

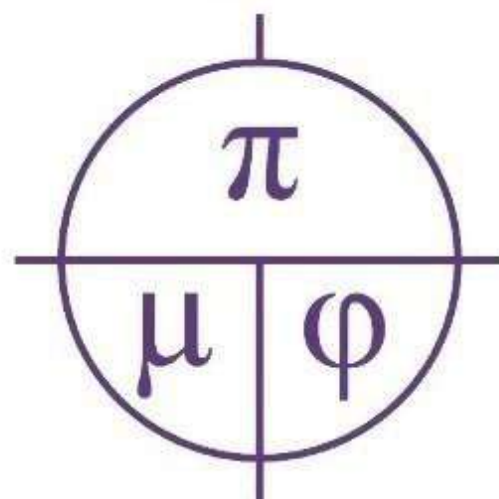


Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2026. Том 58, № 2





Прикладная математика & Физика

2026. Том 58, № 2

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

А. В. Глушак, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

- | | |
|---|--|
| Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан; | Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия; |
| Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия; | Никуличева Т. Б., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; |
| Ашъралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан; | Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия; |
| Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия; |
| Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика; | Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия; | Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; |
| Каримов Ш.Т. д. ф.-м. н., Фергана, Узбекистан; | Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия; | Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия; | Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия; |
| Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия; |
| Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия; | Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; |
| Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия; | Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия. |
| Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия; | |

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 10,9

Дата выхода 30.06.2026.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Валовик Д. В.

Метод возмущений в задаче о распространении суперпозиции двух электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой 113

Поздняков А. А.

Низкочастотный спектр задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе 130

Кервенева К. Е., Мамунова Т. Р.

Усреднение уравнения Лаврентьева – Бицадзе в области, периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения 137

Бекмаганбетов К. А., Чепьжов В. В., Чечкин Г. А.

Об усреднении аттракторов двумерной системы Навье – Стокса в периодическом слое с мелкими препятствиями 147

Иванова М. С.

Теоретические основы задачи нахождения пространственных координат подвижного объекта 157

Расулов А. Б., Капицына Т. В., Тарасова О. А.

Краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости с особенностью в младшем коэффициенте 168

Якивчик Н. В.

Об одном нелинейном уравнении Коши – Римана с особенностью в младшем коэффициенте 176

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Зенюк Д. А.

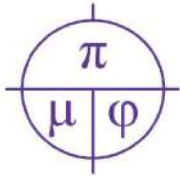
Модель случайного блуждания с сильной памятью 183

Колесников Д. А., Кучеев С. И.

Визуализация в жидкокристаллической ячейке распределения заряда, имплантированного в SiO₂/Si фокусированным ионным пучком 195

Малай Н. В., Сохань П. В.

Особенности термофоретического движения крупной испаряющейся капли в бинарной газовой смеси при малых относительных перепадах температуры 206



Applied Mathematics & Physics

2026. Volume 58, No 2

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics (Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

A. V. Glushak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;
Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;
Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;
Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;
Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;
Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;
Zhukovskiy E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;
Karimov Sh.T., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Fergana, Uzbekistan;
Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;
Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia
Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;
Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;
Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;
Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;
Nikulicheva T.B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;
Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;
Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;
Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;
Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;
Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;
Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;
Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;
Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;
Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;
Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;
Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Mass media registration certificate

EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

Typeface Times. Publisher's signature 10,9

Date of publishing 30.06.2026.

The layout is presented by Printing production center
Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

© Belgorod National Research University, 2026

CONTENTS

MATHEMATICS

Valovik D. V.

A Perturbation Method in a Problem of Propagation of a Sum of Two Electromagnetic Waves in a Plane Layer Filled With a Nonlinear Medium **113**

Pozdnyakov A. A.

Low-frequency Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Metric Graph..... **130**

Kervenev K. E., Mamunova T. R.

Homogenization of Lavrentiev – Bitsadze Equation in a Domain Periodically Perforated Along the Line of the Equation Type Change **137**

Bekmaganbetov K. A., Chepyzhov V. V., Chechkin G. A.

On Homogenization of Attractors to Two-Dimensional Navier – Stokes System in Periodic Layer with Small Obstacles **147**

Ivanova M. S.

Theoretical Foundations of the Problem of Determining Spatial Coordinates of a Moving Object **157**

Rasulov A. B., Kapitsyna T. V., Tarasova O. A.

A Boundary Value Problem for the Laplace Equation on a Plane with a Peculiarity in the Least Coefficient **168**

Yakivchik N. V.

On One Type of Nonlinear Cauchy – Riemann Equation with a Singularity in the Lowest Coefficient **176**

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Zenyuk D. A.

A Random Walk with Strong Memory **183**

Kolesnikov D. A., Kucheev S. I.

Distribution Imaging of Charge Implanted into SiO₂/Si using a Focused Ion Beam by a Liquid Crystal Cell **195**

Malai N. V., Sohan P. V.

Features of the Thermophoretic Motion of a Large Evaporating Droplet in a Binary Gas Mixture at Small Relative Temperature Differences **206**

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.927.4
MSC 34E10, 34L20, 34B15, 78A60, 78A50
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-113-129
EDN SGMZTP

Метод возмущений в задаче о распространении суперпозиции двух электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой

Валовик Д. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Пензенский государственный университет,
Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40

dvalovik@mail.ru

Аннотация. В работе предложен метод возмущений для доказательства существования, в том числе нелинеаризуемых решений, в задаче о распространении суперпозиции двух монохроматических электромагнитных волн. Волны распространяются в плоском слое, заполненном диэлектриком с керровской нелинейностью. Физическая задача сведена к нелинейной двухпараметрической задаче на собственные значения для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на отрезке с краевыми условиями третьего рода и двумя дополнительными локальными условиями. В качестве невозмущенной рассматривается пара нелинейных задач (для каждой из волн в суперпозиции), имеющих нелинеаризуемые решения. Предложенный метод возмущений может найти приложения в области нелинейной математической физики, в частности в теории нелинейных колебаний.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, многопараметрическая задача на собственные значения, нелинеаризуемое решение, связанная нелинейная распространяющаяся волна, метод возмущения, плоский волновод, нелинейная диэлектрическая проницаемость

Финансирование: Исследование поддержано РФФ, проект № 25-71-10036.

Для цитирования: Валовик Д.В. Метод возмущений в задаче о распространении суперпозиции двух электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):113–129. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-113-129 EDN SGMZTP

Original Research

A Perturbation Method in a Problem of Propagation of a Sum of Two Electromagnetic Waves in a Plane Layer Filled With a Nonlinear Medium

Dmitry V. Valovik 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Penza State University,
40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia

dvalovik@mail.ru

Abstract. The article deals with a problem of propagation of an electromagnetic two-frequency wave in a plane nonlinear waveguide (the nonlinearity is of Kerr type). The permittivity of the waveguide is perturbed in its nonlinear term. The problem reduces to a nonlinear two-parameter eigenvalue problem for Maxwell's equations. We prove existence of nonlinearizable solutions to the problem. The proof is based on applying of a novel unstandard perturbation approach. The developed approach has a potential to be used in the theory of nonlinear oscillations and vibrations.

Keywords: Maxwell's Equations, Multiparameter Eigenvalue Problem, Nonlinearizable Solution, Coupled Nonlinear Guided Wave, Perturbation Method, Plane Waveguide, Nonlinear Permittivity

Funding: The work is supported by RSF, project no. 25-71-10036.

For citation: Valovik DV. A Perturbation Method in a Problem of Propagation of a Sum of Two Electromagnetic Waves in a Plane Layer Filled With a Nonlinear Medium. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):113–129. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-113-129 EDN SGMZTP

1. Введение. В статье изучается задача о распространении электромагнитных волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой. Электромагнитная волна представляет собой сумму двух монохроматических волн (частоты этих волн, вообще говоря, различны): ТЕ-волны и ТМ-волны. Диэлектрическая проницаемость волновода нелинейно зависит от поля по закону Керра, в нелинейной части диэлектрической проницаемости присутствует возмущение нелинейными слагаемыми. Искомыми являются

вещественные параметры, определяющие режим волноводного распространения нелинейной (связанной) волны. В электродинамике такие параметры называются постоянными распространения [1]. Поскольку связанная волна состоит из двух слагаемых, то искомым параметров тоже два.

Кратко обсудим математический подход к обсуждаемой физической задаче. Из этого обсуждения будет понятно, как работает подход на уровне идеи. Кроме этого, из такого «грубого» описания читатель сразу сможет понять, возможно ли применить эти идеи к интересующим его задачам.

Итак, рассмотрим две задачи: нелинейную задачу $R(\alpha)$, где α – набор параметров, и ее линеаризацию $R(0)$. Широко известный и в некотором смысле классический подход, см., например, [2], заключается в следующем. Если задача $R(0)$ имеет решение u_0 , то в достаточно широких предположениях задача $R(\alpha)$ также имеет решение u_α как только $|\alpha|$ достаточно мало и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha = u_0$.

