta)$. Если приравнять правую часть этих неравенств некоторому заданному ε , то получим выражение для абсолютной ошибки вычисления. Однако в данном случае более удобной оказывается относительная ошибка.

Для относительной ошибки имеем

$$\frac{|G(y, \alpha, \theta) - G_N(y, \alpha, \theta)|}{G(y, \alpha, \theta)} \leq \frac{R_{N+1}^G(y, \alpha, \theta)}{G(y, \alpha, \theta)}, \quad (55)$$

$$\frac{|g(y, \alpha, \theta) - g_N(y, \alpha, \theta)|}{g(y, \alpha, \theta)} \leq \frac{R_{N+1}^g(y, \alpha, \theta)}{g(y, \alpha, \theta)}. \quad (56)$$

Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned}\delta G_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{|G(y, \alpha, \theta) - G_N(y, \alpha, \theta)|}{G(y, \alpha, \theta)}, & \Delta G_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{\mathbb{R}_{N+1}^G(y, \alpha, \theta)}{G(y, \alpha, \theta)}, \\ \delta g_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{|g(y, \alpha, \theta) - g_N(y, \alpha, \theta)|}{g(y, \alpha, \theta)}, & \Delta g_N(y, \alpha, \theta) &= \frac{\mathbb{R}_{N+1}^g(y, \alpha, \theta)}{g(y, \alpha, \theta)}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ определяют относительную ошибку вычисления функции распределения и плотности вероятности при помощи разложений (53) и (54), а $\Delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\Delta g_N(y, \alpha, \theta)$ оценку соответствующей относительной ошибки.

Приравняем $\Delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\Delta g_N(y, \alpha, \theta)$ некоторому выбранному значению ε . Величину ε будем называть уровнем точности. В результате получим уравнения

$$\Delta G_N(y, \alpha, \theta) = \varepsilon, \quad \Delta g_N(y, \alpha, \theta) = \varepsilon. \quad (57)$$

Решая теперь каждое из этих уравнений относительно α при фиксированных y и θ , получим оценки значений пороговых параметров α_N^ε для относительной ошибки функции распределения и плотности вероятности. Отметим, что аналитически эти уравнения решить невозможно, поэтому необходимо использовать численные методы. Значение координаты y , при которой находится решение этих уравнений, будем обозначать y^ε . В результате справедливы неравенства

$$\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta) \leq \varepsilon, \quad 0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon, \quad (58)$$

$$\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta) \leq \varepsilon, \quad 0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon. \quad (59)$$

Эти неравенства показывают, что в диапазоне значений $0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ относительная ошибка вычисления функции распределения и плотности вероятности устойчивого закона при помощи разложений (53) и (54) не превосходит величину ε .

6. Вычисление плотности вероятности и функции распределения устойчивых законов при $\alpha \rightarrow 0$. На рис. 1 и 2 представлены результаты вычисления функции распределения $G(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $g(y, \alpha, \theta)$ устойчивого закона и соответствующие относительные ошибки $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ для $N = 0, 1, 2, 3$. На рис. 1а и 2а приведены результаты вычисления $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ в зависимости от параметра α при фиксированных y и θ . На этих рисунках сплошные кривые – точные значения $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$, вычисленные при помощи интегральных представлений (см. [1, 3]), штриховые кривые – формулы (53) и (54) для указанных N . В качестве координаты y взято значение y^ε , для которого решались уравнения (57). Кружками на рисунках обозначены положения пороговых параметров α_N^ε , которые являются решениями уравнений (57) относительно параметра α при фиксированных y, θ и N . Решения искали для $N = 0, 1, 2, 3$ при значениях $y^\varepsilon = 2$ и $\theta = 0.2$ и значения уровня точности $\varepsilon = 0.1\%$. Для функции распределения получены значения пороговых параметров $\alpha_0^\varepsilon = 0.0049, \alpha_1^\varepsilon = 0.0521, \alpha_2^\varepsilon = 0.0991, \alpha_3^\varepsilon = 0.1397$, для плотности вероятности – $\alpha_0^\varepsilon = 8.665 \cdot 10^{-4}, \alpha_1^\varepsilon = 0.0194, \alpha_2^\varepsilon = 0.0476, \alpha_3^\varepsilon = 0.0770$. Видно, что при увеличении N значения α_N^ε увеличиваются. Следовательно, область допустимых значений параметра α , в которой справедливы неравенства (58) и (59), расширяется. Из рис. 1а также видно, что при увеличении N в формуле (53) соответствующие кривые приближаются к $G(y, \alpha, \theta)$. Такое же поведение характерно и для разложения плотности вероятности $g_N(y, \alpha, \theta)$, но масштаб рис. 2а такой, что все кривые сливаются.

Более детальную информацию о точности формул (53) и (54) позволяют получить соответствующие относительные ошибки. На рис. 1б и 2б представлены результаты вычисления относительных ошибок $\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, даваемые формулами (53) и (54) для значений $N = 0, 1, 2, 3$ при фиксированных y^ε и θ . Сплошные кривые – точное значение относительных ошибок $\delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – оценки относительных ошибок $\Delta G_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ и $\Delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. Положение пороговых параметров α_N^ε обозначено кружками. Из рисунков видно, что для каждого N штриховые кривые расположены выше соответствующих сплошных кривых. Это значит, что при каждом N для всех $\alpha < 1$ выполняются неравенства (55) и (56), и, следовательно, и неравенства (58) и (59). При этом, чем больше N , тем больше α_N^ε . Таким образом, с увеличением N увеличивается область $0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ допустимых значений параметра α .

Некоторых пояснений требует отклонение от степенного закона убывания (прямолинейная зависимость в двойном логарифмическом масштабе) относительной ошибки $\delta G_3(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$ в случае $N = 3$ и $\alpha \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$ на рис. 1б, а также «шумовой» характер поведения относительной ошибки $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ при значениях $\alpha \lesssim 3 \cdot 10^{-3}$ на рис. 2б. Это является следствием того, что в формулы вычисления $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$ входят точные значения $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$, для вычисления которых используются соответствующие интегральные представления. Для вычисления интегралов в этих представлениях используется метод численного интегрирования. В результате, в указанном диапазоне значений параметра α , численный метод интегрирования достигает своего предела точности и при уменьшении значения

α оказывается неспособен вычислить $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ с достаточной точностью. Результатом этого и является наблюдаемое поведение зависимостей $\delta G_N(y^\epsilon, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y^\epsilon, \alpha, \theta)$.

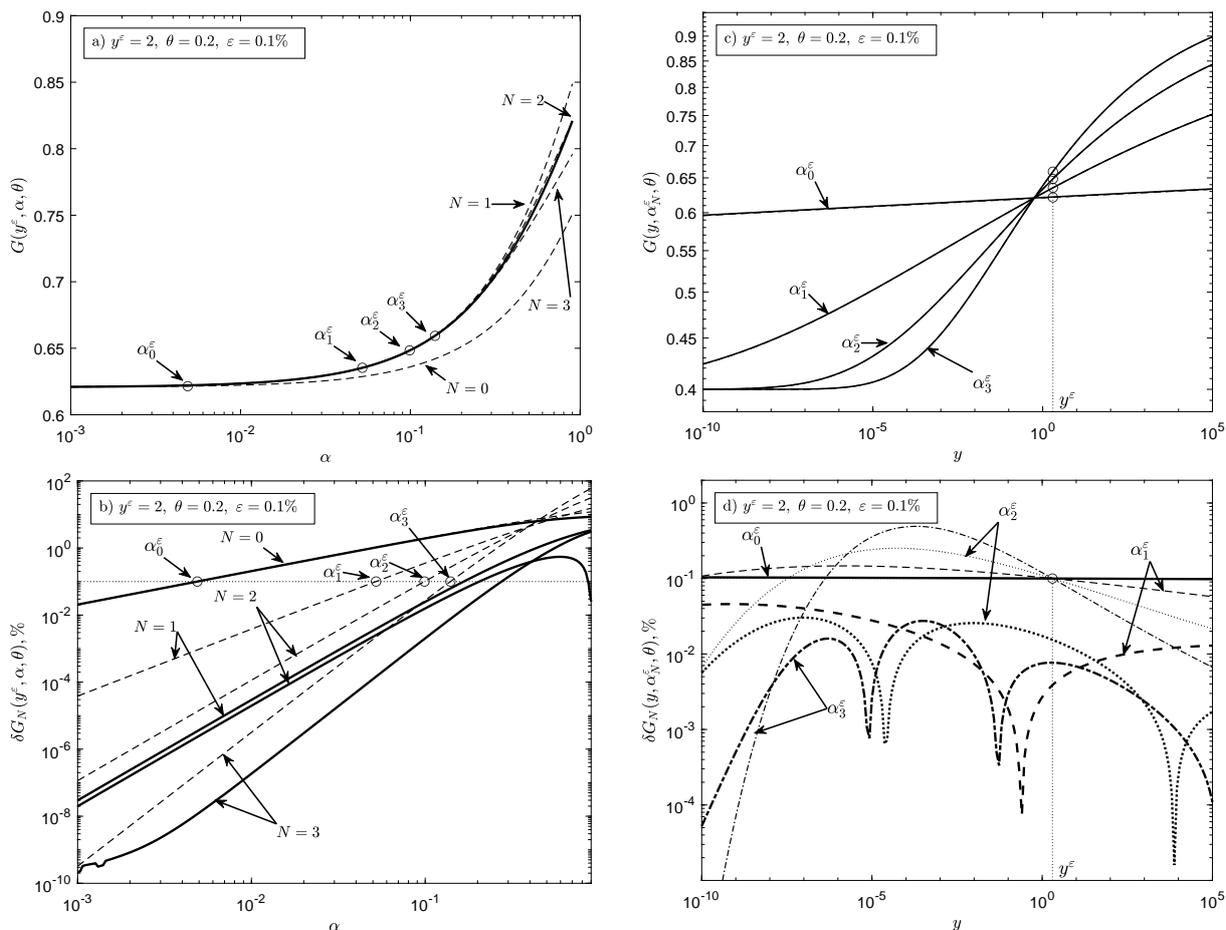


Рис. 1. Функция распределения $G(y, \alpha, \theta)$ и относительная ошибка $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$. а) Зависимость $G(y, \alpha, \theta)$ от α в точке $y = y^\epsilon$. Сплошная кривая – функция распределения $G(y, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – формула (53) для указанных значений N . б) Относительная ошибка, выраженная в процентах, в зависимости от параметра α для указанных на рисунке значений y^ϵ, θ и N . Сплошные кривые – относительная ошибка $\delta G_N(y^\epsilon, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – оценка относительной ошибки $\Delta G_N(y^\epsilon, \alpha, \theta)$. в) Зависимость $G(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ от y для значений α_N^ϵ . д) Зависимость относительной ошибки, выраженной в процентах, от координаты y для значений α_N^ϵ . Жирные кривые – относительная ошибка $\delta G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$, тонкие кривые – оценка относительной ошибки $\Delta G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$. На рисунках (а) и (б) кружки показывают положение порогового значения α_N^ϵ , а на рисунках (с) и (д) – положение координаты y^ϵ .
 Fig. 1. Distribution function $G(y, \alpha, \theta)$ and relative error $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$. а) Dependence of $G(y, \alpha, \theta)$ on α at point $y = y^\epsilon$. Solid curve is distribution function $G(y, \alpha, \theta)$, dashed curves are expression (53) for the given values of N . б) Relative error expressed as a percentage depending on parameter α for the given values of y^ϵ, θ and N . Solid curves are relative error $\delta G_N(y^\epsilon, \alpha, \theta)$, dashed curves are estimated relative error $\Delta G_N(y^\epsilon, \alpha, \theta)$. в) Dependence of $G(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ on y for values of α_N^ϵ . д) Dependence of the relative error expressed as a percentage of the coordinate y for values of α_N^ϵ . Bold curves are relative error $\delta G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$, thin curves are estimated relative error $\Delta G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$. In figures (a) and (b), the circles show the position of the threshold value α_N^ϵ , and in figures (c) and (d), the position of the coordinate y^ϵ .

Следствие 2 дает асимптотические разложения $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ по параметру α при $\alpha \rightarrow 0$ и фиксированном значении координаты y . Однако с практической точки зрения больший интерес представляют зависимости $G(y, \alpha, \theta)$ и $g(y, \alpha, \theta)$ от координаты y при некотором фиксированном α . В качестве значений α возьмем значения пороговых параметров α_N^ϵ . На рис. 1с и 2с представлены результаты вычислений функции распределения $G(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ и плотности вероятности $g(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ в зависимости от y при значениях $\alpha_N^\epsilon, N = 0, 1, 2, 3$. На этих рисунках представлены зависимости $G(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ и $g(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$, вычисленные как при помощи интегральных представлений, так и при помощи формул (53) и (54). Однако различие между кривыми $G(y, \alpha_N^\epsilon, \theta), G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ и кривыми $g(y, \alpha_N^\epsilon, \theta), g_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ таково, что в масштабах рисунков для каждого N соответствующие две кривые сливаются. Более детальную информацию о различии этих кривых позволяют получить соответствующие относительные ошибки.

На рис. 1д и 2д представлены результаты вычислений относительных ошибок $\delta G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ (жирные кривые) и оценок относительных ошибок $\Delta G_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ и $\Delta g_N(y, \alpha_N^\epsilon, \theta)$ (тонкие кривые) в зависимости от координаты y при значениях $\alpha_N^\epsilon, N = 0, 1, 2, 3$. Разным значениям N со-

ответствует разный тип кривой: сплошная кривая – $N = 0$; штриховая кривая – $N = 1$; пунктирная кривая – $N = 2$; штрих-пунктирная кривая – $N = 3$. Кружками обозначено положение координаты y^ε , при которой решались уравнения (57) и были найдены значения α_N^ε для функции распределения и плотности вероятности.

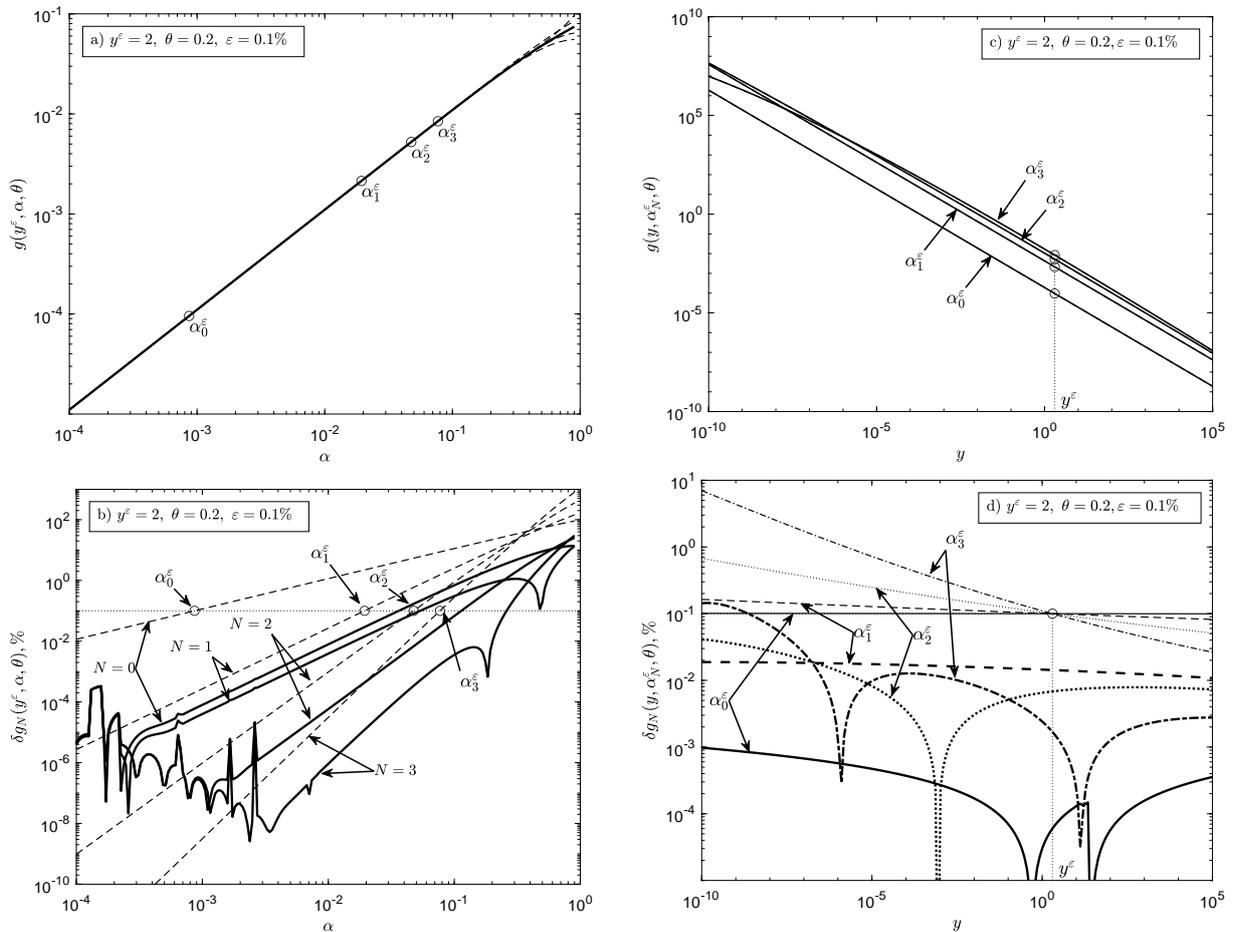


Рис. 2. Плотность вероятности $g(y, \alpha, \theta)$ и относительная ошибка $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$. а) Зависимость $g(y, \alpha, \theta)$ от α в точке $y = y^\varepsilon$. Сплошная кривая – плотность вероятности $g(y, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – формула (54) для указанных значений N . б) Относительная ошибка, выраженная в процентах, в зависимости от параметра α для указанных на рисунке значений y^ε , θ и N . Сплошные кривые – относительная ошибка $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, штриховые кривые – оценка относительной ошибки $\Delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. в) Зависимость $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ от y для значений α_N^ε . д) Зависимость относительной ошибки, выраженной в процентах, от координаты y для значений α_N^ε . Жирные кривые – относительная ошибка $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, тонкие кривые – оценка относительной ошибки $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. На рисунках (а) и (б) кружки показывают положение порогового параметра α_N^ε , а на рисунках (с) и (д) – положение координаты y^ε

Fig. 2. Probability density $g(y, \alpha, \theta)$ and relative error $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$. а) Dependence of $g(y, \alpha, \theta)$ on α at point $y = y^\varepsilon$. Solid curve is probability density $g(y, \alpha, \theta)$, dashed curves are expression (54) for the given values of N . б) Relative error expressed as a percentage depending on parameter α for the given values of y^ε , θ and N . Solid curves – relative error $\delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$, dashed curves – estimated relative error $\Delta g_N(y^\varepsilon, \alpha, \theta)$. в) Dependence of $g(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ on y for values of α_N^ε . д) Dependence of the relative error expressed as a percentage of the coordinate y for values of α_N^ε . Bold curves – relative error $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, thin curves – estimated relative error $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. In figures (a) and (b), the circles show the position of the threshold parameter α_N^ε , and in figures (c) and (d), the position of the coordinate y^ε

Видно, что кривые $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (рис. 1d) и $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (рис. 2d) для всех N пересекаются в этой точке. Легко понять, что так и должно быть, так уравнения (57) решались для значений $y^\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 0.1\%$. Из рис. 1b и 1d, а также из рис. 2b и 2d видно, что при фиксированном N и $\alpha < \alpha_N^\varepsilon$ и всех y справедливы неравенства $\delta G_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$. Это означает, что формулы (53) и (54) можно использовать при $\alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ и можно гарантировать, что относительные ошибки будут меньше выбранного уровня точности ε для всех y .

Проанализируем результаты, представленные на рис. 1d. В случае $N = 0$ различие между вычисленной относительной ошибкой $\delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ и её оценкой $\Delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ таково, что в масштабе рисунка эти две кривые сливаются. При более детальном изучении этих двух кривых можно увидеть, что при $y < y^\varepsilon$ значения $\Delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta) < \delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$. Это свидетельствует о том, что при $N = 0$ асимптотика еще не

достигается. Учет уже первого слагаемого в формуле (53) увеличивает точность разложения. Как видно из рис. 1d, для $N = 1$ для всех y выполняется неравенство $\delta G_1(y, \alpha_1^\varepsilon, \theta) < \varepsilon$, и увеличение значения N ведет к увеличению точности этого разложения. Таким образом, для вычисления функции распределения в разложении (53) необходимо учитывать как минимум первый член разложения ($N = 1$). По мере приближения y к нулю как относительная ошибка $\delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$, так и ее оценка $\Delta G_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ сначала возрастает, превышая уровень точности ε , а затем начинает убывать и становится меньше ε . Аналогичное поведение относительной ошибки $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ и её оценки $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ наблюдается и для остальных значений N . Однако при других значениях N координата y , при которой $\Delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ становится меньше $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, смещается в сторону меньших значений y . При этом $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta) < \varepsilon$ для $N > 0$ и всех y .

В случае плотности вероятности (рис. 2d) видно, что $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta) < \Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ для каждого N . Также видно, что в приведенном диапазоне координат $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta) < \varepsilon$. В случае $y \rightarrow 0$, как оценка $\Delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$, так и сама относительная ошибка $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ возрастают и с увеличением значения N рост увеличивается. Как видно из рисунка, при $y \leq 10^{-9}$ относительная ошибка $\delta g_3(y, \alpha_3^\varepsilon, \theta) > \varepsilon$. Такое увеличение связано с тем, что при $\alpha \rightarrow 0$ плотность устойчивого закона стремится к вырожденному распределению в точке $y = 0$. Тем не менее из рис. 2d видно, что относительная ошибка $\delta g_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ (случай $N = 0$) для всех y не превышает порогового значения ε . При этом относительная ошибка $\delta g_0(y, \alpha_0^\varepsilon, \theta)$ оказывается наименьшей для всех N . Из этого можно сделать вывод, что для вычисления плотности вероятности при $\alpha \rightarrow 0$ целесообразно использовать главный асимптотический член разложения $g_0(y, \alpha, \theta)$, определяемый формулой (52).

Подводя итоги можно сказать, что определение пороговых параметров α_N^ε позволило указать область допустимых значений параметра α ($0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$). Внутри этой области относительные ошибки вычислений функции распределения и плотности вероятности при помощи формул (53) и (54) не превосходят заданного уровня точности ε . А увеличение количества слагаемых N в этих формулах приводят к расширению области допустимых значений α . Исследование зависимостей относительных ошибок от координаты y при найденных значениях α_N^ε показали, что для широкого диапазона y справедливы неравенства $\delta G_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta) < \varepsilon$ для всех $0 < \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$. При этом увеличение N приводит к уменьшению $\delta G_N(y, \alpha, \theta)$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta)$. Таким образом, формулы (53) и (54) можно использовать для вычисления функции распределения и плотности вероятности устойчивого закона при $\alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ при всех y , и при этом можно гарантировать, что $\delta G_N(y, \alpha, \theta) \leq \varepsilon$ и $\delta g_N(y, \alpha, \theta) \leq \varepsilon$. В случае функции распределения в формуле (53) целесообразно учитывать как минимум первое слагаемое в разложении ($N = 1$), а для плотности вероятности использование главного асимптотического члена разложения $g_0(y, \alpha, \theta)$, определяемого формулой (52), приводит к наименьшей относительной ошибке.

7. Заключение. Основной задачей данной работы являлось получение разложения функции распределения и плотности вероятности устойчивого закона при $\alpha \rightarrow 0$ и получение оценок остаточных членов этих разложений. Для решения этой задачи понадобилось рассмотреть случайную величину $Z(\alpha, \theta)$, которая определяется (4). Для этой случайной величины получены разложения в ряд функции распределения $F(y, \alpha, \theta)$ и плотности вероятности $f(y, \alpha, \theta)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и соответствующие оценки остаточных членов. Результаты представлены в теореме 2 и следствии 1. Используя эти результаты и взаимосвязь случайных величин $Z(\alpha, \theta)$ и $Y(\alpha, \theta)$, в следствии 2 получены асимптотические разложения плотности вероятности и функции распределения устойчивого закона в степенной ряд по параметру α и соответствующие оценки остаточных членов этих разложений.

Полученные оценки остаточных членов позволили записать уравнения для нахождения значений пороговых параметров α_N^ε для функции распределения и плотности вероятности. Их значения находятся в результате численного решения уравнений (57). Параметр α_N^ε определяет область допустимых значений параметра α , внутри которой относительная ошибка при использовании разложений из следствия 2 не будет превосходить задаваемого уровня точности ε . В результате для фиксированных y и θ оказываются справедливы неравенства (58) и (59). Эти неравенства показывают, что в области $0 \leq \alpha \leq \alpha_N^\varepsilon$ относительная ошибка не будет превосходить задаваемого уровня точности ε .

Проведенные расчеты зависимости функции распределения и плотности вероятности от параметра α при фиксированных y и θ для $N = 0, 1, 2, 3$ показали, что увеличение количества слагаемых в разложениях ведет к увеличению значения порогового параметра α_N^ε , и, как следствие, к расширению области допустимых значений параметра α . Это означает, что увеличение N влечет увеличение точности аппроксимации, по крайней мере для рассмотренных N . Однако вопрос о сходимости полученных рядов при $N \rightarrow \infty$ остается открытым и требует дополнительного исследования. Тем не менее можно с определенностью утверждать, что полученные в теореме 2 и следствиях 1 и 2 ряды являются асимптотическими при $\alpha \rightarrow 0$.

Полученные выше результаты относятся к случаю, когда координата y фиксирована и исследуется зависимость от параметра α . Однако с практической точки зрения больший интерес представляет зависимость функции распределения и плотности вероятности от координаты y при фиксированном α . В качестве таких значений α были выбраны пороговые значения α_N^ε , найденные в результате

решения уравнений (57). Проведенные расчеты показали (см. рис. 1(c,d) и рис. 2(c,d)), что поведение разложений функции распределения (53) и плотности вероятности (54) несколько отличаются друг от друга. В случае функции распределения увеличение количества слагаемых N в разложении приводит к уменьшению относительной ошибки $\delta G_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$. Следовательно, учет дополнительных слагаемых в разложении увеличивает точность аппроксимации функции распределения. В случае плотности вероятности результат оказывается противоположным. Учет дополнительных слагаемых в формуле (54) приводит к увеличению относительной ошибки $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ (см. рис. 2d). При этом рост $\delta g_N(y, \alpha_N^\varepsilon, \theta)$ увеличивается при $y \rightarrow 0$. Скорее всего это связано с тем, что при $\alpha \rightarrow 0$ устойчивые законы стремятся к вырожденному распределению в точке $y = 0$. Тем не менее, как это видно из рис. 2d, к наименьшей относительной ошибке приводит случай $N = 0$. Таким образом, для вычисления функции распределения в формуле (53) необходимо учитывать как минимум первый член разложения, а для вычисления плотности вероятности при $\alpha \rightarrow 0$ целесообразно использовать главный асимптотический член разложения $g_0(y, \alpha, \theta)$, определяемый формулой (52). Если при этом значение α все время остается в области $0 < \alpha \leq \alpha_0^\varepsilon$, то можно гарантировать, что относительная ошибка не будет превосходить значение ε .

Список литературы

1. Saenko V.V. The Calculation of the Density and Distribution Functions of Strictly Stable Laws. *Mathematics*. 2020;8(5):775. Available from: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/775>.
2. Nolan J.P. Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1997;13(4):759–774. Available from: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15326349708807450>.
3. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. Москва: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.; 1983. 304 с.
4. Cressie N. A note on the behaviour of the stable distributions for small index α *Probability Theory and Related Fields*. 1975;33(1):61–64. Available from: <http://www.springerlink.com/index/VW66M4303X6J8800.pdf> <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF00539862>.
5. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and stability. Stable Distributions and their Applications. Utrecht: VSP; 1999.
6. Nolan J.P. Univariate Stable Distributions. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham: Springer International Publishing; 2020. Available from: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-52915-4>.
7. Золотарев В.М. Преобразования Меллина – Стильтьеса в теории вероятностей. *Теория вероятности и ее применения*. 1957;2(4):444–469. Available from: <http://mi.mathnet.ru/tvp4977>.
8. Золотарев В.М. Общая теория перемножения независимых случайных величин. *Доклады АН СССР*. 1962;142(4):788–791.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз; 1963. 1100 с.
10. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. Москва: Издательство иностранной литературы; 1963. 288 с.
11. Comtet L. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company; 1974.
12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.; 1979. 832 с.

References

1. Saenko V.V. The Calculation of the Density and Distribution Functions of Strictly Stable Laws. *Mathematics*. 2020;8(5):775. Available from: <https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/775>.
2. Nolan J.P. Numerical calculation of stable densities and distribution functions. *Communications in Statistics Stochastic Models*. 1997;13(4):759–774. Available from: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/15326349708807450>.
3. Zolotarev V.M., One-dimensional stable Distributions, Amer. Mat. Soc., Providence, RI, 1986.
4. Cressie N. A note on the behaviour of the stable distributions for small index α *Probability Theory and Related Fields*. 1975;33(1):61–64. Available from: <http://www.springerlink.com/index/VW66M4303X6J8800.pdf> <http://www.springerlink.com/index/10.1007/BF00539862>.
5. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and stability. Stable Distributions and their Applications. Utrecht: VSP; 1999.
6. Nolan J.P. Univariate Stable Distributions. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Cham: Springer International Publishing; 2020. Available from: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-52915-4>.
7. Zolotarev V.M. Mellin-Stieltjes Transforms in Probability Theory. *Teoriya veroyatnostej i eyo primeneniya [Theory of Probability & Its Applications]* 1957;2(4):433–460. Available from: <http://mi.mathnet.ru/tvp4977>.
8. Zolotarev V.M. Obshchaya teoriya peremnozheniya nezavisimykh sluchainykh velichin [General theory of multiplication of independent random variables]. *Doklady AN SSSR*. 1962;142(4):788–791.
9. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables Of Integrals, Series And Products. Academic Press; 2007.
10. Riordan J. An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, Inc, New York 1958.
11. Comtet L. Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company; 1974.

12. Abramowitz M., Stegun IA. eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series. Vol. 55. Washington D.C.; New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards. 1983.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 11.10.2025

Received October 11, 2025

Поступила после рецензирования 24.11.2025

Revised November 24, 2025

Принята к публикации 28.11.2025

Accepted November 28, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Саенко Вячеслав Владимирович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Передовой инженерной школы «ФармИнжиниринг», Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Viacheslav V. Saenko – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of the, Advanced Engineering School “PharmEngineering”, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia

[К содержанию](#)

Задача с нелокальными условиями Стеклова для уравнения в частных производных четвертого порядка и критерии единственности ее решения

Богатов А. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Солдатовым А. П.)

Публичное акционерное общество «Банк ПСБ»,
Россия, 150003, г. Ярославль, ул. Республиканская, 16
andrebogato@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается начально-краевая задача для уравнения четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями. Были получены критерии единственности решения задачи для уравнения, которое является обобщением уравнения Буссинеска – Лява. Нелокальные краевые условия представляют собой соотношения между значениями искомого решения и его производных по пространственной переменной в различных точках границы и известны в научной литературе как условия Стеклова. Ранее задачи с такими условиями рассматривались для уравнений второго порядка.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка, нелокальная задача, условия Стеклова, критерии единственности

Для цитирования: Богатов А.В. Задача с нелокальными условиями Стеклова для уравнения в частных производных четвертого порядка и критерии единственности ее решения. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(1):22–28. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-22-28 EDN FBVXHX

Original Research

The Problem with Steklov Conditions for Fourth Order Partial Differential Equation and Criteria for Uniqueness of its Solution

Andrey V. Bogatov 

(Article submitted by a member of the editorial board Soldatov A. P.)

Bank PSB Public Joint-Stock Company,
16 Respublikanskaya St., Yaroslavl 150003, Russia
andrebogato@mail.ru

Abstract. In this article, we consider the initial-boundary problem for fourth order partial differential equation with nonlocal boundary conditions. Our attention is focused on the equation that one may interpret as generalization of Boussinesque – Love equation. Nonlocal conditions here are relations between the values of required solution and its derivatives with respect to spacial variable in different boundary points. Such nonlocal conditions are known as Steklov conditions. Earlier nonlocal problems with Steklov conditions were considered for second order partial differential equations. First, such problem was stated for the one-dimensional heat equation in connection with study of the process of cooling of a bar. Later it was noted that the nonlocal problem with Steklov conditions is closely related to the problem of longitudinal vibration of a thick short bar if we take into account the transverse deformation. The mathematical model of longitudinal vibration of a thick short bar considering the effect of transverse movements is called Rayleigh bar and is based on Boussinesque – Love equation.

Keywords: Fourth Order Partial Differential Equation, Nonlocal Problem, Steklov Conditions, Criteria of Uniqueness

For citation: Bogatov AV. The Problem with Steklov Conditions for Fourth Order Partial Differential Equation and Criteria for Uniqueness of its Solution. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(1):22–28. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-22-28 EDN FBVXHX

1. Введение. В статье рассмотрена задача для уравнения четвертого порядка

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x, t), \quad (1)$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска – Лява. Уравнение Буссинеска – Лява, как известно, возникает при математическом моделировании различных колебательных процессов, в частности, продольных колебаний толстого короткого стержня с учетом эффектов поперечных деформаций. Такая математическая модель называется стержнем Рэлея [1]. При небольшой длине стержня, колебания которого изучаются, режимы на его концах могут влиять друг на друга. Этот эффект был замечен В. А. Стекловым [2] и представлен им в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u_x(0, t) + \alpha_{12}u_x(l, t) + \beta_{11}u(0, t) + \beta_{12}u(l, t) &= 0, \\ \alpha_{21}u_x(0, t) + \alpha_{22}u_x(l, t) + \beta_{21}u(0, t) + \beta_{22}u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Задачи с такими условиями изучались для уравнений второго порядка [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. В данной статье рассматривается уравнение четвертого порядка и для него получены критерии единственности решения задачи с условиями (2).

2. Постановка задачи. В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее нелокальным условиям (2), где $\alpha_{ij}, \beta_{i,j}$ – постоянные, $i, j = 1, 2$, и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{3}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции, $a(x, t) > 0, b(x, t) > 0$ всюду в \bar{Q}_T . Под решением задачи мы понимаем функцию $u \in C^2(\bar{Q}_T)$, имеющую $u_{xxtt} \in C(Q_T)$, которая удовлетворяет условиям (2), (3) и обращает (1) в верное равенство. Естественным условием, при выполнении которого можно ожидать однозначную разрешимость поставленной задачи, является линейная независимость соотношений (2). Это свойство имеет место, если не все миноры матрицы из коэффициентов $\alpha_{ij}, \beta_{i,j}$ равны нулю. В настоящей статье получены два варианта условий, обеспечивающих единственность решений.

3. Основной результат.

Теорема 1.

Если $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$ и выполняются условия:

Н1: $a, a_t, b, b_t, c \in C(\bar{Q}_T)$;

Н2: $\gamma_{12}b(0, t) + \gamma_{21}b(l, t) = 0$;

Н3: $\gamma_{22} < 0, \gamma_{11} > 0, \gamma_{12}^2 b(0, \tau) + \gamma_{11}\gamma_{22}b(l, \tau) \leq 0$, то существует не более одного решения задачи (1)-(3).

Доказательство.

Пусть $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$. Тогда (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= \gamma_{11}u(0, t) + \gamma_{12}u(l, t) \\ u_x(l, t) &= \gamma_{21}u(0, t) + \gamma_{22}u(l, t), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{\Delta}(\alpha_{22}\beta_{11} - \alpha_{12}\beta_{21}), \gamma_{12} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{22}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{21}), \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{\Delta}(\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{21}\beta_{12}), \gamma_{21} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11}). \end{aligned}$$

Предположим, что задача (1), (3), (4) имеет два различных решения: $u_1(x, t), u_2(x, t)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным условиям (2).

Умножим обе части равенства (1) с $f = 0$ на u_t и проинтегрируем по области $Q_\tau = (0, l) \times (0, \tau)$. После преобразований интегрированием некоторых слагаемых получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x, \tau) + au_x^2(x, \tau) + bu_{xt}^2(x, \tau) \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx dt - \int_0^\tau au_t(l, t)u_x(l, t) dt + \int_0^\tau a(0, t)u_t(0, t)u_x(0, t) dt - \\ & - \int_0^\tau b(l, t)u_{xt}(l, t)u_t(l, t) dt + \int_0^\tau b(0, t)u_{xt}(0, t)u_t(0, t) dt + \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt = 0. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условия (4), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau) \right] dx = \\ &= - \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx dt + \\ &+ \int_0^\tau a(l, t)u_t(l, t)[\gamma_{21}u(0, t) + \gamma_{22}u(l, t)] dt - \\ &- \int_0^\tau a(0, t)u_t(0, t)[\gamma_{11}u(0, t) + \gamma_{12}u(l, t)] dt + \\ &+ \int_0^\tau b(l, t)u_t(l, t)[\gamma_{21}u_{tt}(0, t) + \gamma_{22}u_{tt}(l, t)] dt - \\ &- \int_0^\tau b(0, t)u_t(0, t)[\gamma_{11}u_{tt}(0, t) + \gamma_{12}u_{tt}(l, t)] dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как $a(x, t), b(x, t)$ положительны всюду в \bar{Q}_T , то левая часть (5) неотрицательна. Также заметим, что существуют числа $a_0 > 0, b_0 > 0$ такие, что $a(x, t) \geq a_0, b(x, t) \geq b_0$.

Рассмотрим правую часть (5) и сделаем некоторые преобразования с целью вывести оценку, которая и позволит получить критерий единственности решения в рассматриваемом случае. В первую очередь нас будут интересовать последние четыре интеграла.

$$\begin{aligned} & \gamma_{21} \int_0^\tau b(l, t) u_t(l, t) u_{tt}(0, t) dt; \\ & \gamma_{22} \int_0^\tau b(l, t) u_t(l, t) u_{tt}(l, t) dt = \frac{1}{2} \gamma_{22} b(l, \tau) u_t^2(l, \tau) - \frac{\gamma_{22}}{2} \int_0^\tau b_t(l, t) u_t^2(l, t) dt; \\ & -\gamma_{11} \int_0^\tau b(0, t) u_t(0, t) u_{tt}(0, t) dt = -\frac{1}{2} \gamma_{11} b(0, \tau) u_t^2(0, \tau) + \frac{\gamma_{11}}{2} \int_0^\tau b_t(0, t) u_t^2(0, t) dt; \\ & -\gamma_{12} \int_0^\tau b(0, t) u_t(0, t) u_{tt}(l, t) dt = \gamma_{12} \int_0^\tau b(0, t) u_t(l, t) u_{tt}(0, t) dt + \\ & \quad + \gamma_{12} \int_0^\tau b_t(0, t) u_t(0, t) u_t(l, t) dt - \gamma_{12} b(0, \tau) u_t(0, \tau) u_t(l, \tau). \end{aligned}$$

В результате проделанных преобразований (5) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2(x\tau) + a(x, \tau) u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau) u_{xt}^2(x, \tau)] dx = \\ & = - \int_0^\tau \int_0^l c u u_t dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx dt + \\ & \quad + \int_0^\tau a(l, t) u_t(l, t) [\gamma_{21} u(0, t) + \gamma_{22} u(l, t)] dt - \\ & \quad - \int_0^\tau a(0, t) u_t(0, t) [\gamma_{11} u(0, t) + \gamma_{12} u(l, t)] dt - \\ & \quad - \frac{1}{2} \gamma_{22} \int_0^\tau b_t(l, t) u_t^2(l, t) dt + \frac{1}{2} \gamma_{11} \int_0^\tau b_t(0, t) u_t^2(0, t) dt + \\ & \quad + \gamma_{12} \int_0^\tau b_t(0, t) u_t(0, t) u_t(l, t) dt + \gamma_{12} \int_0^\tau b(0, t) u_t(l, t) u_{tt}(0, t) dt + \\ & \quad + \gamma_{21} \int_0^\tau b(l, t) u_t(l, t) u_{tt}(0, t) dt + \frac{1}{2} \gamma_{22} b(l, \tau) u_t^2(l, \tau) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \gamma_{11} b(0, \tau) u_t^2(0, \tau) - \gamma_{12} b(0, \tau) u_t(0, \tau) u_t(l, \tau). \end{aligned} \tag{6}$$

Из **H1** следует, что существуют положительные числа a_1, b_1, c_0 такие, что

$$\max_{\bar{Q}_T} |a, a_t| \leq a_1, \max_{\bar{Q}_T} |b, b_t| \leq b_1, \max_{\bar{Q}_T} |c| \leq c_0,$$

из **H2** следует, что

$$\gamma_{12} \int_0^\tau b(0, t) u_t(l, t) u_{tt}(0, t) dt + \gamma_{21} \int_0^\tau b(l, t) u_t(l, t) u_{tt}(0, t) dt = 0,$$

из **H3** следует, что

$$\frac{1}{2} \gamma_{22} b(l, \tau) u_t^2(l, \tau) - \gamma_{12} b(0, \tau) u_t(0, \tau) u_t(l, \tau) - \frac{1}{2} b(0, \tau) u_t^2(0, \tau) \leq 0.$$

С учетом этих следствий из равенства (6) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2(x\tau) + a(x, \tau) u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau) u_{xt}^2(x, \tau)] dx \leq \\ & \leq \left| - \int_0^\tau \int_0^l c u u_t dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx dt + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\tau a(l, t)u_t(l, t)[\gamma_{21}u(0, t) + \gamma_{22}u(l, t)]dt - \int_0^\tau a(0, t)u_t(0, t)[\gamma_{11}u(0, t) + \gamma_{12}u(l, t)]dt - \\ - \frac{1}{2}\gamma_{22} \int_0^\tau b_t(l, t)u_t^2(l, t)dt + \frac{1}{2}\gamma_{11} \int_0^\tau b_t(0, t)u_t^2(0, t)dt + \gamma_{12} \int_0^\tau b_t(0, t)u_t(0, t)u_t(l, t)dt \Big|.$$

Оценим правую часть этого неравенства. Применив неравенство Коши, получим:

$$\begin{aligned} \left| - \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt \right| &\leq \frac{c_0}{2} \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2) dx dt; \\ \left| \gamma_{21} \int_0^\tau a(l, t)u_t(l, t)u(0, t)dt \right| &\leq \frac{a_1}{2} |\gamma_{21}| \int_0^\tau [u_t^2(l, t) + u^2(0, t)] dt; \\ \left| \gamma_{22} \int_0^\tau a(l, t)u_t(l, t)u(l, t)dt \right| &\leq \frac{a_1}{2} |\gamma_{22}| \int_0^\tau [u_t^2(l, t) + u^2(l, t)] dt; \\ \left| \gamma_{11} \int_0^\tau a(0, t)u_t(0, t)u(0, t)dt \right| &\leq \frac{a_1}{2} |\gamma_{11}| \int_0^\tau [u_t^2(0, t) + u^2(0, t)] dt; \\ \left| \gamma_{12} \int_0^\tau a(0, t)u_t(0, t)u(l, t)dt \right| &\leq \frac{a_1}{2} |\gamma_{12}| \int_0^\tau [u_t^2(0, t) + u^2(l, t)] dt; \\ \left| \gamma_{12} \int_0^\tau b(0, t)u_t(0, t)u(l, t)dt \right| &\leq \frac{b_1}{2} |\gamma_{12}| \int_0^\tau [u_t^2(0, t) + u^2(l, t)] dt. \end{aligned}$$

Оценим теперь правые части полученных неравенств с помощью неравенств [10]

$$v^2(\xi_i, t) \leq 2l \int_0^l v_x^2(x, t)dx + \frac{2}{l} \int_0^l v^2(x, t)dx, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = l. \tag{7}$$

Обозначим

$$P_1 = \frac{1}{2} [a_1(|\gamma_{21}| + |\gamma_{22}|) + b_1|\gamma_{12}|], P_2 = \frac{a_1}{2} (|\gamma_{21}| + |\gamma_{11}|), P_3 = \frac{a_1}{2} a_1 (|\gamma_{22}| + |\gamma_{12}|).$$

Получим

$$\begin{aligned} P_1 \int_0^\tau u_t^2(l, t)dt &\leq 2P_1l \int_0^\tau \int_0^l u_{xt}^2(x, t)dxdt + \frac{2P_1}{l} \int_0^\tau \int_0^l u_t^2(x, t)dxdt; \\ P_2 \int_0^\tau u^2(0, t)dt &\leq 2P_2l \int_0^\tau \int_0^l u_x^2(x, t)dxdt + \frac{2P_2}{l} \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t)dxdt; \\ P_3 \int_0^\tau u^2(l, t)dt &\leq 2P_3l \int_0^\tau \int_0^l u_x^2(x, t)dxdt + \frac{2P_3}{l} \int_0^\tau \int_0^l u^2(x, t)dxdt; \\ \frac{1}{2} |\gamma_{11}| \int_0^\tau b_t(0, t)u_t^2(0, t)dx &\leq lb_1|\gamma_{11}| \int_0^\tau \int_0^l u_{xt}^2 dxdt + \frac{b_1}{4} |\gamma_{11}| \int_0^\tau \int_0^l u_t^2; \\ \frac{1}{2} |\gamma_{22}| \int_0^\tau b_t(l, t)u_t^2(0, t)dx &\leq lb_1|\gamma_{22}| \int_0^\tau \int_0^l u_{xt}^2 dxdt + \frac{b_1}{4} |\gamma_{22}| \int_0^\tau \int_0^l u_t^2, \end{aligned}$$

и мы получаем неравенство

$$\int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau)]dx \leq M_1 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2)dxdt, \tag{8}$$

где M_1 выражается через $a_1, b_1, c_0, |\gamma_{ij}|, l$.