Описанный подход имеет как преимущества, так и недостатки. Основное преимущество заключается в том, что возможно доказать существование решений нелинейной задачи, когда другие методы этого сделать не позволяют. Недостатки, однако, представляются куда более серьезными. Во-первых, нелинейная задача имеет нелинеаризуемые решения, то есть решения, которые не переходят в решения линеаризованной задачи при $\alpha \rightarrow 0$ (сюда же мы включаем нелинейные задачи, линеаризации которых вовсе не имеют решений, пример см. в [3]). Ясно, что с помощью обсуждаемого подхода такие решения не найти. Отметим, что задачи, имеющие нелинеаризуемые решения, встречаются в теории оптических нелинейных волноводов, см., например, [4, 5, 6, 7]. Во-вторых, если доказано существование возмущенного решения u_α задачи $R(\alpha)$ для достаточно малого $|\alpha|$, то, это позволяет «навести» математическую строгость, но как правило, не добавляет понимания в изучении именно нелинейного явления. Очевидно, если задача $R(0)$ имеет решение, то внесение малого регулярного возмущения в задачу $R(0)$ лишь трансформирует ее решение u_0 в решение u_α (это решение, естественно, не может сильно отличаться от u_0 , если $|\alpha|$ достаточно мало).

В настоящей статье мы рассмотрим более сложный случай – нелинейную задачу, в которой можно вычленив более простые, но нелинейные, подзадачи, которые с одной стороны наследуют некоторые отличительные свойства исходной задачи и могут быть приняты в качестве невозмущенных, а с другой стороны, могут быть эффективно исследованы.

Рассмотрим нелинейную задачу $R(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ – некоторый набор параметров. В операторной форме обозначим эту задачу $\mathcal{R}(\mathbf{u}; \lambda, \alpha) = 0$, где \mathcal{R} – нелинейная оператор-функция по \mathbf{u} , \mathbf{u} – в общем случае вектор-функция, λ – еще один набор параметров (например, спектральных, как в рассмотренном здесь случае). Мы считаем, что задача $R(0)$, где $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, линейная.

Если существует решение $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0(x; \lambda)$ задачи $R(0)$, то в достаточно широких предположениях относительно \mathcal{R} и как только $|\alpha|$ достаточно мало, можно доказать, что задача $R(\alpha)$ также имеет решение $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_\alpha(x; \lambda)$ и $\mathbf{u}_\alpha(x; \lambda) \rightarrow \mathbf{u}_0(x; \lambda)$ как только $|\alpha| \rightarrow 0$. Этот подход использован, например, в [8, 9, 10].

Пусть задача $R(\alpha')$, где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_l, 0, \dots, 0)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_l \neq 0$ остается нелинейной, но является в каком-то смысле более простой, чем задача $R(\alpha)$. Предположим, что разрешимость задачи $R(\alpha')$ может быть установлена и пусть $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\alpha'}(x; \lambda)$ – ее решение. В этом случае и при некоторых ограничениях на \mathcal{R} и условия, что $|\alpha - \alpha'|$ достаточно мало, можно доказать, что задача $R(\alpha)$ тоже разрешима, а ее решение $\mathbf{u}_\alpha(x; \lambda) \rightarrow \mathbf{u}_{\alpha'}(x; \lambda)$ как только $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$. Важно отметить, что ни $|\alpha|$, ни $|\alpha'|$ не предполагаются малыми.

Резюмируя, можно сказать, что предлагаемый подход может быть полезен, если:

- i существует набор параметров α' , такой, что задача $R(\alpha')$, будучи более простой нелинейной задачей, может быть эффективно исследована;
- ii решения задачи $R(\alpha')$ существуют не только для малых $|\alpha'|$;
- iii задача $R(\alpha')$ имеет решения, не связанные с решениями задачи $R(0)$.

Ясно, что если рассматривать задачу $R(0)$ как невозмущенную, то в случаях ii, iii это едва ли даст какую-то информацию о решениях задачи $R(\alpha)$. Заметим, что в некоторых случаях задача $R(0)$ может вовсе не иметь решений, см. [3].

Электродинамика нелинейных волноведущих структур (в частности, плоских и цилиндрических волноводов, заполненных нелинейной средой) приводит к задачам, для которых имеют место случаи i–iii. Например, некоторые задачи, зависящие от одного скалярного параметра α и удовлетворяющие свойствам ii, iii, изучены в [5, 6]. Широкий класс задач, зависящих от векторного параметра α , для которых применим вышеописанный подход, введены в [9]. Некоторые многопараметрические задачи, удовлетворяющие свойствам i–iii, изучены в [11, 12].

Несмотря на то, что многопараметрические задачи не являются новым разделом математики, публикаций на эту тему не так много, особенно в контексте метода возмущений. Мы, однако, укажем фундаментальные работы [13, 14], а также несколько работ по нелинейным задачам [15, 16, 17, 18, 19], также отметим недавнюю работу [20], связанную с многопараметрической задачей, возникающей в теории волноводов.

Математическая постановка (основной) физической задачи представлена в разделе 2; раздел 3 посвящен результатам статьи: известные, но необходимые результаты о линейных и вспомогательных нелинейных задачах представлены в подразделах 3.1 и 3.2, соответственно, основные результаты представлены в подразделе 3.3; строгая физическая формулировка задачи (она удовлетворяет ключевым свойствам, изложенным здесь ниже) представлена в разделе 4 (именно эту физическую задачу мы изучим в настоящей статье); обсуждение полученных результатов и некоторые нерешенные проблемы представлены в разделе 6.

2. Математическая постановка задачи. Введем обозначения, которые будут использоваться на протяжении всей статьи. Всюду ниже индекс j принимает значения 1, 2. Пусть $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, где $h > 0$ – постоянная, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ есть пара вещественных параметров. Следующие постоянные $a_j, \alpha_j, s_j, c_j, A_j$ предполагаются вещественными и положительными, где $c_j \leq s_j < a_j$. Мы также используем положительные параметры $\kappa_{c,j}, \kappa_{s,j}$, где $\kappa_{c,j}^2 = \lambda_j^2 - c_j$, $\kappa_{s,j}^2 = \lambda_j^2 - s_j$, то есть мы предполагаем, что $\lambda_j^2 > s_j$. Помимо λ введем множество $\Lambda^* = \Lambda_1^* \times \Lambda_2^*$, где $\Lambda_j^* = (\sqrt{s_j}, \lambda_j^*)$; постоянные $\lambda_j^* > 0$ фиксированы и будут определены позднее (см. следствие 3.11 и утверждение 3.16); также мы используем обозначение $\Lambda_j = (\sqrt{s_j}, +\infty)$.

Основная задача, которую мы назовем задачей $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\delta)$, состоит в доказательстве существования значений $\lambda = \bar{\lambda}$, для которых существуют решения $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$ и $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$ системы

$$\begin{cases} u_3' - \lambda_1 u_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_1, \\ u_2'' = -(a_2 - \lambda_2^2 + \alpha_2 u_1^2 + \alpha_1 u_2^2 + \alpha_2 u_3^2) u_2, \\ u_3'' - \lambda_1 u_1' = -(a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_3, \end{cases} \quad (1)$$

где $\alpha_2 = \delta$ есть вещественный положительный малый параметр, $(x, \bar{\lambda}) \in \bar{I} \times \Lambda^*$, удовлетворяющие краевым условиям

$$(a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_1|_{x=0} = \frac{\lambda_1 s_1}{\kappa_{s,1}} u_3|_{x=0}, \quad (2)$$

$$(a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_1 u_3^2) u_1|_{x=h} = -\frac{\lambda_1 c_1}{\kappa_{c,1}} u_3|_{x=h}, \quad (3)$$

$$(\kappa_{s,2} u_2 - u_2')|_{x=0} = 0, \quad (4)$$

$$(\kappa_{c,2} u_2 + u_2')|_{x=h} = 0, \quad (5)$$

и дополнительным локальным условиям

$$u_3|_{x=0} = \frac{\kappa_{s,1}}{\lambda_1} A_1, \quad (6)$$

$$u_2|_{x=0} = A_2. \quad (7)$$

Мы предполагаем, что

$$u_1 \in C^1(\bar{I}), \quad u_2, u_3 \in C^2(\bar{I}). \quad (8)$$

Определение 2.1. Пара чисел $\lambda = \bar{\lambda} \in \Lambda^*$, где $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$, такая, что существуют функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$, удовлетворяющие (1)–(8), называется векторным собственным значением, а соответствующие функции u_1, u_2, u_3 – собственными функциями задачи $\mathcal{P}(\delta)$.

Полагая $\delta = 0$ в задаче $\mathcal{P}(\delta)$, получаем задачу $\mathcal{P}(0)$ с $\alpha_1 > 0$. Задача $\mathcal{P}(0)$, очевидно, распадается на две независимые нелинейные задачи, которые мы назовем задачами \mathcal{P}_j . Задачи \mathcal{P}_j удовлетворяют условиям ii, iii, перечисленным в разделе 1. Параметр α_1 не предполагается малым.