Так как в силу однородности начального условия справедливо представление

$$u(x, \tau) = \int_0^\tau u_t dt,$$

из которого следует неравенство

$$\int_0^l u^2(x, \tau)dx \leq \int_0^\tau \int_0^l u_t^2 dxdt,$$

то прибавив последнее к (8), а затем учтя, что $a(x, t) \geq a_0, b(x, t) \geq b_0$, получим

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau) + u_{xt}^2(x, \tau)]dx \leq$$

$$\leq M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2) dx dt, \quad (9)$$

где $M = M_1/m_0$, $m_0 = \min\{1, a_0, b_0\}$. Применив к (9) лемму Гронуолла [11], убеждаемся, что задача имеет не более одного решения.

Пусть теперь $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = 0$, но $\Delta_1 = \beta_{12}\alpha_{22} - \alpha_{12}\beta_{22} \neq 0$.

(Заметим, что можно выбрать и $\beta_{12}\alpha_{21} - \alpha_{11}\beta_{21} \neq 0$).

Теорема 2.

Если $\Delta_1 \neq 0$ и выполняются условия:

H4 $a(l, t)\rho\sigma = a(0, t)$;

H5: $b(l, t)\rho\sigma = b(0, t)$;

H6: $\rho r \geq 0$, то существует не более одного решения задачи (1)-(3).

Доказательство

Тогда (2) представим в форме

$$\begin{aligned} u(l, t) &= \rho u(0, t), \\ u_x(l, t) &= \sigma u_x(0, t) + ru(0, t), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\alpha_{12}\beta_{21} - \alpha_{22}\beta_{11}}{\Delta_1}, \\ \sigma &= \frac{\alpha_{11}\beta_{22} - \alpha_{21}\beta_{12}}{\Delta_1}, \\ r &= \frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}{\Delta_1}. \end{aligned}$$

Делая те же предположения о существовании двух различных решений, получим для них соотношение, как и в первом варианте:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x, \tau) + au_x^2(x, \tau) + bu_{xt}^2(x, \tau) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt - \\ &- \int_0^\tau au_t(l, t)u_x(l, t)dt + \int_0^\tau a(0, t)u_t(0, t)u_x(0, t)dt - \int_0^\tau b(l, t)u_{xt}(l, t)u_t(l, t)dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx dt + \int_0^\tau b(0, t)u_{xt}(0, t)u_t(0, t)dt - \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt. \end{aligned}$$

Из (10) $u_t(l, t) = \rho u_t(0, t)$, $u_{xt}(l, t) = \sigma u_{xt}(0, t) + ru_{tt}(0, t)$.

Тогда, учитывая эти равенства, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x, \tau) + au_x^2(x, \tau) + bu_{xt}^2(x, \tau) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l (a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2) dx dt - \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt - \\ &- \int_0^\tau a \rho u_t(0, t) [\sigma u_x(0, t) + ru(0, t)] dt + \int_0^\tau a(0, t) u_t(0, t) u_x(0, t) dt - \\ &- \int_0^\tau b \rho u_t(0, t) [\sigma u_{xt}(0, t) + ru_{tt}(0, t)] dt + \int_0^\tau b u_{xt}(0, t) u_t(0, t) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Если $a(l, t)\rho = a(0, t)$, $\rho\sigma b(l, t) = b(0, t)$, то

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x, \tau) + au_x^2(x, \tau) + bu_{xt}^2(x, \tau) \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l (a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2) dx dt - \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt - \\ &- \int_0^\tau a(l, t) \rho u_t(0, t) u(0, t) dt - \int_0^\tau b(l, t) \rho u_t(0, t) u_{tt}(0, t) dt. \end{aligned}$$

Преобразуем два последних интеграла

$$- \int_0^\tau a(l, t) \rho u_t(0, t) u(0, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau a_t(l, t) \rho u^2(0, t) dt - \frac{1}{2} a(l, \tau) \rho u^2(0, \tau);$$

$$-\int_0^\tau b(l, t) \rho r u_t(0, t) u(0, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^\tau b_t(l, t) \rho r u^2(0, t) dt - \frac{1}{2} b(l, \tau) \rho r u^2(0, \tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[u_t^2(x, \tau) + a u_x^2(x, \tau) + b u_{xt}^2(x, \tau) \right] dx = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l (a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2) dx dt - \int_0^\tau \int_0^l c u u_t dx dt + \int_0^\tau a_t(l, t) \rho r u^2(0, t) dt + \\ & + \int_0^\tau b_t(l, t) \rho r u^2(0, t) dt - a(l, t) \rho r u^2(0, t) - b(l, t) \rho r u^2(0, t). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $\rho r \geq 0$, то тогда из (12) следует неравенство

$$\int_0^l [u^2(x, \tau) + u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau) + u_{xt}^2(x, \tau)] dx \leq M_2 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2) dx dt,$$

которое получено в результате оценок, аналогичных проделанным в первом варианте. Применив лемму Гронуолла, убеждаемся в том, что не может существовать более одного решения и в этом случае.

4. Заключение. Таким образом, была поставлена начально-краевая задача для уравнения четвертого порядка с нелокальными краевыми условиями. Получены критерии единственности решения задачи для уравнения, которое является обобщением уравнения Буссинеска – Лява, которые заключаются в следующем. Если $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \neq 0$, то критерием единственности является выполнение гипотез **Н1-Н3**; если же $\Delta = 0$, но $\Delta_1 = \beta_{12}\alpha_{22} - \alpha_{12}\beta_{22} \neq 0$, то критерием единственности является выполнение гипотез **Н4-Н6**.

Благодарность. Автор выражает благодарность Пулькиной Людмиле Степановне за помощь в постановке задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея. *Доклады академии наук*. 2007;417(1):1–7.
2. Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. *Сообщения Харьковского математического общества. Серия 2*. 1896;5(3):136–181.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977;13(2):294–304.
4. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двучечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения*. 1979;15(7):1284–1295.
5. Пулькина Л.С. Об одной краевой задаче со смещением для гиперболического уравнения. *Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева*. 2008;194–195.
6. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных задач для линейных параболических уравнений. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2008;3(62):165–174.
7. Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка. *Дифференциальные уравнения*. 2006;42(8):1072–1077.
8. Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения. *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*. 2010;4(78):56–64.
9. Дюжева А.В. Задача с условиями Стеклова для уравнения гиперболического типа. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения*. 2021;198:50–60.
10. Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1 и 2-го рода. *Известия вузов. Математика*. 2012;4:74–83.
11. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Издательство Иностранной литературы; 1961. 120 с.

References

1. Fedotov IA., Polyaniin AD., Shatalov MYu. Theory of free forced vibrations of a rigid rod based on the Rayleigh model. *Doklady Physics*. 2007;417(1):1–7. (In Russ).
2. Steklov VA. Zadacha ob okhlazhdenii neodnorodnogo tverdogo tela [The problem of cooling of an inhomogeneous solid body]. *Soobshcheniya Kharkovskogo matematicheskogo obshchestva. Seriya 2*. 1896;5(3):136–181.
3. Ionkin NI. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem [Solution of a boundary value problem of heat conduction theory with a non-classical boundary condition.]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 1977;13(2):294–304.

4. Ionkin NI., Moiseev EI. On a problem for the heat equation with two-point boundary conditions. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 1979;15(7):1284–1295. (In Russ).
5. Pulkina LS. Ob odnoi kraevoi zadache so smeshcheniem dlya giperbolicheskogo uravneniya [On a boundary value problem with a deviating argument for a hyperbolic equation]. *Tezisi dokladov mezhdunarodnoi konferentsii, posvyashchennoi 100-letiyu so dnya rozhdeniya S.L. Soboleva*. 2008;194–195.
6. Kozhanov AI. O razreshimosti nekotorykh prostranstvenno nelokalnikh zadach dlya lineinikh parabolicheskikh uravnenii [On the solvability of certain spatially nonlocal boundary-value problems for linear hyperbolic equations of second order]. *Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*. 2008;3(62):165–174.
7. Lazetic NL. O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlya odnomernogo giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka [On the classical solvability of a mixed problem for a one-dimensional second-order hyperbolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*. 2006;42(8):1072–1077.
8. Pulkina LS., Dyuzheva AV. Nonlocal problem with time-dependent Steklov's boundary conditions for hyperbolic equation. *Vestnik SamGU. Yestestvennonauchnaya seriya*. 2010;4(78):56–64. (In Russ).
9. Dyuzheva AV. Zadacha s usloviyami Steklova dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa [The Steklov problem for a hyperbolic-type equation]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya*. 2021;198:50–60.
10. Pulkina LS. Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the first and second kind. *Izvestiya vuzov. Matematika [Izvestiya VUZ. Matematika]*. 2012;4:74–83. (In Russ).
11. Gording L. The Cauchy problem for hyperbolic equations. Moscow: Izdatelstvo Inostrannoi literaturi; 1961. 120 s. (In Russ).

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 13.10.2025

Поступила после рецензирования 29.11.2025

Принята к публикации 03.12.2025

Received October 13, 2025

Revised November 29, 2025

Accepted December 3, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Богатов Андрей Владимирович – главный специалист, Публичное акционерное общество «Банк ПСБ», г. Ярославль, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey V. Bogatov – Chief Specialist, Bank PSB Public Joint-Stock Company, Yaroslavl, Russia

[К содержанию](#)

О тождествах для степеней сингулярных дифференциальных операторов с особенностями в нуле

Ситник С. М. , Чернова О. В. 

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, Победы, 85
sitnik@bsuedu.ru, Chernova_Olga@bsuedu.ru

Аннотация. В работе рассматриваются явные реализации в интегральном виде дробных степеней оператора Бесселя. Для них изучается связь с преобразованиями Ханкеля и Меллина, операторами дробного интегрирования, а также установлена обобщённая формула Тэйлора с явным остаточным членом. Полученные результаты важны для теории уравнений с частными производными, содержащими оператор Лапласа – Бесселя.

Ключевые слова: операторы Бесселя, гипергеометрические функции, функции Лежандра, формула Тэйлора

Для цитирования: Ситник С.М., Чернова О.В. О тождествах для степеней сингулярных дифференциальных операторов с особенностями в нуле. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):29–43.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-29-43 EDN ECHQIL

Original Research

On Equalities for Powers of Singular Differential Operators with Singularity at Zero

Sergey M. Sitnik , Olga V. Chernova 

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
sitnik@bsuedu.ru, Chernova_Olga@bsuedu.ru

Abstract. In the paper we consider explicit realizations in the integral form of fractional powers of Bessel operators. For them connections with Hankel and Mellin transforms and fractional operators are considered. Also Taylor-type formulas are derived with remainder term. The results are important for the theory of partial differential equations, especially with Laplace – Bessel operator.

Keywords: Bessel Operator, Hypergeometric Function, Legendre Function, Taylor Formular

For citation: Sitnik SM., Chernova OV. On Equalities for Powers of Singular Differential Operators with Singularity at Zero. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):29–43. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-29-43

EDN ECHQIL

1. Введение. О дробных степенях оператора Бесселя. В данной работе используются в явном интегральном виде дробные степени дифференциального оператора Бесселя

$$B_\nu = D^2 + \frac{\nu}{x}D, \quad \text{Re } \nu \geq 0,$$

заданного на подходящих гладких функциях. Эти операторы были введены в [1] и подробно изучены в [2, 3, 4]. Приведём необходимые определения и перечислим основные свойства этих операторов.

Определение. Пусть $f(x) \in C^{2k}(0, b]$. Определим правосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя при условии

$$f^{(i)}(b) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

по формуле

$$\begin{aligned} (B_{b-}^{\nu, k} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) \cdot f(y) dy = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_x^b (y^2 - x^2)^{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{\nu}{2}} P_{\frac{\nu}{2}-1}^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right) \cdot f(y) dy, \quad (1) \end{aligned}$$

а при условии

$$f^{(i)}(a) = 0, \quad 0 \leq i \leq 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

определим левосторонний оператор дробного интегрирования Бесселя по формуле

$$\begin{aligned} (B_{a+}^{v,k}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_a^x \left(\frac{x^2 - y^2}{2x}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{v-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot f(y) dy = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k-1}\Gamma(k)} \int_a^x (x^2 - y^2)^{(k-\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{v}{2}} P^{\frac{1}{2}-k}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\right) \cdot f(y) dy, \quad (2) \end{aligned}$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса, $P_v^\mu(z)$ – функция Лежандра.

Введённые операторы и являются интегральными реализациями отрицательных целых степеней оператора Бесселя $(B_\nu)^{-k}$. Их распространение на произвольные комплексные значения параметра k проводится аналогично классическому случаю. При $\nu = 0$ оператор Бесселя сводится ко второй производной, а введённые операторы – к дробным интегралам Римана – Лиувилля

$$B_{b-}^{0,k}f = I_{b-}^{2k}f, \quad B_{a+}^{0,k}f = I_{a+}^{2k}f.$$

Отметим важную работу [1], в которой рассматривалось решение в явном виде обыкновенных дифференциальных уравнений с целыми степенями операторов Бесселя. Также было впоследствии замечено, что выражение гипергеометрических функций Гаусса в формулах (1)–(2) через функции Лежандра существенно упрощает вычисления. При помощи достаточно простых выкладок, основанных на тождествах для функций Лежандра, получается первоначальный набор простейших свойств операторов (1)–(2). К ним относятся полугрупповое свойство по параметру k , действие как умножение на соответствующую степень в образах преобразования Ханкеля (при более ограничительных условиях на параметры) и преобразования Мейера (при менее ограничительных условиях на параметры).

2. Формулы типа Тейлора для дробных степеней операторов Бесселя. Перейдём к формулировкам результатов для формулы типа Тейлора для дробных степеней операторов Бесселя. При этом для гипергеометрических функций будет использовано одно из следующих обозначений

$${}_2F_1(a, b; c; z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, & b \\ c \end{matrix} \middle| z\right).$$

Теорема 2.1. *Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора Бесселя при $x = b$ с остаточным членом в интегральной форме*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-2} {}_2F_1\left(i + \frac{v-1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) (B^{i-1}f)|_b - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i + \frac{v-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \cdot (DB^{i-1}f)|_b \right\} + B_{b-}^{v,k}(B^k f), \quad (3) \end{aligned}$$

где $B_{b-}^{v,k}$ есть оператор левостороннего дробного интегрирования Бесселя (1), ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Также справедлива двойственная формула, использующая формально сопряжённый к B_ν оператор

$$C_\nu f = D^2 f - D\left(\frac{\nu}{y}f\right) = D^2 - \frac{\nu}{y}Df + \frac{\nu}{y^2}.$$

Теорема 2.2. *Справедлива формула Тэйлора разложения произвольной достаточно гладкой функции по степеням дифференциального оператора C_ν при $x = a$ с остаточным членом в интегральной форме*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x}\right)^{2i-2} \left(\frac{a}{x}\right) {}_2F_1\left(i + \frac{v-1}{2}, i; 2i-1; 1 - \frac{a^2}{x^2}\right) (C_\nu^{i-1}f)|_a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x}\right)^{2i-1} \cdot {}_2F_1\left(i + \frac{v-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{a^2}{x^2}\right) a^\nu (Dx^{-\nu}C_\nu^{i-1}f)|_a \right\} + B_{a+}^{v,k}(C_\nu^k f), \quad (4) \end{aligned}$$

где $B_{a+}^{v,k}$ есть оператор правостороннего дробного интегрирования Бесселя (2), ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Гипергеометрические функции в формулах Тэйлора могут быть выражены через функции Лежандра аналогично определениям (1)–(2). Рассмотрены и более общие комбинированные дробные степени для пары операторов $(\frac{1}{x}D)^m(B_\nu)^k$. Это семейство операторов интересно тем, что содержит обычные операторы Римана – Лиувилля ($m = 0, \nu = 0$), дробное интегрирование Бесселя ($m=0$),

операторы Эрдейи – Кобера ($k=0$) (см. [5, 6, 7]). Рассмотренные задачи также тесно связаны с теорией операторов преобразования, см. [8, 9].

3. Некоторые вспомогательные формулы.

$$(I) \quad I^k B^k f(x) = f(x) - \sum_{i=1}^k \frac{(1-x^2)^{2i-2}}{2^{2i-2}\Gamma(2i-1)} F\left(i + \frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1, 1-x^2\right) B^{i-1} f \Big|_1 - \\ - \frac{(1-x^2)^{2i-1}}{2^{2i-1}\Gamma(2i)} F\left(i + \frac{\nu-1}{2}, i, 2i, 1-x^2\right) DB^{i-1} f \Big|_1;$$

1°. Для доказательств этих формул нам потребуются следующие вспомогательные соотношения:

$$(b-a)(1-z)F(a, b, c) - (c-a)F(a-1, b, c) + (c-b)F(a, b-1, c) = 0, \quad (5)$$

$$c(1-z)F(a, b, c) - cF(a, b-1, c) + (c-a)zF(a, b, c+1) = 0, \quad (6)$$

$$c(1-z)F(a, b, c) - cF(a-1, b, c) + (c-b)zF(a, b, c+1) = 0, \quad (7)$$

$$(c-a-1)F(a, b, c) + aF(a+1, b, c) - (c-1)F(a, b, c-1) = 0, \quad (8)$$

$$(c-b-1)F(a, b, c) + bF(a, b+1, c) - (c-1)F(a, b, c-1) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{ab}{c}F(a+1, b+1, c+1) = \frac{(c-1)}{z}F(a, b, c-1) - \frac{(c-1)}{z}F(a, b, c), \quad (10)$$

$$\frac{d^n}{dz^n}F(a, b, c, z) = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}F(a+n, b+n, c+n, z), \quad (11)$$

$$\frac{d}{dy}F\left(a, b, c, 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = 2(c-1)\frac{x^2}{y^2 - x^2}\frac{1}{y}[F(a, b, c-1) - F(a, b, c)]. \quad (12)$$

Соотношения (5)–(9) выражают связь между смежными гипергеометрическими функциями, полученные Гауссом. Воспользуемся ими для доказательства формулы (10).

Доказательство формулы (10): произведя в (5) подстановку $a \rightarrow a+1$, $b \rightarrow b+1$, $c \rightarrow c+1$, получим:

$$F(a+1, b+1, c+1) = \frac{1}{(b-a)(1-z)} [(c-a)F(a, b+1, c+1) - (c-b)F(a+1, b, c+1)] =$$

Далее, полагая $a \rightarrow a$, $b \rightarrow b+1$, $c \rightarrow c$ – в (6) и $a \rightarrow a+1$, $b \rightarrow b$, $c \rightarrow c$ – в (7), выразим $F(a, b+1, c+1)$ и $F(a+1, b, c+1)$ из (6), (7) соответственно. Подставляя, продолжим предыдущее равенство и получим:

$$= \frac{1}{(b-a)(1-z)} \left[\frac{c}{z}F(a, b, c) - c\frac{1-z}{z}F(a, b+1, c) - \frac{c}{z}F(a, b, c) + c\frac{1-z}{z}F(a+1, b, c) \right] = \\ = \frac{c}{b-a} \frac{1}{z} [F(a+1, b, c) - F(a, b+1, c)].$$

Выражая теперь $F(a+1, b, c)$ из (8), $F(a, b+1, c)$ – из (9) и подставляя в нашу формулу, получим:

$$F(a+1, b+1, c+1) = \\ = \frac{c}{b-a} \frac{1}{z} \left[\frac{c-1}{a}F(a, b, c-1) - \frac{c-a-1}{a}F(a, b, c) - \frac{c-1}{b}F(a, b, c-1) + \frac{c-b-1}{b}F(a, b, c) \right] = \\ = \frac{c}{b-a} \frac{1}{z} \left[\left(\frac{c-1}{a} - \frac{c-1}{b} \right) F(a, b, c-1) - \frac{c-1}{a}F(a, b, c) + \frac{c-1}{b}F(a, b, c) \right] = \\ = \frac{c(c-1)}{z \cdot ab} [F(a, b, c-1) - F(a, b, c)].$$

Таким образом,

$$\frac{ab}{c}F(a+1, b+1, c+1) = \frac{(c-1)}{z} [F(a, b, c-1) - F(a, b, c)]. \quad \blacksquare$$

С помощью (10), (11) докажем теперь формулу (12).

Доказательство формулы (12): полагая в (11) $n = 1, z = 1 - \frac{x^2}{y^2}$, получим:

$$\frac{d}{dy} F\left(a, b, c; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 2 \frac{x^2}{y^3} \frac{d}{dz} F(a, b, c; z) = 2 \frac{x^2}{y^3} \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1; z) =$$

Воспользуемся теперь соотношением (10):

$$= 2 \frac{x^2}{y^3} \frac{y^2}{y^2 - x^2} (c-1) [F(a, b, c-1) - F(a, b, c)].$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dy} F\left(a, b, c; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = 2(c-1) \frac{x^2}{y^2 - x^2} [F(a, b, c-1) - F(a, b, c)]. \quad \blacksquare$$

2°. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\Phi_m \equiv \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right),$$

$$\tilde{\Phi}_m \equiv \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m-1; 2m-1; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right).$$

Сформулируем и докажем теперь несколько утверждений.

Лемма 3.1.

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \Phi_m = (2m-1) \tilde{\Phi}_m. \quad (13)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \Phi_m &= \frac{d}{dy} \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \\ &= (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right) F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} \frac{d}{dy} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \end{aligned}$$

Оставим 1-е слагаемое выражения без изменений, 2-е преобразуем с помощью (12), тогда получим

$$\begin{aligned} &= (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right) F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) + \\ &+ 2(2m-1) \frac{x^2}{y^2 - x^2} \frac{1}{y} \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1\right) - F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) = \\ &= (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right) F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) + \\ &+ (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \frac{x^2}{y^2} \left(F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1\right) - F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right)\right) = \\ &= (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left(\frac{y^2 - x^2}{2y^2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) + \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1\right)\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \Phi_m &= (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1\right)\right) - \frac{\nu}{y} \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-1} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) = \\ &= \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left[(2m-1) \frac{y^2 - x^2}{2y^2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m\right) + (2m-1) \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1\right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -v \frac{y^2 - x^2}{2y^2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m; 2m\right) \Big] = \\
& = \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \left[\left(m - \frac{v+1}{2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m; 2m\right) + (2m-1) \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m; 2m-1\right) \right].
\end{aligned}$$

Полагая в (6)

$$a = m + \frac{v-1}{2}, \quad b = m, \quad c = 2m-1, \quad z = 1 - \frac{x^2}{y^2}$$

и замечая, что выражение в квадратных скобках

$$\begin{aligned}
& \left[\left(m - \frac{v+1}{2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m; 2m\right) + (2m-1) \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m; 2m-1\right) \right] = \\
& = (2m-1) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right),
\end{aligned}$$

окончательно получим

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y}\right) \Phi_m = (2m-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) = (2m-1) \tilde{\Phi}_m.$$

Тем самым утверждение (13) доказано. ■

Лемма 3.2.

$$\frac{d}{dy} \tilde{\Phi}_m = (2m-2) \Phi_{m-1}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} \tilde{\Phi}_m &= \frac{d}{dy} \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \\
&= (2m-2) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-3} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) + \\
&+ \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} \frac{d}{dy} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) =
\end{aligned}$$

Для преобразования 2-го слагаемого воспользуемся (12), 1-е – оставим без изменений:

$$\begin{aligned}
& = (2m-2) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-3} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) + \\
&+ \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-2} 2(2m-2) \frac{x^2}{y^2 - x^2} \cdot \frac{1}{y} \left(F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-2\right) - \right. \\
&- \left. F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right)\right) = (2m-2) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-3} \left(\frac{y^2 + x^2}{2y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) + \\
&+ \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-3} (2m-2) \frac{x^2}{y^2} \left(F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-2\right) - F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right)\right) = \\
&= \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2m-3} \left[(m-1) \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) + (2m-2) \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-2\right) \right].
\end{aligned}$$

Полагая в (7)

$$a = m + \frac{v-1}{2}, \quad b = m-1, \quad c = 2m-2, \quad z = 1 - \frac{x^2}{y^2},$$

видим, что выражение в квадратных скобках

$$\begin{aligned}
& \left[(m-1) \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-1\right) + (2m-2) \frac{x^2}{y^2} F\left(m + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-2\right) \right] = \\
& = (2m-2) F\left(m-1 + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-2; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dy} \tilde{\Phi}_m = (2m-2) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2m-3} F \left(m-1 + \frac{v-1}{2}, m-1; 2m-2; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) = (2m-2) \Phi_{m-2}.$$

Тем самым утверждение (14) доказано. ■

Лемма 3.3. Для $\forall i = \overline{1, k-1}$ верна следующая формула:

$$\bar{B}^i \Phi_k = \left(\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy} \frac{v}{y} \right)^i \Phi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i) \Phi_{k-i}. \quad (15)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $i = 1$ утверждение верно:

$$\bar{B} \Phi_k = \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y} \right) \Phi_k = (2k-1)(2k-2) \Phi_{k-1}.$$

Мы воспользовались в данном случае формулами (13), (14), полагая $m = k$.

2) Пусть для $i-1$ утверждение верно:

$$\bar{B}^{i-1} \Phi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i+2) \Phi_{k-i+1}.$$

Тогда

$$\bar{B}^i \Phi_k = \bar{B} \bar{B}^{i-1} \Phi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i+2) \bar{B} \Phi_{k-i+1} =$$

Снова воспользуемся (13), (14), полагая $m = k-i+1$:

$$= (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i+2)(2k-2i+1)(2k-2i) \Phi_{k-i},$$

т. е. утверждение верно и для i . Формула (15) доказана. ■

Лемма 3.4. Для $\forall i = \overline{1, k-1}$ верна следующая формула:

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y} \right) \bar{B}^i \Phi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i-1) \tilde{\Phi}_{k-i}. \quad (16)$$

Доказательство непосредственно вытекает из утверждений (15), (13):

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y} \right) \bar{B}^i \Phi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i) \left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y} \right) \Phi_{k-i} = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i)(2k-2i-1) \tilde{\Phi}_{k-i}. \quad \blacksquare$$

Лемма 3.5. Для $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\bar{B}^k \Phi_k \equiv 0. \quad (17)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $k = 1$ утверждение верно:

$$\bar{B} \Phi_1 = \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y} \right) \Phi_1 = \frac{d}{dy} \tilde{\Phi}_1 = \frac{d}{dy} F \left(\frac{v+1}{2}, 0, 1; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) = \frac{d}{dy} \cdot 1 = 0.$$

На втором шаге мы воспользовались формулой (13), полагая $m = 1$.

2) Пусть для $k-1$ утверждение верно:

$$\bar{B}^{k-1} \Phi_{k-1} \equiv 0.$$

Тогда

$$\bar{B}^k \Phi_k = \bar{B}^{k-1} (B \Phi_k) = (2k-1)(2k-2) \bar{B}^{k-1} \Phi_{k-1} \equiv 0.$$

Здесь мы применяем формулу (15) для $i = 1$. Утверждение (17) доказано. ■

Отметим также справедливость следующих соотношений:

$$\bar{B}^i \Phi_k \Big|_{y=x} = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-1-2i} F(, ,) \Big|_{y=x} = 0, \quad \forall i = \overline{1, k-1}; k = 2, 3, \dots \quad (18)$$

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{v}{y} \right) \bar{B}^i \Phi_k \Big|_{y=x} = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i-1) \left(\frac{y^2 - x^2}{2y} \right)^{2k-2-2i} F(, ,) \Big|_{y=x} = 0, \quad \forall i = \overline{0, k-2}; k = 2, 3, \dots \quad (19)$$

$$\left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \bar{B}^{k-1} \Phi_k = (2k-1)! \bar{\Phi}_1 = (2k-1)! F\left(\frac{\nu+1}{2}, 0; 1, 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) \equiv (2k-1)!, \quad k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

3°. Перейдем теперь к доказательству формулы (I).

$$I^k B^k f(x) = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^1 \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2k-1} F\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) B^k f dy = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^1 \Phi_k B^k f dy. \quad (21)$$

Проинтегрируем выражение (21) по частям:

$$\begin{aligned} \int_x^1 \Phi_k B^k f dy &= \int_x^1 \Phi_k \left(y^{-\nu} \frac{d}{dy} y^\nu \frac{d}{dy} B^{k-1} f\right) dy = \Phi_k \frac{d}{dy} B^{k-1} f \Big|_x^1 - \int_x^1 y^\nu \frac{d}{dy} y^{-\nu} \Phi_k \frac{d}{dy} B^{k-1} f dy = \\ &= \Phi_k \frac{d}{dy} B^{k-1} f \Big|_x^1 - y^\nu \frac{d}{dy} y^{-\nu} \Phi_k B^{k-1} f \Big|_x^1 + \int_x^1 B^{k-1} f \frac{d}{dy} y^\nu \frac{d}{dy} y^{-\nu} \Phi_k dy = \\ &= \Phi_k \frac{d}{dy} B^{k-1} f \Big|_x^1 - \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \Phi_k B^{k-1} f \Big|_x^1 + \int_x^1 \bar{B} \Phi_k B^{k-1} f dy. \end{aligned}$$

Повторив итерации k раз, получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} I^k B^k f(x) &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \left\{ \Phi_k \frac{d}{dy} B^{k-1} f \Big|_x^1 - B^{k-1} f \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \Phi_k \Big|_x^1 + \bar{B} \Phi_k \frac{d}{dy} B^{k-2} f \Big|_x^1 - B^{k-2} f \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \bar{B} \Phi_k \Big|_x^1 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \bar{B}^{k-1} \Phi_k \frac{d}{dy} f \Big|_x^1 - f \left(\frac{d}{dy} - \frac{\nu}{y}\right) \bar{B}^{k-1} \Phi_k \Big|_x^1 + \int_x^1 f \bar{B}^k \Phi_k dy \right\}. \end{aligned}$$

Используя формулы (15), (16), а также соотношения (18), (19), (20) получим:

$$\begin{aligned} I^k B^k f(x) &= f(x) - f(1) + \frac{1}{\Gamma(2)} \left(\frac{1-x^2}{2}\right) F\left(1 + \frac{\nu-1}{2}, 1; 2; 1-x^2\right) \frac{df}{dx} \Big|_1 = \\ &= -\frac{1}{\Gamma(3)} \left(\frac{1-x^2}{2}\right)^2 F\left(2 + \frac{\nu-1}{2}, 1; 3; 1-x^2\right) Bf \Big|_1 + \frac{1}{\Gamma(4)} \left(\frac{1-x^2}{3}\right)^2 F\left(2 + \frac{\nu-1}{2}, 2; 4; 1-x^2\right) \frac{d}{dx} Bf \Big|_1 - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(5)} \left(\frac{1-x^2}{2}\right)^4 F\left(3 + \frac{\nu-1}{2}, 2; 5; 1-x^2\right) B^2 f \Big|_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(2k-1)} \left(\frac{1-x^2}{2}\right)^{2k-2} F\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k-1; 2k-1; 1-x^2\right) B^{k-1} f \Big|_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(2k)} \left(\frac{1-x^2}{2}\right)^{2k-1} F\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1-x^2\right) \frac{d}{dx} B^{k-1} f \Big|_1; \end{aligned}$$

Т. е.

$$\begin{aligned} I^k B^k f(x) &= \\ &= f(x) - \sum_{i=1}^k \frac{(1-x^2)^{2i-2}}{2^{2i-2} \Gamma(2i-1)} F\left(i + \frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1; 1-x^2\right) B^{i-1} f \Big|_1 - \\ &\quad - \frac{(1-x^2)^{2i-1}}{2^{2i-1} \Gamma(2i)} F\left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1-x^2\right) DB^{i-1} f \Big|_1. \end{aligned}$$

Теперь установим формулы

$$B_{b-}^{\nu, k} B^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) B^k f dy.$$

Подставив в (21) в верхний предел b , получим:

$$(I') \quad \underline{B_{b-}^{\nu, k} B^k f} = f(x) - \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-1} {}_2F_1\left(i + \frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) B^{i-1} f \Big|_b - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) DB^{i-1} f \Big|_b; \\
 4^\circ. & \frac{B_{a^+}^{\nu,k} \bar{B}^k f}{\Gamma(2k)} = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_a^x \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \bar{B}^k f dy; \\
 (\text{II}) & \frac{B_{a^+}^{\nu,k} \bar{B}^k f}{\Gamma(2i)} = f(x) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-2} \left(\frac{a}{x} \right) {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i-1; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \bar{B}^{i-1} f \Big|_a + \\
 & + \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) a^\nu D y^{-\nu} \bar{B}^{i-1} f \Big|_a.
 \end{aligned}$$

Для доказательства формулы (II) сформулируем несколько утверждений. Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \Psi_m & \equiv \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-1} {}_2F_1 \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right), \\
 \tilde{\Psi}_m & \equiv \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-2} \left(-\frac{y}{x} \right) {}_2F_1 \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right).
 \end{aligned}$$

Лемма 3.6.

$$\frac{d}{dy} \Psi_m = (2m-1) \tilde{\Psi}_m \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-1} F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \right] = \\
 & = (2m-1) \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-2} \left(-\frac{y}{x} \right) F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m \right) + \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-1} \frac{d}{dy} F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m \right) =
 \end{aligned}$$

преобразуем второе слагаемое с помощью (12):

$$\begin{aligned}
 & = (2m-1) \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-2} \left(-\frac{y}{x} \right) F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m \right) + \\
 & + 2 \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-2} \frac{1}{x} \frac{y}{y^2 - x^2} (2m-1) \left(F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m \right) - F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1 \right) \right) = \\
 & = (2m-1) \left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2m-2} \left(-\frac{y}{x} \right) \cdot F \left(m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m-1; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) = (2m-1) \tilde{\Psi}_m. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Лемма 3.7. Для $\forall i = \overline{1, k-1}$ верна следующая формула:

$$B^i \Psi_m = (2k-1)(2k-2) \dots (2k-2i) \Psi_{k-i}. \tag{23}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Покажем, что утверждение верно для $i = 1$, т. е. $B \Psi_k = (2k-1)(2k-2) \Psi_{k-1}$. Отметим, что

$$\bar{B} = \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy} \frac{\nu}{y} = y^\nu B y^{-\nu}. \tag{24}$$

Получим:

$$\left(\frac{x^2 - y^2}{2x} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) = \left(\frac{x}{y} \right)^\nu \left(\frac{x^2 - y^2}{2y} \right)^{2k-1} {}_2F_1 \left(k + \frac{\nu-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right),$$

или же возвращаясь к нашим обозначениям:

$$\Phi_k = \left(\frac{y}{x} \right)^\nu \Psi_k. \tag{25}$$

Тогда пользуясь (24), (25), получаем: $\bar{B} \Phi_k = y^\nu B y^{-\nu} \Phi_k = y^\nu B x^{-\nu} \Psi_k = \left(\frac{y}{x} \right)^{-\nu} B \Psi_k$. С другой стороны (см. лемму 3.3), имеем:

$$\bar{B} \Phi_k = (2k-1)(2k-2) \Phi_{k-1} = (2k-1)(2k-2) \left(\frac{y}{x} \right)^\nu \Psi_{k-1}.$$

Таким образом, $\left(\frac{y}{x}\right)^v B\Phi_k = \left(\frac{y}{x}\right)^v (2k-1)(2k-2)\Psi_{k-1}$, т. е. $B\Psi_k = (2k-1)(2k-2)\Psi_{k-1}$.

2) Предположим теперь, что для $(i-1)$ утверждение верно:

$$B^{i-1}\Psi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i+2)\Psi_{k-i+1}.$$

Тогда

$$B^i\Psi_k = (2k-1) \cdot \dots \cdot (2k-2i)\Psi_{k-i}.$$

Тем самым утверждение (23) доказано. ■

Лемма 3.8.

$$B^k\Psi_k \equiv 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $k=1$ утверждение верно:

$$\begin{aligned} B\Psi_1 &= \left(\frac{d}{dy} + \frac{v}{y}\right) \frac{d}{dy} \Psi_1 = \left(\frac{d}{dy} + \frac{v}{y}\right) \left(-\frac{y}{x}\right) F\left(\frac{v+1}{2}, 1; 1; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = \\ &= \left(\frac{d}{dy} + \frac{v}{y}\right) \left[\left(-\frac{y}{x}\right) \left(\frac{y^2}{x^2}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \right] = \frac{d}{dy} \left(-\left(\frac{y}{x}\right)^{-v}\right) - \frac{v}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^{-v-1} = 0. \end{aligned}$$

На 1-м шаге мы воспользовались (22).

2) Пусть далее $B^{k-1}\Psi_{k-1} \equiv 0$, тогда $B^k\Psi_k = (2k-1)(2k-2)B^{k-1}\Psi_{k-1} \equiv 0$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (II).

$$B_{a+}^{v,k} \bar{B}^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_0^x \left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2k-1} {}_2F_1\left(k + \frac{v-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \bar{B}^k f(y) dy.$$

Перепишем это выражение в виде:

$$B_{a+}^{v,k} \bar{B}^k f = \frac{1}{\Gamma(2k)} \int_a^x \Psi_k \bar{B}^k f(y) dy$$

и проинтегрируем по частям $2k$ раз; в результате получим:

$$\begin{aligned} B_{a+}^{v,k} \bar{B}^k f &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \left\{ \Psi_k y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B}^{k-1} f \Big|_a^x - \frac{d}{dy} \Psi_k \bar{B}^{k-1} f \Big|_a^x + B\Psi_k y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B}^{k-2} f \Big|_a^x - \frac{d}{dy} B\Psi_k \bar{B}^{k-2} f \Big|_a^x + \right. \\ &\quad + \dots + \\ &\quad \left. + B^i \Psi_k y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B}^{k-i-1} f \Big|_a^x - \frac{d}{dy} B^i \Psi_k \bar{B}^{k-i-1} f \Big|_a^x + \dots + \int_a^x f B^k \Psi_k dy. \right. \end{aligned}$$

Используя (22)–(26), получим:

$$\begin{aligned} B_{a+}^{v,k} \bar{B}^k f &= \frac{1}{\Gamma(2k)} \left\{ \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(2)} \Psi_1 y^v \frac{d}{dy} y^{-v} f \Big|_a^x - \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(1)} \frac{d}{dy} \Psi_1 f \Big|_a^x + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(2k-2i)} \Psi_{2k-2i} y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B}^{k-i-1} f \Big|_a^x - \frac{\Gamma(2k)}{\Gamma(2k-2i-1)} \tilde{\Psi}_{2k-2i} \bar{B}^{k-i-1} f \Big|_a^x + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \Psi_k y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B}^{k-1} f \Big|_a^x - \frac{d}{dy} \tilde{\Psi}_k \bar{B}^{k-1} f \Big|_a^x \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя вместо $\Psi_i, \tilde{\Psi}_i$ их значения, получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} B_{a+}^{v,k} \bar{B}^k f &= f(x) - f(a) - \frac{1}{\Gamma(2)} \left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right) F\left(1 + \frac{v-1}{2}, 1; 2; 1 - \frac{a^2}{x^2}\right) a^v \frac{d}{dy} y^{-v} f \Big|_a - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(4)} \left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^3 F\left(2 + \frac{v-1}{2}, 2; 4; 1 - \frac{a^2}{x^2}\right) a^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B} f \Big|_a - \dots - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(2k)} \left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2k-1} F\left(k + \frac{v-1}{2}, k; 2k; 1 - \frac{a^2}{x^2}\right) a^v \frac{d}{dy} y^{-v} \bar{B}^{k-1} f \Big|_a - \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(2k-1)} \left(\frac{x^2-a^2}{2x}\right)^{2k-2} F\left(k + \frac{v-1}{2}, k; 2k-1; 1 - \frac{a^2}{x^2}\right) \bar{B}^{k-1} f \Big|_a. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 B_{a^+}^{\nu,k} \bar{B}^k f &= f(x) - \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) a^\nu D y^{-\nu} \bar{B}^{i-1} f \Big|_a + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{a}{x} \right) \left(\frac{x^2 - a^2}{2x} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i-1; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \bar{B}^{i-1} f \Big|_a \right\}; \\
 5^\circ. \quad D_{b^-}(k, l, \nu) \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^l B^k f &= \frac{1}{\Gamma(l+2k)} \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-1} y^{1-2k} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, l+k; l+2k; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^l B^k f(y) dy. \\
 \text{(III)} \quad D_{b^-}(k, l, \nu) \left(-\frac{1}{y} D \right)^l B^k f &= f(x) - \sum_{i=1}^l \frac{b^{-2k}}{\Gamma(l+2k-i)} \times \\
 &\quad \times {}_2F_1 \left(l-i+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l-i+2k; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \left(\frac{b^2 - x^2}{2} \right)^{2k-1} \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \right)^{l-i} B^k f \Big|_b - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\Gamma(2i-1)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-2} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i-1; 2i-1; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) B^{i-1} f \Big|_b - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b} \right)^{2i-1} {}_2F_1 \left(i + \frac{\nu-1}{2}, i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \frac{d}{dy} B^{i-1} f \Big|_b \right\}.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_{k,l} \equiv \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-1} y^{-2k+1} {}_2F_1 \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right).$$

Для доказательства формулы нам понадобится

Лемма 3.9. Для $\forall l, k \in \mathbb{N}, i = \overline{1, l}$ верна формула:

$$\left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^i \Phi_{k,l} = (l+2k-1) \cdot \dots \cdot (l-i+2k-1) \Phi_{k,l-i}. \tag{27}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Пусть $i = 1$; покажем, что утверждение верно.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dy} \frac{1}{y} \Phi_{k,l} &= \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{y} \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-1} y^{-2k+1} {}_2F_1 \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right] = \\
 &= D \left[\left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-1} y^{-2k} F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-1} y^{-2k} \frac{d}{dy} F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right] =
 \end{aligned}$$

Дифференцируя сомножитель в 1-м слагаемом, преобразуя 2-е слагаемое с помощью (12), получим:

$$\begin{aligned}
 &= y^{-2k+1} \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-2} \left(l-1+k + k \frac{x^2}{y^2} \right) F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k \right) + \\
 &+ 2 \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-2} y^{-2k} (l+2k-1) \frac{x^2}{y^2 - x^2} \frac{1}{y} \left[F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1 \right) - \right. \\
 &\quad \left. - F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k \right) \right] = y^{-2k+1} \left(\frac{y^2 - x^2}{2} \right)^{l+2k-2} \left[(l+2k-1) \frac{x^2}{y^2} \times \right. \\
 &\quad \left. \times F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2} + k; k; l+2k-1 \right) + (l+k-1) \left(1 - \frac{x^2}{y^2} \right) F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{x^2}{y^2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Полагая в (7) $a = l + k + \frac{\nu - 1}{2}$, $b = k$, $c = l + 2k - 1$, $z = 1 - \frac{x^2}{y^2}$, видим, что выражение в квадратных скобках

$$\begin{aligned} (l + 2k - 1) \frac{x^2}{y^2} F\left(l + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l + 2k - 1; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) + \\ + (l + k - 1) \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right) F\left(l + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l + 2k; 1 - \frac{x^2}{y^2}\right) = \\ = (l + 2k - 1) F\left(l - 1 + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l + 2k - 1\right) = (l + 2k - 1) \Phi_{l-1}. \end{aligned}$$

2) Пусть теперь

$$\left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y}\right)^{i-1} \Phi_{k,l} = (l + 2k - 1) \cdot \dots \cdot (l - i + 2k) \Phi_{k,l-i+1},$$

тогда

$$\left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y}\right)^i \Phi_{k,l} = (l + 2k - 1) \cdot \dots \cdot (l - i + 2k - 1) \Phi_{k,l-i}.$$

Тем самым (27) доказана. ■

Вернемся теперь к формуле

$$D_{b-}(k, l, \nu) \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^l B^k f = \frac{1}{\Gamma(l + 2k)} \int_x^b \Phi_{k,l} \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^l B^k f dy =$$

проинтегрируя l раз выражение по частям

$$\begin{aligned} = \frac{1}{\Gamma(l + 2k)} \left\{ -\frac{1}{y} \left(-\frac{1}{y} D\right)^{l-1} B^k f \Big|_x^b - \frac{1}{y} D \frac{1}{y} \Phi_{k,l} \left(-\frac{1}{y} D\right)^{l-2} B^k f \Big|_x^b - \dots - \right. \\ \left. - \frac{1}{y} \left(D \frac{1}{y}\right)^{l-1} \Phi_{k,l} B^k f \Big|_x^b + \int_x^b \left(D \frac{1}{y}\right)^l \Phi_{k,l} B^k f dy \right\} = \end{aligned}$$

Используя соотношение (27), получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} = \frac{1}{\Gamma(l + 2k)} \left\{ -\frac{1}{b} \left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{l+2k-1} b^{1-2k} F\left(l + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l + 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) - \right. \\ - b^{-2k} \left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{l+2k-2} \frac{\Gamma(l + 2k)}{\Gamma(l + 2k - 1)} F\left(l - 1 + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l - 1 + 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) - \dots - \\ \left. - b^{-2k} \left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{2k} \frac{\Gamma(l + 2k)}{\Gamma(2k - 1)} F\left(k + 1 + \frac{\nu - 1}{2}; k; 2k + 1; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + \right. \\ \left. + \int_x^b \left(\frac{y^2 - x^2}{2y}\right)^{2k-1} \frac{\Gamma(l + 2k)}{\Gamma(2k)} F\left(k + \frac{\nu - 1}{2}; k; 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) B^k f dy \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя вместо последнего слагаемого формулу (I'), будем иметь

$$\begin{aligned} D_{b-}(k, l, \nu) \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^l B^k f = \\ = f(x) - \sum_{i=1}^l b^{-2k} \frac{1}{\Gamma(l + 2k - i)} F\left(l - i + k + \frac{\nu - 1}{2}; k; l - i + 2k; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(\frac{b^2 - x^2}{2}\right)^{2k-1} \left(-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}\right)^{l-i} \times \\ \times B^k f \Big|_b - \sum_{i=1}^k \left\{ \left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-2} \frac{1}{\Gamma(2i - 1)} F\left(i + \frac{\nu - 1}{2}; i - 1; 2i - 1; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) B^{i-1} f \Big|_b - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(2i)} \left(\frac{b^2 - x^2}{2b}\right)^{2i-1} F\left(i + \frac{\nu - 1}{2}; i; 2i; 1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \frac{d}{dy} B^{i-1} f \Big|_b \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{6}^\circ. \quad & D_{a^+}(k, l, \nu) \bar{B}^k \left(D \frac{1}{y} \right)^l f = \frac{1}{\Gamma(l+2k)} \int_a^x \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2k-1} x^{1-2k} \times \\
 & \times F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \bar{B}^k \left(D \frac{1}{y} \right)^l f dy. \\
 & D_{a^+}(k, l, \nu) \bar{B}^k \left(D \frac{1}{y} \right)^l f = f(x) - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(l-i)} x \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)^{l-i-1} \left(D \frac{1}{y} \right)^{l-i-1} f \Big|_a - \\
 & - \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(l+2k-2i-l)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)^{l+2(k-i)-2} x^{2-2(k-i)} \left(\frac{a}{x} \right) \times \right. \\
 & \times F \left(l+k-i + \frac{\nu-1}{2}, k-i; l+2(k-i)-1; 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \bar{B}^{k-1-i} \left(D \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a + \\
 & \left. + \frac{1}{\Gamma(l+2k-2i)} x^{1-2(k-i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)^{l+2(k-i)-1} F \left(l+k-i + \frac{\nu-1}{2}, k-i; l+2(k-i); 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \times \right. \\
 & \left. \times a^\nu \frac{d}{dy} y^{-\nu} \bar{B}^{k-1-i} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a \right\};
 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{k,l} &\equiv \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2k-1} x^{1-2k} F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right), \\
 \tilde{\Psi}_{k,l} &\equiv \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2k-2} x^{2-2k} \left(-\frac{y}{x} \right) F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right).
 \end{aligned}$$

Лемма 3.10.

$$\frac{d}{dy} \Psi_{m,l} = (l+2m-1) \tilde{\Psi}_{m,l}, \quad \forall m, l \in \mathbb{N} \tag{28}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2m-1} x^{1-2m} F \left(l+m + \frac{\nu-1}{2}, m; l+2m \right) \right] = (l+2m-1) \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2m-2} (-y)^{1-2m} \times \\
 & \times F \left(l+m + \frac{\nu-1}{2}, m; 2m+l \right) + \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2m-2} x^{1-2m} \left(-2 \frac{y}{x^2} \right) (l+2m-1) \frac{x^2}{x^2 - y^2} \times \\
 & \times \left[F \left(l+m + \frac{\nu-1}{2}, m; l+2m-1 \right) - F \left(l+m + \frac{\nu-1}{2}, m; l+2m \right) \right] =
 \end{aligned}$$

используя (12)

$$= (l+2m-1) \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2m-2} x^{2-2m} \left(-\frac{y}{x} \right) F \left(l+m + \frac{\nu-1}{2}, m; l+2m-1 \right) = (l+2m-1) \tilde{\Psi}_{m,l}. \quad \blacksquare$$

Лемма 3.11. $\forall k, l \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1, k}$ верно:

$$B^i \Psi_{k,l} = (l+2m-1) \cdot \dots \cdot (l+2k-2i) \Psi_{k-i,l}, \tag{29}$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Покажем, что для $i = 1$ утверждение верно:

$$B \Psi_{k,l} = \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\nu}{y} \frac{d}{dy} \right) \Psi_{k,l}.$$

Из доказанного выше следует, что

$$\frac{\nu}{y} \frac{d}{dy} \Psi_{k,l} = -\nu(l+2k-1) \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \right)^{l+2k-2} x^{1-2k} F \left(l+k + \frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right);$$

$$\begin{aligned}
D^2\Psi_{k,l} &= -(l+2k-1)x^{1-2k} \frac{d}{dy} \left[\left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l+2k-2} y F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1 \right) \right] = \\
&= -(l+2k-1)x^{1-2k} \left[\left\{ (l+2k-2) \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l+2k-3} (-y)y + \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l+2k-2} \right\} \times \right. \\
&\times F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1 \right) + y \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l+2k-3} \left(-2\frac{y}{x^2} \right) (l+2k-2) \frac{x^2}{x^2-y^2} \times \\
&\times \left(F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-2 \right) - F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1 \right) \right) = \\
&= (l+2k-1) \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l+2k-3} x^{3-2k} \left[(l+2k-2) \frac{y^2}{x^2} F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-2 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1 \right) \right].
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{\nu}{y} \frac{d}{dy} \right) \Psi_{k,l} &= (l+2k-1) \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l+2k-3} x^{3-2k} \cdot \left[(l+2k-2) \frac{y^2}{x^2} F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-2; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\nu+1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Полагая в приведенных формулах

$$a = l+k-1 + \frac{\nu-1}{2}, \quad b = k, \quad c = l+2k-2, \quad z = 1 - \frac{y^2}{x^2},$$

получим, что выражение в квадратных скобках:

$$\begin{aligned}
(l+2k-2) \frac{y^2}{x^2} F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-2; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) - \frac{\nu+1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k; l+2k-1; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right) = \\
= (b+2k-2) F \left(l+k+\frac{\nu-1}{2}, k-1; l+2k-2; 1 - \frac{y^2}{x^2} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$B\Psi_{k,l} = (l+2k-1)(l+2k-2)\Psi_{k-1,l}.$$

2) Пусть теперь

$$B^{i-1}\Psi_{k,l} = (l+2k-1) \cdot \dots \cdot (l+2k-2i+2)\Psi_{k-i+1,l}.$$

Тогда

$$B^i\Psi_{k,l} = (l+2k-1) \cdot \dots \cdot (l+2k-2i)\Psi_{k-i,l}.$$

Формула (29) доказана. ■

Следствие.

$$\begin{aligned}
\Psi_{0,l} &= \left(\frac{x^2-y^2}{2} \right)^{l-1} x, \\
\left(-\frac{1}{y} D \right)^i \Psi_l &= (l-1) \cdot \dots \cdot (l-i) \Psi_{l-i}, \quad i = \overline{1, l} \\
\left(-\frac{1}{y} D \right)^l \Psi_l &\equiv 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Перейдем к доказательству формулы

$$D_{a+}(k, l, \nu) \bar{B}^k \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f = \frac{1}{\Gamma(l+2k)} \int_a^x \Psi_{k,l} \bar{B}^k \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f(y) dy =$$

Интегрируя $2k$ раз по частям, получаем

$$= \frac{1}{\Gamma(l+2k)} \left\{ \Psi_{k,l} y^\nu \frac{d}{dy} y^{-\nu} \bar{B}^{k-1} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x - \frac{d}{dy} \Psi_{k,l} \bar{B}^{k-1} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \\
& + B^i \Psi_{k,l} y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x - \frac{d}{dy} B^i \Psi_{k,l} \bar{B}^{k-1-i} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x + \\
& + \dots + \\
& + B^{k-1} \Psi_{k,l} y^v \frac{d}{dy} y^{-v} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x - D B^{k-1} \Psi_{k,l} \left(D \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x + \int_a^x B^k \Psi_{k,l} \left(D \frac{1}{y} \right)^l f dy \Big\}. \quad (31)
\end{aligned}$$

Учитывая следствие из леммы 3.11, проинтегрируем последнее слагаемое по частям l раз

$$\int_a^x \Psi_{0,l} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f dy = \sum_{i=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{y} D \right)^i \Psi_l \left(D \frac{1}{y} \right)^{l-i-1} f \Big|_a^x + \int \left(-\frac{1}{y} D \right)^l \Psi_l f dy. \quad (32)$$

Подставляя соотношения (28), (29), (30) в выражения (31), (32), получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
D_{a+}(k, l, \nu) \bar{B}^k \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f &= f(x) - \sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{\Gamma(l-i)} x \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)^{l-i-1} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^{l-i-1} f \Big|_a^x - \\
&- \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(l+2k-2i-1)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)^{l+2(k-i)-2} x^{1-2(k-i)} a F \left(l+k-i + \frac{\nu-1}{2}, k-i; l+2(k-i)-1; \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \cdot \bar{B}^{k-1-i} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\Gamma(l+2k-2i)} x^{1-2(k-i)} \left(\frac{x^2 - a^2}{2} \right)^{l+2(k-i)-1} F \left(l+k-i + \frac{\nu-1}{2}, k-i; l+2(k-i); 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times a^v \frac{d}{dy} y^{-\nu} \bar{B}^{k-1-i} \left(\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \right)^l f \Big|_a^x \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, теоремы 2.1. и 2.2. полностью доказаны. ■

4. Заключение. В работе рассматриваются явные реализации в интегральном виде дробных степеней оператора Бесселя. Для них изучается связь с преобразованиями Ханкеля и Меллина, операторами дробного интегрирования, а также установлена обобщённая формула Тэйлора с явным остаточным членом. Полученные результаты важны для теории уравнений с частными производными, содержащими оператор Лапласа – Бесселя.

References

1. Sprinkhuizen-Kuyper IG. A fractional integral operator corresponding to negative powers of a certain second-order differential operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1979;72:674–702.
2. Shishkina E., Sitnik S. *Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics*. Series: Mathematics in Science and Engineering. 1st Edition. Elsevier. Academic Press; 592 p.
3. Shishkina EL., Sitnik SM. Fractional Bessel Integrals and Derivatives on Semi-axes. 2020, P. 615–651. In the book: Kravchenko Vladislav, Sitnik Sergei M. (Eds.) *Transmutation Operators and Applications*. Trends in Mathematics. 2020, Birkhauser Basel, Springer Nature Switzerland AG, Basel.
4. Shishkina EL., Sitnik SM. On fractional powers of Bessel operators. *Journal of Inequalities and Special Functions*. (Special issue To honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). 2017;8(1):49–67.
5. Samko S., Kilbas AA., Marichev OI. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers. Yveron; 1993. 1012 p.
6. Kilbas AA., Srivastava HM., Trujillo JJ. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam; 2006. 540 p.
7. Kiryakova V. *Generalized Fractional Calculus and Applications*.— Pitman Research Notes in Mathematics Series. No. 301. Longman Sci. UK; 1994. 402 p.
8. Sitnik SM., Shishkina EL. *Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel operators*. Moscow, Fizmatlit; 2019, 224 p.
9. Katrakhov VV., Sitnik SM. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*. 2018;64(2):211–426.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.10.2025

Поступила после рецензирования 28.11.2025

Принята к публикации 03.12.2025

Received October 15, 2025

Revised November 28, 2025

Accepted December 3, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ситник Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Чернова Ольга Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey M. Sitnik – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Olga V. Chernova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modelling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли

Соломатин Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Омский государственный педагогический университет,

Россия, 6440996, г. Омск, наб. Тухачевского, 14

solomatin_dv@omgpu.ru

Аннотация. В настоящей работе исследованы прямые произведения циклических полугрупп, для которых графы Кэли обладают свойством вершинной внешнепланарности. Сформулированы и доказаны критерии, задающие необходимые и достаточные условия существования вершинно-внешнепланарных графов Кэли в указанном классе, а также проведена классификация полугрупп, удовлетворяющих этим условиям, по количеству множителей. Основной результат включает установление точных условий внешнепланарности на уровне параметров индекса, порядка и количества элементов системы образующих, входящих в произведение циклических полугрупп; выделение и описание семейств прямых произведений, для которых вершинная внешнепланарность достигается и сохраняется при естественных операциях; демонстрацию соответствия между алгебраическими ограничениями структуры произведения и топологическими свойствами графов Кэли. Как следствие получен исчерпывающий перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, которые допускают планарный граф Кэли, но при этом не допускают вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

Ключевые слова: циклические полугруппы, прямые произведения полугрупп, графы Кэли, внешнепланарные графы, вершинно-внешнепланарные графы, теория графов, теория полугрупп

Для цитирования: Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие вершинно-внешнепланарные графы Кэли. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):44–53.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-44-53 EDN JDNULF

Original Research

Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Apex-Outerplanar Cayley Graphs

Denis V. Solomatin 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Omsk State Pedagogical University,

14 Tukhachevsky Emb., Omsk 644099, Russia

solomatin_dv@omgpu.ru

Abstract. This article examines the structural conditions under which direct products of cyclic semigroups admit Cayley graphs that are apex-outerplanar. A Cayley graph is called apex-outerplanar if the removal of a single distinguished vertex (the apex) yields an outerplanar graph. We provide a characterization of those semigroups whose Cayley graphs possess this property, establishing necessary and sufficient conditions in terms of the generating sets and the algebraic interactions among the cyclic components of the product. The analysis combines techniques from graph theory, including minor theory and embedding arguments, with algebraic properties of commutative semigroups. It is shown that certain configurations of cyclic semigroups give rise to Cayley graphs that become outerplanar upon deletion of an apex vertex, thereby extending known classifications of planar and outerplanar Cayley graphs. These results contribute to the broader understanding of the interplay between algebraic structure and topological properties of Cayley graphs, situating apex-outerplanar graphs within the framework of semigroup theory and flat embeddings.

Keywords: Cyclic Semigroups, Direct Products, Cayley Graphs, Apex-Outerplanar Graphs, Outerplanarity, Graph Minors, Graph Embeddings, Commutative Semigroups, Algebraic Graph Theory, Planar Cayley Graphs, Topological Graph Properties, Semigroup Theory, Combinatorial Structures

For citation: Solomatin DV. Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Apex-Outerplanar Cayley Graphs. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):44–53. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-44-53 EDN JDNULF

1. Введение. Исследование структурных свойств полугрупп и их графов Кэли занимает важное место в современной алгебре и комбинаторике. Графы Кэли позволяют визуализировать алгебраические объекты, переводя их свойства на язык теории графов, что открывает путь к междисциплинарным связям между алгеброй, дискретной математикой и топологией. Особый интерес представляют случаи,

когда графы Кэли обладают дополнительными геометрическими или топологическими характеристиками – например, вершинной внешнепланарностью. Понятие «вершинно-внешнепланарный граф» (в англоязычной литературе – *арех-outerplanar graph*) было впервые введено и охарактеризовано в диссертации Станислава Дзёбьяка под научным руководством Гуоли Дина, защищённой в Луизианском государственном университете в 2011 году [1]. В этой работе дан класс графов, которые становятся внешнепланарными после удаления одной вершины, и приведена его полная минорная характеристика в виде конечного списка из 57 запрещённых миноров. Некоторые из этих миноров для удобства читателя приведём на рис. 1. Позднее результаты диссертации были опубликованы в рецензируемом журнале [2], что закрепило использование термина в академической литературе и подчеркнуло значимость данного класса для структурной теории графов.

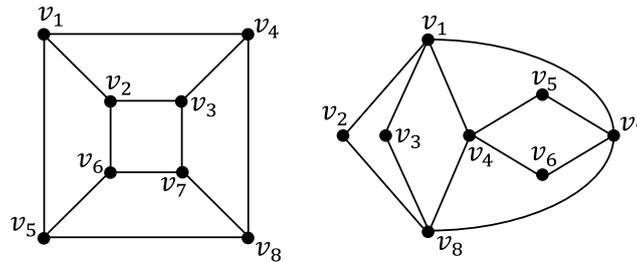


Рис. 1. Графы Q и J_1
Fig. 1. Graphs Q and J_1

Внешнепланарные графы характеризуются тем, что их можно вложить в плоскость так, чтобы все вершины лежали на внешней границе, а рёбра не пересекались. Это свойство делает такие графы особенно удобными для анализа: они обладают простой структурой, допускают эффективные алгоритмы распознавания и тесно связаны с задачами визуализации и оптимизации. Вершинно-внешнепланарные графы Кэли, в свою очередь, отражают глубокие ограничения на алгебраическую структуру исходной полугруппы. Циклические полугруппы – одни из наиболее простых и фундаментальных объектов в теории полугрупп. Их прямые произведения образуют богатый класс структур, где взаимодействие элементарных циклов порождает сложные комбинаторные картины. Мотивация изучения именно вершинно-внешнепланарных графов Кэли для этого класса полугрупп довольно прозрачна. Во-первых, ограничение внешнепланарности накладывает строгие условия на структуру полугруппы, что помогает классифицировать и описывать её свойства. Во-вторых, такие графы обладают малой плотностью рёбер и простой топологией, что делает их удобными для анализа и построения алгоритмов. В-третьих, вершинно-внешнепланарные графы встречаются в задачах сетевого моделирования, визуализации и теории вычислений, где важна простота структуры и отсутствие пересечений.

Тот факт, что изучение вершинно-внешнепланарных графов является сравнительно новым и перспективным направлением исследования, подтверждается бурным ростом числа публикаций в этой сфере [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12] ссылающихся на [2]. Таким образом, продолжая начатое нами ранее исследование [13], анализ прямых произведений циклических полугрупп, допускающих вершинно-внешнепланарных графы Кэли, не только углубляет понимание взаимодействия алгебраических и комбинаторных свойств, но и открывает перспективы для применения этих результатов в смежных областях математики и информатики.

2. Основной результат. Формулировку и доказательство основной теоремы предварим необходимыми определениями из [14, 15] и известными фактами из [16] для полноты изложения.

Графом Кэли полугруппы S относительно множества X образующих её элементов называем ориентированный мультиграф $\text{Cay}(S, X)$ с помеченными дугами, множество вершин которого совпадает с S , а вершина a соединена дугой помеченной элементом x с вершиной b тогда и только тогда, когда во множестве образующих X существует такой элемент x , что $ax = b$.

Основой графа Кэли $\text{Cay}(S, X)$ называем обыкновенный граф $SCay(S, X)$ полученный из исходного графа путём удаления всех его петель, меток, направлений дуг и кратных рёбер.

Плоской укладкой графа называем вложение вершин и рёбер графа в плоскость, при котором вершинам графа соответствуют точки плоскости, а рёбрам – непрерывные плоские линии без самопересечений, не имеющие общих точек, кроме возможно общих вершин. Граф вместе со своей плоской укладкой называется плоским графом, а всякий граф изоморфный плоскому графу называется планарным. Граф, для которого после удаления некоторой его вершины существует такая плоская укладка, что все оставшиеся вершины принадлежат одной внешней грани, называется вершинно-внешнепланарным.

Говорим, что полугруппа допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли если относительно некоторого минимального множества образующих её элементов основа графа Кэли является вершинно-внешнепланарным графом.

Следующая теорема содержит исчерпывающий перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускающих вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

Теорема 1. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется хотя бы одно из ограничений:

- 1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) = 1$;
- 1.2) $r = 1, m = 2, (h < 4, t = 1)$ или $(h < 3, t = 2)$;
- 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
- 1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
- 1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется одно из следующих ограничений:

- 2.1) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
- 2.2) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
- 2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где для натуральных чисел r и m выполняется одно из следующих ограничений:

- 3.1) $r = 1, m = 2$;
- 3.2) $r = 2, m < 3$;
- 3.3) $r = 3, m = 1$.

Представленное ниже доказательство теоремы опирается на следующую лемму, которая содержит исчерпывающий перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускающих планарный граф Кэли.

Лемма 1 [16, Теорема 21]. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется хотя бы одно из ограничений:

- 1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) < 3$;
- 1.2) $r = 1, m = 2, t < 3$;
- 1.3) $r = 2, m = 1, h < 4, t < 3$;
- 1.4) $r = 2, m = 1, h < 5, t = 1$;
- 1.5) $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется хотя бы одно из следующих ограничений:

- 2.1) $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2, k = 1, l = 2$;
- 2.2) $r = 1, m = 2, h = 2, t = 1, k = 2, l = 1$;
- 2.3) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 2, l < 3$;
- 2.4) $r = 2, m = 1, h = 2, t = 1, k = 3, l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где для натуральных чисел r и m выполняется хотя бы одно из следующих ограничений:

- 3.1) $r = 1, m = 2$;
- 3.2) $r = 2, m < 3$;
- 3.3) $r = 3, m = 1$.

Доказательство теоремы 1. Класс вершинно-внешнепланарных графов является строгим подмножеством класса планарных графов. То есть каждый вершинно-внешнепланарный граф является планарным, но далеко не каждый планарный граф является вершинно-внешнепланарным. Проанализируем каждую из серий ограничений Леммы 1 и выберем среди допускающих планарные графы Кэли лишь те полугруппы, которые допускают вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

1) Пусть $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где r, m, h, t – натуральные числа, тогда:

1.1) Если $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) = 1$, то S изоморфна циклической группе порядка mt . Основа графа Кэли конечной циклической группы изоморфна циклу, следовательно, является вершинно-внешнепланарным графом. В случае, когда $\text{НОД}(m, t) = 2$, выделим несколько вариантов. При $r = 1, m = 2, h = 1, t = 2$ основа графа Кэли полугруппы S является циклом четвертого порядка, следовательно, допускает вершинно-внешнепланарную укладку. Этот вариант содержится в пункте 1.2. Общий вид графа Кэли полугруппы S , являющейся прямым произведением двух циклических групп четных порядков, представлен на рис. 2. И при $m > 2$ или $t > 2$ содержит подграф, стягиваемый к графу Q с рис. 1

на вершинах $v_1 \in \{(a, b)\}$, $v_2 \in \{(a^2, b^2)\}$, $v_3 \in \{(a^3, b^3)\}$, $v_4 \in \{(a^4, b^4), \dots, (a^m, b^t)\}$, $v_5 \in \{(a^{1+\frac{m}{2}}, b^{1+\frac{t}{2}})\}$, $v_6 \in \{(a^{2+\frac{m}{2}}, b^{2+\frac{t}{2}})\}$, $v_7 \in \{(a^{3+\frac{m}{2}}, b^{3+\frac{t}{2}})\}$, $v_8 \in \{(a^{4+\frac{m}{2}}, b^{4+\frac{t}{2}}), \dots, (a^{\frac{m}{2}}, b^{\frac{t}{2}})\}$, следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

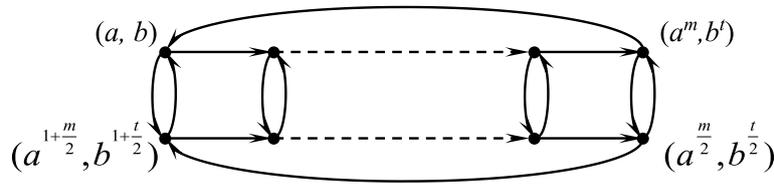


Рис. 2. Схема плоской укладки графа Кэли прямого произведения двух циклических групп четных порядков
 Fig. 2. Planar embedding of the Cayley graph of the direct product of two cyclic groups of even orders

1.2) Разобьем случай $r = 1, m = 2, t < 3$ на два варианта. Граф Кэли полугруппы является вершинно-внешнепланарным при $t = 1$, если $h < 4$, то общая схема его укладки представлена на рис. 3, а при $t = 2$, если $h < 3$, то укладка представлена на рис. 4. Если же $t < 3$ и $h + t \geq 5$, то обнаруживается подграф, стягиваемый к графу J_1 с рис. 1 на следующих вершинах: $v_1 \in \{(a, b^2)\}$, $v_2 \in \{(a^2, b)\}$, $v_3 \in \{(a, b)\}$, $v_4 \in \{(a^2, b^3)\}$, $v_5 \in \{(a, b^4)\}$, $v_6 \in \{(a^2, b^4)\}$, $v_7 \in \{(a, b^3)\}$, $v_8 \in \{(a^2, b^2)\}$, следовательно, не является вершинно-внешнепланарным.

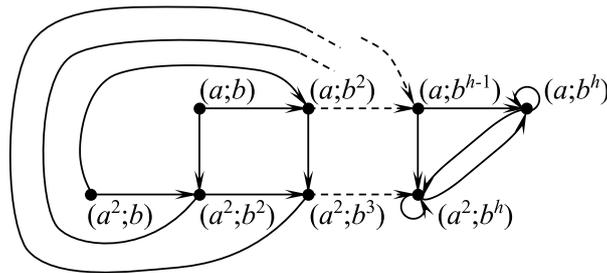


Рис. 3. Схема плоской укладки графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ и $B = \langle b \mid b^{h+1} = b^h \rangle$ относительно образующих неразложимых элементов $(a; b), (a^2; b)$
 Fig. 3. Planar embedding of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ and $B = \langle b \mid b^{h+1} = b^h \rangle$ with respect to generators of indecomposable elements $(a; b), (a^2; b)$

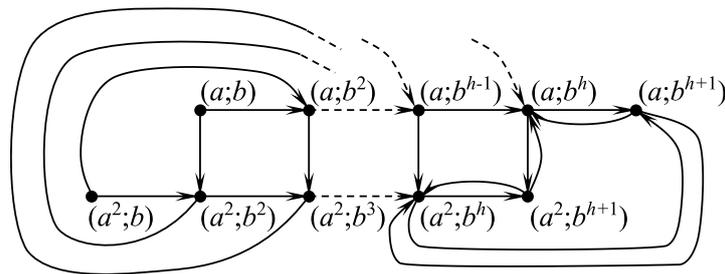


Рис. 4. Схема плоской укладки графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ и $B = \langle b \mid b^{h+2} = b^h \rangle$ относительно образующих неразложимых элементов $(a; b), (a^2; b)$
 Fig. 4. Planar embedding of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle$ and $B = \langle b \mid b^{h+2} = b^h \rangle$ with respect to generators of indecomposable elements $(a; b), (a^2; b)$

1.3) Пусть $r = 2, m = 1$. При $h = 1, t = 1$ попадаем в условия предыдущего пункта. Общий вид графа Кэли полугруппы удовлетворяющей данным условиям изображен на Рис.3. В рассматриваемом случае этот граф является внешнепланарным графом четвертого порядка. Оставшиеся варианты графов Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle, B = \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где $h < 4, t < 3$, изображены на рис. 5 – рис. 8 и при необходимости обращаются во внешнепланарный граф путём удаления вершины, соответствующей элементу $(a^2; b^3)$.

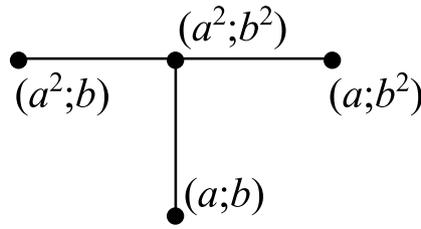


Рис. 5. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a^2; b)$
 Fig. 5. Planar embedding of the base of the Cayley graph of a direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a^2; b)$

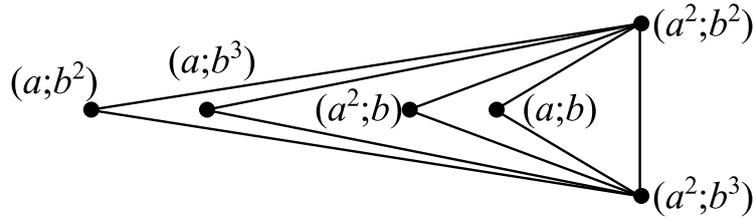


Рис. 6. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+2} = b^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$
 Fig. 6. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+2} = b^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$

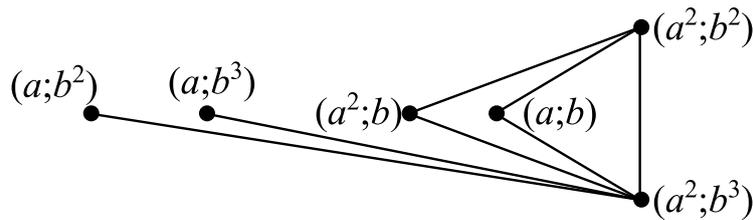


Рис. 7. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$
 Fig. 7. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a^2; b)$

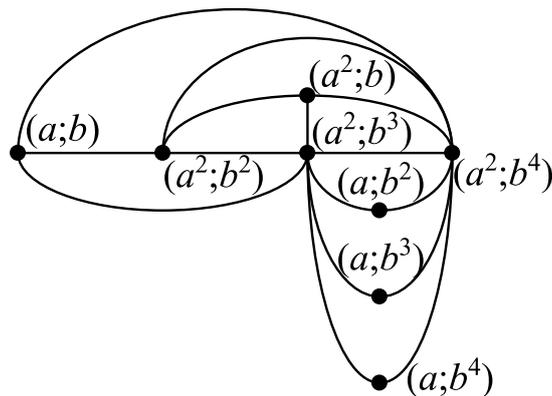


Рис. 8. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+2} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a; b^4)$, $(a^2; b)$
 Fig. 8. Planar embedding of the base of the Cayley graph base of a direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{3+2} = b^3 \rangle$ with respect to the generators $(a; b)$, $(a; b^2)$, $(a; b^3)$, $(a; b^4)$, $(a^2; b)$

1.4) Граф Кэли единственно нового варианта полугруппы для случая $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$, не представленного в предыдущем пункте, изображен на рис. 9. В результате удаления соответствующей элементу $(a^2; b^3)$ вершины из этого графа получается внешнепланарный граф.

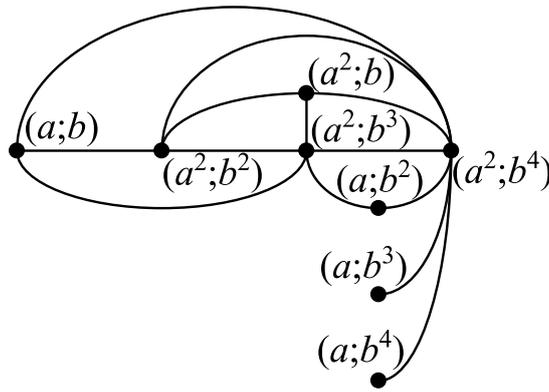


Рис. 9. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{4+1} = b^4 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a; b^2), (a; b^3), (a; b^4), (a^2; b)$
 Fig. 9. Planar embedding of the base of the Cayley graph of a direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{4+1} = b^4 \rangle$ with respect to the generators $(a; b), (a; b^2), (a; b^3), (a; b^4), (a^2; b)$

1.5) Граф Кэли полугруппы, формирующейся при $r = 3, m = 1, h = 3, t = 1$, изображен на рис. 10 и является вершинно-внешнепланарным, так как внешнепланарную укладку имеет граф, получаемый из него удалением вершины $(a^3; b^3)$ или $(a; b)$.

2) Пусть $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где r, m, h, t, k, l – натуральные числа, тогда:

2.1) Если все три сомножителя полугруппы $S = C_2 \times C_2 \times C_2$ группового типа, то основа графа Кэли этой полугруппы представляет собой в точности трехмерный куб Q в обозначениях с рис. 1 на вершинах $v_1 = (a; b^2; c), v_2 = (a; b^2; c^2), v_3 = (a^2; b^2; c^2), v_4 = (a^2; b^2; c), v_5 = (a; b; c), v_6 = (a; b; c^2), v_7 = (a^2; b; c^2), v_8 = (a^2; b; c)$. Следовательно, граф не является вершинно-внешнепланарным.

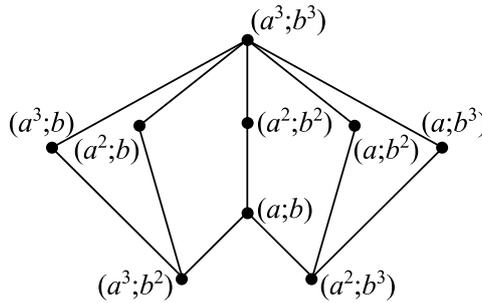


Рис. 10. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{3+1} = a^3 \rangle, B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b), (a; b^2), (a; b^3), (a^2; b), (a^3; b)$

Fig. 10. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{3+1} = a^3 \rangle, B = \langle b \mid b^{3+1} = b^3 \rangle$ with respect to the generators $(a; b), (a; b^2), (a; b^3), (a^2; b), (a^3; b)$

2.2) Если $r = 1, m = 2, h = k = 2, t = l = 1$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей имеет вершинно-внешнепланарный граф, изображенный на рис. 11, обращающийся во внешнепланарный после удаления вершины $(a^2; b^2; c^2)$ или $(a; b^2; c^2)$.

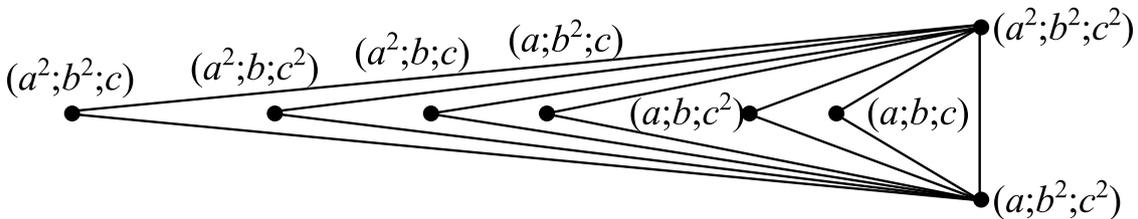


Рис. 11. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle, B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c), (a; b; c^2), (a; b^2; c), (a^2; b; c), (a^2; b; c^2), (a^2; b^2; c)$

Fig. 11. Planar embedding of the basis of the Cayley graph of the direct product of the semigroups $A = \langle a \mid a^{1+2} = a \rangle, B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b; c), (a; b; c^2), (a; b^2; c), (a^2; b; c), (a^2; b; c^2), (a^2; b^2; c)$

2.3) Если $r = 2, m = 1, h = k = 2, t = 1, l < 3$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей имеет вершинно-внешнепланарный граф, изображенный на рис. 12 или рис. 13. Последний обращается во внешнепланарный после удаления вершины $(a^2; b^2; c^2)$ или $(a^2; b^2; c^3)$.

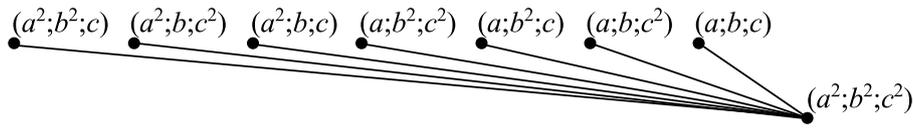


Рис. 12. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b^2; c^2)$

Fig. 12. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{2+1} = c^2 \rangle$ with respect to the generators $(a; b; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b^2; c^2)$

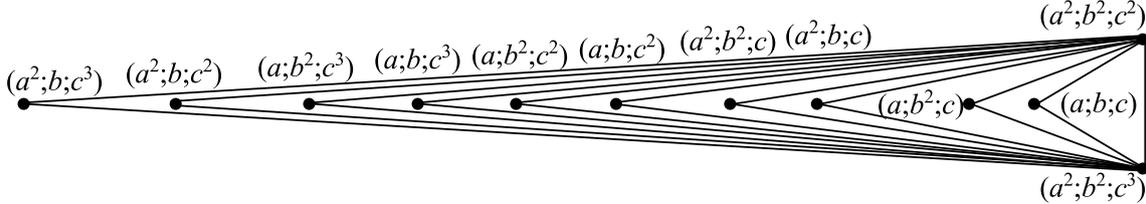


Рис. 13. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{2+2} = c^2 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$, $(a^2; b^2; c^2)$, $(a^2; b^2; c^3)$

Fig. 13. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{2+2} = c^2 \rangle$ with respect to the generating elements $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$, $(a^2; b^2; c^2)$, $(a^2; b^2; c^3)$

2.4) Если $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 3$, $l = 1$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей имеет вершинно-внешнепланарный граф, изображенный на рис. 14, обращающийся во внешнепланарный после удаления вершины $(a^2; b^2; c^2)$ или $(a^2; b^2; c^3)$.

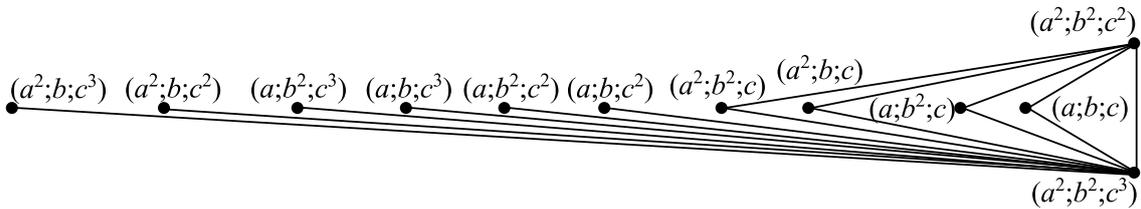


Рис. 14. Плоская укладка основы графа Кэли прямого произведения полугрупп $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ и $C = \langle c \mid c^{3+1} = c^3 \rangle$ относительно образующих элементов $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$, $(a^2; b^2; c^2)$, $(a^2; b^2; c^3)$

Fig. 14. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the direct product of semigroups $A = \langle a \mid a^{2+1} = a^2 \rangle$, $B = \langle b \mid b^{2+1} = b^2 \rangle$ and $C = \langle c \mid c^{3+1} = c^3 \rangle$ with respect to the generating elements $(a; b; c)$, $(a; b^2; c)$, $(a; b; c^2)$, $(a; b^2; c^2)$, $(a; b; c^3)$, $(a; b^2; c^3)$, $(a^2; b; c)$, $(a^2; b^2; c)$, $(a^2; b; c^2)$, $(a^2; b; c^3)$, $(a^2; b^2; c^2)$, $(a^2; b^2; c^3)$

3) Пусть $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$, где n, r, m – натуральные числа, тогда:

3.1) Если $r = 1$, $m = 2$, то основа графа Кэли полугруппы S по своей структуре является вершинно-внешнепланарным графом и представлена на рис. 15; при удалении вершины соответствующей элементу $(a_0; a_1^2; \dots; a_n^2)$ или $(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)$ этот граф становится внешнепланарным.

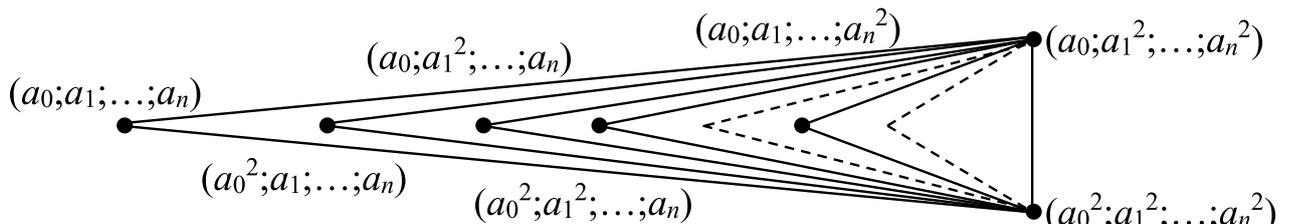


Рис. 15. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{1+2} = a_0 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 15. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{1+2} = a_0 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

3.2) Если $r = 2, m < 3$, то граф Кэли полугруппы S по своей структуре является вершинно-внешнепланарным и его основа представлена на Р рис. 16 или рис. 17, соответственно, для $m = 1$ или $m = 2$. В случае удаления определённой вершины $(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)$ или $(a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)$ граф, изображённый на рис. 17, становится внешнепланарным.

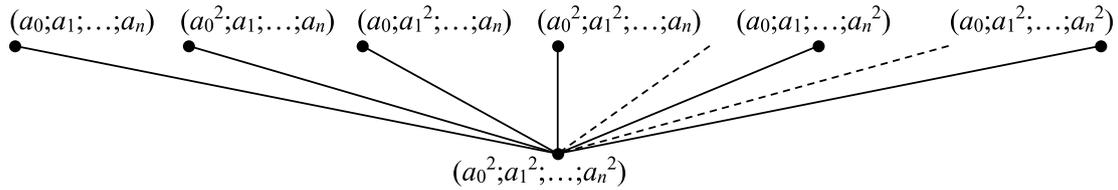


Рис. 16. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+1} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 16. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+1} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

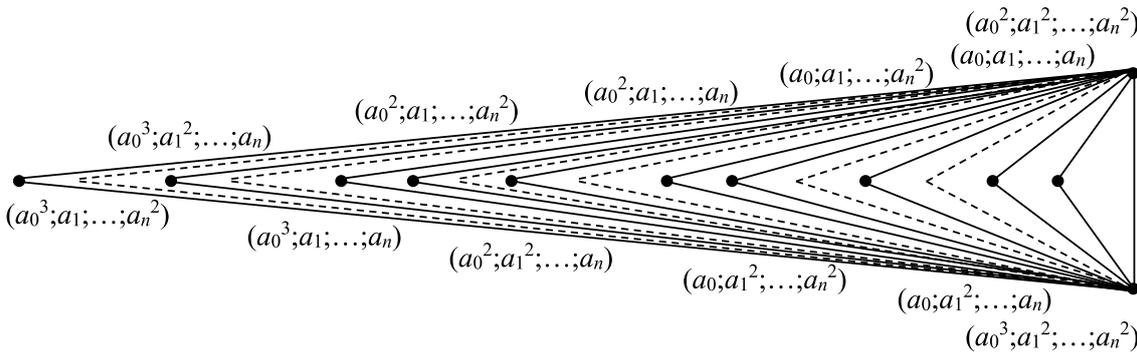


Рис. 17. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+2} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 17. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{2+2} = a_0^2 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

3.3) Как показано на рис. 18, если $r = 3, m = 1$, то граф Кэли полугруппы S в основе своей является вершинно-внешнепланарным. Данный граф становится внешнепланарным после удаления одной из вершин, а именно, $(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2)$ или $(a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)$. Это упрощённое изображение отражает основную структуру и важное свойство рассматриваемого графа Кэли, заключающееся в возможности получения такой его плоской укладки, что все вершины лежат на одной внешней грани.

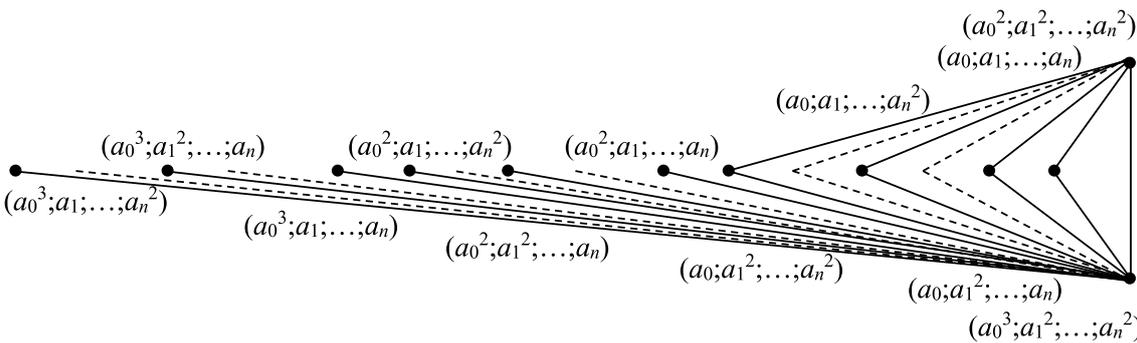


Рис. 18. Плоская укладка основы графа Кэли полугруппы $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{3+1} = a_0^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ относительно множества образующих элементов $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Fig. 18. Planar embedding of the base of the Cayley graph of the semigroup $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{3+1} = a_0^3 \rangle \times \prod_{i=1}^n \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \rangle$ with respect to the set of generating elements $M = S \setminus \{(a_0^2; a_1^2; \dots; a_n^2), (a_0^3; a_1^2; \dots; a_n^2)\}$

Теорема 1 доказана.