Задача \mathcal{P}_1 состоит в доказательстве существования значений $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, для которых существуют решения $v_1 \equiv v_1(x; \widehat{\lambda}_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$ системы

$$\begin{cases} v_3' - \lambda_1 v_1 = -\frac{1}{\lambda_1} (a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_1, \\ v_3'' - \lambda_1 v_1' = -(a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_3, \end{cases} \quad (9)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_1|_{x=0} = \frac{\lambda_1 s_1}{\kappa_{s,1}} v_3|_{x=0}, \quad (10)$$

$$(a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2) v_1|_{x=h} = -\frac{\lambda_1 c_1}{\kappa_{c,1}} v_3|_{x=h}, \quad (11)$$

и дополнительному локальному условию

$$v_3|_{x=0} = \frac{\kappa_{s,1}}{\lambda_1} A_1, \quad (12)$$

где $(x, \widehat{\lambda}_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1$ и

$$v_1 \in C^1(\bar{I}), \quad v_3 \in C^2(\bar{I}). \quad (13)$$

Определение 2.2. Значение $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$, такое, что существуют функции $v_1 \equiv v_1(x; \widehat{\lambda}_1)$ и $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$, удовлетворяющие (9)–(13), называется собственным значением, а соответствующие функции v_1, v_3 – собственными функциями задачи \mathcal{P}_1 .

Задача \mathcal{P}_2 состоит в доказательстве существования значений $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$, для которых существуют решения $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$ уравнения

$$v_2'' = -(a_2 - \lambda_2^2)v_2 - \alpha_1 v_2^3, \quad (14)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(\kappa_{s,2}v_2 - v_2')|_{x=0} = 0, \quad (15)$$

$$(\kappa_{c,2}v_2 + v_2')|_{x=h} = 0, \quad (16)$$

и дополнительному локальному условию

$$v_2|_{x=0} = A_2, \quad (17)$$

где $(x, \widehat{\lambda}_2) \in \bar{I} \times \Lambda_2$ и

$$v_2 \in C^2(\bar{I}). \quad (18)$$

Определение 2.3. Значение $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$, такое, что существует функция $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$, удовлетворяющая (14)–(18), называется собственным значением, а соответствующая функция v_2 – собственной функцией задачи \mathcal{P}_2 .

Рассмотрим также задачу \mathcal{P}^0 , которая есть задача $\mathcal{P}(0)$ с $\alpha_1 = 0$. Ясно, что задача \mathcal{P}^0 распадается на две независимых линейных задачи, которые мы обозначим \mathcal{P}_j^0 . Также ясно, что задача \mathcal{P}_j^0 совпадает с задачей \mathcal{P}_j при $\alpha_1 = 0$.

Задача \mathcal{P}_1^0 состоит в доказательстве существования значений $\lambda_1 = \widetilde{\lambda}_1$, для которых существуют нетривиальные решения $w_1 \equiv w_1(x; \widetilde{\lambda}_1)$, $w_3 \equiv w_3(x; \widetilde{\lambda}_1)$ системы

$$\begin{cases} w_3' - \lambda_1 w_1 = -\frac{a_1}{\lambda_1} w_1, \\ w_3'' - \lambda_1 w_1' = -a_1 w_3, \end{cases}$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(a_1 w_1 - \frac{\lambda_1 s_1}{\kappa_{s,1}} w_3)|_{x=0} = 0, \quad (a_1 w_1 - \frac{\lambda_1 c_1}{\kappa_{c,1}} w_3)|_{x=h} = 0, \quad (19)$$

где $(x, \widetilde{\lambda}_1) \in \bar{I} \times (\sqrt{s_1}, \sqrt{a_1})$ и $w_1, w_3 \in C^2[0, h]$.

Задача \mathcal{P}_2^0 состоит в доказательстве существования значений $\lambda_2 = \widetilde{\lambda}_2$, для которых существуют нетривиальные решения $w_2 \equiv w_2(x; \widetilde{\lambda}_2)$ уравнения

$$w_2'' = -(a_2 - \lambda_2^2)w_2,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$(\kappa_{s,2}w_2 - w_2')|_{x=0} = 0, \quad (\kappa_{c,2}w_2 + w_2')|_{x=h} = 0,$$

где $(x, \widetilde{\lambda}_2) \in \bar{I} \times (\sqrt{s_2}, \sqrt{a_2})$ и $w_2 \in C^2[0, h]$.

Для исследования задачи $\mathcal{P}(\delta)$ будет развит метод возмущений, в котором возмущенной является задача $\mathcal{P}(\delta)$, а невозмущенными являются (нелинейные) задачи \mathcal{P}_j . Подчеркнем, что задачи \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 имеют нелинеаризуемые решения, и мы опираемся, в том числе, на это, развивая метод возмущений.

Основной метод для изучения задач \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 – метод интегральных характеристических уравнений [5, 6]. Заметим, что широко известные методы нелинейного анализа, такие как вариационные методы [21, 22] и теория ветвления решений [23, 24], не применимы для изучения задач $\mathcal{P}(\delta)$ и $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

3. Результаты. Собственные значения задач $\mathcal{P}(\delta)$, \mathcal{P}_j и \mathcal{P}_j^0 будут обозначаться $\bar{\lambda}_{k,l} = (\bar{\lambda}_{1,k}, \bar{\lambda}_{2,k'})$, $\widehat{\lambda}_{j,k}$ и $\widetilde{\lambda}_{j,k}$, соответственно, где $k, k' = 1, 2, \dots$ – целые индексы; мы также будем использовать обозначения $\bar{\lambda}$, $\widehat{\lambda}_j$ и $\widetilde{\lambda}_j$.

3.1 Задачи \mathcal{P}_j^0 . Существование решений задач \mathcal{P}_j^0 хорошо известно из классической электродинамики [1, 25, 26]. Собственные значения (постоянные распространения) задачи \mathcal{P}_1^0 и только они являются простыми корнями уравнения

$$\tan \sqrt{a_1 - \lambda_1^2} h = \frac{a_1 \sqrt{(a_1 - \lambda_1^2)} (c_1 \sqrt{\lambda_1^2 - s_1} + s_1 \sqrt{\lambda_1^2 - c_1})}{s_1 c_1 (a_1 - \lambda_1^2) - a_1^2 \sqrt{\lambda_1^2 - s_1} \sqrt{\lambda_1^2 - c_1}}, \quad (20)$$

и собственные значения (постоянные распространения) задачи \mathcal{P}_2^0 и только они являются простыми корнями уравнения

$$\tan \sqrt{a_2 - \lambda_2^2} h = \frac{\sqrt{a_2 - \lambda_2^2} (\sqrt{\lambda_2^2 - s_2} + \sqrt{\lambda_2^2 - c_2})}{a_2 - \lambda_2^2 - \sqrt{\lambda_2^2 - s_2} \sqrt{\lambda_2^2 - c_2}}. \quad (21)$$

Уравнения (20), (21) в электродинамике называются дисперсионными соотношениями (уравнениями) [1, 25, 26]; с точки зрения теории Штурма – Лиувилля эти уравнения естественно называть характеристическими уравнениями задач \mathcal{P}_1^0 и \mathcal{P}_2^0 , соответственно, [27].

Элементарный анализ уравнений (20), (21) позволяет сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3.1. *Существует постоянная $h_0 > 0$, такая, что для любого $h > h_0$ задача \mathcal{P}_j^0 имеет конечное число (не менее одного) положительных и простых (кратности 1) собственных значений $\tilde{\lambda}_{j,k}$ и все $\tilde{\lambda}_{j,k} \in (\sqrt{s_j}, \sqrt{a_j})$; кроме того, если $s_j = c_j$, тогда $h_0 = 0$. Если $a_j \leq s_j$, то задача \mathcal{P}_j^0 не имеет (положительных) решений.*

Мы опустим доказательство, поскольку этот результат широко известен.

Используя линейные задачи \mathcal{P}_j^0 как невозмущенные и применяя подходящий метод возмущений, можно показать, что в любой окрестности собственного значения $\tilde{\lambda}_{j,k}$ задачи \mathcal{P}_j^0 существует собственное значение $\hat{\lambda}_{j,k}$ задачи \mathcal{P}_j , как только $|\alpha_1|$ достаточно мал, пример такого подхода см. в [28]. Также можно доказать, что в любой окрестности любой пары $(\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$ существует собственное значение $\bar{\lambda}_{k,l}$ задачи $\mathcal{P}(\delta)$, как только $|\delta|$ достаточно мало [8, 9, 10]. Принимая во внимание утверждение 3.1, ясно, что поскольку задача \mathcal{P}_j^0 не имеет решений для $a_j \leq s_j$, то вышеупомянутый метод возмущений не позволит доказать существование решений задач \mathcal{P}_j and \mathcal{P} .

3.2 Задачи \mathcal{P}_j . Этот пункт частично основан на известных результатах (в этих случаях точные ссылки на доказательства приведены сразу после соответствующих формулировок), но их едва ли возможно опустить без серьезного ухудшения качества представления основного результата.

Ниже в этом разделе мы опираемся на следующее утверждение.

Утверждение 3.2. *Задача Коши (9), (10), (12) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_1 \equiv v_1(x; \lambda_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \lambda_1)$ непрерывно зависит от точки $(x, \lambda_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1$.*

Это утверждение доказывается таким же образом, как и аналогичный результат в [6] (см. утверждение 3 в [6]). Этот же факт может быть извлечен и из результатов, представленных в [4]. Дважды непрерывная дифференцируемость решения v_3 по x для $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правой части второго уравнения (9).

Утверждение 3.3. *Задача Коши (14), (15), (17) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_2 \equiv v_2(x; \lambda_2)$ непрерывно зависит от точки $(x, \lambda_2) \in \bar{I} \times \Lambda_2$.*

Это утверждение доказано в [5] (см. утверждение 2 в [5]). Дважды непрерывная дифференцируемость решения v_2 по x для $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правой части уравнения (14).

Интегральное характеристическое уравнение относительно λ_1 получено в [4] в следующей форме

$$\Phi_1(\lambda_1; n_1) \equiv - \int_{-\frac{c_1}{\lambda_1 k_{c,1}}}^{\frac{s_1}{\lambda_1 k_{s,1}}} \frac{ds}{w_1(s; \lambda_1)} + n_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \lambda_1)} = h, \quad (22)$$

где

$$w_1(\mu_1; \lambda_1) \equiv \lambda_1 \frac{(\bar{a}_1 \theta_1 + \mu_1^2 (\theta_1 - 1)) (\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_1 \theta_1^2) + \theta_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) (\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_1 \theta_1^2)}{\theta_1 (\alpha_1 \mu_1^2 + \alpha_1 \theta_1^2)},$$

$n_1 = 1, 2, \dots$, $\bar{a}_1 = a_1 \lambda_1^{-2}$, а μ_1 и θ_1 связаны соотношением

$$q_1 \mu_1^4 + 2q_2 \theta_1^2 \mu_1^2 + q_3 \theta_1^4 = 0; \quad (23)$$

здесь

$$\begin{aligned} q_1 &= \theta_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) (2\theta_1 - 3) + \bar{a}_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) - \alpha_1 \bar{C}_1, \\ q_2 &= \theta_1 (\theta_1 - 1) (\theta_1 - \bar{a}_1) + \bar{a}_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) - \alpha_1 \bar{C}_1, \\ q_3 &= (\theta_1 - \bar{a}_1)^2 + 2\bar{a}_1 (\theta_1 - \bar{a}_1) - \alpha_1 \bar{C}_1, \end{aligned} \quad (24)$$

$\bar{C}_1 = C_1 \lambda_1^{-6}$, а

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(a_1 + \alpha_1 v_1^2(0) + \alpha_1 v_3^2(0))^2 v_1^2(0) - 4\lambda_1^2 (a_1 + \alpha_1 v_1^2(0) + \alpha_1 v_3^2(0)) v_1^2(0) + \\ &\quad + \lambda_1^2 \alpha_1 (v_1^4(0) + 2v_1^2(0)v_3^2(0) + v_3^4(0)) + 2\lambda_1^2 a_1 (v_1^2(0) + v_3^2(0)) \end{aligned}$$

есть постоянная, значения $v_1(0)$ и $v_3(0)$ определяются из (10), (12).

Интегральное характеристическое уравнение относительно λ_2 получено в [5] в следующей форме

$$\Phi_2(\lambda_2; n_2) \equiv \int_{-\kappa_{e,2}}^{\kappa_{s,2}} \frac{ds}{w_2(s; \lambda_2)} + n_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \lambda_2)} = h, \quad (25)$$

где $w_2(\mu_2; \lambda_2) \equiv \mu_2^2 + a_2 - \lambda_2 + \alpha_1 \theta_2(\mu_2; \lambda_2)$, $n_2 = 0, 1, \dots$, а μ_2 and θ_2 связаны соотношением

$$(\mu_2^2 + a_2 - \lambda_2)\theta_2 + \alpha_1 \frac{\theta_2^2}{2} = C_2, \quad (26)$$

здесь $C_2 = (a_2 - s_2)A_2^2 + \alpha_1 \frac{A_2^4}{2} > 0$ есть постоянная.

Подчеркнем, что уравнения (22) и (25) есть семейства уравнений для различных n_1 и n_2 , то есть для того чтобы найти все собственные значения, необходимо решить (22) для каждого n_1 и (25) для каждого n_2 .

Имеют место теоремы об эквивалентности.

Теорема 3.4. Число $\widehat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$ является собственным значением задачи \mathcal{P}_1 тогда и только тогда, когда существует целое $\widehat{n}_1 \geq 0$ такое, что $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$ удовлетворяет уравнению (22) при $n_1 = \widehat{n}_1$; в этом случае собственная функция $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$, отвечающая собственному значению $\widehat{\lambda}_1$, имеет \widehat{n}_1 простых нулей $x_{j,i} \in I$, где $i = \overline{1, \widehat{n}_1}$.

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 1 и следствия 1 в [6].

Теорема 3.5. Число $\widehat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$ является собственным значением задачи \mathcal{P}_2 тогда и только тогда, когда существует целое $\widehat{n}_2 \geq 0$ такое, что $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ удовлетворяет уравнению (25) при $n_2 = \widehat{n}_2$; в этом случае собственная функция $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$, отвечающая собственному значению $\widehat{\lambda}_2$, имеет \widehat{n}_2 простых нулей $x_{j,i} \in I$, где $i = \overline{1, \widehat{n}_2}$.

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 1 и следствия 1 в [5].

Явные формулы для $x_{j,i}$ легко получаются из формул (22) и (25), см. следствие 1 в [4] для (22) и теорему 1 в [5] для (25).

Разрешимость задач \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 утверждается в следующих теоремах.

Теорема 3.6. Задача \mathcal{P}_1 имеет бесконечное число собственных значений $\widehat{\lambda}_{1,k} \in \Lambda_1$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме этого:

(i) если задача \mathcal{P}_1^0 имеет k' решений $\widetilde{\lambda}_{1,k}$ ($k = \overline{1, k'}$), тогда существует постоянная $\alpha_1'' > 0$ такая, что для любого положительного $\alpha_1 = \alpha_1' < \alpha_1''$

$$\widehat{\lambda}_{1,k} \in (\sqrt{s_1}, \sqrt{a_1}) \text{ и } \lim_{\alpha_1' \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_{1,k} = \widetilde{\lambda}_{1,k} \text{ (} k = \overline{1, k'} \text{),}$$

где $\widehat{\lambda}_{1,1} < \widehat{\lambda}_{1,2} < \dots < \widehat{\lambda}_{1,k'}$ – первые k' решений задачи \mathcal{P}_1 при $\alpha_1 = \alpha_1'$;

(ii) для достаточно больших $\widehat{\lambda}_1$ имеют место оценки

$$\max_{x \in [0, h]} v_1^2(x; \widehat{\lambda}_1) = \frac{3}{2\alpha_1} \widehat{\lambda}_1^2 + O(1), \quad \max_{x \in [0, h]} v_3^2(x; \widehat{\lambda}_1) = \frac{1}{2\alpha_1} \widehat{\lambda}_1^2 + O(1).$$

Множество собственных значений задачи \mathcal{P}_1 дискретно на Λ_1 , то есть на каждом отрезке $\Lambda_1' \subset \Lambda_1$ существует не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Доказательство этой теоремы следует из доказательств теорем 4, 5 и 6 в [6].

Теорема 3.7. Задача \mathcal{P}_2 имеет бесконечное число собственных значений $\widehat{\lambda}_{2,k} \in \Lambda_2$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме этого:

(i) если задача \mathcal{P}_2^0 имеет k' решений $\widetilde{\lambda}_{2,k}$ ($k = \overline{1, k'}$), тогда существует постоянная $\alpha_1'' > 0$ такая, что для любого положительного $\alpha_1 = \alpha_1' < \alpha_1''$

$$\widehat{\lambda}_{2,k} \in (\sqrt{s_2}, \sqrt{a_2}) \text{ и } \lim_{\alpha_1' \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_{2,k} = \widetilde{\lambda}_{2,k} \text{ (} k = \overline{1, k'} \text{),}$$

где $\widehat{\lambda}_{2,1} < \widehat{\lambda}_{2,2} < \dots < \widehat{\lambda}_{2,k'}$ – первые k' решений задачи \mathcal{P}_2 при $\alpha_1 = \alpha_1'$;

(ii) для достаточно больших $\widehat{\lambda}_2$ имеет место оценка

$$\max_{x \in [0, h]} v_2^2(x; \widehat{\lambda}_2) = \frac{2}{\alpha_1} \widehat{\lambda}_2^2 + O(1).$$

Множество собственных значений задачи \mathcal{P}_2 дискретно на Λ_2 , то есть на каждом отрезке $\Lambda_2' \subset \Lambda_2$ существует не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Доказательство этой теоремы следует из доказательств теорем 4, 5 и 6 в [5].

Замечание 3.8. Если $k > k'$, то собственные значения $\widehat{\lambda}_{j,k}$ не связаны с решениями (линейной) задачи \mathcal{P}_j^0 , в том числе, при $\alpha_1 \rightarrow +0$ [5, 6].

Используя теоремы 3.6 и 3.7, докажем следующие утверждения.