Сопоставив условия Леммы 1 и Теоремы 1, получаем как следствие перечень полугрупп, являющихся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускающих планарный граф Кэли, но не допускающих при этом вершинно-внешнепланарный граф Кэли.

Следствие 1. Конечная полугруппа S , являющаяся прямым произведением неоднородных циклических полугрупп, допускает планарный, но не допускает вершинно-внешнепланарный граф Кэли, тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется хотя бы одно из ограничений:

1.1) $r = 1, h = 1, \text{НОД}(m, t) = 2$, при $m > 2$ или $t > 2$;

1.2) $r = 1, m = 2, (h \geq 4, t = 1)$ или $(h \geq 3, t = 2)$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h \rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется следующее ограничение:

2.1) $r=1, m=2, h=2, t=1, k=2, l=1$.

Легко понять как устроена бесконечная полугруппа, являющаяся прямым произведением неоднородных полугрупп, относительно бесконечного числа образующих. Следующее следствие содержит нетривиальный результат об отсутствии бесконечных полугрупп, являющихся прямым произведением конечного числа неоднородных циклических полугрупп, допускающих вершинно-внешнепланарную укладку графа Кэли.

Следствие 2. Граф Кэли всякой бесконечной полугруппы S , являющейся прямым произведением конечного числа неоднородных циклических полугрупп, относительно любого множества образующих не допускает вершинно-внешнепланарную укладку.

Для сравнения, граф Кэли бесконечной полугруппы S , являющейся прямым произведением конечного числа неоднородных циклических полугрупп, допускает плоскую укладку в единственном случае, а именно, тогда и только тогда, когда $S \cong \langle a \mid a^3 = a \rangle \times \langle b \mid b = b \rangle$.

3. Заключение. Перспективы данного направления исследований видятся в переносе полученных критериев на более широкие классы полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем, включая неабелевы и нециклические компоненты. Вызывает неподдельный интерес изучение связи вершинной внешнепланарности с другими инвариантами графов, например, числом связности, хроматическими характеристиками, спектральными признаками, в контексте графов Кэли полугрупп. С практической точки зрения полезна разработка эффективных алгоритмов распознавания внешнепланарности и их применение в задачах анализа алгебраических структур.

Работа вносит вклад в теорию графов Кэли для полугрупп, показывая, как конкретные алгебраические ограничения непосредственным образом определяют топологическую организацию соответствующих графов. Полученные результаты задают направление дальнейшего развития темы и служат отправной точкой для более общего анализа взаимосвязи алгебраической структуры и топологических свойств.

Список литературы

1. Dziobiak S. Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. LSU Doctoral Dissertations. 3102; 2011. 83 p. https://repository.lsu.edu/gradschool_dissertations/3102
2. Ding G., Dziobiak S, Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. *Graphs and Combinatorics*. 2016;32(2):583–627.
3. Chatzidimitriou D. et al., Sparse obstructions for minor-covering parameters. *Discrete Appl. Math.* 2020;278:28–50.
4. Donkers H. et al., Preprocessing for outerplanar vertex deletion: an elementary kernel of quartic size. *Algorithmica*. 2022;84(11):3407–3458.
5. Eppstein D. On the biplanarity of blowups. *J. Graph Algorithms Appl.* 2024;28(2):83–99.
6. Jobson A.S., Kézdy A.E. All minor-minimal apex obstructions with connectivity two. *Electron. J. Comb.* 2021;28(1):Research Paper P1.23, 58 p.
7. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Acta Math. Univ. Comen. New Ser.* 2019;88(3):903–910.
8. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Discrete Appl. Math.* 2020;284:538–555.
9. Leivaditis A. et al., Minor obstructions for apex-pseudoforests. *Discrete Math.* 2021;344(10): Article ID 112529, 31 p.
10. Mattman T.W. Forbidden minors: finding the finite few. in: *A primer for undergraduate research. From groups and tiles to frames and vaccines*. Cham: Birkhäuser. 2017;85–97
11. Sau I. et al., k -apices of minor-closed graph classes. I: Bounding the obstructions. *J. Comb. Theory, Ser. B* 2023;161:180–227.
12. Savitsky T.J., Schluchter S.A. Some excluded minors for the spindle surface. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 2024;119:217–232.
13. Соломатин Д.В. Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие внешнепланарные графы Кэли и их обобщения. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(1):13–20.
14. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
15. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Casopis. Pest. Mat.* 1981;106:407–408.
16. Соломатин Д.В. Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы. *Прикладная Дискретная Математика*. 2021;54:5–57.

References

1. Dziobiak S, Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. LSU Doctoral Dissertations. 3102; 2011. 83 p. https://repository.lsu.edu/gradschool_dissertations/3102
2. Ding G., Dziobiak S, Excluded-minor characterization of apex-outerplanar graphs. *Graphs and Combinatorics*. 2016;32(2):583–627.
3. Chatzidimitriou D. et al., Sparse obstructions for minor-covering parameters. *Discrete Appl. Math.* 2020;278:28–50.
4. Donkers H. et al., Preprocessing for outerplanar vertex deletion: an elementary kernel of quartic size. *Algorithmica*. 2022;84(11):3407–3458.
5. Eppstein D. On the biplanarity of blowups. *J. Graph Algorithms Appl.* 2024;28(2):83–99.
6. Jobson AS., Kézdy AE, All minor-minimal apex obstructions with connectivity two. *Electron. J. Comb.* 2021;28(1):Research Paper P1.23, 58 p.
7. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Acta Math. Univ. Comen. New Ser.* 2019;88(3):903–910.
8. Leivaditis A. et al., Minor-obstructions for apex sub-unicyclic graphs. *Discrete Appl. Math.* 2020;284:538–555.
9. Leivaditis A. et al., Minor obstructions for apex-pseudoforests. *Discrete Math.* 2021;344(10): Article ID 112529, 31 p.
10. Mattman TW, Forbidden minors: finding the finite few. in: *A primer for undergraduate research. From groups and tiles to frames and vaccines. Cham: Birkhäuser.* 2017;85–97
11. Sau I. et al., k -apices of minor-closed graph classes. I: Bounding the obstructions. *J. Comb. Theory, Ser. B* 2023;161:180–227.
12. Savitsky TJ., Schluchter SA, Some excluded minors for the spindle surface. *J. Comb. Math. Comb. Comput.* 2024;119:217–232.
13. Solomatin DV, Direct Products of Cyclic Semigroups Allowing Outerplanar Cayley Graphs and Their Generalizations. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(1):13–20. (in Russ.)
14. Harary F. Graph Theory: Advanced Book Program Series. Boulder: Westview Press; 1994. 284 p.
15. Zelinka B. Graphs of Semigroups. *Casopis. Pest. Mat.* 1981;106:407–408.
16. Solomatin DV, Researches of semigroups with planar Cayley graphs: results and problems. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*. 2021;54:5–57. (in Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.10.2025

Received October 15, 2025

Поступила после рецензирования 27.11.2025

Revised November 27, 2025

Принята к публикации 03.12.2025

Accepted December 3, 2025

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Соломатин Денис Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике, Омский государственный педагогический университет, г. Омск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Denis V. Solomatin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematics Education Methods, Omsk State Pedagogical University, Omsk, Russia

[К содержанию](#)

Краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью

Ал-Гарайхоли И. А. Х.^{1,2} , Шабров С. А.¹ 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

¹ Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
noskovbupk@mail.ru

² Университет Ти-Кар, Педагогический колледж точных наук,
Ирак, 00964, г. Насирия
evan.abd3@gmail.com

Аннотация. В работе изучена непрерывная ветвь нелинейной спектральной задачи с производными по «расщепленным» мерам. Получены достаточные условия непустоты множества неотрицательных значений, при каждом из которых существует неотрицательное нетривиальное решение изучаемой нелинейной спектральной задачи с разрывными решениями; показана монотонность решения по спектральному параметру; доказана сходимость итерационной последовательности к решению. Трудности, возникающие при анализе, вызванные отсутствием непрерывности у решения, мы преодолеваем с применением производных по мере. Используется также теория положительных вполне непрерывных операторов, разработанная М.А. Красносельским.

Ключевые слова: производная по мере, краевая задача, монотонная нелинейность, непрерывная ветвь, функция Грина

Для цитирования: Ал-Гарайхоли И.А.Х., Шабров С.А. Краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):54–64.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-54-64 EDN JMBVDU

Original Research

Boundary Value Problems with Derivatives with Respect to «Split» Measures and Monotone Nonlinearity

Evan A. H. Al-Garayholi^{1,2} , Sergey A. Shabrov¹ 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

¹ Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh, 394018, Russia,
noskovbupk@mail.ru

² Thi-Qar University, Pedagogical College of Exact Sciences,
12 Nas ThiQar, Nasiriyah, 00964, Iraq,
evan.abd3@gmail.com

Abstract. This paper examines a continuous branch of a nonlinear spectral problem with derivatives with respect to "split" measures. Sufficient conditions for the nonemptiness of the set of nonnegative values, for each of which a nonnegative, nontrivial solution to the nonlinear spectral problem with discontinuous solutions exists, are obtained. The monotonicity of the solution with respect to the spectral parameter is demonstrated; and the convergence of the iterative sequence to the solution is proven. Difficulties arising in the analysis of a nonlinear boundary value problem with discontinuous solutions are overcome using derivatives with respect to the measure. The resulting equation is then considered as a relationship between the solution value and its derivatives up to a certain order, i.e., it becomes ordinary. This approach to treating equations with nonsmooth and discontinuous solutions was proposed by Yu.V. Pokornyy. The theory of positive completely continuous operators developed by M.A. Krasnosel'skii is also used.

Keywords: Derivative with Respect to Measure, Boundary Value Problem, Monotone Nonlinearity, Continuous Branch, Green's Function

For citation: Al-Garayholi EAH., Shabrov SA. Boundary Value Problems with Derivatives with Respect to «Split» Measures and Monotone Nonlinearity. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):54–64. (In Russ).

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-54-64 EDN JMBVDU

1. Введение. В работах [1, 2] Ю. В. Покорным был предложен поточечный подход для изучения качественных свойств решений краевых задач с негладкими решениями; исследование систем Чебышева – Хаара в теории разрывных ядер Келлога было предпринято в работе [3] Покорным Ю. В. и Боровских А. В.

Поточечная трактовка краевой задачи, когда уравнение в каждой точке трактуется как связь между значением решения и ее производными до некоторого порядка (в отличие от теории распределения), позволил построить точную параллель классической теории ОДУ [4].

Несмотря на ряд нерешенных проблем (например, умножение обобщенной функции на разрывную и т. д. [5]), теория обобщенных функций незаменима в спектральных вопросах [6, 7, 8, 9] и множестве других.

2. Некоторые сведения о производных и интеграле по «расщепленным» мерам. Для удобства читателей приведем определения и некоторые сведения о производных и интеграле по «расщепленным» мерам, более подробные сведения о которых можно найти в [10].

Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция, определенная в каждой точке отрезка $[0; \ell]$. При этом мы предполагаем, что множество $S(\mu)$ точек разрыва функции $\mu(x)$ непусто, т. е. $S(\mu) \neq \emptyset$, и $\Delta^- \mu(\xi) \neq \Delta^+ \mu(\xi)$ хотя бы для одной точки ξ , принадлежащей множеству $S(\mu)$. Здесь и далее, через $\Delta^- \mu(\xi)$ и $\Delta^+ \mu(\xi)$ обозначены левый и правый скачки функции $\mu(x)$ в точке ξ , т. е. $\Delta^- \mu(\xi) = \mu(\xi) - \mu(\xi - 0)$ и $\Delta^+ \mu(\xi) = \mu(\xi + 0) - \mu(\xi)$. Таким образом, мера в точке $\xi \in S(\mu)$, в которой $\Delta^- \mu(\xi) \neq \Delta^+ \mu(\xi)$ «расщеплена» на два значения.

Нам удобней считать, что $\mu(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на тройку собственных элементов (см., напр., [4]). Так как для восстановления функции (с точностью до постоянной константы) после дифференцирования, необходимо «помнить» оба скачка функции $u(x)$, которые вообще говоря различны, то производная функции $u(x)$ по мере $\mu(x)$, которую мы обозначим через $\frac{du}{d[\mu]_2}$, чтобы подчеркнуть, что она в точке ξ принимает два упорядоченных значения, определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ (см. рисунок 1), в котором каждая точка $\xi \in S(\mu)$ заменена на пару собственных значений (помимо предельных $\xi \pm 0$). Обозначать мы будем через τ_1^ξ и τ_2^ξ , причем

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_1^\xi) = \frac{\Delta^- u(\xi)}{\Delta^- \mu(\xi)} = \frac{u(\xi) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi) - \mu(\xi - 0)},$$

$$\frac{du}{d[\mu]_2}(\tau_2^\xi) = \frac{\Delta^+ u(\xi)}{\Delta^+ \mu(\xi)} = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi)}.$$

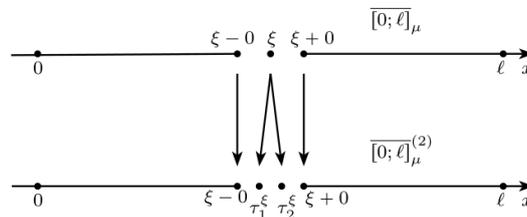


Рис. 1. Структура множества $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$

Fig. 1. Structure of the set $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$

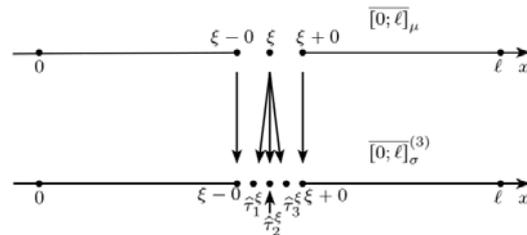


Рис. 2. Структура множества $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(3)}$

Fig. 2. Structure of the set $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(3)}$

Пусть на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ определена функция $\sigma(x)$, которая порождает на нем меру. При дифференцировании функции $v(x) = u'_{[\mu]_2}(x)$ по мере σ необходимо «помнить» уже три значения в точке $\xi \in S(\mu)$. Поэтому производная $v'_{[\sigma]_3}(x)$ определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(3)}$, в котором каждая точка разрыва заменена на тройку (помимо предельных $\xi - 0$ и $\xi + 0$) собственных значений $\tilde{\tau}_1^\xi$, $\tilde{\tau}_2^\xi$ и $\tilde{\tau}_3^\xi$ (см. рисунок 2). При этом $[\sigma]_3$ -производная функции $v(x)$ в точках $\tilde{\tau}_j^\xi$ ($j = 1, 2, 3$) определяется следующим образом:

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\tilde{\tau}_1^\xi) = \frac{v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0)}{\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)},$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\tilde{\tau}_2^\xi) = \frac{v(\tau_2^\xi) - v(\tau_1^\xi)}{\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)},$$

$$\frac{dv}{d[\sigma]_3}(\tilde{\tau}_3^\xi) = \frac{v(\xi + 0) - v(\tau_2^\xi)}{\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)}.$$

На рисунках 1 и 2 показана структура множеств $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$ и $\overline{[0; \ell]_\sigma}^{(3)}$ соответственно. При этом естественно считать, что $\xi - 0 < \tau_1^\xi < \xi < \tau_2^\xi < \xi + 0$ для всех точек разрыва функции $\mu(x)$.

Всюду далее мы будем предполагать, что концевые точки отрезка $[0; \ell]$ являются точками непрерывности функции $\mu(x)$, а, следовательно, и функций $u(x)$ и $v(x)$.

В дальнейшем, чтобы не затенять сути дела, мы будем предполагать, что множества точек разрыва функций $u(x)$ и $v(x)$ совпадают, и записывать это следующим образом: $S(u) = S(v)$.

Пусть даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, первая из них определена на множестве $\overline{[0; \ell]_\sigma}^{(3)}$, а вторая – на $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$; обе они являются функциями с конечным изменением на $\overline{[0; \ell]_\sigma}^{(3)}$ и $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$ соответственно. Тогда множество точек разрыва у каждой из них не более чем счетно.

На множестве $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$ определим функцию $v_s(x)$ следующим образом:

$$v_s(0) = 0;$$

если x не совпадает ни с одной из точек τ_i^ξ ни при каком $\xi \in S(v)$ и $i = 1, 2$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0));$$

если $x = \tau_1^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) + v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0);$$

если $x = \tau_2^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) + v(\tau_2^\xi) - v(\xi - 0).$$

Как и в классическом случае, эту функцию мы назовем функцией скачков. Очевидно, что $v_0(x) = v(x) - v_s(x)$ непрерывна на $\overline{[0; \ell]_\mu}^{(2)}$.

Положим

$$\int_0^\ell u d[v]_2 = \int_0^\ell u dv_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[u(\tilde{\tau}_1^\xi) \left(v(\tau_1^\xi) - v(\xi - 0) \right) + u(\tilde{\tau}_2^\xi) \left(v(\tau_2^\xi) - v(\tau_1^\xi) \right) + u(\xi) \left(v(\xi + 0) - v(\tau_2^\xi) \right) \right]. \quad (1)$$

Первый интеграл в правой части (1) понимается по Лебегу – Стильтьесу (а так как функция $v_0(x)$ непрерывна в классическом смысле, то он будет существовать и в смысле Римана – Стильтьеса). Интеграл, определенный равенством (1), мы назовем π_2 -интегралом.

Введем еще один интеграл

$$\int_0^\ell v d[u]_2^* = uv \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u d[v]_2,$$

где $uv \Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$, который мы будем называть π_2^* -интегралом.

Нетрудно видеть, что введенные термины обладают всеми свойствами интеграла. Более того, если одна из функций непрерывна на всем отрезке $[0; \ell]$ введенный интеграл численно совпадает с интегралом Римана – Стильтьеса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. [10] Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ – функция скачков функции $u(x)$, построенная так же, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ – непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство

$$\int_0^\ell v d[u]_2^* = \int_0^\ell v du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[v(\xi - 0) \left(u(\tau_1^\xi) - u(\xi - 0) \right) + v(\tau_1^\xi) \left(u(\tau_2^\xi) - u(\tau_1^\xi) \right) + v(\tau_2^\xi) \left(u(\tau_3^\xi) - u(\tau_2^\xi) \right) + v(\xi + 0) \left(u(\xi + 0) - u(\tau_2^\xi) \right) \right].$$

Теорема 2.2. [10] Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ – функция скачков функции $u(x)$, построенная так же, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ – непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство

$$\int_0^\ell v d[u]_1^* = \int_0^\ell v du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[v(\xi - 0) \left(u(\tau_1^\xi) - u(\xi - 0) \right) + v(\tau_1^\xi) \left(u(\tau_2^\xi) - u(\tau_1^\xi) \right) + v(\xi + 0) \left(u(\xi + 0) - u(\tau_2^\xi) \right) \right].$$

Также вводятся π_1 - и π_1^* -интегралы, которые нам понадобятся.

Пусть даны две функции $u(x)$ и $v(x)$, первая из них определена на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$, а вторая – на $\overline{[0; \ell]}_\mu$; обе они являются функциями с конечным изменением на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ и $\overline{[0; \ell]}_\mu$ соответственно. Тогда множество точек разрыва у каждой из них не более чем счетно.

На множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$ определим функцию $v_s(x)$ следующим образом:

$$v_s(0) = 0;$$

если x не совпадает ни с одной из точек τ^ξ ни при каком $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0));$$

если $x = \tau^\xi$ при некотором $\xi \in S(v)$, то

$$v_s(x) = \sum_{\substack{\xi \in S(v) \\ \xi < x}} (v(\xi + 0) - v(\xi - 0)) + v(\tau^\xi) - v(\xi - 0).$$

Как и в классическом случае, эту функцию мы назовем функцией скачков. Очевидно, что $v_0(x) = v(x) - v_s(x)$ непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_\mu$.

Положим

$$\int_0^\ell u d[v]_1 = \int_0^\ell u dv_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[u(\tau_1^\xi) \left(v(\tau^\xi) - v(\xi - 0) \right) + u(\tau_2^\xi) \left(v(\xi + 0) - v(\tau^\xi) \right) \right]. \quad (2)$$

Первый интеграл в правой части (2) понимается по Лебегу – Стильесу (а так как функция $v_0(x)$ непрерывна в классическом смысле, то он будет существовать и в смысле Римана – Стильеса). Интеграл, определенный равенством (2), мы назовем π_1 -интегралом.

Введем еще один интеграл

$$\int_0^\ell v d[u]_1^* = uv \Big|_0^\ell - \int_0^\ell u d[v]_1,$$

где $uv \Big|_0^\ell = u(\ell)v(\ell) - u(0)v(0)$, который мы будем называть π_1^* -интегралом.

Нетрудно видеть, что введенные термины обладают всеми свойствами интеграла. Более того, если одна из функций непрерывна на всем отрезке $[0; \ell]$, введенный интеграл численно совпадает с интегралом Римана – Стильеса.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3 [10] Пусть $S(u) = S(v)$. Если $u_s(x)$ – функция скачков функции $u(x)$, построенная так же, как и $v_s(x)$, а $u_0(x) = u(x) - u_s(x)$ – непрерывная составляющая функции $u(x)$, то справедливо равенство

$$\int_0^\ell v d[u]_1^* = \int_0^\ell v du_0 + \sum_{\xi \in S(\mu)} \left[v(\xi - 0) \left(u\left(\tau_1^\xi\right) - u(\xi - 0) \right) + v\left(\tau_2^\xi\right) \left(u\left(\tau_2^\xi\right) - u\left(\tau_1^\xi\right) \right) + v(\xi + 0) \left(u(\xi + 0) - u\left(\tau_2^\xi\right) \right) \right]. \quad (3)$$

Отметим, что введенные π_1^* - и π_2^* -интегралы невозможно свести к обычному интегралу Лебега – Стильтеса по некоторому вспомогательному заряду ввиду того, что мера точек разрыва функции $\mu(x)$ «расщеплена» на несколько частей, и мера крайних частей умножается на значение, ранее бывшее предельным.

3. Оценки функции Грина задачи с «расщепленными» мерами. Генезис краевой задачи, которая обсуждается ниже, можно найти в [10].

Дадим ряд важных определений.

Определение 3.1. Функцию $u(x)$, определенную на $\overline{[0; \ell]}_\mu$, назовем μ -непрерывной в точке $x_0 \in \overline{[0; \ell]}_\mu$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$, удовлетворяющих неравенству $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$ справедливо $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 3.2. Функцию $u(x)$ будем называть μ -непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_\mu$, если она μ -непрерывна в каждой точке этого множества.

Множество μ -непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций мы обозначим через $C_\mu \overline{[0; \ell]}_\mu$. Очевидно, что если это множество снабдить нормой $\|u\|_\mu = \max_{x \in \overline{[0; \ell]}_\mu} |u(x)|$, то оно становится банаховым пространством.

Определение 3.3. Функцию $F(x)$ назовем μ -абсолютно непрерывной на множестве $\overline{[0; \ell]}_\mu$, если для всякого положительного ε найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной системы неперекрывающихся интервалов $\left\{ (\alpha_i; \beta_i)_\mu \right\}_{i=1}^{i=n}$, для которой

$$\sum_{i=1}^n (\mu(\beta_i) - \mu(\alpha_i)) < \delta$$

выполняется

$$\left| \sum_{i=1}^n (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \right| < \varepsilon.$$

Аналогично вводится понятие $[\sigma]$ -абсолютно непрерывной на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$ функции.

Решение изучаемых ниже краевых задач (и самих уравнений) мы ищем в классе E – μ -абсолютно непрерывных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций, μ -производная которых σ -абсолютно непрерывна на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем выполненными следующие условия:

1) $\min_{x \in \overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}} p(x) > 0$;

2) $Q(x)$ не убывает на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$;

3) функции $p(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $\overline{[0; \ell]}_\mu^{(2)}$.

Пусть краевая задача

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \frac{dF}{d[\sigma]_3}; \\ u(0) = u(\ell) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

является невырожденной и однородное уравнение

$$Lu \equiv -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = 0 \quad (5)$$

не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\mu$.

Поясним понятия невырожденности краевой задачи и неосцилляции однородного уравнения.

Будем говорить, что краевая задача (4) является невырожденной, если однородная задача (при $\frac{dF}{d[\sigma]_3}(x) \equiv 0$) имеет только тривиальное решение.

Точку s , принадлежащую множеству $\overline{[0; \ell]}_\mu$, мы назовем нулевой точкой решения $u(x)$ однородного уравнения, если $u(s) = 0$.

Точку τ_1^ξ назовем нулевым местом решения $\varphi(x)$ однородного уравнения (5), если $\varphi(\xi - 0) \cdot \varphi(\xi) < 0$; точку τ_2^ξ назовем нулевым местом решения $\varphi(x)$ однородного уравнения (5), если $\varphi(\xi) \cdot \varphi(\xi + 0) < 0$.

Нулевые точки и нулевые места мы будем называть нулями решения.
Нетрудно видеть, что краевая задача

$$\begin{cases} -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(\frac{du}{d[\mu]_2} \right) = \frac{dF}{d[\sigma]_3}; \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

является невырожденной, и ее функция Грина имеет вид

$$g(x, s) = \frac{(\mu(\min\{x, s\}) - \mu(0)) (\mu(\ell) - \mu(\max\{x, s\}))}{\mu(\ell) - \mu(0)}.$$

Так как однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ (что проверяется непосредственно), то найдутся положительные константы C_i ($i = 1, 2, 3, 4$), что для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$ справедливы неравенства

$$C_1 (\mu(x) - \mu(0)) \leq \varphi_1(x) \leq C_2 (\mu(x) - \mu(0)), \quad (7)$$

$$C_3 (\mu(\ell) - \mu(x)) \leq \varphi_2(x) \leq C_4 (\mu(\ell) - \mu(x)). \quad (8)$$

Из неравенств (7) и (8) мы находим, что

$$\frac{C_1 C_3 (\mu(\ell) - \mu(0))}{-W[\varphi_1, \varphi_2](0)} \cdot g(x, s) \leq G(x, s) \leq \frac{C_2 C_4 (\mu(\ell) - \mu(0))}{-W[\varphi_1, \varphi_2](0)} \cdot g(x, s),$$

где $W[\varphi_1, \varphi_2](0)$ – аналог определителя Вронского [10].

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3.1. Пусть краевая задача (4) невырождена, однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]}_\mu$; $G(x, s)$ и $g(x, s)$ – функции Грина задач (4) и (6) соответственно. Тогда существуют положительные константы m и M , что для всех x и s , принадлежащих множеству $\overline{[0; \ell]}_\mu$, выполнены неравенства

$$m \cdot g(x, s) \leq G(x, s) \leq M \cdot g(x, s). \quad (9)$$

Для функции Грина $g(x, s)$ достаточно очевидны неравенства ($x, s, \tau \in \overline{[0; \ell]}_\mu$)

$$g(x, s) \geq u_0(x)g(\tau, s), \quad (10)$$

где $u_0(x) = \frac{(\mu(x) - \mu(0)) (\mu(\ell) - \mu(x))}{(\mu(\ell) - \mu(0))^2},$

$$u_0(x) \cdot v_1(s) \leq g(x, s) \leq u_0(x) \cdot v_2(s), \quad (11)$$

где $v_1(s)$ и $v_2(s)$ – положительные суммируемые функции.

Из неравенств (9), (10) и (11) мы получаем

$$G(x, s) \geq \widehat{u}_0(x) \cdot G(\tau, s),$$

где $\widehat{u}_0(x) = \frac{m}{M} \cdot u_0(x),$

$$\widehat{u}_0(x) \cdot \widehat{v}_1(s) \leq G(x, s) \leq \widehat{u}_0(x) \cdot \widehat{v}_2(s),$$

$\widehat{v}_1(s) = M \cdot v_1(s)$ и $\widehat{v}_2(s) = \frac{M^2}{m} v_2(s).$

4. Нелинейные краевые задачи с производными по «расщепленным» мерам и монотонной нелинейностью. Здесь приводятся условия на «монотонный» рост нелинейности $f(x, u)$, для которой краевая задача

$$\begin{cases} Lu \equiv -\frac{d}{d[\sigma]_3} \left(p \frac{du}{d[\mu]_2} \right) + u \frac{dQ}{d[\sigma]_3} = \lambda f(x, u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

(λ – спектральный параметр), может иметь не более одного нетривиального неотрицательного решения, т. е. решения, принадлежащего конусу K неотрицательных на $\overline{[0; \ell]}_\mu$ функций.

Нелинейное уравнение из (12) в точках разрыва понимается как три равенства:

$$\begin{aligned} -\left[\left(pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_1^\xi) - \left(pu'_{[\mu]_2} \right) (\xi - 0) \right] + u(\xi - 0) \left[Q(\tau_1^\xi) - Q(\xi - 0) \right] &= \lambda f(\tau_1^\xi, u(\xi - 0)) \cdot (\sigma(\tau_1^\xi) - \sigma(\xi - 0)), \\ -\left[\left(pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_2^\xi) - \left(pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_1^\xi) \right] + u(\xi) \left[Q(\tau_2^\xi) - Q(\tau_1^\xi) \right] &= \lambda f(\tau_2^\xi, u(\xi)) \cdot (\sigma(\tau_2^\xi) - \sigma(\tau_1^\xi)), \\ -\left[\left(pu'_{[\mu]_2} \right) (\xi + 0) - \left(pu'_{[\mu]_2} \right) (\tau_2^\xi) \right] + u(\xi + 0) \left[Q(\xi + 0) - Q(\tau_2^\xi) \right] &= \lambda f(\tau_3^\xi, u(\xi + 0)) \cdot (\sigma(\xi + 0) - \sigma(\tau_2^\xi)). \end{aligned}$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия:

1. уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0; \ell]_\mu}$;
2. $f(x, 0) \equiv 0$;
3. $f(x, u)$ не убывает по u при $u \geq 0$ и каждом $x \in \overline{[0; \ell]_\mu}$;
4. $\frac{f(x, u)}{u}$ убывает по u при $u > 0$;
5. оператор суперпозиции, порождаемый функцией $f(x, u_0(x)u)$, непрерывно действует из $C_\mu \overline{[0; \ell]_\mu}$ в $L_{p, \mu} \overline{[0; \ell]_\mu}$ при некотором $p \in (1; +\infty)$.

Тогда множество Λ неотрицательных значений λ , при которых задача (12) имеет хотя бы одно нетривиальное в K решение, обладает следующими свойствами:

- (i) Множество Λ непусто и совпадает с некоторым интервалом $(\lambda_0, \lambda_\infty)$, при $0 \leq \lambda_0 < \lambda_\infty \leq +\infty$;
- (ii) Каждому $\lambda \in \Lambda$ отвечает лишь одно решение $u(x, \lambda) \in K$ задачи (12), и $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} = 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\infty} \|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} = \infty$.
- (iii) Функция $u(x, \lambda)$ монотонна по λ : при всех $x \in \overline{[0; \ell]_\mu}$ справедливо неравенство

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u(x, \lambda_1) - u(x, \lambda_2)) \geq 0.$$

- (iv) При каждом фиксированном $\lambda^* \in \Lambda$ для любого начального приближения $u_0(x)$ итерационная последовательность $\{u_n(x)\}_{n=0}^\infty$, определяемая как решение задачи

$$\begin{cases} Lu = \lambda^* f(x, u_{n-1}(x)), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к $u(x, \lambda^*)$.

Доказательство. Так как $f(x, u)$ не убывает по u при $u \geq 0$ и $f(x, 0) \equiv 0$, то $f(x, u) \geq 0$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]_\mu}$ и $u \geq 0$; из убывания $\frac{f(x, u)}{u}$ при $u > 0$ вытекает, что если краевая задача (12) разрешима в K при некотором $\lambda > 0$, то ее решение $u(x, \lambda)$ принадлежит внутренности $K_{u_0} = \left\{ u \in K : \inf_{x \in (0; \ell)_\mu} \frac{u(x)}{u_0(x)} \right\}$.

Покажем, что Λ является непустым множеством. Для этого достаточно доказать, что хотя бы при каком-то $\lambda > 0$ существует нетривиальное решение, принадлежащее K , уравнения $u = \lambda Au$, где $A = \widetilde{G}F$ и $(\widetilde{G}f)(x) = \int_0^\ell \frac{G(x, s)}{u_0(x)} f(s) d[\sigma(s)]$, $(\widetilde{F}u)(x) = f(x, u_0(x)u(x))$. Оператор

$$A_k^{(r)} v = \frac{kAv + v_0}{\|kAv + v_0\|_{C_\mu}} \cdot r,$$

$v_0(x) \equiv 1$, $v(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$, где r – положительное фиксированное число, $k = 1, 2, \dots$, в условиях теоремы действует и вполне непрерывен в $C_\mu \overline{[0; \ell]_\mu}$, оставляет инвариантным конус K . Более того, $A_k^{(r)}$ вполне непрерывен на K , так как норма в $C_\mu \overline{[0; \ell]_\mu}$ монотонна: $\|kAv + v_0\|_{C_\mu} \geq \|v_0\|_{C_\mu}$ при $v(x) \geq 0$; преобразует K в единичную сферу пространства $C_\mu \overline{[0; \ell]_\mu}$. Поэтому $A_k^{(r)}$ оставляет инвариантным множество функций $v(x) \in K$, для которых $\|v\|_{C_\mu} \leq 1$, которое, как нетрудно видеть, ограничено, выпукло и замкнуто. Вследствие принципа Шаудера у $A_k^{(r)}$ существует точка v_k : $A_k^{(r)} v_k = v_k$. Вспоминая определения $A_k^{(r)}$, последнее равенство перепишем в следующем виде:

$$r(Av_k)(x) + \frac{r}{k} = \zeta_k v_k(x), \quad (13)$$

где $\zeta_k = \|Av_k + \frac{1}{k}\|_{C_\mu}$. Из компактности A и равенства $\|v_k\|_{C_\mu} = r$ следует, что последовательности $\{\zeta_k v_k\}$ и $\{\zeta_k\}$ компактны. Покажем, что $\inf_k \{\zeta_k\} > 0$. Если предположить противное: $\inf_k \{\zeta_k\} = 0$, то из (13) вытекает положительность $u_k(x)$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]_\mu}$. Поэтому $m_k = \inf_{x \in (0; \ell)_\mu} v_k(x) > 0$. Так как $\|v_k\|_{C_\mu} \leq r$, то $m_k \leq r$. Если $m_k = r$ при некотором k , то $v_k(x) \equiv r$ и $(Av_k)(x) = \left(\frac{\zeta_k}{r} - \frac{1}{k} \right) v_k(x)$ и доказательство непустоты Λ

на этом завершилось (следует отметить, что предположение $m_k = r$ никак не связано со сделанным предположением $\inf_k \{\zeta_k\} = 0$).

Значит, можно считать $m_k < r$. Так как $f(x, u)$ убывает по u , то $f(x, r) \leq \frac{1}{m_k} f(x, m_k)$ при всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$; из неубывания $f(x, u)$ по u и неравенства $v_k(x) \geq m_k$ вытекает $f(x, v_k(x)) \geq f(x, m_k)$. Поэтому $f(x, r) \leq \frac{1}{m_k} f(x, v_k(x))$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$. Тогда в силу положительности оператора \tilde{G} имеем

$$\frac{1}{m_k} (Av_k)(x) - (Av_0)(x) = \tilde{G} \left(\frac{1}{m_k} f(x, v_k(x)) - f(x, r) \right) \geq 0.$$

Отсюда и из (13) вытекает неравенство $v_k(x) \geq \frac{rm_k}{\zeta_k} (Av_0)(x)$, справедливое для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$. Поэтому $m_k \geq \frac{rm_k}{\zeta_k} (Av_0)(x)$, следовательно, $\zeta_k \geq r(Av_0)(x)$, что вместе с предположением $\inf_k \{\zeta_k\} = 0$, означает $\min_x (Av_0)(x) = 0$, чего заведомо не может быть. Таким образом, $\inf_k \{\zeta_k\} > 0$.

Как отмечалось ранее, последовательности $\{\zeta_k v_k\}$ и $\{\zeta_k\}$ компактны. Так как $\inf_k \{\zeta_k\} > 0$, то последовательность $\{v_k\}$ также компактна. Выделяя из $\{v_k\}$ сходящуюся подпоследовательность, из $\{\zeta_k\}$ – последовательность $\{\zeta_{k_m}\}$, которая сходится к ζ_0 , из (13) будем иметь

$$rAv_{k_m} + \frac{r}{k_m} = \zeta_{k_m} v_{k_m}, \tag{14}$$

при этом $v_{k_m}(x) \xrightarrow{\overline{[0; \ell]}_\mu} w_0(x)$. Переходя в (14) к пределу $m \rightarrow \infty$, получим $Aw_0 = \frac{\zeta_0}{r} w_0$, и непустота Λ доказана.

Так как $\|v_k\|_{C_\mu} = r$, то и норма $\|w_0\|_{C_\mu} = r$. А так как r – произвольное положительное число, то этим доказано, что при некотором λ уравнение $u = \lambda A$ имеет в K решение с нормой r , т. е. множество значений $\|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu}$ на Λ заполняет $(0, \infty)$.

Покажем теперь, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ задача (12) имеет в K ровно одно неотрицательное решение. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ – различные решения из K краевой задачи (12), отвечающие некоторому $\lambda \in \Lambda$. Очевидно $\lambda > 0$. (Ниже будет показано, что $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_\infty)$). Так как всякое решение $u(x)$ задачи (12), в силу условий теоремы, принадлежит внутренности конуса K_{u_0} , то при некоторых положительных и конечных α и β справедливы неравенства $\alpha \leq \frac{u(x)}{u_0(x)} \leq \beta$ для всех $x \in \overline{(0; \ell)}_\mu$. Поэтому функция $\frac{v(x)}{w(x)}$ строго положительна на $\overline{(0; \ell)}_\mu$. Без ограничения общности мы можем считать, что неравенство $\frac{v(x)}{w(x)} > 1$ при некоторых $x \in \overline{(0; \ell)}_\mu$ нарушается, так как в противном случае поменяем $v(x)$ и $w(x)$ местами. Тогда для величины $\varkappa = \inf_{x \in \overline{(0; \ell)}_\mu} \frac{v(x)}{w(x)}$ справедливо двойное неравенство $0 < \varkappa < 1$. Функции $\tilde{v}(x) = \frac{v(x)}{u_0(x)}$ и $\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{u_0(x)}$ удовлетворяют нелинейному интегральному уравнению

$$\tilde{u}(x) = \lambda \int_0^\ell \tilde{G}(x, s) f(s, u_0(s) \tilde{u}(s)) d[\sigma(s)],$$

где $\tilde{u}(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$ и $\tilde{G}(x, s) = \frac{G(x, s)}{u_0(x)}$. Более того, $\tilde{v}(x)$ и $\tilde{w}(x)$ положительны на $\overline{(0; \ell)}_\mu$. Так как функция $\frac{f(x, u)}{u}$ убывает по u , то $\frac{1}{\varkappa} f(x, \varkappa \tilde{w}(x)) \geq f(x, \tilde{w}(x))$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$; ввиду положительности $\tilde{w}(x)$ на $\overline{(0; \ell)}_\mu$ последнее неравенство является строгим почти всюду (в смысле меры σ). Из определения \varkappa следует $\tilde{v}(x) \geq \varkappa \tilde{w}(x)$, что вместе с неубыванием $f(x, u)$ по u нам дает $f(x, \tilde{v}(x)) \geq f(x, \varkappa \tilde{w}(x))$ для всех x , принадлежащих $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Тогда функция $w(x) = f(x, \tilde{v}(x)) - f(x, \varkappa \tilde{w}(x))$ положительна на множестве полной μ -меры из $\overline{[0; \ell]}_\mu$. Отсюда, в сочетании с сильной положительностью интегрального оператора $\tilde{G}(x, s)$, с ядром $\tilde{G}(x, s) = \frac{G(x, s)}{u_0(x)}$, следует неравенство $(\tilde{G}w)(x) > 0$ на $\overline{[0; \ell]}_\mu$, т. е. $(\tilde{G}w)(x) \geq \tilde{\varkappa}_0$ при некотором положительном $\tilde{\varkappa}_0$. Последнее означает, что $\tilde{v}(x) - \varkappa \tilde{w}(x) = (\tilde{G}w)(x) \geq \lambda \tilde{\varkappa}_0$ для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$. Значит, $\frac{\tilde{v}(x)}{\tilde{w}(x)} = \frac{v(x)}{w(x)} \geq \tilde{\varkappa}_0 + \frac{\lambda \tilde{\varkappa}_0}{\|\tilde{w}\|_{C_\mu}}$, что противоречит определению числа $\tilde{\varkappa}_0$.

Покажем монотонность $u(x, \lambda)$ на Λ . Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $\lambda_1 < \lambda_2$. Положим $u_1(x) = \frac{u(x, \lambda_1)}{u_0(x)}$ и $u_2(x) = \frac{u(x, \lambda_2)}{u_0(x)}$. Докажем, что величина $m_0 = \inf_{0 < x < \ell} u_1(x)$ не меньше единицы. Предположим противное: $m_0 < 1$. Тогда из неравенства $u_2(x) \geq m_0 u_1(x)$ следует

$$\frac{1}{m_0} f(x, u_0(x) u_2(x)) \geq \frac{1}{m_0} f(x, m_0 u_0(x) u_1(x)) \geq f(x, u_0(x) u_1(x)).$$

Следовательно, $\frac{1}{m_0}u_2(x) = \frac{\lambda_2}{m_0}(Au_2)(x) \geq \lambda_2(Au_1)(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}u_1(x)$. Отсюда вытекает неравенство $\frac{u_2(x)}{u_1(x)} \geq \frac{\lambda_2}{\lambda_1}m_0$, справедливое для всех $x \in (0; \ell)_\mu$. Откуда, по определению m_0 , следует неравенство $\lambda_2 \leq \lambda_1$, что противоречит предположению.

Покажем теперь связность Λ . Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 < \lambda_2$, $u(x, \lambda_1)$ и $u(x, \lambda_2)$ – решения (12) при λ_1, λ_2 соответственно. Покажем включение $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \Lambda$. Пусть $v_1(x) = \frac{u(x, \lambda_1)}{u_0(x)}$, $v_2(x) = \frac{u(x, \lambda_2)}{u_0(x)}$ и $v(x) = \frac{u(x)}{u_0(x)}$. Монотонный оператор $A_\lambda v = \lambda Av$ оставляет инвариантным ограниченное замкнутое и выпуклое множество функций $\mathfrak{M} = \left\{v(x) \in C_\mu[\overline{0; \ell}]_\mu \mid v_1(x) \leq v(x) \leq v_2(x)\right\}$, действуя в $C_\mu[\overline{0; \ell}]_\mu$. Из полной непрерывности A вытекает существование в \mathfrak{M} у оператора A_λ неподвижной точки $v_\lambda : v_\lambda = A_\lambda v_\lambda$. Последнее равенство означает что $v_\lambda = \lambda Av_\lambda$, т. е. Λ – связное подмножество из \mathbb{R}^+ .

Положив $\lambda_0 = \inf \Lambda$ и $\lambda_\infty = \sup \Lambda$, будем иметь $\Lambda \subset [\lambda_0; \lambda_\infty]$. Покажем, что $\lambda_0 \notin \Lambda$. Если это не так, то для λ_0 существует решение $u(x, \lambda_0)$ краевой задачи (12). Как установлено ранее, для любого другого решения $u(x, \lambda)$ краевой задачи (12) при $\lambda \in \Lambda$ должно быть $u(x, \lambda) \geq u(x, \lambda_0)$ для всех $x \in [0; \ell]$, т. е. $\|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} \geq \|u(\cdot, \lambda_0)\|_{C_\mu} > 0$ и функция $\|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu}$ не может принимать как угодно малых значений. Аналогично доказывается, что $\lambda_\infty \notin \Lambda$.

Как показано ранее, функция $\|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu}$ заполняет своими значениями промежуток $(0; +\infty)$, поэтому, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0+0} \|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} = 0$ и $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_\infty-0} \|u(\cdot, \lambda)\|_{C_\mu} = +\infty$. Здесь мы использовали доказанные ранее пункты (i), (iii) и монотонность нормы в $C[0; \ell]$.

Осталось доказать последний пункт. Пусть $\lambda^* \in \Lambda$ и $u(x, \lambda^*)$ – соответствующее решение (12). Положим $v^*(x) = \frac{u(x, \lambda^*)}{u_0(x)}$. Функция $v^*(x)$ удовлетворяет уравнению $v = \lambda^* Av$, т. е. справедливо тождество $v^* = \lambda^* Av^*$. Пусть $v_0(x)$ – произвольная неотрицательная μ -непрерывная на $[\overline{0; \ell}]_\mu$ функция. Покажем, что последовательность $\{v_n(x)\}$, где $v_n(x) = \lambda^*(Av_{n-1})(x)$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходится к $v^*(x)$.