Утверждение 3.9. Пусть $\{\widehat{\lambda}_{1,k}\}$ – последовательность собственных значений задачи \mathcal{P}_1 . Тогда существует (бесконечная) подпоследовательность $\{\widehat{\lambda}_{1,k'}\}$ с точкой накопления на бесконечности и такая, что для каждого элемента $\widehat{\lambda}_{1,k'}$ этой подпоследовательности имеет место формула

$$(\Phi_1(\widehat{\lambda}_{1,k'} - \Delta_{1,k'}; \widehat{n}_1) - h) \cdot (\Phi_1(\widehat{\lambda}_{1,k'} + \Delta_{1,k'}; \widehat{n}_1) - h) < 0, \quad (27)$$

где $\Delta_{1,k'} > 0$ – постоянная и отрезок $[\widehat{\lambda}_{1,k'} - \Delta_{1,k'}, \widehat{\lambda}_{1,k'} + \Delta_{1,k'}]$ не содержит других элементов последовательности $\{\widehat{\lambda}_{1,k}\}$.

Доказательство. Покажем, что функция w_1 , определенная в (22), положительна. Приравняв w_1 к нулю и подставив результат в (23), получим противоречие. Отсюда следует, что w_1 не обращается в нуль для $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Теперь достаточно определить знак w_1 в некоторой точке, например, в точке $\mu_1 = 0$. Значение θ_1 , отвечающее значению $\mu_1 = 0$, вычисляется из (23). Следовательно, $\theta_1 = \bar{\theta}_1$, где $\bar{\theta}_1$ – максимальное из решений уравнения $q_3(\theta_1, \lambda_1) = 0$, которое будет положительным. Для $\alpha_1 \geq 0$ легко видеть, что функция w_1 положительна. Значит, функция w_1 (если существует) положительна для всех $\lambda_1 \in \Lambda_1$. Существование функции w_1 для всех $\lambda_1 \in \Lambda_1$ следует из анализа формулы (23).

Непрерывность функции Φ_1 по $\lambda_1 \in \Lambda_1$ следует из анализа формулы (22) и (23).

Принимая во внимание положительность функции w_1 , получаем следующие неравенства

$$(n_1 - 1)T_1(\lambda_1) < \Phi_1(\lambda_1; n_1) < n_1 T_1(\lambda_1), \quad (28)$$

где $n_1 = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 \in \Lambda_1$, and $T_1(\lambda_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_1(s; \lambda_1)}$.

В работе [4], см. также [6], доказано, что $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} T_1(\lambda_1) = 0$. Из этого следует существование бесконечного числа решений уравнения (22). Действительно, для любого $h > 0$ можно найти целое $n_1 = n_1^0 \geq 1$, такое, что

$$h < (n_1^0 - 1) \max_{\lambda_1 \in \Lambda_1} T_1(\lambda_1) < \max_{\lambda_1 \in \Lambda} \Phi_1(\lambda_1; n_1^0).$$

Поскольку $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} T_1(\lambda_1) = 0$, то всегда можно выбрать значение $\lambda_1 \geq \lambda_1^0$, такое что $\Phi_1(\lambda_1^0; n_1^0) < n_1^0 T_1(\lambda_1^0) < h$. Но между λ_1 , где функция $\Phi_1(\lambda_1; n_1^0)$ достигает своего максимума, и λ_1^0 существует $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$, такое что $\Phi_1(\widehat{\lambda}_1; n_1^0) = h$.

Далее, поскольку $\lim_{\lambda_1 \rightarrow +\infty} T_1(\lambda_1) = 0$, то существует бесконечное множество собственных значений $\widehat{\lambda}_{1,k}$, переходя через которые функция $\Phi_1(\lambda_1; n_1) - h$ меняет знак, см. формулу (22). Таким образом, мы доказали, что существует бесконечное множество собственных значений задачи \mathcal{P}_1 , для которых имеет место неравенство (27). По следствию теоремы 4 в [6] все упомянутые собственные значения изолированы (дискретны).

Утверждение 3.10. Пусть $\{\widehat{\lambda}_{2,k}\}$ – последовательность собственных значений задачи \mathcal{P}_2 . Тогда существует (бесконечная) подпоследовательность $\{\widehat{\lambda}_{2,k'}\}$ с точкой накопления на бесконечности и такая, что для каждого элемента $\widehat{\lambda}_{2,k'}$ этой подпоследовательности имеет место формула

$$(\Phi_2(\widehat{\lambda}_{2,k'} - \Delta_{2,k'}; \widehat{n}_2) - h) \cdot (\Phi_2(\widehat{\lambda}_{2,k'} + \Delta_{2,k'}; \widehat{n}_2) - h) < 0, \quad (29)$$

где $\Delta_{2,k'} > 0$ – постоянная и отрезок $[\widehat{\lambda}_{2,k'} - \Delta_{2,k'}, \widehat{\lambda}_{2,k'} + \Delta_{2,k'}]$ не содержит других элементов последовательности $\{\widehat{\lambda}_{2,k}\}$.

Доказательство. Покажем, что функция w_2 , определенная в (25), положительна. Действительно, приравнявая w_2 к нулю, выражая отсюда $\mu_2^2 + a_2 - \lambda_2^2$ и подставляя этот результат в (26), получаем противоречие, то есть w_2 в нуль не обращается. Теперь достаточно выяснить знак w_2 в любой точке. Ясно, что для любого $\lambda_2^2 < a_2$ функция w_2 положительна, что значит, что эта функция (когда существует) положительна для всех $\lambda_2 \in \Lambda_2$. Существование функции w_2 для всех $\lambda_2 \in \Lambda_2$ следует из анализа формулы (26).

Непрерывность функции Φ_2 по $\lambda_2 \in \Lambda_2$ следует из анализа формулы (25) и (26).

Принимая во внимание положительность функции w_2 , получаем следующие неравенства

$$n_2 T_2(\lambda_2) < \Phi_2(\lambda_2; n_2) < (n_2 + 1) T_2(\lambda_2), \quad (30)$$

где $n_2 = 0, 1, \dots$, $\lambda_2 \in \Lambda_2$, а $T_2(\lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_2(s; \lambda_2)}$.

В работе [5] доказано, что $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} T_2(\lambda_2) = 0$. Отсюда следует существование бесконечного числа решений уравнения (25). Действительно, для любого $h > 0$ существует целое $n_2 = n_2^0 \geq 1$, такое что

$$h < (n_2^0 - 1) \max_{\lambda_2 \in \Lambda_2} T_2(\lambda_2) < \max_{\lambda_2 \in \Lambda_2} \Phi_2(\lambda_2; n_2^0).$$

Поскольку $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} T_2(\lambda_2) = 0$, то всегда можно выбрать значение $\lambda_2 \geq \lambda_2^0$, такое что $\Phi_2(\lambda_2^0; n_2^0) < n_2^0 T_2(\lambda_2^0) < h$. Но тогда между λ_2 , при котором функция $\Phi_2(\lambda_2; n_2^0)$ достигает своего максимума, и λ_2^0 существует $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$, такое что $\Phi_2(\widehat{\lambda}_2; n_2^0) = h$.

Теперь поскольку $\lim_{\lambda_2 \rightarrow +\infty} T_2(\lambda_2) = 0$, то существует бесконечное число собственных значений $\widehat{\lambda}_{2,k}$, переходя через которые функция $\Phi_2(\lambda_2; n_2) - h$ меняет знак, см. формулу (25). Таким образом, мы доказали, что существует бесконечное число собственных значений задачи \mathcal{P}_2 , для которых имеет место неравенство (29). По следствию теоремы 4 в [5] все эти собственные значения изолированы (дискретны).

Из утверждений 3.9 и 3.10 получаем такое следствие.

Следствие 3.11. Существует постоянная $\lambda_j^* > \sqrt{a_j}$ такая, что интервал $(\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ содержит собственные значения $\widehat{\lambda}_j$ задачи \mathcal{P}_j , которые не связаны с решениями $\widetilde{\lambda}_j$ (линейной) задачи \mathcal{P}_j^0 при $\alpha_1 \rightarrow +0$.

В силу теорем 3.6 и 3.7, если $\alpha_1 > 0$ достаточно мало, то все собственные значения $\widehat{\lambda}_j \in (\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ задач \mathcal{P}_j не связаны с решениями соответствующих линейных задач. Если же $\alpha_1 > 0$ не мало, то интервал $(\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ может содержать среди прочих и такие собственные значения $\widehat{\lambda}_j$, для которых $\lim_{\alpha_1 \rightarrow +0} \widehat{\lambda}_j = \widetilde{\lambda}_j$.

Принимая во внимание теоремы 3.4 и 3.5, будем называть уравнения (22), (25) интегральными характеристическими уравнениями (ИХУ) задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, соответственно.

Уравнения типа (22), (25) – мощный инструмент исследования некоторого круга нелинейных задач на собственные значения, см. [4, 5, 6, 7]. В частности, на основе анализа уравнения (22) в [6] и уравнения (25) в [5] получены глубокие результаты о разрешимости задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, а также различные свойства собственных значений и собственных функций.

В классической (линейной) теории Штурма – Лиувилля известно определение характеристической функции, которое находит многочисленные применения [27]. Для задач \mathcal{P}_j мы введем аналогичные определения.

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 3.12. Число $\widehat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$ является собственным значением задачи \mathcal{P}_1 , если и только если $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1) = 0, \quad (31)$$

где $\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1) := ((a_1 + \alpha_1 v_1^2 + \alpha_1 v_3^2)v_1 + \lambda_1 \kappa_{c,1}^{-1} v_3)|_{x=h}$, $a v_1 \equiv v_1(x; \lambda_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \lambda_1)$ – решения задачи Коши (9), (10), (12).