Так как функции $v_1(x)$ и $v^*(x)$ положительны на $[0; \ell]$, то при некоторых α и β , удовлетворяющих неравенствам $\alpha < 1 < \beta$, имеет место ($x \in [\overline{0; \ell}]_\mu$)

$$\underline{u}_1(x) = \alpha v^*(x) \leq v_1(x) = \lambda^*(Av_0)(x) \leq \beta v^*(x) = \bar{u}_1(x). \quad (15)$$

Из неубывания $f(x, u)$ и убывания $\frac{1}{u}f(x, u)$ по u следует

$$(A\underline{u}_1)(x) \geq \alpha \lambda^*(Av^*)(x) = \alpha v^*(x) = \underline{u}_1(x)$$

и

$$\bar{u}_1(x) = \beta v^*(x) = \beta \lambda^*(Av^*)(x) \geq \lambda^*(A\bar{u}_1)(x).$$

Поэтому из монотонности A и из (15) вытекают неравенства

$$\underline{u}_1(x) \leq \lambda^*(A\underline{u}_1)(x) \leq \lambda^*(Au_1)(x) = u_2(x) \leq \lambda^*(A\bar{u}_1)(x) \leq \bar{u}_1(x).$$

Для последовательностей $\underline{u}_{n+1}(x) = \lambda^*(A\underline{u}_n)(x)$ и $\bar{u}_{n+1}(x) = \lambda^*(A\bar{u}_n)(x)$ имеем $\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq v_n \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Тогда каждая последовательность, являясь монотонной и ограниченной, вследствие компактности оператора A , сходится к неподвижной точке оператора λ^*A . Так как $v^*(x)$ – единственная неподвижная точка, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = v^*$. Тогда последовательность v_n , заключенная между \underline{u}_n и \bar{u}_n , также обязана сходиться к v^* . Теорема доказана.

Для случая, когда $f(x, u)$ непрерывно дифференцируема в окрестности нуля (по переменной u) и в окрестности бесконечности (в смысле определения, приведенного ниже), интервал Λ может быть эффективно указан.

Определение 4.1. Будем говорить, что функция $f(x, u)$ непрерывно дифференцируема в окрестности бесконечности, если существует функция $f'_\infty(x)$ такая, что $\frac{f(x, u)}{u} \xrightarrow{[\overline{0; \ell}]_\mu} f'_\infty(x)$ при $u \rightarrow +\infty$.

Теорема 4.2. Числа λ_0 и λ_∞ являются минимальными собственными значениями спектральных задач

$$\begin{cases} Lu = \lambda f'_u(x, 0)u, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \quad u \quad \begin{cases} Lu = \lambda f'_\infty(x)u, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

соответственно.

Доказательство. Возьмем последовательность $\lambda_k \in \Lambda$, стремящуюся к λ_0 . Тогда последовательность решений $u(x, \lambda_n)$ задачи (12) соответствующих λ_n , равномерно сходится к нулю. Функции $v_n(x) = \frac{u(x, \lambda_n)}{u_0(x)}$ также сходятся к нулю; последовательность $w_n(x) = \frac{v_n(x)}{\|v_n\|_{C_\mu}}$ компактна, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $w_{n_k}(x) : w_{n_k}(x) \xrightarrow{[\overline{0; \ell}]_\mu} w_0(x)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда функция

$w_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_0(x) = \lambda_0 \int_0^{\ell} \widetilde{G}(x, s) f'_u(s, 0) w_0(s) d[\sigma(s)],$$

причем для фигурирующего здесь интегрального оператора число $\frac{1}{\lambda_0}$ является максимальным собственным значением

Рассуждения для λ_∞ аналогичны.

5. Заключение. В работе изучена монотонная ветвь нелинейной спектральной задачи с «расщепленными» мерами, а именно, получены достаточные условия того, что множество неотрицательных значений, при которых нелинейная задача имеет хотя бы одно нетривиальное решение – непусто; показана монотонность решения по спектральному параметру.

Благодарность. Авторы выражают благодарность доценту кафедры математического анализа Зверевой Маргарите Борисовне за ряд ценных рекомендаций, способствовавших улучшению рукописи.

Список литературы

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях. *ДАН*, 1999;364(2):167–169.
2. Покорный Ю.В. О дифференциалах Стилтеса в обобщенной задаче Штурма–Лиувилля. *ДАН*, 2002;383(5):1–4.
3. Боровских А.В., Покорный Ю.В. Системы Чебышева–Хаара в теории разрывных ядер Келлога. *Успехи математических наук*. 1994;49(3(297)):3–42.
4. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач. *Успехи математических наук*. 2008;63(1(379)):111–154.
5. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Динамические обобщенные функции и проблема умножения. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2007;(5(540)):33–45.
6. Владимиров А.А. К осцилляционной теории задачи Штурма – Лиувилля с сингулярными коэффициентами. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2009;49(9):1609–1621.
7. Шкалик А.А. Регулярные спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. *Успехи математических наук*. 2021;76(5(461)):203–204.
8. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкалик А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений. *Математические заметки*. 2023;113(2):217–235.
9. Лялинов М.А. О собственных функциях существенного спектра модельной задачи для оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом. *Математический сборник*. 2023;214(10):71–97.
10. Ал-Гарайхоли И.А.Х. О приложении интегралов Стилтеса с «расщепленными» мерами к краевым задачам. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия Физика. Математика*. 2024;4:19–35.

References

1. Pokorny YuV. Stieltjes integral and derivatives with respect to measure in ordinary differential equations. *DAN*. 1999;364(2):167–169. (In Russ.)
2. Pokorny YuV. On Stieltjes differentials in the generalized Sturm-Liouville problem. *DAN*. 2002;383(5):1–4. (In Russ.)
3. Borovskikh AV., Pokorny YuV. Chebyshev-Haar systems in the theory of discontinuous Kellogg nuclei. *Russian Mathematical Surveys*. 1994;49(3(297)):3–42. (In Russ.)
4. Pokorny YuV., Zvereva MB., Shabrov SA. Oscillation theory of Sturm-Liouville for impulse problems. *Russian Mathematical Surveys*. 2008;63(1(379)):111–154. (In Russ.)
5. Derr VYa., Kinzebulatov DM. Dynamic Generalized Functions and the Multiplication Problem. *News of Higher Education Institutions. Mathematics*. 2007;(5(540)):33–45. (In Russ.)
6. Vladimirov AA. On the oscillation theory of the Sturm-Liouville problem with singular coefficients. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009;49(9):1609–1621. (In Russ.)
7. Shkalikov A.A. Regular spectral problems for systems of ordinary differential equations of the first order. *Russian Mathematical Surveys*. 2021;76(5(461)):203–204. (In Russ.)
8. Konechnaya N.N., Mirzoev K.A., Shkalikov A.A. On the asymptotic behavior of solutions of two-term differential equations. *Mathematical Notes*. 2023;113(2):217–235. (In Russ.)
9. Lyalinov M.A. On the eigenfunctions of the essential spectrum of a model problem for the Schrödinger operator with a singular potential. *Sbornik: Mathematics*. 2023;214(10):71–97. (In Russ.)
10. Al-Garayholi EAH. on the application of Stieltjes integrals with split measures to boundary value problems. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2024;4:19–35. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 10.01.2026

Received January 10, 2026

Поступила после рецензирования 21.02.2026

Revised February 21, 2026

Принята к публикации 25.02.2026

Accepted February 25, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ал-Гарайхоли Иван Абдулкариим Хузам – соискатель, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия; Университет Ти-Кар, Педагогический колледж точных наук, г. Насирия, Ирак

Шабров Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evan A. H. Al-Garayholi – Applicant, Voronezh State University, Voronezh, Russia; Thi-Qar University, Pedagogical College of Exact Sciences, Nasiriyah, Iraq

Sergey A. Shabrov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 538.95
MSC 82D80
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-65-71
EDN MAONCN

Электронные и оптические свойства углеродных нанолент

Шарин Е. П. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Носковым А. В.)

Северо-Восточный федеральный университет,
Россия, 677000, г. Якутск, ул. Белинского, 58

esharin@yandex.ru

Аннотация. С помощью теории функционала плотности в приближении обобщенных градиентов исследованы электронные зонные структуры и оптические свойства графеновых нанолент, пассивированных атомами водорода. Расчеты показали, что с увеличением ширины нанолент ширина запрещенной зоны уменьшается. Ширина запрещенной зоны обусловлена как квантовым ограничением, так и эффектом краев. Вычислены комплексная диэлектрическая проницаемость, комплексный показатель преломления, коэффициент поглощения и коэффициент отражения графеновой наноленты 9-AGNR. Максимальные пиковые значения реальной и мнимой частей диэлектрической функции смещены в область низких частот. Максимальный пик коэффициента поглощения тоже смещен в синюю область спектра. Оптическое поглощение обусловлено межзонными переходами, расположенными вблизи точки Г. Коэффициент отражения имеет три близких по значению пика, расположенных, соответственно, в красной, видимой и синей областях спектра.

Ключевые слова: теория функционала плотности, графеновая нанолента, нанолента типа «кресло», комплексная диэлектрическая проницаемость

Для цитирования: Шарин Е.П. Электронные и оптические свойства углеродных нанолент. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):65–71. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-65-71 EDN MAONCN

Original Research

Electronic and Optical Properties of Carbon Nanoribbons

Egor P. Sharin 

(Article submitted by a member of the editorial board Noskov A. V.)

North-Eastern Federal University,
58 Belinsky St., Yakutsk 677000, Russia

esharin@yandex.ru

Abstract. Low-dimensional materials have attracted considerable research interest from both theoretical and experimental perspectives. These materials exhibit novel physical and chemical properties due to confinement in low dimensions. Narrow graphene nanoribbons (GNRs) exhibit a significant band gap, and their optical properties are expected to be fundamentally different from those of the parent material, graphene. Unlike graphene, the optical response of GNRs can be tuned by the ribbon width and the directly related band gap. Using density functional theory in the generalized gradient approximation, we studied the electronic band structures and optical properties of graphene nanoribbons passivated with hydrogen atoms. Calculations showed that the band gap decreases with increasing nanoribbon width. This band gap is determined by both quantum confinement and the edge effect. The complex permittivity, complex refractive index, absorption coefficient, and reflectance of 9-AGNR graphene nanoribbon were calculated. The maximum peak values of the real and imaginary parts of the permittivity function are shifted toward lower frequencies. The maximum peak of the absorption coefficient is also shifted toward the blue region of the spectrum. Optical absorption is caused by interband transitions located near the point. The reflectance has three closely spaced peaks located in the red, visible, and blue regions of the spectrum, respectively.

Keywords: Density Functional Theory, Graphene Nanoribbon, Armchair Nanoribbon, Complex Permittivity

For citation: Sharin EP. Electronic and Optical Properties of Carbon Nanoribbons. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):65–71. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-65-71 EDN MAONCN

1. Введение. Благодаря превосходным электронным, термическим, механическим и оптическим свойствам графен считается материалом, обладающим высоким потенциалом в будущих электронных и оптических устройствах. Однако бесщелевая структура приводит к низкому отношению токов открытого и закрытого состояний в графеновых полевых транзисторах и препятствует развитию графеновой наноэлектроники. Один из наиболее перспективных подходов к управлению электронными и оптическими

свойствами – создание одномерных полосок графена, обычно называемых графеновыми нанолентами (GNR). Наноленты – это квазиодномерные материалы, обладающие иными электронными свойствами по сравнению с исходными двумерными материалами. Низкая размерность приводит к интересным электронным и магнитным свойствам, которые обусловлены размером и геометрией материала, а также составляющими его атомами. Интересные свойства нанолент помогают подогнать ширину запрещенной зоны в зависимости от их ширины и пассивирующих атомов на краях. Электронные и оптические свойства графеновых нанолент определяются шириной ленты и структурой края. Графеновые наноленты с кресельной и зигзагообразной структурой (AGNR и ZGNR) являются двумя типичными системами, выбранными для модельных исследований. В частности, энергетические щели, индуцированные в AGNR, обратно пропорциональны ширине ленты [1, 2]. Такие наноленты представляют интерес для применения в цифровых и оптоэлектронных устройствах, например, в полевых транзисторах [3, 4] или в устройствах с квантовыми точками [5, 6]. Такие свойства, как химическая реактивность [7], электронная структура [8], колебательные и транспортные свойства [9, 10], зависят от способа изготовления нанолент. Отличительные оптические свойства GNR открывают огромные перспективы для различных оптоэлектронных приложений, подкрепленные их регулируемой шириной запрещенной зоны, надежным взаимодействием света с веществом нелинейными оптическими свойствами. Эти особенности открывают новые горизонты в проектировании и разработке современных фотонных и оптоэлектронных устройств. Недавние достижения в синтезе графеновых нанолент «снизу вверх» позволили контролировать практически все структурные параметры с атомарной точностью [11, 12], что достигается благодаря целенаправленному проектированию и самосборке малых молекул-предшественников. В данной работе мы исследуем структуры энергетических зон и оптические свойства графеновых нанолент, пассивированных атомами водорода, используя *ab initio* методы.

2. Методика расчета. Расчеты выполнены с использованием пакета Quantum Espresso на основе теории функционала плотности (DFT). Взаимодействие электронов с ионным остовом представлено потенциалами проекционных присоединенных волн (PAW), которые точнее, чем ультрамягкие псевдопотенциалы. При проведении расчетов по структурной оптимизации и вычисления зонной структуры графеновой наноленты обменные и корреляционные эффекты учитывались с помощью обобщенного градиентного приближения (GGA) [13]. Для учета взаимодействия между ионными ядрами и валентными электронами используется модель псевдопотенциалов Маритнса – Троллера (Martins – Troullier) [14, 15]. Алгоритм сопряженных градиентов используется для релаксации ионов в их основные состояния, а энергии и силы, действующие на каждый ион, сходятся в пределах 1.0×10^{-4} eV/atom и 0.003 eV/Å, соответственно. В разложении волновой функции были учтены плоские волны с энергией до 612 eV, которые обеспечивают хорошую сходимость полной энергии. Электроны атома углерода $2s^2 2p^2$ и атома водорода $1s^1$ рассматриваются как валентные электроны. Для моделирования бесконечно длинной изолированной наноленты мы используем геометрию суперъячейки, где каждая плоскость отделена от своей реплики на 15 Å как в направлении от края к краю, так и между слоями. Этого интервала достаточно, чтобы обеспечить пренебрежимо малое взаимодействие между лентой и ее периодическими изображениями, поскольку идентичные результаты получаются при больших расстояниях разделения. Точка k выбирается согласно схеме автоматической генерации Монкхорста – Пака с началом в точке Γ , вместе с гауссовым размытием 0.2 eV.

3. Результаты и обсуждение. При нарезании бесконечного листа графена можно получить различные наноленты, в зависимости от ориентации обладающие разным расположением атомов на границах. При этом если атомы расположены в виде кресла, то такая графеновая лента называется нанолентой типа «кресло» (AGNR – armchair graphene nanoribbon). Такие ленты обозначаются как N-AGNR, где N – число димеров, которое характеризует ширину наноленты. В этом разделе мы исследуем электронные и оптические свойства графеновых нанолент типа «кресло», пассивированных атомами водорода. На рисунке 1 показаны типичные кристаллические структуры нанолент типа «кресло», пассивированные атомами водорода с шириной $N = 3, 5, 9$, соответственно.

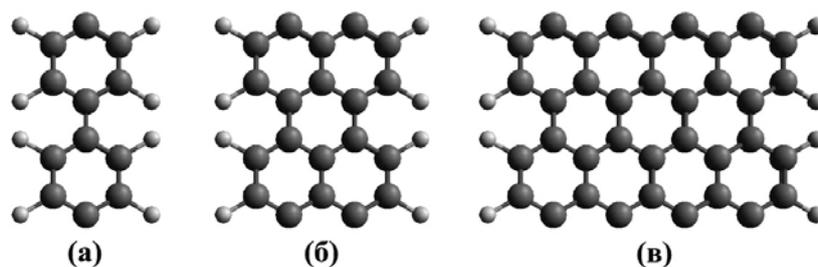


Рис. 1. Кристаллические структуры нанолент 3-AGNR (а), 5-AGNR (б) и 9-AGNR (в)
Fig. 1. Crystal structures of 3-AGNR(a), 5-AGNR(b), and 9-AGNR (c) graphene nanoribbons

На рисунке 2 представлены электронные зонные структуры 3-AGNR, 5-AGNR и 9-AGNR нанолент, соответственно.

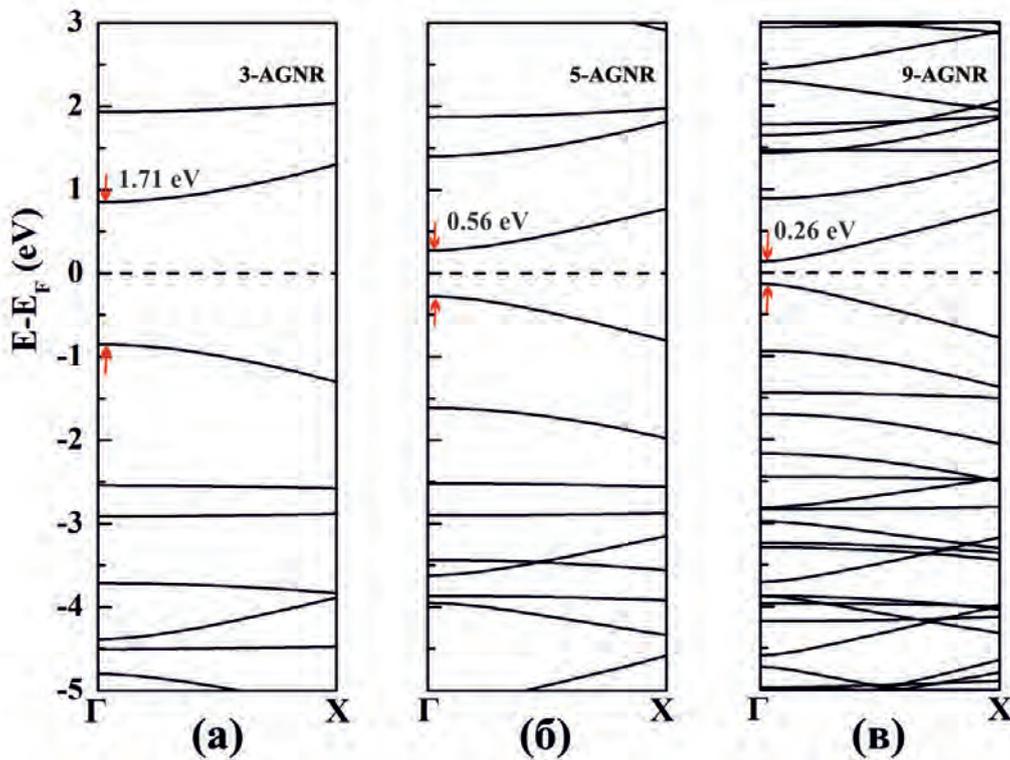


Рис. 2. Электронные зонные структуры графеновых нанолент
Fig. 2. Electronic band structures of graphene nanoribbons

Расчеты показали, что все графеновые наноленты проявляют полупроводниковое поведение, а ширина запрещенной зоны уменьшается с увеличением ширины ленты. Ширина запрещенной зоны обусловлена как квантовым ограничением, так и эффектом краев [2]. Такая зависимость ширины запрещенной зоны от геометрической структуры графеновых нанолент дает уникальную возможность управлять электронными свойствами графеновых нанолент, просто контролируя их ширину и ориентацию краев, для реализации функциональных устройств на основе графена.

Далее мы исследуем оптические свойства графеновой наноленты на примере 9-AGNR. На рисунке 3 показаны зависимости реальной и мнимой частей диэлектрической проницаемости от энергии фотона для наноленты 9-AGNR. Пунктирными линиями отмечен участок, принадлежащий видимой части спектра. В длинах волн эта область занимает примерно от 380 до 780 нм, если перевести эти величины в энергетические единицы, то этот интервал будет от 1,6 до 3,2 эВ (780 нм – 1,6 эВ; 380 нм – 3,2 эВ). Диэлектрическая функция имеет большее преимущество перед некоторыми макрооптическими константами, которые могут отражать информацию между зонной структурой и оптическими спектрами твёрдых материалов, а также позволяют лучше характеризовать физические свойства. Комплексная диэлектрическая проницаемость определяется как

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

где ε_1 – реальная часть и ε_2 – мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости. Как известно, реальная часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon_1(\omega)$ входит в выражение для электрической индукции и определяет поляризацию среды. Она ответственна за накопление энергии в среде. Пиковое значение реальной части диэлектрической функции $\varepsilon_1(\omega)$ имеет энергию 1.03 эВ (см. рис. 3). Мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_2(\omega)$ связана с плотностью тока проводимости и характеризует потери энергии электромагнитного поля в среде. Это означает, что мнимая часть диэлектрической функции $\varepsilon_2(\omega)$ соответствует энергии, необходимой для фотовозбуждения электронов в зону проводимости, энергетические переходы которой обозначены острыми пиками. Пиковое значение мнимой части диэлектрической функции $\varepsilon_2(\omega)$ имеет энергию 1.26 эВ. Из рисунка 3 видно, максимальные пиковые значения реальной и мнимой частей диэлектрической функции наноленты 9-AGNR, пассивированной атомами водорода, имеют заметный сдвиг в область низких частот, что в основном объясняется изменением структуры энергетической зоны на уровне Ферми.

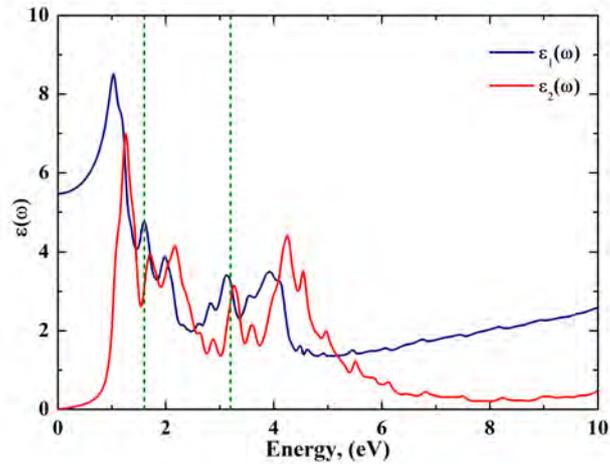


Рис. 3. Реальная и мнимая части комплексной диэлектрической проницаемости
Fig. 3. The real and imaginary parts of the complex dielectric constant

Другие оптические характеристики могут быть получены из комплексной диэлектрической проницаемости. Например комплексный показатель преломления, коэффициент поглощения и коэффициент отражения определяются величинами ε_1 и ε_2 . В частности, комплексный показатель преломления определяется как

$$n^* = n + ik,$$

где n^* – комплексный показатель преломления, n – реальная часть показателя преломления, k – коэффициент затухания (коэффициент экстинкции). Показатель преломления и коэффициент затухания связаны с ε_1 и ε_2 следующими соотношениями:

$$n = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}}, \quad k = \frac{2n}{\varepsilon_2}.$$

Используя эти формулы, мы определили коэффициенты преломления и экстинкции падающей электромагнитной волны в зависимости от энергии фотона. На рисунке 4 показаны рассчитанные зависимости коэффициентов преломления и затухания для графеновой наноленты 9-AGNR от энергии фотона.

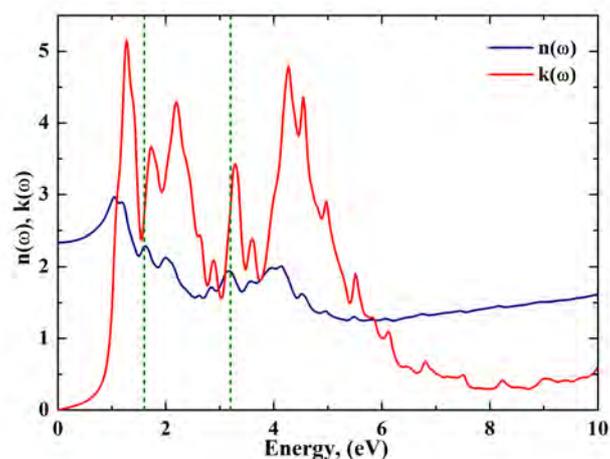


Рис. 4. Показатель преломления и коэффициент экстинкции в зависимости от частоты фотона
Fig. 4. The refractive index and extinction coefficient depend on the frequency of the photon

Коэффициент оптического поглощения связан с коэффициентом экстинкции следующим соотношением

$$\alpha(\omega) = \frac{2k\omega}{\hbar c},$$

где c – скорость света; \hbar – постоянная Планка. На рисунке 5 представлена зависимость коэффициента поглощения от частоты фотона. Спектр $\alpha(\omega)$ показывает два интенсивных пика на частотах 4.27 и 4.56 эВ. При этом максимальный пик $\alpha(\omega)$ наноленты всегда смещен в синюю область спектра. В видимой области спектра имеется пик на частоте 2.22 эВ. Здесь мы показываем только оптическое поглощение для случая, когда вектор поляризации света перпендикулярен плоскости наноленты. Пики поглощения возникают, когда энергия превышает ширину щели между валентной зоной и зоной проводимости. Из этого следует, что оптическое поглощение обусловлено электронными межзонными переходами, расположенными в k -пространстве вблизи точки Γ .

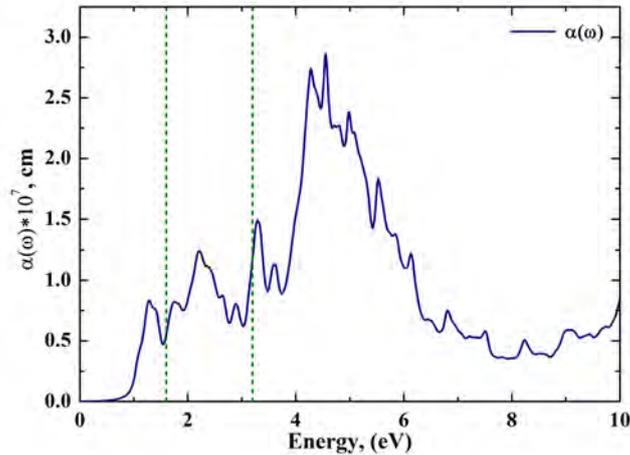


Рис. 5. Коэффициент поглощения в зависимости от частоты фотона
Fig. 5. Absorption coefficient depending on the photon frequency

Другой важной характеристикой является коэффициент отражения, который определяется как

$$R = \frac{(n - 1)^2 + k^2}{(n + 1)^2 + k^2},$$

где n – показатель преломления среды; k – коэффициент экстинкции. На рисунке 6 представлен график зависимости коэффициента отражения от энергии фотона для наноленты 9-AGNR.

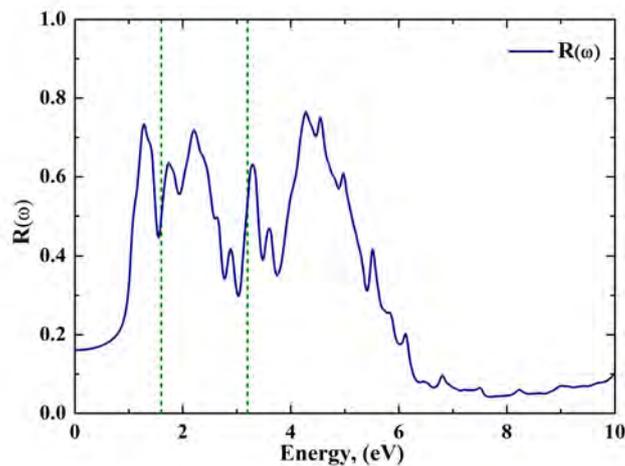


Рис. 6. Коэффициент отражения в зависимости от частоты фотона
Fig. 6. Reflection coefficient depending on the photon frequency

Максимальный пик находится в ультрафиолетовой области и его энергия равна 4.27 эВ. В видимой области имеется один пик на частоте 2.2 эВ и в инфракрасной области тоже имеется один пик с энергией 1.28 эВ.

4. Заключение. В настоящей работе мы исследовали электронные и оптические свойства графеновых нанолент типа «кресло». Методом теории функционала плотности рассчитаны электронная зонная

структура графеновых нанолент 3-AGNR, 5-AGNR, 9-AGNR, пассивированных атомами водорода. Ширина запрещенной зоны обусловлена как квантовым ограничением, так и эффектом краев. Такая зависимость ширины запрещенной зоны от геометрической структуры графеновых нанолент дает уникальную возможность управлять электронными свойствами графеновых нанолент, просто контролируя их ширину и ориентацию краев, для реализации функциональных устройств на основе графена. Исследованы комплексная диэлектрическая проницаемость, комплексный показатель преломления, коэффициент поглощения и коэффициент отражения графеновой наноленты 9-AGNR в зависимости от энергии фотона. Максимальные пиковые значения реальной и мнимой частей диэлектрической функции смещены в область низких частот. Максимальный пик коэффициента поглощения тоже смещен в синюю область спектра. Оптическое поглощение обусловлено межзонными переходами, расположенными вблизи точки Г. Коэффициент отражения имеет три близких по значению пика, расположенных, соответственно, в красной, видимой и синей областях спектра.

Список литературы

1. Barone V., Hod O., Scuseria G.E. Electronic structure and stability of semiconducting graphene nanoribbons. *Nano Letters*. 2006; 6(12): 2748–2754.
2. Son Y.W., Cohen M.L., Louie S.G. Energy gaps in graphene nanoribbons. *Physical Review Letters*. 2006; 97(21): 216803–4.
3. Wang X., Ouyang Y., Li X., Wang H., Guo J., Dai H. Room-Temperature All-Semiconducting Sub-10-nm Graphene Nanoribbon Field-Effect Transistors. *Physical Review Letters*. 2008; 100: 206803.
4. Zhang Q., Fang T., Xing H., Seabaugh A., Jena D. Graphene nanoribbon tunnel transistors. *IEEE Electron Device Letters*. 2008 29(12):1344–1346.
5. Stampfer C., Schurtenberger E., Molitor F., Gottinger J., Ihn T., Ensslin T. Tunable graphene single electron transistor. *Nano Letters*. 2008 8:2378–2383.
6. Ponomarenko L.A., Schedin F., Katsnelson M.I., Yang R., Hill E.H., Novoselov K.S., Geim A.K. Chaotic Dirac billiard in graphene quantum dots. *Science*. 2008 320: 356–358.
7. Castro A.H., Guinea F., Peres N.M., Novoselov K.S., Geim A.K. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics* 2009 81(1): 109–162.
8. Abergel DSL., Apalkov V., Berashevich J., Ziegler K., Chakraborty T. Properties of graphene: a theoretical perspective. *Advances in Physics* 2010 59: 261–482.
9. Fujita M., Wakabayashi K., Nakada K., Kusakabe K. Peculiar localized state at zigzag graphite edge. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1996 65: 1920–1923.
10. Rizzo D.J., Veber D., Cao T., Bronner C., Chen T., Zhao F., Rodriguez H., Louie S.G., Crommie M.F., Fischer F.R. Topological band engineering of graphene nanoribbons. *Nature*. 2018 560(7717): 204–208.
11. Groning O., Wang S., Yao X., Pignedoli C.A., Barin G.B., Daniels C., Cupo A., Meunier V., Feng X., Narita A., Mullen K., Ruffieux P., Fasel R. Engineering of robust topological quantum phases in graphene nanoribbons. *Nature*. 2018 560(7717): 209–213.
12. Sun Q., Yan Y., Yao X., Mullen K., Narita A., Fasel R., Ruffieux P. Evolution of the topological energy band in graphene nanoribbons. *The Journal of Physical Chemistry Letters*. 2021 12(35): 8679–8684.
13. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized gradient approximation made simple *Physical Review Letters*. 1996 77(18): 3865–3868.
14. Григорьев Ю.М., Шарин Е.П., Муксунов Н.Я. Электронные свойства вертикально уложенной гетероструктуры MoS₂/WS₂. *Природные ресурсы Арктики и Субарктики*. 2022; 27(3):459–465. <https://doi.org/10.31242/2618-9712-2022-27-3-459-465>
15. Шарин Е.П., Новгородов А.А. Электронные и оптические свойства планарной гетероструктуры MoS₂/WS₂. *Вестник Северо-восточного федерального университета имени М. К. Аммосова*. 2023 20(3):42–49. <https://doi.org/10.25587/2222-5404-2023-20-3-42-49>.

References

1. Barone V., Hod O., Scuseria G.E. Electronic structure and stability of semiconducting graphene nanoribbons. *Nano Letters*. 2006; 6(12): 2748–2754.
2. Son Y.W., Cohen M.L., Louie S.G. Energy gaps in graphene nanoribbons. *Physical Review Letters*. 2006; 97(21): 216803–4.
3. Wang X., Ouyang Y., Li X., Wang H., Guo J., Dai H. Room-Temperature All-Semiconducting Sub-10-nm Graphene Nanoribbon Field-Effect Transistors. *Physical Review Letters*. 2008; 100: 206803.
4. Zhang Q., Fang T., Xing H., Seabaugh A., Jena D. Graphene nanoribbon tunnel transistors *IEEE Electron Device Letters*. 2008 29(12):1344–1346.
5. Stampfer C., Schurtenberger E., Molitor F., Gottinger J., Ihn T., Ensslin T. Tunable graphene single electron transistor. *Nano Letters*. 2008 8:2378–2383.

6. Ponomarenko LA., Schedin F., Katsnelson MI., Yang R., Hill EH., Novoselov KS., Geim AK. Chaotic Dirac billiard in graphene quantum dots. *Science*. 2008 320: 356–358.
7. Castro AH., Guinea F., Peres NM., Novoselov KS., Geim AK. The electronic properties of graphene. *Reviews of Modern Physics*. 2009 81(1): 109–162.
8. Abergel DSL., Apalkov V., Berashevich J., Ziegler K., Chakraborty T. Properties of graphene: a theoretical perspective. *Advances in Physics*. 2010 59: 261–482.
9. Fujita M., Wakabayashi K., Nakada K., Kusakabe K. Peculiar localized state at zigzag graphite edge. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1996 65: 1920–1923.
10. Rizzo DJ., Veber D., Cao T., Bronner C., Chen T., Zhao F., Rodriguez H., Louie SG., Crommie MF., Fischer FR. Topological band engineering of graphene nanoribbons *Nature* 2018 560(7717): 204–208.
11. Groning O., Wang S., Yao X., Pignedoli CA., Barin GB., Daniels C., Cupo A., Meunier V., Feng X., Narita A., Mullen K., Ruffieux P., Fasel R. Engineering of robust topological quantum phases in graphene nanoribbons. *Nature* 2018 560(7717): 209–213.
12. Sun Q., Yan Y., Yao X., Mullen K., Narita A., Fasel R., Ruffieux P. Evolution of the topological energy band in graphene nanoribbons. *The journal of physical chemistry letters* 2021 12(35): 8679–8684.
13. Perdew JP., Burke K., Ernzerhof M. Generalized gradient approximation made simple *Phys. Rev. Lett.* 1996 77(18): 3865–3868.
14. Grigoriev YuM., Sharin EP., Muksunov NYa. Electronic properties of vertically stacked MoS₂/WS₂ heterostructure. *Prirodnye resursy Arctiki i Subarctiki*. 2022; 27(3):459–465. <https://doi.org/10.31242/2618-9712-2022-27-3-459-465>. (In Russ.)
15. Sharin EP., Novgorodov AA. Electronic and Optical Properties of MoS₂/WS₂ Planar Heterostructure. *Vestnik SVFU*. 2023 20(3):42–49. <https://doi.org/10.25587/2222-5404-2023-20-3-42-49>. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.12.2025

Received December 8, 2025

Поступила после рецензирования 22.01.2026

Revised January 22, 2026

Принята к публикации 26.01.2026

Accepted January 26, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Шарин Егор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики, Северо-Восточный федеральный университет, г. Якутск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Egor P. Sharin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Theoretical Physics Department, North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

[К содержанию](#)

Геометрический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2

Герасименко Е. С. , Родин В. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.)

Воронежский институт МВД России,
Россия, 394065, г. Воронеж, пр-т. Патриотов, 53
jenya35353@yandex.ru

Аннотация. В работе для описания равновесных ситуаций в биматричной игре применяются принципиально отличные от известных методы. Они основаны на геометрии гиперболического параболоида (ГП) – как графика среднего выигрыша. Мы применяем в допустимых случаях (полный график ГП) следующие геометрические методы; 1 метод – анализ частных производных функций средних выигрышей игроков; 2 метод – анализ параболических сечений графика ГП; 3 метод – анализ гиперболических сечений графика ГП. Первый метод был анонсирован в тезисах сообщений ВЗМШ 2025. Кроме того, в работе получены общие формулы для вычисления суммы выигрыша через определители игровых матриц. В известных авторам работах указанные подходы не найдены. Для компактности изложения все методы сведены в одном утверждении.

Ключевые слова: теория игр, биматричные игры, геометрический подход, равновесные ситуации

Для цитирования: Герасименко Е.С., Родин В.А. Геометрический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2 . *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):72–77. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-72-77 EDN OLZBVJ

Original Research

Geometric Approach to Describing Equilibrium Situations in a 2×2 Bimatrix Game

Evgeny S. Gerasimenko , Vladimir A. Rodin 

(Article submitted by a member of the editorial board Virchenko Yu. P.)

Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia,
53 Patriots Avenue, Voronezh, 394065, Russia
jenya35353@yandex.ru

Abstract. The paper uses fundamentally different methods from the known ones to describe equilibrium situations in a bimatrix game. They are based on the geometry of the hyperbolic paraboloid (GP), as a graph of the average gain. In acceptable cases (the full GP graph), we use the following geometric methods; 1 method is the analysis of partial derivatives of the functions of the average winnings of the players; 2 method is the analysis of parabolic sections of the GP graph; 3 method is the analysis of hyperbolic sections of the GP graph; The first method was announced in the abstracts of the WSMSh 2025. In addition, the paper presents general formulas for calculating the amount of winnings using the determinants of game matrices. These approaches have not been found in any other published work. For the sake of brevity, all the methods are summarized in a single statement.

Keywords: Game Theory, Bimatrix Games, Geometric Approach, Equilibrium Situations

For citation: Gerasimenko ES., Rodin VA. Geometric Approach to Describing Equilibrium Situations in a 2×2 Bimatrix Game. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):72–77. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-72-77 EDN OLZBVJ

1. Введение. Для описания равновесных ситуаций в биматричной игре применяются различные методы: первый метод – анализ частных производных функций средних выигрышей игроков; второй метод – анализ параболических сечений графика ГП; третий метод – анализ гиперболических сечений графика ГП. Первый метод был анонсирован в тезисах сообщений ВЗМШ 2025 [1] и работе [2]. Описание равновесных ситуаций биматричной игры 2×2 хорошо исследованы (Дж. Нэш), например в [3] для каждой игры (пары матриц) применяется исследование несложных неравенств. Эти неравенства содержат 4 параметра, связанных с матрицами. Еще решение в смешанных стратегиях можно сводить к решению системы линейных уравнений для точки внутри квадрата $[0, 1]^2$, или получению чистого решения на границе этого квадрата. Известны и развиваются, например, в работах [4, 5, 6], подходы к применению теории игр к задачам для силовых структур.

2. Определения, обозначения и описание равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2 . Рассмотрим игру 2×2 , заданную платежными матрицами игроков A и B .

$$\begin{pmatrix} (a_1; b_1) & (a_1; b_2) \\ (a_2; b_1) & (a_2; b_2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Средние выигрыши каждого игрока

$$H_A(x, y) = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y),$$

$$H_B(x, y) = b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}(1-x)y + b_{22}(1-x)(1-y).$$

Определение 1.1. [7] Пара чисел $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 \leq 1$ определяет равновесную ситуацию, если для любых $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ одновременно выполняются следующие неравенства:

$$H_A(x, y_0) \leq H_A(x_0, y_0), H_B(x_0, y) \leq H_B(x_0, y_0). \quad (1)$$

Для описания равновесных ситуаций мы воспользуемся структурой поверхности гиперболического параболоида.

Средние выигрыши каждого игрока преобразуем к виду

$$\begin{aligned} H_A(x, y) &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}, \\ H_B(x, y) &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

Введем обозначения:

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \alpha = a_{22} - a_{12};$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \beta = b_{22} - b_{21}.$$

3. Получение координат точки равновесия разными способами. Теорема 1.1. Если $CD \neq 0$ (Полный график ГП), то точка равновесия (x_0, y_0) определяется из решения системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}H_A(x, y) = 0; \\ \frac{d}{dy}H_B(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Также координаты точки равновесия можно определить как решение системы

$$\begin{cases} H_A(y, y) = H_A(-y, y); \\ H_B(x, x) = H_B(x, -x). \end{cases} \quad (4)$$

Или решая систему

$$\begin{cases} H_A(x, y) + H_A(-x, y) = 2\frac{\det A}{C}; \\ H_B(x, y) + H_B(x, -y) = 2\frac{\det B}{D}. \end{cases} \quad (5)$$

При этом:

1. Если $0 \leq x_0 \leq 1$ и $0 \leq y_0 \leq 1$ (рис. 1), то игра имеет три точки равновесия $(0, 0)$, $(1, 1)$ и (x_0, y_0) для $x_0 = \frac{\beta}{D}$, $y_0 = \frac{\alpha}{C}$. Средние выигрыши вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} H_A(0, 0) &= a_{22}, H_B(0, 0) = b_{22}; \\ H_A(1, 1) &= a_{11}, H_B(1, 1) = b_{11}; \\ H_A(x_0, y_0) &= \frac{\det(A)}{C}, H_B(x_0, y_0) = \frac{\det(B)}{D}. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Если $x_0 > 1$ и $y_0 > 1$, то координаты «седловой точки» поверхности гиперболического параболоида не принадлежат квадрату $[0, 1]^2$. В этом случае есть только одна точка равновесия $(0, 0)$. Это – «дилемма узников» в общем виде.

4. Доказательство.

4.1. Формулы (3).

Пусть $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 \leq 1$. Запишем первую строчку (2) в виде

$$H_A(x, y) = x(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}. \quad (7)$$

При фиксированном y – формула (7), это уравнение прямой линии (прямая в сечении ГП, (рис. 2)).

Изменения в уравнении прямой линии зависят от коэффициента. Чтобы уменьшить влияние игрока A с помощью параметра x приравняем частную производную по этому параметру к нулю.

Получаем $\frac{d}{dx}H_A(x, y) = Cy - \alpha = 0$ или $y_0 = \frac{\alpha}{C}$.

Аналогично для игрока B . Запишем вторую строчку (2) в виде.

$$H_B(x, y) = y(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})x + b_{22}. \quad (8)$$

При фиксированном x — это уравнение прямой линии в сечении ГП (рис. 2). Изменения в прямой линии зависят от коэффициента. Чтобы уменьшить влияние игрока B с помощью параметра y , приравняем частную производную по этому параметру к нулю.

Получаем $\frac{d}{dy}H_B(x, y) = Dx - \beta = 0$ или $x_0 = \frac{\beta}{D}$.

Нижние формулы в (6) получаются подстановкой значений (x_0, y_0) в формулы (7) и (8).

4.2. Формулы (4). Сечения ГП, для которых $x - y = 0$ или $x + y = 0$, будем называть параболическими сечениями N_1 и N_2 .

Согласно (рис. 2) параболы в этих сечениях в качестве общей точки имеют «седловую точку» как общую точку двух парабол в указанных сечениях.

Пусть $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 \leq 1$. Первый игрок пользуется матрицей A и выбирает смешанное решение путем изменения переменной x . Выберем два сечения в ГП, в которых мы имеем параболы с вершинами в седловой точке. Это сечения: $x = y$ и $x = -y$ (рис. 2). Применяя формулу (7) для этих сечений, получаем

$$H_A(y, y) = y(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})y + a_{22},$$

$$H_A(-y, y) = -y(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}.$$

Из первого равенства в (4) получаем $2y(Cy - \alpha) - 0$ и два корня $y = 0$ и $y_0 = \frac{\alpha}{C}$.

Учитывая, что второй игрок пользуется матрицей B и выбирает смешанное решение путем изменения переменной y , получаем

$$H_B(x, x) = x(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})x + b_{22}$$

$$H_B(x, -x) = -x(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})x + b_{22}.$$

Из второго равенства в (4) получаем $2x(Dx - \beta) - 0$ и два корня $x = 0$, $x_0 = \frac{\beta}{D}$. Нижние формулы в (5) получаются подстановкой значений (x_0, y_0) в формулы (6) и (7). Точки $(0, 0)$, $(1, 1)$ относятся к частым стратегиям.