Доказательство. Пусть $v_1 \equiv v_1(x; \widehat{\lambda}_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$ – решение задачи Коши (9), (10), (12). Если $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1$ удовлетворяет уравнению (31), то, очевидно, $\widehat{\lambda}_1$ – собственное значение и $v_1 \equiv v_1(x; \widehat{\lambda}_1)$, $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1)$ – собственные функции задачи \mathcal{P}_1 .

Пусть $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^* \in \Lambda_1$ – решение уравнения (31). Рассмотрим задачу Коши (9), (10), (12) при $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$. По утверждению 3.2 существует единственное нетривиальное решение $v_1 \equiv v_1(x; \widehat{\lambda}_1^*)$, $v_3 \equiv v_3(x; \widehat{\lambda}_1^*)$ этой задачи Коши и это решение непрерывно зависит от $(x, \lambda_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1$. Если уравнение (31) выполняется для $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$ на этом решении задачи Коши в точке $x = h$, тогда $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$ – собственное значение задачи \mathcal{P}_1 .

Предположим, что уравнение (31) не выполняется для $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$ и найденного решения при $x = h$. Следовательно, решение задачи (9), (10), (12) при $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$ неединственно; для одного из них уравнение (31) выполняется, а для другого – нет. Этот вывод противоречит утверждению 3.2. А значит, предположение о существовании решения задачи Коши (9), (10), (12) при $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$, для которого уравнение (31) не выполняется, неверно.

Утверждение 3.13. Число $\widehat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$ является собственным значением задачи \mathcal{P}_2 , если и только если $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_2(\lambda_2, \alpha_1) = 0, \quad (32)$$

где $\varphi_2(\lambda_2, \alpha_2) := (\kappa_{c,2} v_2 + v_2')|_{x=h}$, $a v_2 \equiv v_2(x; \lambda_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17).

Доказательство. Пусть $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17). Если $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ удовлетворяет уравнению (32), то, очевидно, $\widehat{\lambda}_2$ – собственное значение и $v_2(x; \widehat{\lambda}_2)$ – собственная функция задачи \mathcal{P}_2 .

Пусть $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2^* \in \Lambda_2$ – решение уравнения (32). Рассмотрим задачу Коши (14), (15), (17) при $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2^*$. По утверждению 3.3 нетривиальное решение $v_2 \equiv v_2(x; \widehat{\lambda}_2^*)$ этой задачи Коши существует и непрерывно зависит от $(x, \lambda_2) \in \bar{I} \times \Lambda_2$. Если уравнение (32) удовлетворяется для $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2^*$ на этом решении задачи Коши в точке $x = h$, то $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2^*$ – собственное значение задачи \mathcal{P}_2 .

Предположим, что уравнение (31) не удовлетворяется для $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1^*$ и найденного решения задачи Коши в точке $x = h$. Следовательно, существует неединственное решение задачи Коши (14), (15), (17) с $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2^*$; для одного из них уравнение (32) выполняется, а для другого – нет. Этот вывод противоречит утверждению 3.3. А значит, предположение о существовании решения задачи Коши (14), (15), (17) при $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2^*$, для которого уравнение (32) не выполняется, неверно.

Естественно называть уравнения (31), (32) *характеристическими уравнениями*, а их левые части *характеристическими функциями* задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, соответственно.

Теоремы 3.4, 3.6 и утверждение 3.12 дают такое следствие.

Следствие 3.14. Любое решение $\lambda_1 = \widehat{\lambda}_1 \in \Lambda_1$ уравнения (22) есть решение уравнения (31) и наоборот; более того, если $\widehat{\lambda}_1$ такое, что выполняется условие (27), то также выполняется и условие

$$\varphi_1(\widehat{\lambda}_1 - \Delta_1, \alpha_1) \cdot \varphi_1(\widehat{\lambda}_1 + \Delta_1, \alpha_1) < 0, \quad (33)$$

где $\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1, \alpha_3)$ определена в (31), а $\Delta_1 > 0$ – некоторая постоянная.

В силу теоремы 3.6 для каждого собственного значения $\widehat{\lambda}_1$ задачи \mathcal{P}_1 , удовлетворяющего свойству (27), постоянная Δ_1 может быть выбрана так, что отрезок $[\widehat{\lambda}_1 - \Delta_1, \widehat{\lambda}_1 + \Delta_1]$ не содержит других собственных значений задачи \mathcal{P}_1 .

Теоремы 3.5, 3.7 и утверждение 3.13 дают такое следствие.

Следствие 3.15. Любое решение $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2 \in \Lambda_2$ уравнения (25) есть решение уравнения (32) и наоборот; более того, если $\widehat{\lambda}_2$ такое, что выполняется условие (29), то также выполняется и условие

$$\varphi_2(\widehat{\lambda}_2 - \Delta_2, \alpha_1) \cdot \varphi_2(\widehat{\lambda}_2 + \Delta_2, \alpha_1) < 0, \quad (34)$$

где $\varphi_2(\lambda_2, \alpha_1)$ определена в (32), а $\Delta_2 > 0$ – некоторая постоянная.

В силу теоремы 3.7 для каждого собственного значения $\widehat{\lambda}_2$ задачи \mathcal{P}_2 , удовлетворяющего свойству (29), постоянная Δ_2 может быть выбрана так, что отрезок $[\widehat{\lambda}_2 - \Delta_2, \widehat{\lambda}_2 + \Delta_2]$ не содержит других собственных значений задачи \mathcal{P}_2 .

3.3 Задачи $\mathcal{P}(\delta)$. Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 3.16. Существует $\delta^* > 0$ такое, что для $0 < \delta < \delta^*$ задача Коши (1), (2), (4), (6), (7) глобально однозначно разрешима для $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение

$$u_1 \equiv u_1(x; \lambda, \delta), \quad u_2 \equiv u_2(x; \lambda, \delta), \quad u_3 \equiv u_3(x; \lambda, \delta) \quad (35)$$

непрерывно зависит от $(x, \lambda, \delta) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times D^*$, где $D^* = (0, \delta^*)$.

Кроме того, функции u_1, u_2, u_3 , определенные посредством (35), и их производные u'_1, u'_2, u'_3 равномерно относительно $(x, \lambda) \in \bar{I} \times \Lambda^*$ стремятся к функциям v_1, v_2, v_3 и их производным v'_1, v'_2, v'_3 , соответственно, при $\delta \rightarrow +0$, где $v_1 \equiv v_1(x; \lambda_1), v_3 \equiv v_3(x; \lambda_1)$ – решение задачи Коши (9), (10), (12) и $v_2 \equiv v_2(x; \lambda_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17), а v'_1, v'_2, v'_3 производные этих решений.

Доказательство. Это утверждение является следствием «интегральной» теоремы непрерывности [29]. Следуя [29], рассмотрим нормальную систему уравнений

$$u'_i = f_i(x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad i = \overline{1, n}, \quad (36)$$

правые части которой зависят от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Система (36) может быть записана в векторной форме

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (37)$$

Мы предполагаем, что правые части системы (36) определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial}{\partial u_k} f_i(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})$ в некоторой области $\bar{\Gamma}$ пространства \bar{R} переменных $x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l$. Следующая теорема хорошо известна, и доказана, например, в [29].

Пусть $(x_0, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\gamma}_0)$ – некоторая точка в области $\bar{\Gamma}$ и $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ – решение уравнения (37), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi}(x_0, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{u}_0$. Если решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}_0)$ определено при $x \in \bar{I}$, то существует число $\gamma_0 > 0$, такое, что для $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$ решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ определено на том же самом интервале \bar{I} , и функция $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ непрерывна на множестве переменных $x, \boldsymbol{\gamma}$ для $x \in \bar{I}$ и $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_0| < \gamma_0$. Более того, $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}^*$, как только $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^*| < \gamma_0$.

Заметим, что эта теорема сформулирована в [29] без дополнительного утверждения о равномерном стремлении $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ к $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$. Однако этот результат следует из доказательства, представленного в [29].

Теперь утверждение 3.16 является прямым следствием применения сформулированной выше теоремы к задаче Коши (1), (2), (4), (6), (7) при дополнительном допущении о существовании единственного непрерывного решения задачи Коши (9), (10), (12) при $(x, \lambda_1, \alpha_1) \in \bar{I} \times \Lambda_1 \times A$, определенного глобально и задачи Коши (14), (15), (17) для $(x, \lambda_2, \alpha_1) \in \bar{I} \times \Lambda_2 \times A$. Справедливость этого дополнительного допущения гарантируется утверждениями 3.2 и 3.3.

Дважды непрерывная дифференцируемость решений u_2 и u_3 по $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правых частей второго и третьего уравнений в (1).

Мы предположим, что $(x, \lambda, \delta) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times D^*$, где λ_j^* выбраны в соответствии со следствием 3.11, но δ^* выбирается по λ_j^* в смысле утверждения 3.16. Отметим, что λ_j^* не предполагается малым.