4.3. Формулы (5). Сечение ГП построенного для функции выигрыша каждого игрока, параллельное плоскости XOY , будем называть “гиперболическим сечением”. Заметим, что гиперболы в сечениях ГП параллельно плоскости XOY , проведенных ниже седловой точки и выше седловой точки, определяют гиперболы, повернутые относительно друг друга на $\pi/2$.

Пусть $0 \leq x_0 \leq 1$, $0 \leq y_0 \leq 1$. Рассмотрим первое равенство в (5). Сечения выше и ниже седловой точки, учитывая поворот, имеют вид:

$$H_A(x, y) = H_A(x_0, y_0) + \Omega,$$

$$H_A(-x, y) = H_A(x_0, y_0) - \Omega,$$

для некоторой константы Ω .

Сложение дает первое равенство в (5). Воспользуемся формулой

$$H_A(x, y) = x(Cy - \alpha) + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}.$$

Первый игрок может менять первую переменную. После сложения получаем

$$\begin{aligned} 2(a_{22} - a_{21})y + 2a_{22} &= 2\frac{\det A}{C}; \\ (a_{22} - a_{21})y &= \frac{(a_{22} - a_{21})(a_{22} - a_{12})}{C}; \\ y &= \frac{a_{22} - a_{12}}{C} = \frac{\alpha}{C}. \end{aligned}$$

Для второго равенства в (5) воспользуемся формулой

$$H_B(x, y) = y(Dx - \beta) + (b_{12} - b_{22})x + b_{22}.$$

Второй игрок может менять вторую переменную. После сложения получаем

$$\begin{aligned} 2(b_{22} - b_{21})y + 2b_{22} &= 2\frac{\det B}{D}; \\ y &= \frac{(a_{22} - a_{21})}{D} = \frac{\beta}{D}. \end{aligned}$$

Для случая $x_0 > 1, y_0 > 1$ координаты «седловой точки» поверхности гиперболического параболоида не принадлежат квадрату $[0, 1]^2$. В этом случае есть только одна точка равновесия $(0, 0)$.

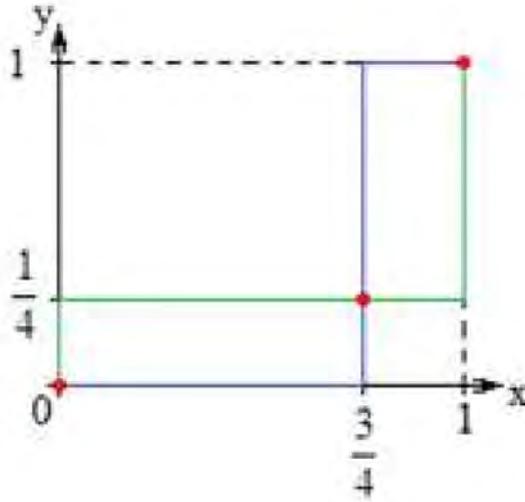


Рис. 1. $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$

Fig. 1. $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$

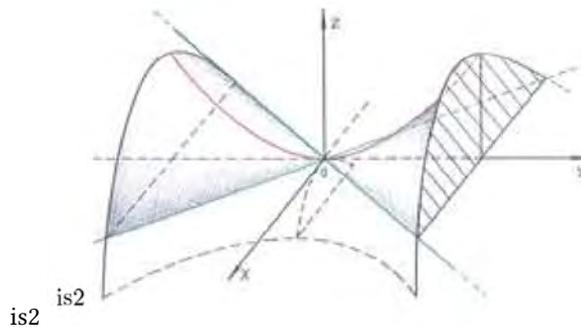


Рис. 2. Гиперболический параболоид

Fig. 2. Hyperbolic paraboloid

Если $CD \neq 0$, то получаем формулы

$$H_A(x_0, y_0) = \frac{\det(A)}{C}, H_B(x_0, y_0) = \frac{\det(B)}{D},$$

определяющие выигрыш игроков.

Рассмотрим специальные случаи: $CD = 0$.

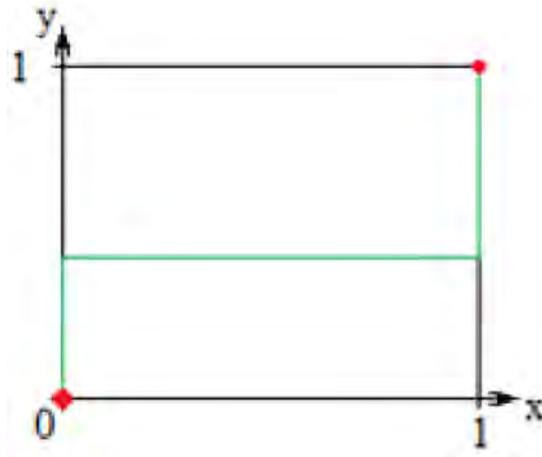
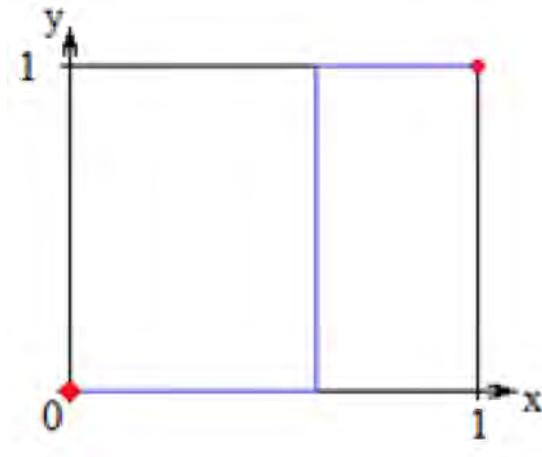
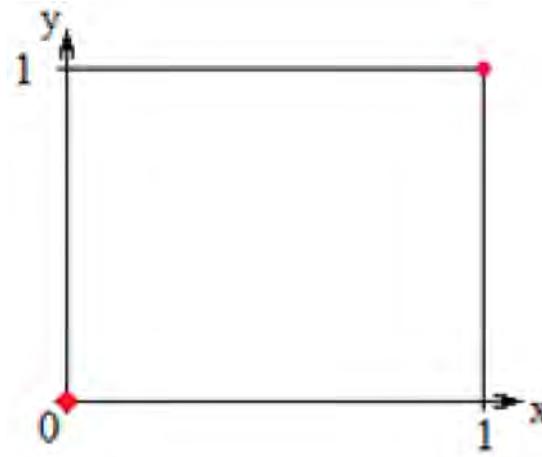
Условие $CD = 0$ распадается на три варианта: $C = 0, D \neq 0, D = 0, C \neq 0, C = 0, D = 0$. В каждом варианте поверхность ГП превращается в плоскость. Данная ситуация описана в литературе, не является целью работы и намечена фрагментарно.

Дадим фрагменты описания функция среднего выигрыша игроков и графические иллюстрации множества точек равновесия.

1) $C = 0, D \neq 0$. В этом случае уравнение $H_A(x, y) = (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}$ представляет собой плоскость и с учетом равенства $C = 0$ справедливо равенство

$$\max(H_A(0, 0), H_A(0, 1), H_A(1, 0), H_A(1, 1)) = \max(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}).$$

С учетом анализа второй системы неравенств (7) получаем рис. 3.

Рис. 3. $C = 0, D \neq 0$ Fig. 3. $C = 0, D \neq 0$ 2) $D = 0, C \neq 0$ Рис. 4. $D = 0, C \neq 0$ Fig. 4. $D = 0, C \neq 0$ 3) $D = 0, C = 0$ Рис. 5. $D = 0, C = 0$ Fig. 5. $D = 0, C = 0$

4. Заключение. В качестве простого следствия получим утверждение для игроков с одной матрицей (модель Дж. Неймана). Для этого случая $A = B$ определены новые способы получения точек для игры с нулевой суммой. В отличие от многочисленных работ по теории матричных игр в работе описание

неподвижных точек проведено с помощью анализа геометрии ГП. Авторам не удалось найти подобного подхода в известных им работах.

Список литературы

1. Думачев В.Н., Родин В.А., Синегубов С.В. О точках равновесия в биматричной игре 2×2 . *Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа (30 января – 4 февраля 2025 г.)* 2025; 125–127.
2. Родин В.А., Синегубов С.В. Аналитический подход к описанию равновесных ситуаций в биматричной игре 2×2 . *Вестник Воронежского и института МВД России* 2024;4:32–42.
3. Гладких Т.В. Теория игр – метод разработки управленческих решений. *Уральский научный вестник*. 2023; 6(4):231–236.
4. Корепанов В.О., Шумов В.В. Моделирование военных, боевых и специальных действий. *Военная мысль*. 2023;1:28–41.
5. Сергеев Н.П., Степанов Л.В. Аспекты применения теории игр к оценке безопасности системы. *Вестник Воронежского института ФСИН России*. 2024;2:109–117.
6. Яблонская К.О., Наумова О.Н. Теория игр и ее применение на практике. *Фундаментальные и прикладные исследования в области управления, экономики и торговли : сборник трудов всероссийской научно-практической и учебно-методической конференции, Санкт-Петербург, 30 мая – 02 июня 2022 года* 2022;123–126.
7. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении (Сер. «Классический университетский учебник»). М.:Дело; 2004. 439 с.

References

1. Dumachev VN., Rodin VA., Sinegubov SV. O tochkax ravnovesiya v bimatrichnoj igre 2×2 . *Materialy mezhdunarodnoj konferencii Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola (30 yanvarya – 4 fevralya 2025 g.)* 2025; 125–127. (In Russ.)
2. Rodin VA., Sinegubov SV. Analiticheskij podxod k opisaniyu ravnesnyx situacij v bimatrichnoj igre 2×2 . *Vestnik Voronezhskogo i instituta MVD Rossii* 2024;4:32–42. (In Russ.)
3. Gladkix TV. Teoriya igr – metod razrabotki upravlencheskix reshenij. *Uralskij Nauchnyj Vestnik* 2023; 6(4):231–236. (In Russ.)
4. Korepanov VO., Shumov VV. Modelirovanie voennyx, boevyx i specialnyx dejstvij. *Voennaya Mysl*. 2023;1:28–41. (In Russ.)
5. Sergeev NP., Stepanov LV. Aspekty primeneniya teorii igr k ocenke bezopasnosti sistemy. *Vestnik Voronezhskogo instituta FSIN Rossii* 2024;2:109–117. (In Russ.)
6. Yablonskaya KO., Naumova ON. Teoriya igr i ee primenenie na praktike. *Fundamentalnye i prikladnye issledovaniya v oblasti upravleniya, ekonomiki i trgovli : sbornik trudov vsersijskoj nauchno-prakticheskoy i uchebno-metodicheskoy konferencii, Sankt-Peterburg, 30 maya – 02 iyunya 2022 goda* 2022; 123–126. (In Russ.)
7. Shikin EV., Chxartishvili AG. Matematicheskie metody i modeli v upravlenii (Ser. "Klasicheskij universitetskij uchebnik"). М.:Дело; 2004; 439 с. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 08.12.2025

Received December 8, 2025

Поступила после рецензирования 22.01.2026

Revised January 22, 2026

Принята к публикации 07.02.2026

Accepted February 7, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Герасименко Евгений Сергеевич – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Россия

Родин Владимир Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и моделирования систем, Воронежский институт МВД России, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgeny S. Gerasimenko – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of Mathematics and System Modeling, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia

Vladimir A. Rodin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics and System Modeling, Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ

Носков А. В.¹, Пирматова М. Д.¹, Мачукаев Д. Д.², Бардакова И. Н.³, Блажевич С. В.³

(Статья представлена членом редакционной коллегии Никуличевой Т. Б.)

¹ Московский технический университет связи и информатики,
Россия, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, 8а

² Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

³ Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

noskovbupk@mail.ru

Аннотация. Развита теория параметрического рентгеновского излучения релятивистского электрона, пересекающего периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. В рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции получено выражение, описывающее угловую плотность параметрического рентгеновского излучения. Используя полученное выражение, проведены численные расчеты угловой плотности ПРИ. Показана существенная зависимость угловой плотности ПРИ от отношения значений действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов слоев и отношения толщин слоев.

Ключевые слова: периодическая слоистая структура, трехслойная структура, динамическая дифракция, параметрическое рентгеновское излучение

Для цитирования: Носков А.В., Пирматова М.Д., Мачукаев Д.Д., Бардакова И.Н., Блажевич С.В. Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):78–87. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-78-87 EDN OTWVUX

Short Communication

Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry

Anton V. Noskov¹, Maria D. Pirmatova¹, Deni D. Machukaev², Irina N. Bardakova³,

Sergey V. Blazhevich³

(Article submitted by a member of the editorial board Nikulicheva T. B.)

¹ Moscow Technical University of Communications and Informatics,
8a Aviamotornaya St., Moscow 111024, Russia

² Belgorod State Shukhov's Technological University,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia

³ Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

noskovbupk@mail.ru

Abstract. A theory of parametric X-ray radiation from a relativistic electron traversing a periodic layered medium with three layers per period in Laue scattering geometry has been developed. Within the two-wave approximation of dynamic diffraction theory, an expression describing the angular density of parametric X-ray emission has been derived. Using this expression, numerical calculations of the PXR angular density have been performed. A significant dependence of the PXR angular density on the ratio of the real parts of the dielectric susceptibilities of the layer materials and the ratio of the layer thicknesses has been demonstrated.

Keywords: Periodic Layered Structure, Three-layer Structure, Dynamic Diffraction, Parametric X-ray Radiation

For citation: Noskov AV., Pirmatov MD., Machukaev DD., Bardakova IN., Blazhevich SV. Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):78–87. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-78-87 EDN OTWVUX

1. Введение. Впервые когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистских электронов, пересекающих мишень, имеющую периодическую слоистую структуру, в рамках динамической теории дифракции рентгеновских волн исследовалось в работе [1]. ПРИ в такой мишени генерируется вследствие

дифракции псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях, аналогично генерации ПРИ в монокристалле на атомных плоскостях [2, 3]. Следует отметить, что формулы динамической теории [1] хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [4]. ПРИ релятивистского электрона в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного относительно поверхности мишени отражения поля электрона в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [5], а в геометрии рассеяния Брэгга в работе [6]. В работах [5, 6] было показано, что в периодической слоистой среде интенсивность ПРИ релятивистских электронов должна быть в несколько раз выше, чем в монокристалле в аналогичных условиях. Примечательно, что слоистые структуры представляют большой интерес для генерации излучения в мягком рентгеновском диапазоне (100-2000 эВ), текущие исследования активно изучают эту область [7, 8, 9]. Стоит отметить недавние исследования по генерации мягкого рентгеновского излучения электронами низких энергий порядка десятков и сотен кэВ из структур Ван-дер-Ваальса [10, 11, 12]. В недавних работах авторов [13, 14, 15, 16] исследовалось когерентное рентгеновское излучение в периодической слоистой среде и монокристалле в динамической дифракции рентгеновских волн. Во всех цитируемых выше работах излучение релятивистских электронов рассматривалось в периодической слоистой среде с двумя различными слоями на периоде. Когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Брэгга, впервые рассматривалось в работе [17]. В работах [18, 19] исследовалась возможность проявления эффектов динамической дифракции в ПРИ релятивистских электронов, пересекающих такую структуру. В работе [20] рассматривалось влияние угловой расходимости электронного пучка на ПРИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Брэгга.

В настоящей работе впервые рассматривается параметрическое рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя различными слоями на периоде в геометрии рассеяния Лауэ, когда фотоны излучения выходят через заднюю границу мишени. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности ПРИ.

2. Геометрия процесса излучения. Рассмотрим излучение релятивистского электрона в пластине из периодической слоистой среды с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ (рис. 1). В этом случае рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени и распространяется в направлении рассеяния Брэгга.

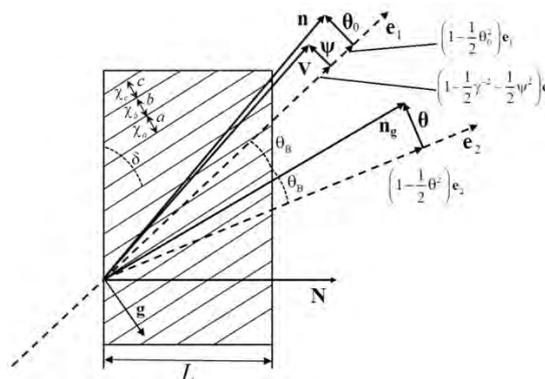


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

Fig. 1. Geometry of the radiation process

Пластинка состоит из трех различных периодически расположенных аморфных слоев с толщинами, равными a , b и c . Толщина пластины – L , а период периодической слоистой среды – $T = a + b + c$. Диэлектрические восприимчивости атомов слоев – χ_a , χ_b и χ_c . Рассматривается общий случай асимметричного отражения псевдо-фотонов кулоновского поля релятивистского электрона относительно поверхности мишени, когда отражающие слои расположены под некоторым углом δ к поверхности мишени. Если угол между слоями и поверхностью мишени равен $\delta = \pi/2$, то этот случай соответствует симметричному отражению поля электрона.

Направление оси пучка релятивистских электронов определяется единичным вектором e_1 , а отклонение скорости V произвольного электрона пучка относительно оси пучка e_1 определяется вектором $\Psi(\Psi_{\perp}, \Psi_{\parallel})$. Направление псевдофотона кулоновского поля релятивистского электрона и фотона когерентного рентгеновского излучения вблизи направления оси пучка определяется углом θ_0 ($\theta_{0\perp}, \theta_{0\parallel}$), волновой вектор этих фотонов равен $k = \omega n$. В результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона, а также фотонов переходного излучения на системе параллельных атомных плоскостей монокристалла вблизи направления рассеяния Брэгга e_2 генерируются параметрическое рентгеновское излучение и дифрагированное переходное излучение с волновым вектором $k_g = \omega n_g$. Векторы e_1 , e_2 , n и n_g являются единичными векторами.

Угол когерентного излучения, отсчитываемый от оси детектора \mathbf{e}_2 , определяется вектором $\theta(\theta_\perp, \theta_\parallel)$. Разложим рассматриваемые угловые векторы на составляющие: $\theta_0 = \theta_{0\perp} + \theta_{0\parallel}$, $\theta = \theta_\perp + \theta_\parallel$, $\Psi = \Psi_\perp + \Psi_\parallel$. Векторы θ_\perp , $\theta_{0\perp}$ и Ψ_\perp перпендикулярны плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g . Векторы θ_\parallel , $\theta_{0\parallel}$ и Ψ_\parallel параллельны плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g . Для решения задачи рассматриваемые углы и векторы свяжем соотношениями:

$$\mathbf{V} = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\Psi^2\right)\mathbf{e}_1 + \Psi, \quad \mathbf{n}_g = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)\mathbf{e}_2 + \theta, \quad \mathbf{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right)\mathbf{e}_1 + \theta_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_1\Psi = 0$, $\mathbf{e}_1\theta_0 = 0$, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B$, $\mathbf{e}_2\theta = 0$, $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_g| = 1$. Это можно сделать, так как выполняются условия $\gamma^{-2} \ll 1$, $\Psi \ll 1$, $\theta \ll 1$, $\theta_0 \ll 1$, из которых следуют приближенные равенства $\mathbf{V}^2 \approx 1$, $\mathbf{n}_g^2 \approx 1$ и $\mathbf{n}^2 \approx 1$. $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – Лоренц-фактор релятивистского электрона. Вектор \mathbf{g} (рис. 1) перпендикулярен слоям мишени, его длина равна $g = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Этот вектор аналогичен вектору обратной решетки в монокристалле. С другой стороны, модуль вектора обратной решетки $g = 2\omega_B \sin \theta_B / V$, где ω_B – частота Брэгга, θ_B – угол Брэгга. Тогда частота Брэгга принимает значение $\omega_B = \frac{\pi n}{T \sin \theta_B}$. В случае дифракции Брэгга волновые векторы падающей \mathbf{k} и дифрагированной волны \mathbf{k}_g связаны между собой уравнением $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$.

3. Амплитуда излучения. В работе [17] была развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде в геометрии рассеяния Брэгга. Однако в отличие от работы [17] ПРИ будем рассматривать в геометрии рассеяния Лауэ, когда излучение выходит через заднюю границу мишени. Как и в цитируемой работе, излучение и рассеяние рентгеновского излучения в периодической слоистой среде рассмотрено в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции. Разница в рассмотрении генерации излучения в геометриях рассеяния Лауэ и Брэгга заключается в основном в граничных условиях на входной и выходной поверхностях мишени.

Фурье-образы напряженности электрического поля падающего излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ и дифрагированного излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}$ в периодической слоистой среде представим в виде:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)}\mathbf{e}^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)}\mathbf{e}^{(2)}, \quad \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}} = E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(1)}\mathbf{e}_g^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(2)}\mathbf{e}_g^{(2)}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}_g^{(1)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{g}]}{|\mathbf{k}, \mathbf{g}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{e}^{(1)}]}{k}, \quad \mathbf{e}_g^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}_g, \mathbf{e}^{(1)}]}{k_g}.$$

Векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_g^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}_g^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация). Система уравнений, описывающая проекции Фурье-образов напряженностей электрического поля в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции, имеет вид:

$$\begin{aligned} (k^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega)))E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} - \omega^2\chi_{-g}(\omega)E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(s)}C^{(s)} &= 8\pi^2 i\omega e\Omega^{(s)}\delta(\omega - \mathbf{kV}), \\ ((\mathbf{k} + \mathbf{g})^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega)))E_{\omega, \mathbf{k}+\mathbf{g}}^{(s)} - \omega^2\chi_g(\omega)E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)}C^{(s)} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где введены обозначения:

$$\Omega^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)}\mathbf{V} = \theta_\perp - \Psi_\perp, \quad \Omega^{(2)} = \mathbf{e}^{(2)}\mathbf{V} = \theta_\parallel + \Psi_\parallel, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = \cos 2\theta_B.$$

Если $s = 1$, то система уравнений (3) описывает поля σ -поляризованные, а при $s = 2$ описывает поля π -поляризованные. $\chi_0(\omega)$ – средняя диэлектрическая восприимчивость периодической слоистой среды, χ_g и χ_{-g} – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{g}} \chi_{\mathbf{g}}(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}), \quad (4)$$

где $\chi_g = \chi'_g(\omega) + i\chi''_g(\omega)$, χ_0 и χ_g в рассматриваемой периодической структуре принимают значения:

$$\begin{aligned} \chi_0(\omega) &= \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b + \frac{c}{T}\chi_c, \\ \chi_g &= \frac{1}{igT} (\chi_c - \chi_a + (\chi_a - \chi_b)e^{iga} + (\chi_b - \chi_c)e^{-igc}). \end{aligned} \quad (5)$$

Решая систему уравнений (3) для Фурье-образов напряженностей электрических полей внутри мишени, а также в вакууме ($\chi_0 = \chi_g = 0$) и применяя граничные условия на входной и выходной

поверхностях мишени, получим выражение, описывающее амплитуду напряженности электрического поля излучения ПРИ $E_{\text{ПРИ}}^{(s)}$, возбуждаемого в направлении рассеяния Брэгга:

$$E_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \frac{4\pi^2 i e \chi_g C^{(s)} \varepsilon}{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^{(2)}} \Omega^{(s)} \left[\left(\frac{1}{\Gamma - \chi_0} - \frac{\omega \varepsilon}{2(\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)})} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(e^{i \frac{\lambda_g^{(1)} - \lambda_g^*}{\varepsilon} \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\Gamma - \chi_0} - \frac{\omega \varepsilon}{2(\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)})} \right) \left(e^{i \frac{\lambda_g^{(2)} - \lambda_g^*}{\varepsilon} \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}} - 1 \right) \right] e^{i \left(\frac{\omega \chi_0}{2} + \lambda_g^* \right) \frac{L}{\varepsilon \sin(\delta - \theta_B)}}, \quad (6)$$

где

$$\Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2, \quad \lambda_g^* = \frac{1}{2L_{\text{ext}}^{(s)}} (2\xi^{(s)} - i\rho^{(s)} + \varepsilon\sigma^{(s)}), \\ \sigma^{(s)} = \frac{1}{\nu^{(s)} |\chi'_0|} (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0|), \quad \chi'_0 = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right), \\ \lambda_g^{(1,2)} = \frac{1}{2L_{\text{ext}}^{(s)}} \left(\xi^{(s)} - \frac{i\rho^{(s)}(1 - \varepsilon)}{2} \pm \Lambda^{(s)}(\xi^{(s)}) \right), \\ \Lambda^{(s)}(\xi^{(s)}) = \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon} - \frac{i\rho^{(s)} \left((1 - \varepsilon)\xi^{(s)} + 2\kappa^{(s)}\varepsilon \right)}{2\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\rho^{(s)2}}{2\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \left(\frac{(1 - \varepsilon)^2}{4} + \kappa^{(s)2}\varepsilon \right), \quad (7)$$

где $\lambda_g^{(1,2)}$ – динамические добавки к волновым векторам рентгеновского излучения в периодической слоистой среде в направлении рассеяния Брэгга: $k_g^{(1,2)} = \omega\sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_g^{(1,2)}$.

В выражениях (7) введены обозначения:

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2\nu^{(s)}}, \quad \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)}, \quad \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{T^2 \omega_B} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{n^2 \pi^2} - 1} \right) - 1 \right),$$

$$L_{\text{ext}}^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)} \omega |\chi'_b| I^*}.$$

$$I^* = \sqrt{(1 - \delta'_{ab})\delta'_1 \sin^2(n\pi I_1) + (\delta'_{ab} - 1)\delta'_2 \sin^2(n\pi I_2) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(n\pi I_3)}, \\ I_1 = \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_2 = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \\ \delta'_1 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c}. \quad (8)$$

Параметры динамического рассеяния:

$$\nu^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{I^*}{I_2 \left| \frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} \right|}, \quad (9)$$

$$\rho^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)}} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}{I^*}, \quad (10)$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{\sqrt{(\rho_1 \sin^2(n\pi I_1) + \rho_2 \sin^2(n\pi I_2) + \rho_3 \sin^2(n\pi I_3))}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}, \quad (11)$$

где

$$\rho_1 = (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c), \quad \rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c), \quad \rho_3 = (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b), \\ \rho_a = \frac{\chi''_a}{|\chi'_b|}, \quad \rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|}, \quad \rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_b|}.$$

Так как в рентгеновском диапазоне частот излучения выполняется неравенство $\frac{2\pi^2 L_{\text{ext}}^{(s)} n^2}{T^2 \omega_B} \gg 1$, то $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстро изменяющейся функцией с изменением частоты излучения ω в окрестности частоты Брэгга ω_B . $L_{\text{ext}}^{(s)}$ – длина экстинкции рентгеновского излучения в рассматриваемой структуре.

Представленный в (9) параметр динамического рассеяния $\nu^{(s)}$ является интерференционным параметром, который определяет степень интерференции рентгеновского излучения, отраженного от трех слоев на периоде рассматриваемой мишени. Значение этого параметра лежит в интервале $0 < \nu^{(s)} < 1$. Чем ближе $\nu^{(s)}$ к единице, тем более конструктивна интерференция излучения, отраженного от трех различных слоев на периоде. В этом случае интенсивность ПРИ и ДПИ возрастает.

Параметр $\rho^{(s)}$ определяет степень фотопоглощения рентгеновского излучения в рассматриваемой трехслойной структуре (10). Фотопоглощение излучения в слоях мишени определены выражениями ρ_a , ρ_b и ρ_c . Чем меньше значение этих параметров, тем меньше фотопоглощение рентгеновского излучения.

Значение параметра $\kappa^{(s)}$ из (11) определяет расположение в слоистой среде пучностей стоячей волны, которая образуется в результате интерференции падающей и дифрагированной волн.

Параметр ε определяет асимметрию отражения кулоновского поля релятивистского электрона относительно поверхности мишени. При фиксированном угле Брэгга θ_B параметр асимметрии ε определяет угол между поверхностью мишени и отражающими слоями δ . В случае симметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени, когда отражающие слои и поверхность мишени перпендикулярны ($\delta = \pi/2$), параметр асимметрии равен единице: $\varepsilon = 1$. Угол падения электрона на поверхность пластины $\delta - \theta_B$ увеличивается, если параметр ε уменьшается и наоборот.

4. Спектрально-угловая и угловая плотности ПРИ. Слагаемые в квадратных скобках выражения (6) соответствуют двум различным ветвям возбуждаемых рентгеновских волн в рассматриваемой структуре. Для возникновения рефлекса ПРИ необходимо, чтобы реальные части знаменателей вторых слагаемых ветвей ПРИ обращались в нуль, то есть необходимо выполнение хотя бы одного из следующих равенств:

$$\text{Re}(\lambda_g^* - \lambda_g^{(1)}) = \frac{\varepsilon}{2L_{\text{ext}}} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\text{Re}(\lambda_g^* - \lambda_g^{(2)}) = \frac{\varepsilon}{2L_{\text{ext}}} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) = 0. \quad (13)$$

Существенной является первая ветвь ПРИ, так как реальная часть знаменателя этой ветви может обратиться в нуль (12), что приведет к значимому рефлексу ПРИ. Поэтому только первое слагаемое в (6) дает вклад в выход ПРИ.

Подставим (6) в хорошо известное выражение для спектрально-угловой плотности рентгеновского излучения

$$\omega \frac{d^3 N^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \left| E_{\text{ПРИ}}^{(s)} \right|^2,$$

получим выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi_0')^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (14)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} \right)^2 \frac{1 + \exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) - 2 \exp(-b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) \cos \left(b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right) \right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 + \rho^{(s)2} \Delta^{(s)2}}, \quad (15)$$

где введены обозначения:

$$\Delta^{(s)} = \frac{\varepsilon+1}{2\varepsilon} - \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{\xi^{(s)2} + \varepsilon}}, \quad b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}, \quad \Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \Psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \Psi_{\parallel})^2. \quad (16)$$

Параметр $b^{(s)}$, который характеризует толщину мишени L , равен половине длины пути электрона в мишени $L_e = \frac{L}{\sin(\delta - \theta_B)}$, выраженной в длине экстинкции $L_{\text{ext}}^{(s)}$.

Чтобы найти угловую плотность ПРИ проинтегрируем выражения (14) по частотной функции $\eta^{(s)}(\omega)$, используя соотношение $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{T^2 \omega_B}{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} d\eta^{(s)}$, следующее из выражения для $\eta^{(s)}(\omega)$ из (8). Получено выражение, описывающее угловую плотность ПРИ:

$$\frac{d^2 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{8\pi^4} \frac{T^2 \omega_B}{n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\text{ПРИ}}^{(s)} d\eta^{(s)}. \quad (17)$$

Полученные выражения (14) и (17), описывающие спектрально-угловую и угловую плотности ПРИ, являются главным результатом настоящей работы. Их можно применять для анализа спектрально-угловых характеристик ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в зависимости от параметров слоев мишени и энергии излучающих электронов.

5. Численные расчеты угловой плотности излучения и анализ. Используя полученные выражения для угловых плотностей ПРИ и ДПИ, проведем численные расчеты для определенных параметров мишени и проанализируем результаты вычислений. Рассмотрим излучение релятивистского электрона с Лоренц-фактором $\gamma = 500$, движущегося вдоль оси электронного пучка e_1 , когда $\Psi_{\perp} = 0$, $\Psi_{\parallel} = 0$. Период периодической слоистой среды примем равным $T = a + b + c = 0.002$ мкм, в этом случае отношения толщин слоев a/b и a/c определяют толщины всех слоев. Положим угол Брэгга равным $\theta_B = 2.25^\circ$, который является углом между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями. В этом случае частота Брэгга принимает значение $\omega_B = 8$ кэВ. Действительную часть диэлектрической восприимчивости второго слоя положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi'_b = -2.25 \cdot 10^{-5}$, при этом отношения $\delta'_{ab} = \chi'_a/\chi'_b$, $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$ будут определять реальные части диэлектрических восприимчивостей первого и третьего слоев. Расчеты выполним для σ -поляризованных волн, когда $s = 1$.

На рис. 2 представлены кривые, построенные по формуле (17), описывающие угловые плотности ПРИ. Кривые построены при различных толщинах мишени L и конкретных параметрах периодической слоистой среды. Угол между системой параллельных атомных плоскостей монокристалла и поверхностью мишени равен $\delta = \pi/40$, в этом случае параметр асимметрии равен $\varepsilon = \sin(\delta + \theta_B)/\sin(\delta - \theta_B) \approx 3$. Из рис. 3 следует рост угловой плотности параметрического рентгеновского излучения при увеличении толщины мишени до некоторого насыщения при толщине $L = 2\mu\text{m}$.

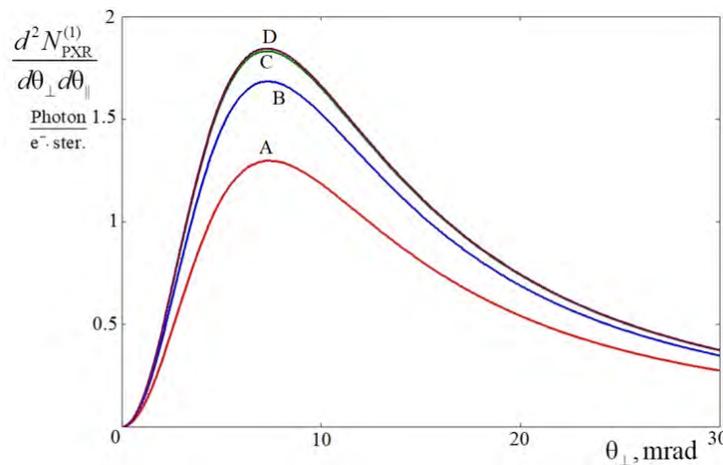


Рис. 2. Угловая плотность ПРИ для различных толщин мишени. Обозначения: А ($L = 0.5\mu\text{m}$), В ($L = 1\mu\text{m}$), С ($L = 2\mu\text{m}$), D ($L = 3\mu\text{m}$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.4$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$

Fig. 2. Angular density of PXR for different target thicknesses. Notation: A ($L = 0.5\mu\text{m}$), B ($L = 1\mu\text{m}$), C ($L = 2\mu\text{m}$), D ($L = 3\mu\text{m}$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.4$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$

Рассмотрим параметр динамического рассеяния $\nu^{(s)}$ (9), который определяет характер интерференции когерентного рентгеновского излучения от трех слоев на периоде слоистой структуры. Подбирая параметры слоев таким образом, чтобы параметр $\nu^{(s)}$ имел как можно большее значение, можно увеличить интенсивность излучения. На рис. 3 представлены кривые, описывающие зависимость параметра $\nu^{(s)}$ от соотношения слоев a/b для различных значений отношений диэлектрических восприимчивостей первого и третьего слоев: $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. При этом отношения a/c и $\delta'_{ab} = \chi'_a/\chi'_b$ фиксированы. Из рисунка следует, что при уменьшении δ'_{ac} увеличивается параметр $\nu^{(1)}$. При этом, уменьшая отношение a/b , можно также увеличить интенсивность излучения до некоторого значения, затем следует резкое уменьшение параметра $\nu^{(1)}$.

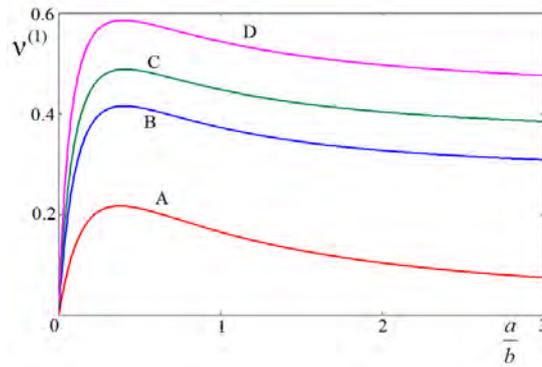


Рис. 3. Зависимость интерференционного параметра динамического рассеяния от соотношения слоев a/b для различных значений отношений $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Обозначения: А ($\delta'_{ac} = 1$), В ($\delta'_{ac} = 0.4$), С ($\delta'_{ac} = 0.3$), D ($\delta'_{ac} = 0.2$).
Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/c = 1$

Fig. 3. Dependence of the dynamic scattering interference parameter on the layer ratio a/b for different values of the ratios $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Notation: A ($\delta'_{ac} = 1$), B ($\delta'_{ac} = 0.4$), C ($\delta'_{ac} = 0.3$), D ($\delta'_{ac} = 0.2$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/c = 1$

На рис. 4 представлены кривые, построенные по формуле (17), описывающие угловые плотности ПРИ для разных значений параметра δ'_{ac} при фиксированных других параметрах. Из рисунка следует, что при уменьшении параметра δ'_{ac} увеличивается угловая плотность ПРИ, так же, как и значения параметра $\nu^{(1)}$ на рис. 3.

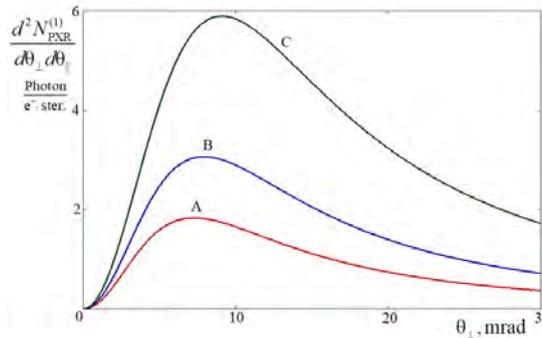


Рис. 4. Угловые плотности ПРИ при различных значениях параметра $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Обозначения: А ($\delta'_{ac} = 0.4$), В ($\delta'_{ac} = 0.3$), С ($\delta'_{ac} = 0.2$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 4. Angular densities of the PXR for different values of the parameter $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$. Notation: A ($\delta'_{ac} = 0.4$), B ($\delta'_{ac} = 0.3$), C ($\delta'_{ac} = 0.2$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

На рис. 5 представлены кривые, описывающие угловые плотности ПРИ для разных значений отношений толщин первого и второго слоев a/b при фиксированных других параметрах. Из рисунка следует, что при уменьшении отношения a/b увеличивается угловая плотность ПРИ.

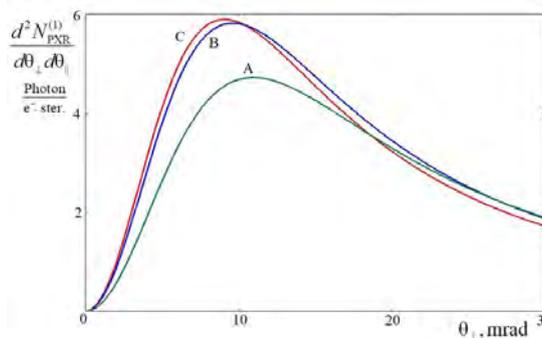


Рис. 5. Угловые плотности ПРИ для различных отношений слоев a/b . Обозначения: А ($a/b = 0.5$), В ($a/b = 0.7$), С ($a/b = 2$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 5. Angular densities of the PXR for different layer ratios a/b . Notation: A ($a/b = 0.5$), B ($a/b = 0.7$), C ($a/b = 2$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_{ac} = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

6. Заключение. Развита динамическая теория параметрического рентгеновского излучения релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую мишень с тремя слоями на периоде в

геометрии рассеяния Лауэ, когда когерентное рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени в направлении рассеяния Брэгга. Получены выражения, описывающие параметры динамического рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Показано, что интерференционный параметр динамического рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде существенно зависит от отношения реальных частей диэлектрических восприимчивостей атомов различных слоев мишени, а также от отношения толщин слоев. Получены выражения, описывающие спектрально-угловую и угловую плотности ПРИ. На основе полученных выражений проведены численные расчеты угловой плотности ПРИ. Показано, что угловая плотность ПРИ существенно зависит от отношения значений действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов слоев и отношения толщин слоев.

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A., Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.036504
2. Garibian G.M., Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Sov. Phys. JETP*. 1972;34:502.
4. Kaplin V.V., Uglov S.R., Zabaev V.N., Piestrup M.A. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Appl. Phys. Lett.* 76. 2000;24:3647-3649. DOI: 10.1063/1.126735
5. Blazhevich S.V., Kolosova I.V., Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *J. Exp. Theor. Phys.* 2012;114:547-554. DOI: 10.1134/S1063776112020021
6. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nucl. Instrum. Meth. B*. 2013;309:70-75. DOI: 10.1016/j.nimb.2013.02.035
7. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19248-7
8. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S., Andre J.M., Le Guen K., Jonnard Ph., De Rossi S., Meltchakov E., Delmotte F. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in "water-window" spectral range. *Journal of Physics:Conference Series*. 2016;732(1):012017. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012017
9. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049. DOI: 10.1088/1748-0221/19/04/C04049
10. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230. DOI: 10.1038/s41566-022-01132-6
11. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401. DOI: 10.1002/advs.202105401
12. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Garcia J.F., Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light Sci Appl*. 2023;12(1):148. DOI: 10.1038/s41377-023-01141-2
13. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2017;125(2):223-234. DOI: 10.1134/S1063776117070172
14. Blazhevich S.V., Drygina Yu.A., Shevchuk O.Yu., Noskov A.V. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2020;14(3):586-595. DOI: 10.1134/S1027451020030222
15. Носков А.В., Бондаренко В.А., Блажевич С.В., Юрьева А.А., Федосеев А.Э. О влиянии многократного рассеяния на переходное излучение в монокристалле. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(2): 183-192. DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192
16. Носков А.В., Киперша В.К., Блажевич С.В., Плесканев А.А., Ильинский Р.Ю., Волошкина Е.В. Спектрально-угловые плотности переходного излучения и дифрагированного переходного излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(1):66-74. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-66-74
17. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007. DOI: 10.1088/1748-0221/19/07/P07007
18. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129835
19. Носков А.В., Блажевич С.В., Чуева А.И., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):59-67. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-59-67

20. Носков А.В., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К., Пугина П.Д., Пирматова М.Д. Влияние расходимости электронного пучка на ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Прикладная математика & Физика. 2025;57(4):279-289. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289

References

1. Nasonov NN., Kaplin VV., Uglov SR., Piestrup MA., Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68(3):036504. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.036504
2. Garibian GM., Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. JETP. 1972;34(3):495.
3. Baryshevsky VG., Feranchuk ID. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1972;34(3):502.
4. Kaplin VV., Uglov SR., Zabaev VN., Piestrup MA. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror *Appl. Phys. Lett.* 76. 2000;24:3647-3649. DOI: 10.1063/1.126735
5. Blazhevich SV., Kolosova IV., Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 2012;141(4):547-554 (In Russian). DOI: 10.1134/S1063776112020021
6. Blazhevich SV., Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nucl. Instrum. Meth. B*. 2013;309:70-75. DOI: 10.1016/j.nimb.2013.02.035
7. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011.216 p. DOI: 10.1007/978-3-642-19248-7
8. Uglov SR., Kaplin VV., Kubankin AS., Andre JM., Le Guen K., Jonnard Ph., De Rossi S., Meltchakov E., Delmotte F. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017. DOI: 10.1088/1742-6596/732/1/012017
9. Shevelev MV., Uglov SR., Vukolov AV. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049. DOI: 10.1088/1748-0221/19/04/C04049
10. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin JS., Boothroyd C., Liu Z., Wong LJ. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230. DOI: 10.1038/s41566-022-01132-6
11. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong LJ. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401. DOI: 10.1002/advs.202105401
12. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong LJ., Garcia JF., Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light Sci Appl*. 2023;12(1):148. DOI: 10.1038/s41377-023-01141-2
13. Blazhevich SV., Noskov AV. Coherent X-ray Radiation Generated by a Relativistic Electron Beam in a Periodic Layered Medium in the Bragg Scattering Geometry. *ZHurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 2017;152(2):223–234 (In Russian). DOI: 10.1134/S1063776117070172
14. Blazhevich SV., Drygina YuA., Shevchuk OYu., Noskov AV. Coherent X-Ray Radiation Generated Near the Axis of the Beam of Relativistic Electrons in an Artificial Periodic Structure. *Poverhnost'. Rentgenovskie, sinhrotronnye i nejtronnye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques]. 2020;14(3):586-595 (In Russian). DOI: 10.1134/S1027451020030222
15. Noskov AV., Bondarenko VA., Blazhevich SV., Yuryeva AA., Fedoseev AE. On the influence of multiple scattering on transition radiation in a single crystal. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2023;55(2):183–192 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2023-55-2-183-192
16. Noskov AV., Kipersha VK., Blazhevich SV., Pleskaneev AA., Ilyinsky RYu., Voloshkina EV. Spectral-angular densities of transition radiation and diffracted transition radiation of relativistic electrons in a periodic layered medium. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2024;56(1):66-74 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-1-66-74
17. Noskov AV., Blazhevich SV. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007. DOI: 10.1088/1748-0221/19/07/P07007
18. Noskov AV., Blazhevich SV. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835. DOI: 10.1016/j.physleta.2024.129835
19. Noskov AV., Blazhevich SV., Chueva AI., Machukaev DD., Kipersha VK. The influence of asymmetric diffraction on the spectral-angular density of the CRI of a relativistic electron in a three-layer structure. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2025;57(1):59-67 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-1-59-67
20. Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugin PD., Pirmatova MD. The influence of electron beam divergence on the CXR in a periodic layered medium with three layers per period. *Prikladnaya matematika & Fizika* [Applied Mathematics & Physics]. 2025;57(4):279–289 (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 29.12.2025

Поступила после рецензирования 13.02.2026

Принята к публикации 16.02.2026

Received December 29, 2025

Revised February 13, 2026

Accepted February 16, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Носков Антон Валериевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Пирматова Мария Дмитриевна – студентка факультета «Информационные технологии», Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Мачукаев Дени Даудович – аспирант кафедры теоретической и прикладной химии, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Бардакова Ирина Николаевна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Блажевич Сергей Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anton V. Noskov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Physics, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Maria D. Pirmatova – Student of the Faculty of Information Technology, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Deni D. Machukaev – Graduate Student of the Department of Theoretical and Applied Chemistry, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

Irina N. Bardakova – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Sergey V. Blazhevich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Анализ перколяционной модели сети электрических распределительных станций

Вирченко Ю. П. , Пархоменко В. Е. 

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова,
Россия, 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46

virch@bsuedu.ru

Аннотация. Конструируется математическая модель расчета надежности функционирования сети электрических подстанций, связанных с фиксированной центральной распределительной станцией. В модели каждая k -я подстанция сети является вершиной конечного графа Γ и характеризуется вероятностью p_k собственной бесперебойной работы. Совокупность этих характеристик определяет неоднородное бернуллиевское поле с распределением вероятностей $\{p_k; k = 1 \div N\}$. В рамках построенной модели безотказная работа конкретной k -й подстанции сети обеспечивается наличием у нее перколяционной связи с центральной распределительной станцией. Выводится формула для оценки надежности работы каждой из подстанций сети и для этой характеристики предлагается алгоритм численного расчета.

Ключевые слова: бернуллиевское случайное поле, вероятность безотказной работы, внешняя граница кластера, кластерное разложение, парная перколяционная функция

Для цитирования: Вирченко Ю.П., Пархоменко В.Е. Анализ перколяционной модели сети электрических распределительных станций. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):88–95. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-88-95 EDN TKTCHG

Original Research

Analysis of the Percolation Model of the Electric Distribution Stations Network

Yuri P. Virchenko , Vladislav E. Parkhomenko 

Belgorod State Shukhov's Technological University,
46 Kostyukova St., Belgorod 308012, Russia

virch@bsuedu.ru

Abstract. A mathematical model is being developed to calculate the reliability of a network of electrical substations connected to a fixed central distribution station. Each k th substation in the network is a finite graph Γ vertex in the model. It is characterized by the probability p_k of its uptime. Aggregate of all these characteristics defines a nonuniform Bernoulli random field with the probability distribution $\{p_k; k = 1 \div N\}$. In the framework of the model the uptime of the concrete k th substation in the network is understood as the presence of its percolation connection with a central distribution station. A formula is derived for assessing the reliability of each of the network's substations, and a numerical calculation algorithm is proposed for this characteristic.

Keywords: Bernoulli's Random Field, Probability of Uptime, External Cluster Board, Cluster Expansion, Pair Percolation Function

For citation: Virchenko YuP., Parkhomenko VE. Analysis of the Percolation Model of the Electric Distribution Stations Network. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):88–95. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-88-95 EDN TKTCHG

1. Введение. Теория перколяции возникла в статистической физике [1, 2] с целью математического моделирования процессов, протекающих в неупорядоченных конденсированных физических средах. Предметом изучения этой теории, с математической точки зрения, являлся физический эффект возникновения просачивания – так называемый эффект перколяции в реализациях случайных подмножеств фиксированного некомпактного множества V , которое мы называем *пространством погружения*. Каждое случайное подмножество представляется семейством $\mathcal{W} = \{W_j \subset V; j \in \mathbb{N}\}$ своих связанных компонент. Теория исходит из того, что для таких подмножеств имеется какое-то распределение вероятностей. Тогда возникает задача вычисления вероятности просачивания связанных компонент W_j , $j = 1 \div N$ на большие расстояния, то есть такого их расположения, что вершины одной или нескольких компонент могут удалиться на сколь угодно большие расстояния от заданной фиксированной вершины.

Ввиду сложности вычисления и анализа статистических характеристик конкретных моделей случайных множеств, при создании теории перколяции естественно пришлось отказаться от моделирования

расположенной случайным образом в пространстве неупорядоченной твердотельной среды, и прибегнуть к дискретизации пространства погружения, а именно сконструировать соответствующую математическую модель на решетке \mathbb{Z}^2 , а фактически, на бесконечном графе, гомеоморфном этой решетке. В дальнейшем, теория развивалась в основном в направлении изучения перколяции именно на бесконечных графах $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ с не более чем счетным множеством вершин V и множеством пар смежности $\Phi \subset V \times V$. Такую теорию можно назвать *дискретной теорией перколяции*. Дискретизация пространства погружения значительно облегчает изучение основанных на ней моделей теории перколяции. Однако она еще, сама по себе, не позволяет обозримым образом конструировать и анализировать математические модели этой теории. Для конкретизации теоретических построений нужно иметь возможность генерировать посредством какого-то алгоритма бесконечные и, может быть конечные, но очень большие графы таким образом, чтобы процесс их создания имел форму индуктивного построения на основе фиксированного набора конечных графов. Поэтому следующим шагом в направлении упрощения построения математических моделей теории перколяции явилось использование так называемых периодических графов (см. [3]), а также деревьев Кэйли.

Наконец, укажем еще на одну сложность конструирования и анализа перколяционных моделей. Она связана с нелокальностью самой описанной выше постановки задачи, которая вызывает значительные математические сложности (см. [3]) даже в случае, когда распределение вероятностей случайных подмножеств вершин бесконечного графа определяется посредством каких-то его локальных характеристик. Это приводит к тому, что явление перколяции возникает только при определенных значениях параметров, определяющих распределение вероятностей случайных подмножеств пространства погружения. Поэтому, в настоящее время, большинство результатов, полученных в рамках дискретной теории перколяции, связано с изучением предельного, с точки зрения локальности, случая, а именно, с исследованием перколяции бернуллиевского случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$ статистически независимых случайных величин $\rho(x)$, $x \in V$, принимающих значения $\{0, 1\}$. Случайные подмножества в этом случае определяются как $\{x \in V : \rho(x) = 1\}$.

Эффект перколяции состоит в наличии с ненулевой вероятностью P бесконечной связной компоненты W , $|W| = \infty$ случайной реализации \mathcal{W} , которая называется *вероятностью перколяции*. Само собой разумеется, что этот эффект может проявляться только в случае, когда $|V| = \infty$. При этом отличие вероятности P от нуля возникает начиная с каких-то граничных значений параметров, которые определяют распределение вероятностей случайных реализаций \mathcal{W} . В таком случае основные задачи, которые решаются в рамках дискретной теории перколяции, состоят в определении области таких значений и, более общо, в вычислении вероятности перколяции P . Однако мыслимы задачи теории перколяции, которые сводятся к вычислению вероятности того, что существует просачивание случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$ из фиксированной вершины y в заданную вершину z на графе Γ . Набор таких вероятностей, зависящий от пар $\{y, z\} \subset V$, мы называем в настоящей работе *парными перколяционными функциями*. Их вычисление может иметь приложение к анализу систем математического моделирования.

Примером указанного положения является, как раз, изучаемая нами в этой работе система соединенных между собой электрических подстанций, каждая из которых может с некоторой вероятностью, независимо от других подстанций, выходить из рабочего состояния. При этом вероятность противоположного события называется *надежностью* (см. [4, 5]) безотказной работы этой подстанции. Такого рода надежность мы будем, далее, называть *собственной надежностью*. Она определяется техническими характеристиками подстанции [6] и рассматривается нами как заданная величина для каждой из подстанций. Задача состоит в вычислении надежности работы каждой из включенных в сеть подстанций, но уже не собственной, а той, которая зависит от того, какую роль каждая из них играет в функционировании всей системы.

2. Описание модели. В этом разделе мы сконструируем модель, описывающую работу распределительной сети электрических подстанций, с целью расчета надежности работы каждой из них в составе сети.

Сеть состоит из центральной распределительной электростанции (РЭЦ), через которую электрическое напряжение ($\sim 30 \div 120$ кВ) распределяется по всей сети, состоящей из некоторого множества промежуточных подстанций. Оно уменьшается по мере удаления от РЭЦ по отдельным ветвям сети. В дальнейшем, напряжение распределяется (~ 6 кВ) по конечным подстанциям сети, которые доводят напряжение до потребителей. Обозначим посредством $N + 1 \sim 50 \div 100$ число подстанций, составляющих сеть и перенумеруем все эти подстанции каким-либо удобным, с операционной точки зрения, способом посредством $k = 0 \div N$. Предполагается, что каждая из подстанций характеризуется своей собственной надежностью безаварийной работы — некоторым параметром $p_j \in (0, 1)$, $j = 0 \div N$, имеющим вероятностный смысл, который может быть рассчитан на основе технической документации подстанции. Целью создания математической модели является возможность расчета надежности работы каждой из подстанций уже в составе сети.

Модель строится на основе понятия графа, у которого вершинами являются подстанции, а ребрами или,

что тоже самое, смежными парами вершин, — линии электропередачи, соединяющие пары подстанций. При этом граф понимается как неориентированный и, конечно же, не содержащий петель и кратных ребер. Более того, в предлагаемой модели мы не приписываем ребрам, соединяющим вершины, какие-либо веса. Каждой вершине мы приписываем вес $p_j \in (0, 1)$, $j \in I_N \cup \{0\}$, $I_N = \{1, 2, \dots, N\}$, который является характеристикой подстанции, величина которой не зависит от работы других станций сети.

Таким образом, модель представляет собой пару $\langle \Gamma, \rho \rangle$. Здесь $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ — граф, у которого V — множество вершин, а Φ — множество его смежных пар $\{j, k\} \subset (\{0\} \cup I_N)^2$ вершин, и $\rho = \{\rho_j; j \in \{0\} \cup I_N\}$ — случайное бернуллиевское поле (вообще говоря, неоднородное), то есть множество случайных величин таких, что каждая их пара ρ_j и ρ_k статистически независима при $j \neq k$ и $\Pr\{\rho_m = 1; m \in \{0\} \cup I_N\} = p_m$. Естественно, что мы считаем граф Γ связным.

В рамках такой модели мы пренебрегаем влиянием на надежность работы сети и, соответственно, на надежность каждой из входящих в нее подстанций величины распределяемого ею электрического напряжения, а также пренебрегаем различием процесса электропередачи между любыми двумя связанными подстанциями.

Для завершения построения модели, описывающей сеть электроподстанций, необходимо упорядочить их положение в составе сети. Прежде всего, укажем, что в графе должна быть выделенная вершина, описывающая работу РЭЦ. Этой вершине мы припишем индекс 0. Нумерацию остальных вершин мы учтем в специальной структуре графа посредством множества смежности Φ .

Как уже было отмечено во введении, стандартные задачи дискретной теории перколяции ставятся для графов, построенных на основе какого-то алгоритма. Графы, используемые нами для моделирования сети электроподстанций, конечно же, не обладают таким свойством и, в то же время, являются довольно большими. Такая ситуация является очень богатой, с точки зрения аналитического изучения системы. Поэтому, во-первых, сразу нужно ориентироваться на то, чтобы под решением задачи понимать именно ее численное решение, которое основано на разработке соответствующего алгоритма. Во-вторых, даже при постановке задачи численного решения разумно ограничиться каким-то специальным семейством графов, так как вряд ли возможно создание универсальных расчетных алгоритмов, пригодных для графов произвольного вида, для проведения необходимых вычислений за обозримое время.

Каждой случайной реализации ρ поля сопоставим множества $V(\rho) = \{j \in V : \rho_j = 1\}$. Соответствующие сужения графа Γ на множества $V(\rho)$ обозначим посредством $\Gamma(\rho) = \langle V(\rho), \Phi(\rho) \rangle$, где $\Phi(\rho)$ сужение множества смежности Γ на $V(\rho)$. Графы $\Gamma(\rho)$ уже не обязательно являются связными. Если на таком графе имеется путь из вершины j в вершину k , полностью расположенный на $V(\rho)$, то мы будем говорить, что на графе $\Gamma(\rho)$ имеется перколяция из вершины j в вершину k . В этом случае мы будем писать $j \sim k$.

Так как используемый в модели граф Γ конечен, то для него не имеет смысла стандартная постановка задачи дискретной теории перколяции. В такой ситуации как теоретический, так и практический интерес представляет задача вычисления парной перколяционной функции, которая определяется формулой

$$p_{j,k} = \Pr\{\rho_j \sim \rho_k\}.$$

В частности, число $p_{0,k}$ в описанной выше модели является вероятностью безотказной работы k -й подстанции, получающей электрическое напряжение от РЭЦ. Нашей целью в этой работе является разработка алгоритма для вычисления вероятностей $p_{0,k}$ для каждой подстанции сети, $k = 1 \div N$. Для решения этой задачи нам потребуется описать конкретную структуру графов, которые предполагается использовать в качестве составной части математической модели сети электрических подстанций. Это мы сделаем в пятом разделе, а перед этим мы приведем некоторые необходимые для такого описания понятия и факты теории графов (см. по этому поводу, например, [7]).

3. Древесное представление графов. С целью описания семейства графов, которые могут быть использованы для моделирования работы сети электроподстанций, опишем представление конечного графа, удобное для вычисления парных перколяционных функций, определяемых посредством задания на нем бернуллиевского поля.

Пусть задан граф $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$. Последовательность $\gamma(j, k) = \langle j = j_0, j_1, \dots, j_n = k \rangle$ вершин графа Γ , у которых каждая пара $\{j_{m-1}, j_m\}$, $m = 1 \div n$ является смежной, то есть принадлежит Φ , называется путем на этом графе. При этом число n называется длиной пути $\gamma(j, k)$. Путь $\gamma(j, k)$ называется несамопересекающимся, если для номеров j_m и $j_{m'}$ выполняется $j_m \neq j_{m'}$ для любой пары $\{m, m'\}$ несовпадающих номеров. В противном случае, путь называется *самопересекающимся*.

Граф Γ , на котором нельзя разместить ни одного самопересекающегося пути $\gamma(j, k)$, то есть так, чтобы имело место $\{\gamma(j, k)\} \subset \Phi$, называется *древесным*.

Степенью вершины $t \in V$ графа Γ называется число $|\{j \in V : \{j, t\} \in \Phi\}|$. Вершину $t \in V$ назовем *концевой* для графа Γ , если ее степень равна 1.

Нам понадобится понятие вершины сочленения, которое используется в теории гиббсовских точечных случайных полей (см. по этому поводу [8], [9]).

Определение 1. Вершина t графа Γ называется его вершиной сочленения, если на связном графе существует пара вершин $\{j, k\} \subset \Phi$ таких, что любой несамопересекающийся путь $\gamma(j, k)$ обязательно проходит (содержит) вершину t .

Очевидно, что все неконцевые вершины древесного графа являются вершинами сочленения. Граф, который не имеет вершин сочленения, будем называть блочным.

Определим некоторые операции над графами.

Определение 2. Пусть $\Gamma_1 = \langle V_1, \Phi_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle V_2, \Phi_2 \rangle$ – графы с непересекающимися множествами V_1 и V_2 вершин. Пусть также в множествах V_1 и V_2 отмечены вершины t_1 и t_2 . Бинарная операция, которая называется склейкой графов Γ_1 и Γ_2 по вершинам t_1 и t_2 , соответственно, сопоставляет парам $\langle \Gamma_1, t_1 \rangle$ и $\langle \Gamma_2, t_2 \rangle$ новый граф $\Gamma = \langle \Gamma_1, t_1 \rangle \circ \langle \Gamma_2, t_2 \rangle$ с множеством вершин $V = (V_1 \cup V_2)_{m=m_1=m_2}$ и отношением смежности $(\Phi_1 \cup \Phi_2)_{m=m_1=m_2}$, который обладает отмеченной вершиной t .

Таким образом, операция склейки пар $\langle \Gamma_1, t_1 \rangle$ и $\langle \Gamma_2, t_2 \rangle$, которую будем далее обозначать посредством знака \vee , сопоставляет парам $\langle \Gamma_j, t_j \rangle, j \in \{1, 2\}$ новую пару $\langle \Gamma, t \rangle$.

Очевидно, что вершина t на графе Γ , полученном в результате склейки графов Γ_1 и Γ_2 , является его вершиной сочленения. Следующая операция является, в некотором смысле, обратной по отношению к операции склеивания графов.

Определение 3. Пусть граф $\Gamma = \langle V, \Phi \rangle$ обладает отмеченной вершиной сочленения t . Операция разрезания графа Γ по вершине t сопоставляет ему пару графов $\Gamma_1 = \langle V_1, \Phi_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle V_2, \Phi_2 \rangle$, которые имеют непересекающиеся множества $V_1 = (V)_{m=m_1}$ и $V_2 = (V)_{m=m_2}$ с отмеченными вершинами t_1 и t_2 и отношения смежности $\Phi_1 = (\Phi)_{V_1}$ и $\Phi_2 = (\Phi)_{V_2}$, то есть представляющие собой сужения отношения смежности Φ , соответственно, на множества V_1 и $V_2, \Phi_1 = (\Phi)_{V_1}$ и $\Phi_2 = (\Phi)_{V_2}$ с переименованием вершины t , соответственно, в t_1 и t_2 .

Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если граф Γ обладает вершиной сочленения t , то он однозначным образом представим в виде склейки двух графов $\Gamma_1 = \langle V_1, \Phi_1 \rangle$ и $\Gamma_2 = \langle V_2, \Phi_2 \rangle$, с множествами вершин $V_1 = (V)_{m=m_1}$ и $V_2 = (V)_{m=m_2}$ и отношениями смежности, которые являются сужениями отношения смежности Φ , соответственно, на множества V_1 и $V_2, \Phi_1 = (\Phi)_{V_1}$ и $\Phi_2 = (\Phi)_{V_2}$.

Используя последовательно утверждение этой теоремы, доказывается

Теорема 2. Любой граф Γ , посредством операции разрезания по вершинам сочленения, однозначным образом представляется в виде набора пар $\{\langle \Gamma_j, C_j \subset V_j \rangle; j \in I_n\}$ блочных графов $\Gamma_j = \langle V_j, \Phi_j \rangle$ с множествами $C_j, j = 1 \div n$ отмеченных у них вершин. При этом суммарное число $\sum_{j=1}^n |C_j|$ вершин в множестве $\bigcup_{j=1}^n C_j$ превосходит удвоенное число вершин сочленения в графе Γ .

□ Доказательство проводится последовательными разрезаниями графа Γ по вершинам сочленения. При этом так как общее множество вершин сочленения на каждом шаге разрезания может только лишь сужаться, то процесс последовательных разрезов должен остановиться тогда, когда исчерпаются все вершины сочленения исходного графа Γ . Получающиеся в конце последовательности разрезов графы Γ_j однозначно определены с точностью до переименования их вершин. Они являются блочными, так как в противном случае, процесс разрезания может быть продолжен. Множества $\{C_j \subset V_j; j \in I_n\}$ всех новых вершин, полученных в результате разрезов, представляют собой множества отмеченных вершин в графах $\Gamma_j, j \in I_n$. ■

Очевидно, что любой граф Γ может быть получен посредством операции склеивания из набора $\{\Gamma_j = \langle V_j, \Phi_j \rangle; j \in I_n\}$ блочных графов, у которых в множествах их вершин выделены подмножества $C_j \subset V_j$. При этом число вершин в объединении $\bigcup_{j=1}^n C_j$ должно превосходить удвоенное число вершин сочленения в графе Γ .

4. Парная перколяционная функция. В этом разделе мы выведем формулу для расчета парной перколяционной функции, пригодную для связных конечных графов произвольного вида, которая выражает эту функцию через парные корреляционные функции блоков, составляющих этот граф.

Пусть $J(\Gamma)$ – множество вершин сочленения графа Γ и $\mathcal{B}(\Gamma)$ – семейство блоков, составляющих этот граф. Если $B_k, k = 1 \div L(\Gamma)$ – блоки, составляющие семейство $\mathcal{B}(\Gamma)$, то сопоставим каждому блоку B_k из этого семейства множество J_k принадлежащих ему вершин сочленения. Составим также пары блоков $\{B_k, B_l\}$, у которых имеется общая вершина сочленения, которую мы обозначим как $j_{k,l}$. Введем в рассмотрение граф $\bar{\Gamma} = \langle \mathcal{B}(\Gamma), \Phi(\bar{\Gamma}) \rangle$, у которого множество смежности $\Phi(\bar{\Gamma})$ состоит из пар $\{B_k, B_l\}$, имеющих общую вершину сочленения $j_{k,l}$. Граф $\bar{\Gamma}$ будем называть каркасом графа Γ . Очевидно, что граф $\bar{\Gamma}$ является древесным.

Для заданного бернуллиевского случайного поля $\{p_j; j \in I_N\}$ на графе Γ определим его сужение $\{p_j; j \in B_k\}$ на каждый из блоков $B_k, k = 1 \div L(\Gamma)$, составляющих граф. Тогда такие сужения определяют для каждого блока условную парную перколяционную функцию $\bar{p}_{lm}^{(k)}$ для пар $\{l, m\} \subset B_k$ вершин из блока $B_k, k = 1 \div L(\Gamma)$ при условии, что имеет место случайное событие $\{\rho_l = 1\}$. В частности, каждое такое сужение определяет условную вероятность $\bar{p}_{l,j_{k,m}}^{(k)}$ перколяции из любой вершины l блока B_k в вершину

сочленения этого блока с блоком B_m , $m \neq k$ при том же условии. Поэтому, точно так же, такое сужение определяет условную вероятность $\bar{p}_{j_k, m, j_{k, m'}}^{(k)}$ перколяции из вершины сочленения $j_{k, m}$ блока B_k с блоком B_m в вершину $j_{k, m'}$ сочленения этого блока B_k с любым другим блоком $B_{m'}$ при выполнении условия $\{\rho_m = 1\}$.

Зафиксируем пару вершин $\{j_0, j_s\} \subset V$ на графе Γ так, что вершина j_0 принадлежит блоку B_{k_0} , а вершина j_s принадлежит блоку B_{k_s} так, что $k_0 \neq k_s$. Паре блоков B_{k_0} и B_{k_s} сопоставим путь $\bar{\gamma}(j_0, j_s)$ на графе $\bar{\Gamma}$, соединяющий блоки B_{j_0} и B_{j_s} .

Теорема 4. Парная перколяционная функция p_{j_0, j_s} представляется в виде произведения

$$p_{j_0, j_s} = c\bar{p}_{j_0, j_{k_0, k_1}}^{(k_0)} \left[\prod_{m=1}^{s-1} \bar{p}_{j_{k_{m-1}, k_m}, j_{k_m, k_{m+1}}}^{(k_m)} \right] \bar{p}_{j_{k_{s-1}, k_s}, j_{k_s, j_s}}^{(k_s)}. \quad (1)$$

□ Справедливость этой формулы следует из статистической независимости значений случайного поля $\{\rho_m; m \in I_N \cup \{0\}\}$ в вершинах, расположенных вне блоков $B_{k_0}, B_{k_1}, \dots, B_{k_s}$ со значениями этого поля в вершинах, принадлежащих этим блокам. Поэтому, так как любой несамопересекающийся путь $\gamma(j_0, j_s)$, соединяющий вершины j_0 и j_s , расположен полностью в множестве вершин $\bigcup_{m=1}^s B_{k_{m-1}, k_m}$, то вероятность p_{j_0, j_s} совпадает с условной вероятностью того, что путь $\gamma(j_0, j_s)$ расположен в указанном множестве. Тогда, так как для любого пути $\gamma(j_0, j_s)$, расположенного в множестве $\bigcup_{m=1}^s B_{k_{m-1}, k_m}$, справедливо представление $\gamma(j_0, j_{k_0, k_1}) \vee \gamma(j_{k_0, k_1}) \vee \dots \vee \gamma(j_{k_{s-1}, k_s}) \vee \gamma(j_{k_s}, j_s)$, где пути γ_{k_{m-1}, k_m} расположены, соответственно, в блоках $B_{k_0}, B_{k_1}, \dots, B_{k_s}$, то для вероятности p_{j_0, j_s} справедливо представление

$$\begin{aligned} p_{j_0, j_s} &\equiv \Pr\left\{\exists(\gamma(j_0, j_s))\left(\{\gamma(j_0, j_s)\} \subset \bigcup_{m=1}^s B_{k_{m-1}, k_m}\right)\right\} = \\ &= \Pr\{j_s \sim j_{k_s, k_{s-1}} | j_{k_s, k_{s-1}} \sim j_0\} \left[\prod_{m=2}^s \Pr\{j_{k_m, k_{m-1}} \sim j_{k_{m-1}, k_{m-2}} | j_{k_{m-1}, k_{m-2}} \sim j_0\} \right] \Pr\{j_{k_{k_1}, 0} \sim j_0\} = \\ &= \bar{p}_{j_s, j_{k_s, k_{s-1}}}^{(k_s)} \left[\prod_{m=2}^s \bar{p}_{j_{k_m, k_{m-1}}, j_{k_{m-1}, k_{m-2}}}^{(k_{m-1})} \right] c\bar{p}_{j_{k_0, k_1}}^{(k_0)}, \end{aligned}$$

где мы воспользовались формулой для вероятности произведения событий и условием независимости случайных значений поля $\{\rho_m; m \in I_N \cup \{0\}\}$, находящихся в вершинах из различных блоков графа Γ , а также определением вероятностей $\bar{p}_{l, l'}^{(k)}$. ■

Следствие. Вероятность перколяции из вершины 0 в любую l -ю вершину графа равна

$$p_{0, l} = c\bar{p}_{0, j_{k_0, k_1}}^{(k_0)} \left[\prod_{m=1}^{s-1} \bar{p}_{j_{k_{m-1}, k_m}, j_{k_m, k_{m+1}}}^{(k_m)} \right] \bar{p}_{j_{k_{s-1}, k_s}, l}. \quad (2)$$

□ Формула (2) следует из (1) при заменах j_0 на 0 и j_s на l . ■

Далее, для численных расчетов понадобится следующая очевидным образом справедливая формула, которая выражает вероятность перколяции внутри каждого из блоков B_k , $k = 1 \div L(\Gamma)$ из вершины $l \in B_k$ в какую-то из вершин сочленения j_k

$$p_{l, j_k} = \sum_{W \subset B_k: j_k \sim l} \left(\prod_{m \in W} p_m \right) \left(\prod_{m' \in B_k \setminus W} (1 - p_{m'}) \right), \quad (3)$$

где суммирование производится по всем подмножествам W вершин из блока B_k таким, которые содержат какой-либо путь $\gamma(l, j_k)$.

5. Структура программы вычисления перколяционной функции. На основе формул (2) и (3) создана программа численного расчета надежности работы распределительных подстанций электрической сети, управляемой посредством РЭЦ, которая может быть применена для сети, типичная из которых схематически изображена на рисунке. Вся сеть управляется из центральной распределительной станции (с наибольшим значением напряжения ~ 110 кВ). Она выполняет роль отмеченной нулевой вершины описанной в тексте модели. Далее, расположены промежуточные подстанции с управляемым напряжением ~ 35 кВ. На периферии графа находятся конечные подстанции, распределяющие напряжение 6кВ.

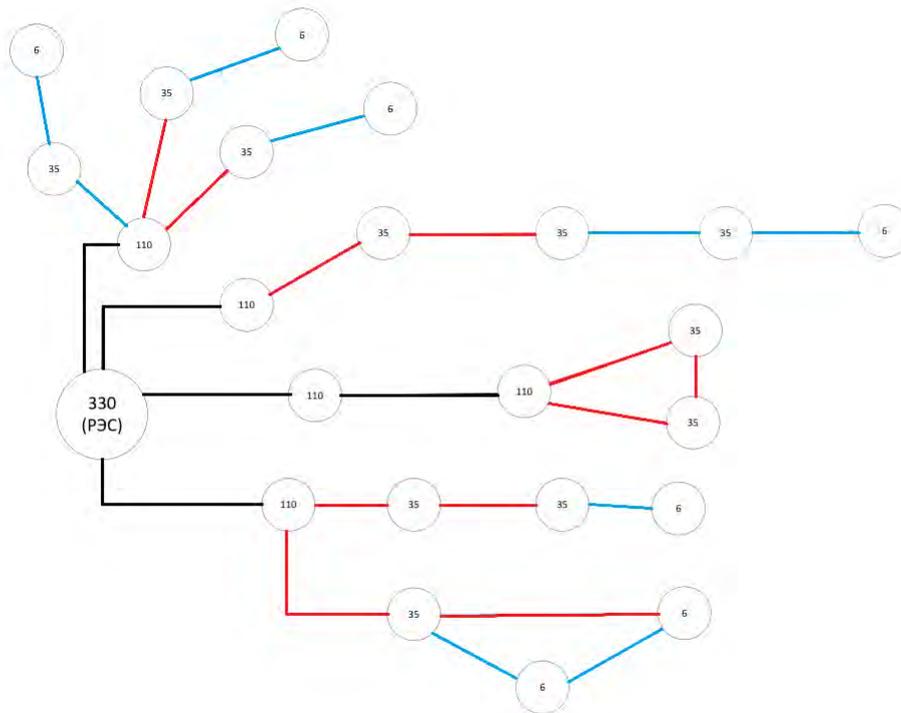


Рис. 1. На рисунке схематически изображены кружками, которые являются вершинами графа, подстанции электрической сети. Внутри них указаны величины распределяемых ими электрических напряжений
 Fig. 1. The figure schematically depicts the electrical network substations as circles, which are the nodes of the graph. The values of the electrical voltages they distribute are indicated inside them

Эта программа позволяет по входным данным относительно общего числа подстанций сети и имеющимся между ними линиям электропередачи, которые играют роль ребер модельного графа Γ , рассчитать вероятности бесперебойной работы каждой из подстанций на основе заданных технических характеристик сети — надежностей каждой из включенных в ее состав подстанций. Возможность применения программы связана с довольно простым устройством модельного графа Γ . Он состоит из древесного графа Γ' , корневая вершина которого моделирует центральную распределительную станцию сети. В состав древесного графа входит также некоторое количество промежуточных подстанций. К конечным вершинам графа Γ' приклеены блоки. Эти блоки состоят из малого числа вершин $\sim 3 \div 5$, которые моделируют подстанции, выполняющие роль конечных распределителей напряжения. Некоторые пары вершин, входящих в состав одного блока, соединены между собой связями так, чтобы блок не содержал внутри себя древесный подграф, хотя возможны такие ситуации, когда конечные распределительные подстанции являются конечными вершинами древесного графа Γ' , что, естественно, упрощает расчет надежности их функционирования в составе сети. Описанный вид модельного графа Γ указывает на то, что подстанции, образами которых являются вершины графа, входящие в один и тот же блок, соединены между собой линиями электропередачи.

Малое число вершин, входящих в каждый из блоков, позволяет рассчитать аналитически явно выражения для вероятностей $\bar{p}_{kl}^{(k)}$ перколяции из вершины k -го блока, по которой производится его приклеивание к графу Γ' , в любую l -ю вершину, входящую в состав этого блока. Эти выражения имеют полиномиальный вид относительно вероятностей p_j собственных надежностей работы электрических подстанций, которым соответствуют вершины графа Γ с номерами j , расположенные в k -м блоке. Наличие указанных аналитических выражений также значительно упрощает процедуру расчета. Опишем структуру программы, не входя в детали составляющих ее алгоритмов, что требует отдельной публикации.

1. Программа исходит из базы данных D относительно всех подстанций, входящих в состав сети. Эта база составлена на основе предварительной нумерации $k = 1 \div N$ всех подстанций сети, присоединенных к РЭС (нулевой подстанции). В соответствии с этой нумерацией в базе указаны их собственные надежности p_k , $k = 1 \div N$, которая представляет собой упорядоченный набор $P = \langle p_k; k = 1 \div N \rangle$ и описаны все связи между подстанциями сети, то есть описано отношение смежности модельного графа Γ в виде его $\{0, 1\}$ -матрицы смежности $G_{jk} = (G)_{jk}$, где 1 соответствует наличию связи между вершинами с номерами j и k модельного графа, то есть наличию линии электропередачи между j -й и k -й подстанциями, а 0 — отсутствию такой связи. Таким образом, база данных D представляет собой пару $\langle P, G \rangle$.

2. На первом этапе программа, исходя из базы данных, находит для каждой вершины графа Γ , используя алгоритм Дейкстры [10], кратчайшие пути $\gamma_{0,k}$ из нулевой вершины. Таким образом составляется упорядоченный набор путей $R = \langle \gamma_{0,k}; k = 1 \div N \rangle$.

3. На втором этапе, на основе набора D , программа составляет, исходя из базы данных, каркас графа Γ . Этот этап выполняет отдельная подпрограмма, которая, исходя из путей набора D , посредством сравнения их начальных отрезков, находит набор S вершин каркаса, не являющихся его концевыми вершинами, а также набор E концевых вершин каркаса. После этого производится перенумерация всех вершин графа и, как следствие, перенумерация элементов базы данных. Нумерация становится двух-индексной, в которой значение первого индекса указывает на номер вершины каркаса, а второй, при фиксированном номере вершины каркаса, указывает номер вершины в блоке, соответствующем этой вершине в каркасе. Причем при нумерации вершин каркаса на первое место сначала перечисляются вершины из набора E .

4. На третьем этапе программа формирует блоки графа Γ . Это достигается последовательным выделением для каждого пути $\gamma_{0,k}$ из набора E тех путей $\gamma_{0,l}$ из набора D , конечные вершины которых не попадают в множество $E \cup S$, но начальный их отрезок совпадает с путем $\gamma_{0,k}$, конечная вершина которого находится в наборе E . Набор концевых вершин всех таких путей составляют подграф, который является блоком B_k в подграфе Γ .

5. Далее, исходя из сформированных на основе базы D списков вершин, составляющих каркас S графа Γ , то есть список входящих в него вершин вместе с соответствующей матрицей смежности, формируемой на основе матрицы G , создаются списки вершин, составляющих блоки в графе Γ с соответствующими им при каждом фиксированном значении номера вершины из списка E матрицами смежности.

6. Наконец, имея полную информацию о каркасе и блоках графа Γ , используя формулы (2) и (3), вычисляются вероятности $p_{0;k,l}$ перколяции из нулевой вершины в l -ю вершину k -го блока.

6. Заключение. В работе рассмотрена статистическая математическая модель технической системы, формулировка и анализ которой осуществляется в рамках представлений теории перколяции. Постановка задачи при изучении этой модели существенно отличается от постановок тех задач, которым посвящено большинство исследований теории. Эти отличия приводят к тому, что разработанные в рамках дискретной теории перколяции аналитические методы становятся неприменимыми при ее решении. Это утверждение, в первую очередь, касается нерегулярности конструкции графов, на которых задается случайное поле $\{\rho(x); x \in V\}$. Поэтому теряются удобные, с точки зрения математического анализа, свойства распределений вероятностей этого поля на таких графах, связанные с его трансляциями. В частности, нерегулярность структуры графов влечет неопределенность их размерности при попытке их погружения в евклидово пространство с условием периодичности относительно трансляций, и поэтому становятся неприменимыми контурные оценки (см. [3]) вероятности перколяции.

Вторым отличием в постановке изучаемой в работе задачи, существенно усложняющей ее изучение, является неоднородность случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$, которая, в месте с нерегулярностью конструкции графа, приводит к тому, что вычисляемые вероятностные характеристики становятся зависящими от большого числа параметров, определяющих распределение вероятностей этого поля.

Наконец, существенное изменение претерпевает постановка задачи о наличии перколяции, ввиду конечности графа, который заложен в основу модели. Эта конечность приводит к тому, что исчезает понятие порога перколяции и, вообще, понятия о критическом поведении перколяционных вероятностных характеристик. В связи с этим возникает совершенно новая постановка вопросов в теории перколяции, при которой интересуются свойством перколяции уже не с качественной точки зрения, то есть вопросом обладает или не обладает этим свойством изучаемая модель, а вопрос может ставиться с количественной точки зрения. В частности, относительно вероятности перколяции P , которая в случае конечного графа всегда отлична от нуля, ставится вопрос о величине ее отклонения от нуля. При такой постановке вопроса, вместо задачи о вычислении порога перколяции, мы приходим к формулировке задачи, аналогичной той, которая имеется в математической статистике при нахождении интервальных оценок параметров распределений на основе выборок случайных величин, которые основаны на понятии *уровня значимости*. А именно, в случае однородности бернуллиевского случайного поля $\{\rho(x); x \in V\}$, то есть его зависимости только от одного параметра p , можно интересоваться величиной этого параметра, при которой зависящая от этого параметра вероятность перколяции отклоняется от нуля не менее чем на a priori заданную величину.

В настоящей работе вероятность перколяции вычислялась на основе парной перколяционной функции, что тоже является существенным отличием от большого числа исследований теории. Несмотря на то, что прикладной характер задачи и нерегулярность конструкции графов, приводящая к неприменимости аналитических методов дискретной теории перколяции, подразумевает ее численное решение, существенным обстоятельством, которое приводило к доверительным численным результатам в конкретной практической ситуации применения математической модели, являлось то, что задача решалась в случае, когда типичная изучаемая конструкция графа Γ имела все же довольно простой вид. А именно, этот граф

обладал блоками малых размеров ~ 4 так, что в компьютерную программу можно было вставлять конкретный вид тех полиномов от вероятностей p_j , $j = 1 \div N$, которые представляли парную перколяционную функцию каждого такого отдельного блока. В противном случае, если бы величина $|B_j|$ какого-либо из блоков была уже несколько больше, то расчет парной перколяционной функции приводил бы к учету экспоненциально большого числа слагаемых $\gtrsim 2^{|B_j|}$, что уже при $|B_j| = 20$ давало бы число $\approx 10^6$. Таким образом, для получения численного результата пришлось бы вычислять коэффициенты 10^6 полиномов, имеющих в своем составе порядка 20-ти слагаемых.

References

1. Hammersley JM. Percolation processes: lower bounds for the critical probability. *Ann. Math. Statistics*. 1957;28(3):790–795.
2. Frisch CM., Hammersley JM. Percolation processes and related topics. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963;11:894–918.
3. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. New York: Springer Science+Business Media; 1982. 424 p.
4. Gnedenko BV., Belyayev YuK., Solovyev AD. Mathematical methods in the reliability theory. New York: Academic Press, 1969. – 506 p.
5. Gnedenko BV., Belyaev YuK., Kovalenko I.N. Mathematical problems of the reliability theory. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya "Teoriya veroyatnostey. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika"*. 1964. M.: VINITI, 1966. – P.7–53.
6. Tarakanov KV., Ovcharov LA., Tyryshkin AN. Analytical methods of systems investigation. Moscow: Soviet Radio, 1974. – 240 p.
7. Harary F., Palmer EM. Graphical Enumeration. New York: Academic Press, 1973. – 324 p.
8. Virchenko YuP., Danilova LP. Graphs and algebras of Symmetric Functions. *Journal of Mathematical Sciences*. –Springer – 2023;272:642–657.
9. Mayer JE., Goeppert Mayer M. Statistical Mechanics. New York: J. Wiley & sons, Incorporated, 1966. – 495 p.
10. Dijkstra EW. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik*. F. Brezzi – Springer Science+Business Media, 1959;1(1):269–271.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.12.2025

Received December 30, 2025

Поступила после рецензирования 10.02.2026

Revised February 10, 2026

Принята к публикации 16.02.2026

Accepted February 16, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Юрий Петрович Вирченко – доктор физико-математических наук, профессор кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Пархоменко Владислав Евгеньевич – аспирант кафедры программного обеспечения, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yuri P. Virchenko – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Software, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

Vladislav E. Parkhomenko – Graduate Student of the Department of Software, Belgorod State Shukhov's Technological University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Эффекты динамической дифракции в когерентном рентгеновском излучении релятивистских электронов в трехслойной периодической структуре

Чуева А. И. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Носковым А. В.)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

chueva_ai@bsuedu.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию эффектов динамической дифракции в когерентном рентгеновском излучении релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя различными слоями в периоде. Когерентное рентгеновское излучение рассматривается как сумма параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые и угловые плотности параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения в трехслойной структуре. Показана яркая возможность проявления эффекта аномального низкого фотопоглощения в параметрическом рентгеновском излучении, аналогичного хорошо известному эффекту Бормана в монокристалле. Показано влияние асимметрии отражения поля электрона относительно поверхности мишени на угловые плотности излучений.

Ключевые слова: периодическая слоистая структура, динамическая дифракция, когерентное рентгеновское излучение

Для цитирования: Чуева А.И. Эффекты динамической дифракции в когерентном рентгеновском излучении релятивистских электронов в трехслойной периодической структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):96–108. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-96-108 EDN VAZBPA

Short Communication

Effects of Dynamic Diffraction in Coherent X-ray Radiation of Relativistic Electrons in a Three-layer Periodic Structure

Anastasia I. Chueva 

(Article submitted by a member of the editorial board Noskov A. V.)

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

chueva_ai@bsuedu.ru

Abstract. This work investigates the effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation of relativistic electrons in a periodic layered medium with three distinct layers per period. Coherent X-ray radiation is considered as the sum of parametric X-ray radiation and diffracted transition radiation. Expressions are derived describing the spectral-angular and angular densities of parametric X-ray radiation and diffracted transition radiation in a three-layer structure. A distinct possibility of anomalous low photoabsorption in parametric X-ray radiation, analogous to the well-known Bormann effect in a single crystal, is demonstrated. The influence of the asymmetry of the electron field reflection relative to the target surface on the angular densities of the radiation is demonstrated.

Keywords: Periodic Layered Structure, Dynamic Diffraction, Coherent X-ray Radiation

For citation: Chueva AI. Effects of Dynamic Diffraction in Coherent X-ray Radiation of Relativistic Electrons in a Three-layer Periodic Structure. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):96–108. (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-1-96-108 EDN VAZBPA

1. Введение. Когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистского электрона, пересекающего мишень из периодической слоистой среды, в рамках динамической теории дифракции рентгеновских волн впервые рассматривалось в работе [1]. В этой работе полагалось, что в КРИ входят параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) и дифрагированное переходное излучение (ДПИ). ПРИ возникает в результате дифракции псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона на слоях периодической среды аналогично ПРИ в монокристалле на атомных плоскостях [2, 3], а ДПИ возникает вследствие дифракции на слоях мишени переходного излучения, генерируемого вблизи передней поверхности мишени, так же как генерируется ДПИ в монокристалле [4, 5]. Следует отметить, что формулы динамической теории [1] хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [6]. КРИ релятивистского электрона в периодической слоистой среде

для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривался в работе [7], а в геометрии рассеяния Брэгга в работе [8].

Примечательно, что слоистые структуры представляют большой интерес для генерации излучения в мягком рентгеновском диапазоне (100–2000 эВ), текущие исследования активно изучают эту область [9]–[11]. Стоит отметить недавние исследования по генерации мягкого рентгеновского излучения электронами низких энергий порядка десятков и сотен кэВ из структур Ван-дер-Ваальса [12]–[14].

Во всех цитируемых выше работах излучение релятивистских электронов рассматривалось в периодической слоистой среде с двумя различными слоями на периоде. Когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Брэгга впервые рассматривалось в работе [15, 16]. В работе [17] исследовалась возможность проявления эффекта асимметрии отражения поля электрона относительно поверхности мишени на спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучения. Влияние угловой расходимости электронного пучка на ПРИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Брэгга рассматривалось в работе [18].

В настоящей работе рассматривается когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя слоями в периоде. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ, ДПИ релятивистского электрона, пересекающего периодическую слоистую мишень конечной толщины в геометрии рассеяния Брэгга. Исследовано влияние эффектов динамической дифракции на спектрально-угловые и угловые плотности параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения.

2. Спектрально-угловая плотность излучения. Рассмотрим излучение релятивистских электронов, пересекающих в геометрии рассеяния Брэгга периодическую слоистую структуру, состоящую из трех различных чередующихся слоев с толщинами a, b и c на периоде $T = a + b + c$ (рис. 1).