Поскольку утверждение 3.16 дает существование непрерывного решения задачи Коши, определенного глобально, то мы можем ввести систему характеристических уравнений задачи $\mathcal{P}(\delta)$ так, как это было сделано в утверждениях 3.12, 3.13 для задач $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$.

Имеем следующее утверждение.

Утверждение 3.17. Пара чисел $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ есть (векторное) собственное значение задачи $\mathcal{P}(\delta)$, если и только если $\lambda = \bar{\lambda} \in \Lambda^*$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \psi_1(\lambda, \delta) = 0, \\ \psi_2(\lambda, \delta) = 0, \end{cases} \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda, \delta) &:= ((a_1 + \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2)u_1 + \lambda_1 c_1 \kappa_{c,1}^{-1} u_3)|_{x=h}, \\ \psi_2(\lambda, \delta) &:= (\kappa_{c,2} u_2 + u_2')|_{x=h}, \end{aligned}$$

$a u_1 \equiv u_1(x; \lambda, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \lambda, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \lambda, \delta)$ – решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7), определенное в утверждении 3.16.

Доказательство. Пусть $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$ – решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7). Если $\lambda = \bar{\lambda}$ удовлетворяет уравнению (38), то, очевидно, $\bar{\lambda}$ – собственное значение и $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\lambda}, \delta)$, $u_3 \equiv u_3(x; \bar{\lambda}, \delta)$ – собственные функции задачи $\mathcal{P}(\delta)$.

Пусть $\lambda = \bar{\lambda}^* \in \Lambda^*$ – некоторое решение уравнений (38). Рассмотрим задачу Коши (1), (2), (4), (6), (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^*$. По утверждению 3.16 существует единственное нетривиальное решение (35) этой задачи Коши, непрерывно зависящее от $(x, \lambda, \delta) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times D^*$. Если уравнения (38) удовлетворяются для $\lambda = \bar{\lambda}^*$ на этом решении задачи Коши в точке $x = h$, то $\lambda = \bar{\lambda}^*$ – собственное значение задачи $\mathcal{P}(\delta)$.

Предположим, что для найденного решения задачи Коши в точке $x = h$ уравнения (38) не выполняются для $\lambda = \bar{\lambda}^*$. Это значит, что существует неединственное решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^*$; для одного из них уравнения (38) выполняются, а для другого – нет. Это вывод противоречит утверждению 3.16. Следовательно, предположение о существовании решения задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7) при $\lambda = \bar{\lambda}^*$, для которого уравнения (38) не выполняются, неверно.

Вычитая левые части уравнений (31), (32) из левых частей уравнений (38), получаем следующую систему

$$\begin{cases} \psi_1(\lambda, \delta) - \varphi_1(\lambda_1) = -\varphi_1(\lambda_1), \\ \psi_2(\lambda, \delta) - \varphi_2(\lambda_2) = -\varphi_2(\lambda_2), \end{cases} \quad (39)$$

где все выражения в (39) определены посредством (31), (32) и (38). Доказательство существования векторных собственных значений $\bar{\lambda}$ задачи $\mathcal{P}(\delta)$ опирается на анализ системы (39) при $\delta \rightarrow +0$. В (39) мы намеренно опустили явную зависимость от α_1 , чтобы не загромождать выкладки.

Левые части (39) зависят от δ , а правые части – нет. Ясно, что система (39) распадается на два независимых уравнения (31), (32) при $\delta = 0$.

Принимая во внимание следствия 3.14, 3.15, мы получаем основной результат данной статьи.

Теорема 3.18. Пусть каждая из задач \mathcal{P}_j имеет n'_j собственных значений

$$\widehat{\lambda}_{j,1}, \dots, \widehat{\lambda}_{j,n'_j} \in (\sqrt{s_j}, \lambda_j^*),$$

удовлетворяющих свойствам, сформулированным в следствиях 3.14, 3.15, соответственно.

Тогда существует постоянная $\delta^0 > 0$ такая, что для любого $\delta \in (0, \delta^0)$ задача $\mathcal{P}(\delta)$ имеет не меньше $n'_1 \times n'_2$ векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{i_1, i_2} = (\bar{\lambda}_{1, i_1}, \bar{\lambda}_{2, i_2})$, где $i_j \in \overline{1, n'_j}$; кроме этого, $\bar{\lambda}_{i_1, i_2} \rightarrow (\widehat{\lambda}_{1, i_1}, \widehat{\lambda}_{2, i_2})$ при $\delta \rightarrow +0$.

Доказательство. Утверждение 3.16 влечет следующий результат: если $\lambda \in \Lambda^*$ и $\delta \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned} u_1(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_1(x; \lambda_1), & u_1'(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_1'(x; \lambda_1), \\ u_2(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_2(x; \lambda_2), & u_2'(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_2'(x; \lambda_2), \\ u_3(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_3(x; \lambda_1), & u_3'(x; \lambda, \delta) &\rightarrow v_3'(x; \lambda_1) \end{aligned} \quad (40)$$

равномерно по $x \in \bar{I}$; здесь $u_1(x; \lambda, \delta)$, $u_2(x; \lambda, \delta)$, $u_3(x; \lambda, \delta)$ – решение задачи Коши (1), (2), (4), (6), (7), а $v_1(x; \lambda_1)$, $v_3(x; \lambda_1)$ – решение задачи Коши (9), (10), (12) и $v_2(x; \lambda_2)$ – решение задачи Коши (14), (15), (17).

В силу формул (40), очевидно, что, если $\delta \rightarrow 0$, то

$$\psi_1(\lambda, \delta) \rightarrow \varphi_1(\lambda_1), \quad \psi_2(\lambda, \delta) \rightarrow \varphi_2(\lambda_2) \quad (41)$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda^*$, где φ_1, φ_2 и ψ_j определены формулами (31), (32) и (38), соответственно.

В силу (41) мы получаем, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\epsilon' > 0$, такое, что для всех $\lambda \in \Lambda^*$ левые части формул (39) меньше ϵ по абсолютному значению, как только $|\delta| < \epsilon'$.

Нули правых частей формул (39) являются собственными значениями задач \mathcal{P}_j . Из следствия 3.11 известно, что существует постоянная λ_j^* ($> \sqrt{a_j}$), такая, что интервал $(\sqrt{s_j}, \lambda_j^*)$ содержит собственные значения задач \mathcal{P}_j , удовлетворяющие следствиям 3.14, 3.15. Предполагается, что λ_j^* достаточно велико и, следовательно, интервал $(\sqrt{s_j}, \lambda_j^*)$ содержит такие собственные значения задач \mathcal{P}_j , которые не переходят в какие-либо собственные значения задач \mathcal{P}_j^0 при $\delta \rightarrow +0$. Значит, для любого собственного значения $\hat{\lambda}_{j,k}$, удовлетворяющего следствию 3.14 или 3.15, существует интервал (содержащий это собственное значение), такой, что правая часть формулы в (39), отвечающая $\hat{\lambda}_{j,k}$, принимает значения разных знаков на различных концах этого интервала. Поскольку левые части могут быть сделаны сколь угодно малыми, а правые части не зависят от δ , непрерывны по λ_j и меняют знак при переходе через $\hat{\lambda}_{j,k}$, то для достаточно малого δ в этих интервалах найдутся $\bar{\lambda}_{1,i_1}$ и $\bar{\lambda}_{2,i_2}$, удовлетворяющие системе (39).

Замечание 3.19. Значения λ_j^* были введены при формулировании задачи $\mathcal{P}(\delta)$. Эти значения выбираются достаточно большими, чтобы интервалы $(\sqrt{a_j}, \lambda_j^*)$ содержали собственные значения задач \mathcal{P}_j , удовлетворяющих свойству (33) или (34), см. следствие 3.11 и следствия 3.14, 3.15. Параметр $\delta^* > 0$ фиксируется в соответствии с утверждением 3.16 и зависит от значения λ_j^* (чем больше λ_j^* , тем меньше δ^*).

4. Физическая постановка задачи. Рассмотрим задачу о распространении суммы двух монохроматических ТЕ и ТМ волн в плоском открытом волноводе, заполненном нелинейной средой. Нелинейный отклик среды характеризуется тензорным эффектом Керра [30, 31, 32, 33]. В нелинейном режиме такая сумма волн образует единую нелинейную двухчастотную волну (также называемую связанной ТЕ-ТМ волной).

Пусть $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – диэлектрический слой, расположенный между двух полупространств $x < 0$ and $x > h$ в декартовых координатах $Oxyz$. Полупространства заполнены немагнитной средой, характеризующейся вещественными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon = \epsilon_s \geq \epsilon_0 > 0$ и $\epsilon = \epsilon_c \geq \epsilon_0 > 0$, соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Диэлектрическая проницаемость ϵ_l слоя Σ будет введена ниже; магнитная проницаемость μ во всем пространстве положительная постоянная.