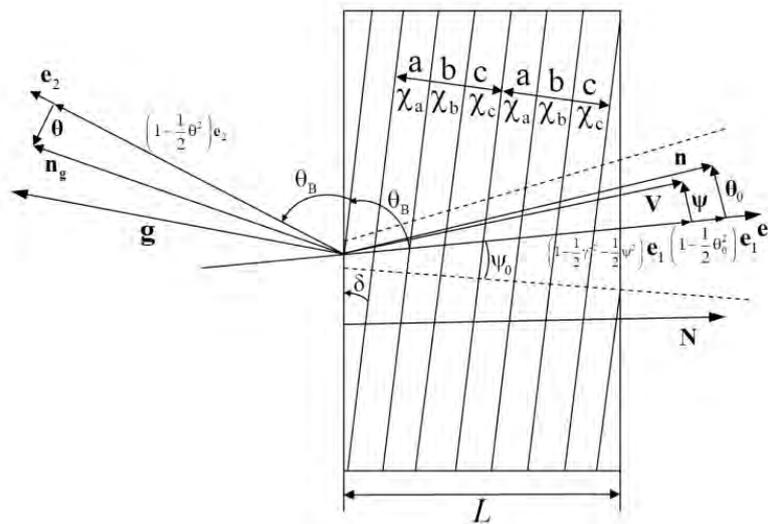


Рис. 1. Геометрия процесса рассеяния рентгеновского излучения в периодической слоистой среде

Fig. 1. Geometry of the X-ray scattering process in a periodic layered medium

Обозначим диэлектрические восприимчивости атомных веществ, из которых состоят слои, соответственно χ_a, χ_b и χ_c . Отражающие слои периодической слоистой структуры расположены под некоторым углом δ к поверхности мишени (рис. 1), что соответствует случаю асимметричного отражения поля излучения ($\delta = 0$ – частный случай симметричного отражения).

Введем угловые переменные ψ, θ и θ_0 в соответствии с определениями скорости релятивистского электрона \mathbf{V} и единичных векторов: \mathbf{n} – в направлении импульса фотона, излученного вблизи направления вектора скорости электрона, и \mathbf{n}_g – в направлении рассеяния Брэгга:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \psi, & \mathbf{e}_1\psi &= 0, \\ \mathbf{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, & \mathbf{e}_1\theta_0 &= 0, & \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 &= \cos 2\theta_B, \\ \mathbf{n}_g &= \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \theta, & \mathbf{e}_2\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где θ – угол излучения, отсчитываемый от оси детектора излучения \mathbf{e}_2 , ψ – угол отклонения рассматриваемого электрона в пучке, отсчитываемый от оси электронного пучка \mathbf{e}_1 , θ_0 – угол между направлением распространения падающего фотона и осью \mathbf{e}_1 , $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – Лоренц-фактор электрона. Угловые переменные рассматриваются в виде суммы составляющих параллельных и перпендикулярных плоскости рисунка: $\theta = \theta_{\parallel} + \theta_{\perp}$, $\theta = \theta_{0\parallel} + \theta_{0\perp}$, $\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{0\perp}$. Вектор \mathbf{g} (рис. 1) аналогичен вектору обратной решетки в кристалле – он перпендикулярен слоям мишени и его длина равна $g = \frac{2\pi}{T}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Запишем уравнение для Фурье-образа напряженности электрического поля $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$, которое следует из системы уравнений Максвелла

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0)) \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}) - \omega^2 \sum_g' \chi_{-g} \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}} = 4\pi\omega \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}. \quad (2)$$

Фурье-образ напряженности электрического поля и плотности тока излучающего электрона имеют следующий вид:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = \int dt d^3r \mathbf{E}_{\mathbf{r}, t} \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}} = 2\pi eV \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}).$$

Если $\chi_0(\omega)$ – средняя диэлектрическая восприимчивость периодической слоистой среды, χ_g и χ_{-g} – коэффициенты Фурье разложения диэлектрической восприимчивости по векторам \mathbf{g} :

$$\chi(\omega, \mathbf{r}) = \sum_g \chi_g(\omega) \exp(i\mathbf{g}\mathbf{r}) = \sum_g \chi_g(\omega) \exp(-i\mathbf{g}\mathbf{r}),$$

где $\chi_g = \chi_g'(\omega) + i\chi_g''(\omega)$. Средняя диэлектрическая восприимчивость χ_0 и χ_g в рассматриваемой периодической структуре имеет вид:

$$\chi_0(\omega) = \frac{a}{T}\chi_a + \frac{b}{T}\chi_b + \frac{c}{T}\chi_c, \quad (3)$$

$$\chi_g = \frac{1}{igN} (\chi_c - chi_a + (chi_a - chi_b)e^{iga} + (chi_b - chi_c)e^{-igc}).$$

Излучаемое релятивистским электроном электромагнитное поле в рентгеновском диапазоне частот является практически поперечным, значит Фурье-образы напряженностей электрического поля падающего излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}}$ и дифрагированного излучения $\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}$ в периодической слоистой среде представим в виде:

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} = E_{\omega, \mathbf{k}}^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k}}^{(2)} \mathbf{e}^{(2)}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}} = E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(1)} \mathbf{e}_g^{(1)} + E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(2)} \mathbf{e}_g^{(2)},$$

где векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ перпендикулярны вектору \mathbf{k} , а векторы $\mathbf{e}_g^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(2)}$ перпендикулярны вектору $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}_g^{(2)}$ лежат в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}_g (π -поляризация), а векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}_g^{(1)}$ перпендикулярны ей (σ -поляризация). Векторы поляризации имеют вид:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}_g^{(1)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{g}]}{|\mathbf{k}, \mathbf{g}|}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{e}^{(1)}]}{k}, \quad \mathbf{e}_g^{(2)} = \frac{[\mathbf{k}_g, \mathbf{e}^{(1)}]}{k_g}.$$

Подставим выражения (4) в уравнение (2), получим в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции систему уравнений, которая связывает падающее и дифрагированное электромагнитные поля

$$(k^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega))) E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} - \omega^2 \chi_{-g}(\omega) E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)} C^{(s, \tau)} = 8\pi^2 i\omega e \Omega^{(s)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{V}), \quad (5)$$

$$((\mathbf{k} + \mathbf{g})^2 - \omega^2(1 + \chi_0(\omega))) E_{\omega, \mathbf{k} + \mathbf{g}}^{(s)} - \omega^2 \chi_g(\omega) E_{\omega, \mathbf{k}}^{(s)} C^{(s, \tau)} = 0.$$

В (5) введены следующие обозначения:

$$C^{(s, \tau)} = \mathbf{e}_g^{(s)} \mathbf{e}^{(s)} = (-1)^\tau C^{(s)}, \quad C^{(1)} = 1, \quad C^{(2)} = |\cos 2\theta_B|,$$

$$\Omega^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)} \mathbf{V} = \theta_{\perp} - \phi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \mathbf{e}^{(2)} \mathbf{V} = \theta_{\parallel} + \phi_{\parallel}.$$

Сначала решаем систему уравнений (5) для падающего и дифрагированного полей в периодической слоистой среде. Затем, используя обычные граничные условия, найдем амплитуду Фурье-образа напряженности электрического поля когерентного рентгеновского излучения $E_{\text{Rad}}^{(s)}$. Используя выражение,

описывающее спектрально-угловую плотность распределения фотонов когерентного рентгеновского излучения:

$$\omega \frac{d^2 N^{(s)}}{d\omega d\Omega} = \omega^2 (2\pi)^{-6} \left| E_{\text{Rad}}^{(s)} \right|^2, \quad (6)$$

получим выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ, ДПИ и их интерференцию:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (7)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left| \frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \frac{1 - e^{-iB^{(s)}\Delta_+^{(s)}}}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta_-^{(s)}} \frac{1 - e^{-iB^{(s)}\Delta_-^{(s)}}}{\Delta_-^{(s)}} \right|^2 \quad (8)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0} \right)^2 R_{\text{ДПИ}}^{(s)}, \quad (9)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{(s)} = \varepsilon^2 \left| \frac{e^{-iB^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - e^{iB^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{\Delta^{(s)}} \right|^2, \quad (10)$$

$$\omega \frac{d^2 N_{\text{ИНТ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{\pi^2} \frac{\Omega^{(s)2}}{\Gamma - \chi'_0} \left(\frac{1}{\Gamma - \chi'_0} - \frac{1}{\Gamma} \right) R_{\text{ИНТ}}^{(s)}, \quad (11)$$

$$R_{\text{ИНТ}}^{(s)} = 2\varepsilon \text{Re} \left(\left(\frac{\Omega_+^{(s)}}{\Delta_+^{(s)}} \cdot \frac{1 - e^{-iB^{(s)}\Delta_+^{(s)}}}{\Delta_+^{(s)}} - \frac{\Omega_-^{(s)}}{\Delta_-^{(s)}} \cdot \frac{1 - e^{-iB^{(s)}\Delta_-^{(s)}}}{\Delta_-^{(s)}} \right) \left(\frac{e^{-iB^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - e^{iB^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}}{P_-^{(s)} e^{-iB^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}} - P_+^{(s)} e^{iB^{(s)}\frac{K^{(s)}}{\varepsilon}}} \right)^* \right), \quad (12)$$

где введены обозначения:

$$\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \quad \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}, \quad \Omega_{\pm}^{(s)} = \varepsilon \left((\sigma^{(s)} - i\rho^{(s)}) \cdot e^{-iB^{(s)}\Delta_{\pm}^{(s)}} + \Delta_{\pm}^{(s)} \right),$$

$$\Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2, \quad \sigma^{(s)} = \frac{1}{v^{(s)}|\chi'_0|} (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0|),$$

$$\Delta_{\pm}^{(s)} = \frac{\xi^{(s)} \pm K^{(s)}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} + i \frac{\rho^{(s)}(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}, \quad \chi'_0 = \frac{a}{T}\chi'_a + \frac{b}{T}\chi'_b + \frac{c}{T}\chi'_c = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right),$$

$$P_{\pm}^{(s)} = \xi^{(s)} \pm K^{(s)} - i\rho^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{2}, \quad B^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta + \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}},$$

$$L_{\text{ext}}^{(s)} = \frac{\pi}{C^{(s)} \omega |\chi'_b| \sqrt{(1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi)}},$$

$$K^{(s)} = \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon - i\rho^{(s)}((1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)}\varepsilon) - \rho^{(s)2} \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2}\varepsilon \right)}, \quad \varepsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)},$$

$$\xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 + \varepsilon}{2v^{(s)}}, \quad \eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{V^2 T^2 \omega_B} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{\pi^2} - 1} \right) \right),$$

$$\delta'_1 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_a} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c},$$

$$I_1 = \left(1 + \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} + \left(\frac{a}{b} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_2 = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \right)^{-1},$$

$$\rho_a = \frac{\chi''_a}{|\text{chi}'_b|}, \quad \rho_b = \frac{\chi''_b}{|\text{chi}'_b|}, \quad \rho_c = \frac{\chi''_c}{|\text{chi}'_b|},$$

$$\rho_1 = (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c), \quad \rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c), \quad \rho_3 = (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b).$$

$$v^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{\pi} \sqrt{\left((1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi) \right)} \left| I_2 \left[\frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \frac{\delta'_a b}{\delta'_{ac}} \right] \right|$$

$$\rho^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{\pi} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}{\sqrt{((1 - \delta'_{ab}) \delta'_1 \sin^2(I_1 \pi) + (\delta'_{ab} - 1) \delta'_2 \sin^2(I_2 \pi) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(I_3 \pi))}}$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{\pi} \frac{\sqrt{(\rho_1 \sin^2(I_1 \pi) + \rho_2 \sin^2(I_2 \pi) + \rho_3 \sin^2(I_3 \pi))}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c} \right)^{-1} \rho_c \right|}. \quad (13)$$

Спектральная функция $R_{\text{ПРИ}}^{(s)}$ (8) описывает спектр ПРИ в виде вкладов двух ветвей возбужденных рентгеновских волн ПРИ и их интерференцию. Вклад первой и второй ветви в спектр ПРИ будет существенен, когда соответственно выполняются приближенные равенства: $\text{Re}(\Delta_+^{(s)}) \approx 0$ и $\text{Re}(\Delta_-^{(s)}) \approx 0$. При слабом поглощении рентгеновских волн ($\rho^{(s)} \ll 1$) получим уравнения:

$$\text{Re}(\Delta_+^{(s)}) \approx \frac{\xi^{(s)}(\omega) + \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} = 0, \quad (14)$$

$$\text{Re}(\Delta_-^{(s)}) \approx \frac{\xi^{(s)}(\omega) - \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} = 0. \quad (15)$$

Решение уравнений (14) и (15) определяет частоту фотона излучения ω^* , в окрестности которой сосредоточен спектр фотонов ПРИ, излучаемых под фиксированным углом θ относительно оси детектора, оно имеет вид:

$$\xi^{(s)*}(\omega^*) = \sqrt{\varepsilon} + \frac{(\sigma^{(s)} \sqrt{\varepsilon} - 1)^2}{2\sigma^{(s)}}. \quad (16)$$

Заметим, что максимум спектра ПРИ всегда расположен вне области полного отражения (экстинкции) рентгеновских волн в слоистой среде: $\xi^{(s)*}(\omega) > \sqrt{\varepsilon}$. Это область интерференционного поглощения рентгеновских волн, которое происходит даже в отсутствии фотопоглощения. Длина волнового вектора $k = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \lambda_0$ падающих в слоистой среде фотонов при отсутствии фотопоглощения рентгеновского излучения ($\rho^{(s)} = 0$) имеет вид:

$$k^{(1,2)} = \omega \sqrt{1 + \chi_0} + \frac{1}{2\varepsilon L_{\text{ext}}^{(s)}} \left(\xi^{(s)} \mp \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} \right). \quad (17)$$

Область полного отражения определяется отрицательностью подкоренного выражения в (17), то есть определяется неравенством:

$$-\sqrt{\varepsilon} < \xi^{(s)}(\omega) < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{или} \quad -\sqrt{\varepsilon} - \frac{1 + \varepsilon}{2\nu^{(s)}} < \eta^{(s)}(\omega) < \sqrt{\varepsilon} - \frac{1 + \varepsilon}{2\nu^{(s)}}. \quad (18)$$

Из неравенства (18) следует, что ширина области полного внешнего отражения рентгеновского излучения определяется величиной $2\sqrt{\varepsilon}$ и зависит от параметра асимметрии ε , который определяет асимметрию отражения поля электрона относительно поверхности мишени. Уравнения (14) и (15) разрешимы соответственно при условиях: $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)2}$ и $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)2}$. При условии $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)2}$ вклад в ПРИ будет давать только первая ветвь ПРИ, а при $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)2}$ только вторая ветвь. Отметим, что всегда выполняется неравенство $\sigma^{(s)} > 1$. Тогда в случае симметричного отражения, когда параметр асимметрии принимает значение $\varepsilon = 1$ и слои параллельны поверхности мишени, вклад в ПРИ будет давать только первая ветвь. Анализ показал, что при увеличении параметра асимметрии $\varepsilon > 1$ спектрально-угловая плотность ПРИ будет только расти, за счет увеличения ширины спектра ПРИ. При этом спектрально-угловая плотность второй ветви ПРИ при условии $\varepsilon < 1/\sigma^{(s)2}$ пренебрежимо мала по сравнению со спектрально-угловой плотностью первой ветви ПРИ при условии $\varepsilon > 1/\sigma^{(s)2}$. В связи с этим в настоящей работе ограничимся рассмотрением первой ветви ПРИ.

Для рассматриваемых рентгеновских волн коэффициент поглощения в периодической слоистой среде намного меньше единицы $\rho^{(s)} \ll 1$. Вычисляя спектральную функцию (8), оставив только первое слагаемое, получим выражение:

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \frac{G^{(s)}}{F^{(s)} \cdot D^{(s)}} \left(\left(1 - e^{-\frac{F_2 + \rho}{\varepsilon} B^{(s)}} \right)^2 + 4e^{-\frac{F_2 + \rho}{\varepsilon} B^{(s)}} \cdot \sin \left(\frac{D_0^{(s)}}{2} B^{(s)} \right)^2 \right). \quad (19)$$

В выражении (19) введены обозначения:

$$G^{(s)} = \varepsilon^2 \left((\sigma^{(s)2} + \rho^{(s)2}) e^{2\frac{F_1 - \rho^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)}} + D^{(s)} + 2 \left(\left(\sigma^{(s)} D_0^{(s)} + \rho^{(s)} \frac{F_2^{(s)} + \rho^{(s)}}{\varepsilon} \right) \right) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \cos \left(\frac{\sum_2^{(s)} - \varepsilon \sigma^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)} \right) - \left(\rho^{(s)} D_0^{(s)} - \sigma^{(s)} \left(\frac{F_2^{(s)} + \rho^{(s)}}{\varepsilon} \right) \right) \sin \left(\frac{\sum_2^{(s)} - \varepsilon \sigma^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)} \right) e^{\frac{F_1^{(s)} - \rho^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)}}, \\
 & F^{(s)} = \left[\sum_2^{(s)2} + F_2^2 \right] e^{-2 \frac{F_2 + \rho}{\varepsilon} B^{(s)}} + \left[\sum_1^{(s)2} + F_1^2 \right] e^{2 \frac{F_1 - \rho}{\varepsilon} B^{(s)}} - 2 e^{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho^{(s)} B^{(s)}} \times \\
 & \quad \times \left(\left[\sum_1^{(s)} \sum_2^{(s)} - F_1^{(s)} F_2^{(s)} \right] \cos \left(\frac{2B^{(s)} (\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_\rho^{(s)})}{\varepsilon} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left[F_1^{(s)} \sum_2^{(s)} + F_2^{(s)} \sum_1^{(s)} \right] \sin \left(\frac{2B^{(s)} (\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_\rho^{(s)})}{\varepsilon} \right) \right), \\
 & D^{(s)} = D_0^{(s)2} + \left(\frac{F_2 + \rho}{\varepsilon} \right)^2, \quad D_0^{(s)} = \frac{\xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} - \varepsilon \sigma^{(s)} + F_\rho}{\varepsilon}, \\
 & F_{1,2}^{(s)} = \frac{\rho^{(s)}}{2} \left(\frac{(1 + \varepsilon)(\xi^{(s)} \pm \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} - 2\kappa^{(s)} \varepsilon)}{\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon}} \right), \quad F_\rho^{(s)} = \frac{\rho^{(s)2}}{2\sqrt{|\xi^{(s)2} - \varepsilon|}} \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2}{4} - \kappa^{(s)2} \varepsilon \right), \\
 & \sum_1^{(s)} = \xi^{(s)} + \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_\rho^{(s)}, \quad \sum_2^{(s)} = \xi^{(s)} - \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} - F_\rho^{(s)}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

Вычислим также спектральную функцию ДПИ (10) для случаев, когда спектральная переменная принимает значения из промежутков $\xi^{(s)}(\omega)^2 > \varepsilon$ и $\xi^{(s)}(\omega)^2 < \varepsilon$. Выражения для спектра дифрагированного переходного излучения в периодической слоистой среде принимают вид:

$$R_{\text{ДПИ}}^{\xi^2 > \varepsilon} = \varepsilon^2 \cdot \frac{e^{-2 \frac{N^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)}} + e^{2 \frac{N^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)}} - 2 \cdot \cos \left(\frac{2}{\varepsilon} (\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_\rho^{(s)}) B^{(s)} \right)}{M_1^{(s)}}, \tag{21}$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{\xi^2 < \varepsilon} = \varepsilon^2 \cdot \frac{e^{2 \frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2} + F_\rho^{(s)}}}{\varepsilon} B^{(s)}} + e^{-2 \frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2} + F_\rho^{(s)}}}{\varepsilon} B^{(s)}} - 2 \cdot \cos \left(\frac{2N^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)} \right)}{M_2^{(s)}}. \tag{22}$$

В выражениях (21) и (22) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 & M_1^{(s)} = \left[\sum_2^{(s)2} + F_2^2 \right] e^{-2 \frac{N^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)}} + \left[\sum_1^{(s)2} + F_1^2 \right] e^{2 \frac{N^{(s)}}{\varepsilon} B^{(s)}} - \\
 & - 2 \left[\sum_1^{(s)} \sum_2^{(s)} + F_1^{(s)} F_2^{(s)} \right] \cos \left(\frac{2B^{(s)} (\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_\rho^{(s)})}{\varepsilon} \right) - \\
 & - 2 \left[2N^{(s)} \xi^{(s)} - \rho^{(s)} (1 + \varepsilon) \sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} \right] \sin \left(\frac{2B^{(s)} (\sqrt{\xi^{(s)2} - \varepsilon} + F_\rho^{(s)})}{\varepsilon} \right) \\
 & M_2^{(s)} = \left[(\xi^{(s)} + N^{(s)})^2 + N_1^{(s)2} \right] e^{2B^{(s)} \frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}}}{\varepsilon}} + \left[(\xi^{(s)} - N^{(s)})^2 + N_2^{(s)2} \right] e^{-2B^{(s)} \frac{\sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}}}{\varepsilon}} - \\
 & - 2 \left[\xi^{(s)2} - N^{(s)2} - N_1^{(s)} N_2^{(s)} \right] \cos \left(2B^{(s)} \frac{N^{(s)}}{\varepsilon} \right) + + 2 \left[2\xi^{(s)} \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}} - \rho^{(s)} (1 + \varepsilon) N^{(s)} \right] \sin \left(2B^{(s)} \frac{N^{(s)}}{\varepsilon} \right), \\
 & N^{(s)} = \frac{\rho^{(s)}}{2} \left(\frac{(1 + \varepsilon)\xi^{(s)} - 2\kappa^{(s)} \varepsilon}{\sqrt{|\xi^{(s)2} - \varepsilon|}} \right), \quad N_1^{(s)} = \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}} + \rho^{(s)} \frac{\varepsilon + 1}{2}, \quad N_2^{(s)} = \sqrt{\varepsilon - \xi^{(s)2}} - \rho^{(s)} \frac{\varepsilon + 1}{2}. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Необходимо сказать, что в случае $\xi^{(s)}(\omega)^2 \approx \varepsilon$ необходимо пользоваться комплексной формулой (10). Так как пик спектра ПРИ находится в области $\xi^{(s)}(\omega) > \sqrt{\varepsilon}$, а ширина пика ДПИ определяется интервалом $-\sqrt{\varepsilon} < \xi^{(s)}(\omega) < \sqrt{\varepsilon}$, то интерференция между ПРИ и ДПИ будет пренебрежимо мала. В случае необходимости ее оценки вклада в суммарную спектрально-угловую КРИ можно воспользоваться формулой (11).

Следует также отметить, что полученные действительные выражения для спектральных функций (19), (21) и (22) являются главным результатом настоящей работы. Они позволяют во много раз быстрее проводить вычисления, чем комплексные выражения для спектров (7) и (9). Необходимо отметить, что

выражения получены с учетом фотопоглощения рентгеновского излучения средой, а также с учетом асимметрии отражения поля электрона относительно поверхности мишени.

Проведем интегрирование выражений (7) и (9) по частоте ω , используя отношение: $\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{v^{(s)}|\chi'_0|}{2\sin^2\theta}d\eta^{(s)}$, следующее из $\eta^{(s)}(\omega)$. Получим выражения, описывающие угловые плотности ПРИ и ДПИ:

$$\frac{d^2N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp}d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2v^{(s)}|\chi'_0|}{2\pi^2\sin^2\theta} \frac{\Omega^{(s)2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} \int_{\sqrt{\epsilon - \frac{1+\epsilon}{2v^{(s)}}}}^{\infty} R_{\text{ПРИ}}^{(s)} d\eta^{(s)}, \quad (24)$$

$$\frac{d^2N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\theta_{\perp}d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2v^{(s)}|\chi'_0|}{2\pi^2\sin^2\theta} \Omega^{(s)2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0} \right) \int_{\infty}^{\infty} R_{\text{ДПИ}}^{(s)} d\eta^{(s)}, \quad (25)$$

$$\Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2.$$

3. Численные расчеты. Далее на основе полученных выражений проведем численные расчеты и исследуем спектрально-угловые и угловые плотности ПРИ и ДПИ. Положим угол между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями (угол Брэгга) $\theta_B = 2.25^\circ$, при этом частота Брэгга $\omega_B = 8\text{кэВ}$. Период слоистой среды положим равным $T = a + b + c = 0.002\text{ мкм}$. Действительную часть диэлектрической восприимчивости положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi'_b = -2.25 \cdot 10^{-5}$. Вычисления проведем для значения параметра $s = 1$ (σ -поляризация).

На рис. 2 представлена геометрия когерентного рентгеновского излучения при асимметричной дифракции.

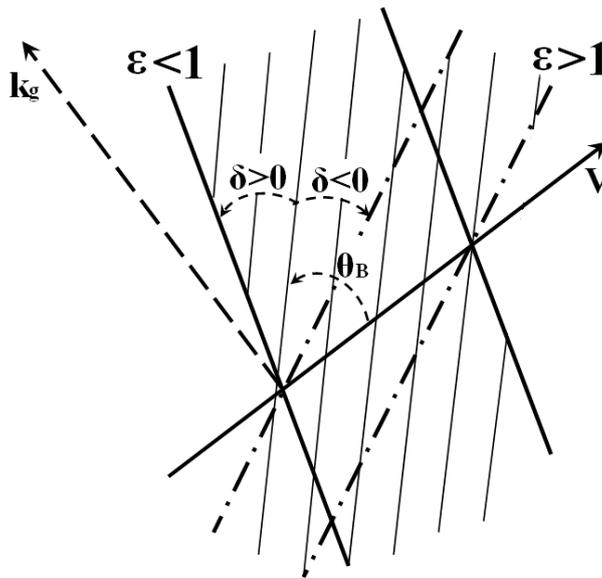


Рис. 2. Асимметричные ($\epsilon > 1$, $\epsilon < 1$) отражения излучения от слоистой структуры в геометрии рассеяния Брэгга.

Случай $\epsilon = 1$ ($\sigma = 0$) соответствует симметричному отражению.

$$\text{Параметр асимметрии: } \epsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}$$

Fig. 2. Asymmetric ($\epsilon > 1$, $\epsilon < 1$) reflections of radiation from a layered structure in Bragg scattering geometry.

The case $\epsilon = 1$ ($\sigma = 0$) corresponds to symmetric reflection.

$$\text{Asymmetry parameter: } \epsilon = \frac{\sin(\theta_B - \delta)}{\sin(\theta_B + \delta)}$$

Из рисунка следует, что при фиксированном пути электрона в мишени, при увеличении параметра асимметрии ϵ длина пути излученных фотонов уменьшается. В случае уменьшения параметра асимметрии ϵ длина пути излученного фотона растет, и в случае поглощающей среды интенсивность излучения будет падать.

На рис. 3 представлены кривые, построенные по формулам (7) и (19) описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ при фиксированном угле наблюдения. Отметим, что на следующих рисунках параметры такие же, как на рис. 3, если нет указания к другим значениям параметров на рисунках. Кривые построены для различной асимметрии отражения, которая определяется параметром ϵ . Из рисунка следует существенное увеличение спектрально-угловой плотности ПРИ при увеличении параметра асимметрии, что приводит к значительному росту угловой плотности ПРИ.

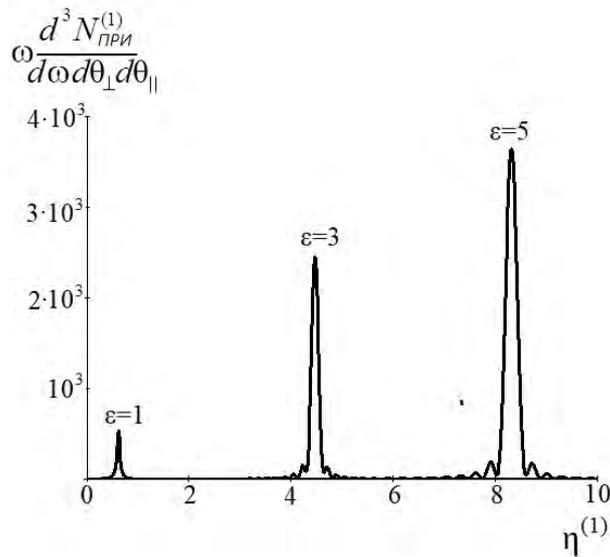


Рис. 3. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных значениях параметра асимметрии ϵ .

Параметры: $\delta'_{ab} = 3, \delta'_{ac} = 0.5, \frac{a}{b} = 1, \frac{a}{c} = 1,$
 $\rho_a = 0.1, \rho_b = 0.05, \rho_c = 0.08, \rho^{(1)} = 0.064, \gamma = 500, B^{(1)} = 55, \theta_{\perp} = 10\text{mrad}, \theta_{\parallel} = 0$
 Fig. 3. Spectral-angular densities of PXR for different values of the asymmetry parameter ϵ .
 Parameters: $\delta'_{ab} = 3, \delta'_{ac} = 0.5, \frac{a}{b} = 1, \frac{a}{c} = 1,$
 $\rho_a = 0.1, \rho_b = 0.05, \rho_c = 0.08, \rho^{(1)} = 0.064, \gamma = 500, B^{(1)} = 55, \theta_{\perp} = 10\text{mrad}, \theta_{\parallel} = 0$

Кривые, построенные по формуле (24), описывающие угловую плотность ПРИ при различных асимметриях отражения, представлены на рис. 4.

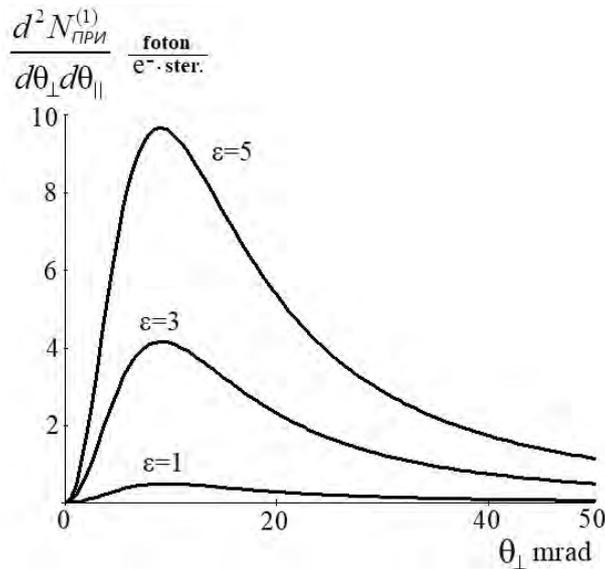


Рис. 4. Угловые плотности ПРИ для различных асимметрий отражения
 Fig. 4. Angular densities of PXR for different reflection asymmetries

Значительный рост спектрально-угловой и угловой плотности ПРИ при увеличении параметра асимметрии ϵ возникает по двум причинам. Первой причиной является то, что при увеличении параметра асимметрии ϵ уменьшается длина пути и как следствие фотопоглощения рентгеновского излучения. Если положить, что фотопоглощения нет, то есть параметр поглощения равен нулю $\rho^{(1)} = 0$, то амплитуда спектра будет одинаковой при разных асимметриях, что демонстрируют кривые, представленные на рис. 5.

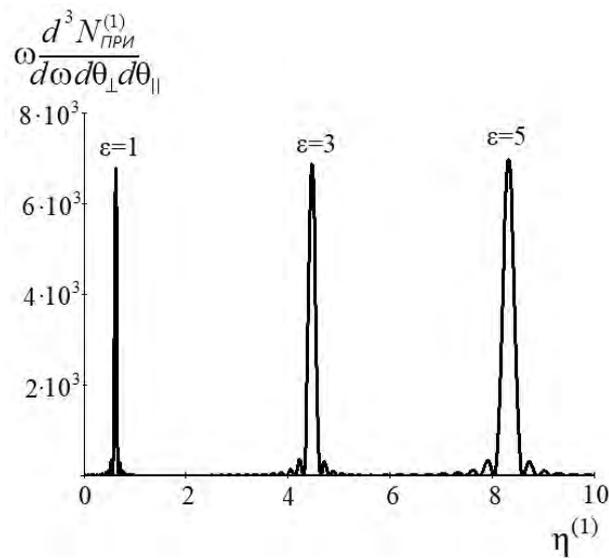


Рис. 5. То же, что на рис. 3, но при отсутствии фотопоглощения рентгеновского излучения: $\rho^{(1)} = 0$
 Fig. 5. Same as in Fig. 3, but in the absence of photoabsorption of X-ray radiation: $\rho^{(1)} = 0$

При этом ширина пиков спектра ПРИ остаётся разной. Таким образом, ширина спектра ПРИ увеличивается при увеличении параметра ε . Это связано с тем, что резонансное условие (14):

$$\frac{\xi^{(s)}(\omega) + \sqrt{\xi^{(s)}(\omega)^2 - \varepsilon}}{\varepsilon} - \sigma^{(s)} = 0,$$

зависит от параметра асимметрии ε . При увеличении параметра ε резонансное условие меняется медленнее с изменением частоты излучения ω , поэтому ширина спектра ПРИ растёт.

На рис. 6 представлены кривые, построенные по формулам (9), (21), (22), описывающие спектрально-угловую плотность ДПИ при фиксированном угле наблюдения.

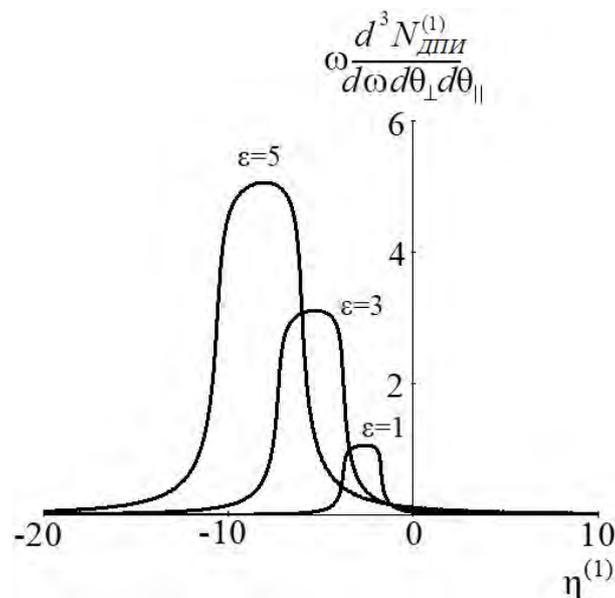


Рис. 6. Спектрально-угловые плотности ДПИ при различных значениях параметра асимметрии
 Угол наблюдения: $\theta_{\perp} = 2\text{mrad}$, $\theta_{\parallel} = 0$
 Fig. 6. Spectral-angular densities of the DPI for different values of the asymmetry parameter.
 Observation angle: $\theta_{\perp} = 2\text{mrad}$, $\theta_{\parallel} = 0$

Кривые демонстрируют рост спектрально-угловой плотности ДПИ при увеличении параметра ε , при этом также значительно растёт угловая плотность ДПИ (рис. 7).

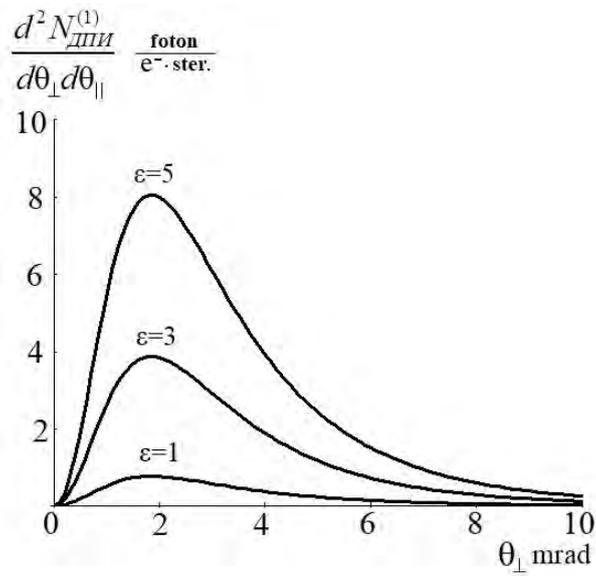


Рис. 7. Угловые плотности ДПИ для различных асимметрий отражения
 Fig. 7. Angular densities of the DPI for different reflection asymmetries

На рис. 8 представлены кривые, описывающие зависимость значений параметра $\kappa^{(1)}$ от отношения толщин первого и второго слоев $\frac{a}{b}$. Этот параметр определяет расположение в слоистой среде пучностей двух стоячих волн, которые образуются в результате сложения падающих и дифрагированных волн рентгеновского излучения.

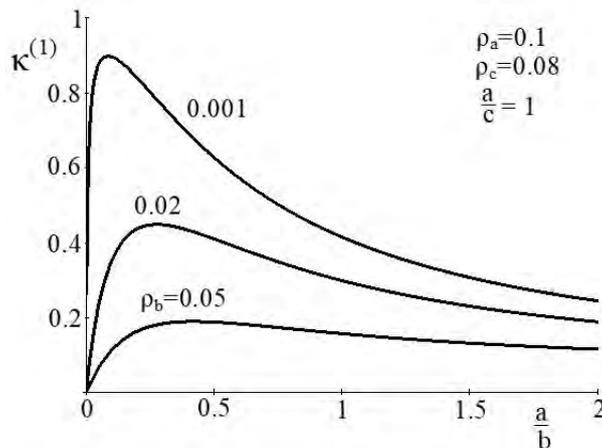


Рис. 8. Зависимость параметра $\kappa^{(1)}$, определяющего расположение стоячей волны в слоистой структуре, от соотношения толщин слоев $\frac{a}{b}$
 Fig. 8. Dependence of the parameter $\kappa^{(1)}$, which determines the location of the standing wave in the layered structure, on the ratio of the layer thicknesses $\frac{a}{b}$

На рис. 9 сплошной кривой и пунктирной продемонстрировано расположение двух стоячих рентгеновских волн в рассматриваемой трехслойной среде и для сравнения в двухслойной периодической среде. Каждая стоячая волна соответствует первой и второй ветви ПРИ. В случае, когда параметр $\kappa^{(s)}$ близок к единице $\kappa^{(s)} \approx 1$, стоячая волна расположена в слоистой среде таким образом, что ее максимумы пучности для одной ветви решения дисперсионного соотношения находятся на слое, где электронная плотность минимальная, а для второй ветви пучности находятся на слое, где электронная плотность максимальна. Этот эффект аналогичен эффекту Бормана в монокристалле [19], и он может позволить существенно увеличить интенсивность когерентного рентгеновского излучения релятивистского электрона в периодической слоистой среде. Для рассеяния свободных рентгеновских волн в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде проявление эффекта Бормана было рассмотрено в работе [20].

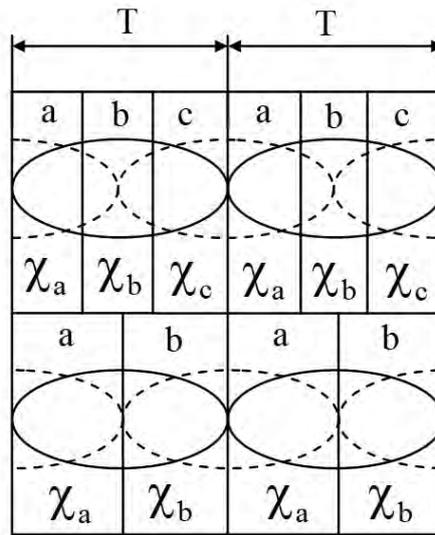


Рис. 9. Расположение двух стоячих рентгеновских волн в периодической слоистой среде для трех (a, b, c) и двух (a, b) различных слоев на периоде T

Fig. 9. Arrangement of two standing X-ray waves in a periodic layered medium, for three (a, b, c) and two (a, b) different layers over the period T

Из рис. 8 следует, что если в трехслойной структуре они будут расположены как показано на рисунке, и если второй слой толщиной b имеет минимальную электронную плотность, то будет уменьшаться поглощение рентгеновских волн (аномально слабое поглощение). При этом уменьшение параметра ρ_b , то есть уменьшение электронной плотности, приводит к увеличению максимума функции $\kappa^{(1)}$, как показано на рис. 8. Из этого же рисунка следует, что уменьшение отношения $\frac{a}{b}$ также приводит к увеличению максимума функции $\kappa^{(1)}$.

На рис. 10 представлены кривые, описывающие угловую плотность ПРИ для различных поглощений второго слоя.

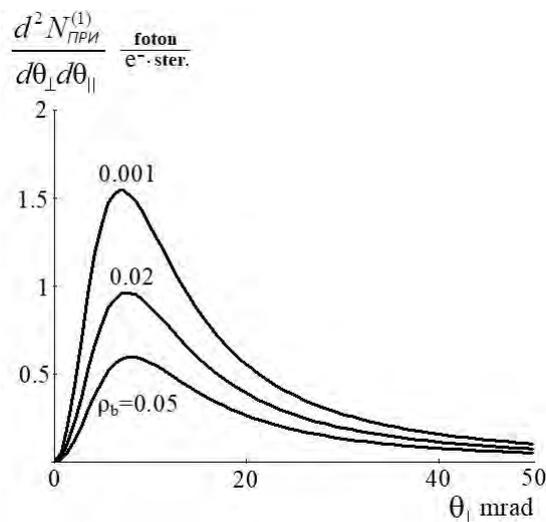


Рис. 10. Проявление эффекта аномального фотопоглощения в периодической слоистой среде.

Динамический эффект аналогичен эффекту Бормана в монокристалле. Параметры: $\frac{a}{b} = 0.25$

Fig. 10. Manifestation of the anomalous photoabsorption effect in a periodic layered medium.

The dynamic effect is analogous to the Bormann effect in a single crystal. Parameters: $\frac{a}{b} = 0.25$

Из рисунка следует, что уменьшение поглощения второго слоя, через который и происходит перенос энергии когерентного рентгеновского излучения, приводит к значительному уменьшению фотопоглощения излучения. Этот эффект аналогичен эффекту Бормана в монокристалле.

4. Заключение. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Получены выражения, описывающие спектрально-угловую и угловую плотность ПРИ и ДПИ в такой структуре. Показано увеличение спектрально-угловой плотности ПРИ при увеличении параметра асимметрии ϵ , что приводит к значительному росту угловой плотности ПРИ. Показан рост спектрально-угловой и угловой плотности

ДПИ при увеличении параметра асимметрии ε . Показано, что уменьшение поглощения второго слоя в рассматриваемой структуре при определенных условиях приводит к значительному увеличению угловой плотности ПРИ. Этот эффект аналогичен эффекту Бормана в монокристалле и связан с тем, что пучности стоячей в периодической слоистой среде волны находятся на втором слабо поглощающем слое.

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68:036504.
2. Garibian G.M. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics, JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Physics, JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of X-rays. *Physical Review A – APS Journals* 1989;40:4322.
5. Nasonov N.N. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148.
6. Kaplin V.V. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. *Applied Physics Letters*. 2000;24:3647–3649.
7. Blazhevich S.V., Kolosova I.V. and Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547–554.
8. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods. B*. 2013;309:70–75.
9. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011. 216 p.
10. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S. et al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224–230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148.
15. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007.
16. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835.
17. Носков А.В., Блажевич С.В., Чуева А.И., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):59–67.
18. Носков А.В., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К., Пугина П.Д., Пирматова М.Д. Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):279-0289.
19. Borrmann G. Uber Extinktionsdiagramme der Rontgenstrahlen von Quarz. *Physikalische Zeitschrift*. 1941;42:157.
20. Blazhevich S.V., Gorlov A.S., Noskov A.V., and Chuyeva A. I. Dynamic Scattering of X-Rays in a Periodic Layered Medium. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2024;18(6): 1662–1669.

References

1. Nasonov NN., Kaplin VV., Uglov SR., Piestrup MA. and Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68:036504.
2. Garibian GM. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics, JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Physics, JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of X-rays. *Physical Review A – APS Journals* 1989;40:4322.
5. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148.

6. Kaplin VV. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. *Applied Physics Letters*. 2000;24:3647–3649.
7. Blazhevich SV., Kolosova IV. and Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547–554.
8. Blazhevich SV., Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods*. 2013;309:70–75.
9. Potylitsyn A. *Electromagnetic Radiation of Electrons in Periodic Structures*. Springer. 2011. 216 p.
10. Uglov SR., Kaplin VV., Kubankin AS. et. al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev MV., Uglov SR., Vukolov AV. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin JS., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224–230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong LJ., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148.
15. Noskov AV., Blazhevich SV. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(7):P07007.
16. Noskov AV., Blazhevich SV. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835.
17. Noskov AV., Blazhevich SV., Chueva AI., Machukaev DD., Kipersha VK. The influence of asymmetric diffraction on the spectral-angular density of the CRI of a relativistic electron in a three-layer structure. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(1):59–67 (In Russ.).
18. Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugina PD., Pirmatova MD. The Influence of Electron Beam Divergence on the CXR in a Periodic Layered Medium With Three Layers Per Period. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):279–289 (In Russ.).
19. Borrmann G. Uber Extinktionsdiagramme der Rontgenstrahlen von Quarz. *Physikalische Zeitschrift*. 1941;42:157.
20. Blazhevich S.V., Gorlov A.S., Noskov A.V., and Chuyeva A. I. Dynamic Scattering of X-Rays in a Periodic Layered Medium. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*. 2024;18(6): 1662–1669.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 22.12.2025

Поступила после рецензирования 13.02.2026

Принята к публикации 17.02.2026

Received December 22, 2025

Revised February 13, 2026

Accepted February 17, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Чуева Анастасия Игоревна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Anastasia I. Chueva – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)