В соответствии с [34], введем двухчастотное электромагнитное поле

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad \mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (e_x, 0, e_z)^\top e^{i\gamma_1 y}, & \mathbf{H}_1 &= (0, h_y, 0)^\top e^{i\gamma_1 y}, \\ \mathbf{E}_2 &= (0, e_y, 0)^\top e^{i\gamma_2 z}, & \mathbf{H}_2 &= (h_x, 0, h_z)^\top e^{i\gamma_2 z}; \end{aligned} \quad (43)$$

здесь компоненты $e_x, e_y, e_z, h_x, h_y, h_z$ зависят только от одной пространственной координаты x , а γ_1, γ_2 – вещественные постоянные, подлежащие определению. Величины $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^+ + i\mathbf{E}_j^-$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^+ + i\mathbf{H}_j^-$ называются комплексными амплитудами [35]. Поле (42)–(43) называется ТЕ-ТМ волной. Вещественное (физическое) поле $\tilde{\mathbf{E}}_\omega, \tilde{\mathbf{H}}_\omega$ имеет вид $\text{Re } \mathbf{E}_\omega, \text{Re } \mathbf{H}_\omega$.

Частоты ω_1 и ω_2 , вообще говоря, различны, но их выбор имеет некоторые ограничения, связанные с выбором закона нелинейности для ϵ_l . Здесь предполагается, что оптический отклик диэлектрической проницаемости является локальным в пространстве и времени; временная зависимость оптического отклика описывается одной частотой; фазовый синхронизм отсутствует, так что вклад высших гармоник в оптический отклик пренебрежимо мал [9, 31, 36]. Эти предположения являются стандартными при изучении эффектов самовоздействия (самофокусировка, самодефокусировка, фазовая самомодуляция и т. д.) в нелинейной оптике [30, 31, 32, 33, 36, 37, 38].

Пусть диэлектрическая проницаемость ϵ_l слоя Σ имеет вид

$$\epsilon_l(\tilde{\mathbf{E}}_\omega) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где $\epsilon_1 = \epsilon_3 = \epsilon + \tilde{\alpha}_1 t_1^2 + \tilde{\alpha}_2 t_2^2 + \tilde{\alpha}_3 t_3^2$, $\epsilon_2 = \epsilon + \tilde{\alpha}_2 t_1^2 + \tilde{\alpha}_1 t_2^2 + \tilde{\alpha}_2 t_3^2$, $\epsilon, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 > 0$ – вещественные постоянные;

$$t_1 = |(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_x)|^2, \quad t_2 = |(\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_y)|^2, \quad t_3 = |(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_z)|^2,$$

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ – векторы электрического поля, формирующие ТЕ-ТМ волну; $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – единичные орты, отвечающие осям Ox, Oy, Oz координат $Oxyz$; (\cdot, \cdot) – евклидово скалярное произведение. Всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Мы считаем, что выполняются неравенства $\epsilon > \epsilon_s \geq \epsilon_c > 0$, где ϵ_s – диэлектрическая проницаемость полупространства $x < 0$, ϵ_c – диэлектрическая проницаемость полупространства $x > h$. Неравенство $\epsilon > \max\{\epsilon_s, \epsilon_c\}$ является необходимым условием существования распространяющихся ТЕ и ТМ волн в слое, заполненном однородной линейной средой, то есть при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$ [25, 26].

Отметим, что теоретическое доказательство существования двухчастотных распространяющихся волн, являющихся возмущением суммы двух решений соответствующих линейных задач, было получено относительно недавно на основе линеаризации нелинейных уравнений Максвелла: нелинейные распространяющиеся (связанные) ТЕ-ТМ и ТЕ-ТЕ волны в слое с керровской нелинейностью были введены и изучены в [10] и [8], соответственно. Однако потребовалось создание нового математического аппарата, чтобы доказать существование нелинеаризуемых решений в этих и некоторых близких задачах, см., например, [39].

Задача о распространении ТЕ-ТМ волны на одной частоте в слое с керровской нелинейностью была впервые рассмотрена в работах [35, 40]; позднее эта задача также привлекала исследователей [36, 41, 42]. Задача о распространении многочастотной волны в нелинейном фотонном кристалле упомянута в [43]. Общая формулировка задачи о распространении многочастотной волны в круглых и плоских цилиндрических волноводах была сформулирована в [9].

Различные существующие и потенциальные применения плоских волноводов с диэлектрической проницаемостью вида $\epsilon + \alpha|\mathbf{E}|^2$, а также некоторые экспериментальные результаты представлены в [32, 36, 44, 45, 46, 47, 48].

Итак, подставляя (42) в уравнения Максвелла и принимая во внимание линейность оператора rot , получаем, что $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k$ удовлетворяют (связанным) уравнениям

$$\begin{cases} e^{-i\omega_1 t} \text{rot } \mathbf{H}_1 + e^{-i\omega_2 t} \text{rot } \mathbf{H}_2 = -i\epsilon(\omega_1 \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_2 \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}), \\ e^{-i\omega_1 t} \text{rot } \mathbf{E}_1 + e^{-i\omega_2 t} \text{rot } \mathbf{E}_2 = i\mu(\omega_1 \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_2 \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}). \end{cases} \quad (45)$$

Поскольку полученная система должна выполняться для всех t , то отсюда следует, что имеет место система 4-х (векторных) уравнений

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_j = -i\epsilon\omega_j \mathbf{E}_j, \\ \text{rot } \mathbf{E}_j = i\mu\omega_j \mathbf{H}_j. \end{cases} \quad (46)$$

Распространяющиеся волны (которые мы ищем) затухают при удалении от границ слоя, то есть затухают при $|x| \rightarrow \infty$ (как видно из формул (49) искомые решения затухают экспоненциально при $|x| \rightarrow \infty$). Кроме того, из классической теории электромагнитного поля известно, что касательные компоненты полей $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ непрерывны на границах $x = 0, x = h$ [1, 25, 26]. И наконец, мы требуем, чтобы величины $e_x(x)|_{x=0}$ и $e_y(x)|_{x=0}$ имели фиксированные (известные) значения.

Подставляя (43) в (46) и используя обозначения $u_1 := e_x, u_2 := e_y, u_3 := e_z$, после некоторых преобразований, получаем

$$\begin{cases} \gamma_1 u_3' = -(\mu\omega_1^2 \epsilon_1 - \gamma_1^2) u_1, \\ u_2'' = -(\mu\omega_2^2 \epsilon_2 - \gamma_2^2) u_2, \\ u_3'' - \gamma_1 u_1' = -\mu\omega_1^2 \epsilon_3 u_3, \end{cases} \quad (47)$$

$h_x = -\gamma_2(\mu\omega_2)^{-1} e_y, h_y = \gamma_1^{-1} \omega_1 e_x, h_y' = -i\omega_1 e_z, h_z = (i\mu\omega_2)^{-1} e_y'$, где

$$\epsilon_1 = \epsilon_3 = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_1, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h, \end{cases} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_2, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h, \end{cases} \quad (48)$$

и $\epsilon_1 = \epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2, \epsilon_2 = \epsilon + \tilde{\alpha}_2 u_1^2 + \tilde{\alpha}_1 u_2^2 + \tilde{\alpha}_2 u_3^2$.

В соответствии с условиями на бесконечности, решения системы (47) в полупространствах $x < 0, x > h$ имеют вид

$$\begin{cases} u_1(x) = A_1 e^{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)} x}, \\ u_2(x) = A_2 e^{\sqrt{(\gamma_2^2 - \omega_2^2 \mu \epsilon_s)} x}, \\ u_3(x) = \gamma_1^{-1} \sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)} A_1 e^{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)} x}, \\ u_1(x) = B_1 e^{-\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)} (x-h)}, \\ u_2(x) = B_2 e^{-\sqrt{(\gamma_2^2 - \omega_2^2 \mu \epsilon_c)} (x-h)}, \\ u_3(x) = -\gamma_1^{-1} \sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)} B_1 e^{-\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)} (x-h)}, \end{cases} \quad (49)$$

где $A_j, B_j \neq 0$ – вещественные постоянные и, без потери общности, $A_j > 0$.

Внутри слоя Σ система (47) принимает вид

$$\begin{cases} u_3' = \gamma_1 u_1 - \omega_1^2 \mu \gamma_1^{-1} (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_1, \\ u_2'' = \gamma_2^2 u_2 - \omega_2^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_2 u_1^2 + \tilde{\alpha}_1 u_2^2 + \tilde{\alpha}_2 u_3^2) u_2, \\ u_3'' = \gamma_1 u_1' - \omega_1^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_2 u_3^2) u_3. \end{cases} \quad (50)$$

Касательные компоненты поля (42)–(43) – это e_y, h_z и e_z, h_y . Таким образом, функции $u'_3 - \gamma_1 u_1, u_2, u_3$ и u'_2 непрерывны на границах $x = 0$ и $x = h$. Принимая во внимание это свойство и используя решения (49) в полупространствах, получаем условия сопряжения

$$\begin{aligned} \left(\omega_1^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_1 - \frac{\gamma_1 \epsilon_s u_3}{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_s)}} \right) \Big|_{x=0} &= 0, \\ \left(\omega_1^2 \mu (\epsilon + \tilde{\alpha}_1 u_1^2 + \tilde{\alpha}_2 u_2^2 + \tilde{\alpha}_3 u_3^2) u_1 + \frac{\gamma_1 \epsilon_c u_3}{\sqrt{(\gamma_1^2 - \omega_1^2 \mu \epsilon_c)}} \right) \Big|_{x=h} &= 0, \\ \omega_j \sqrt{\mu (\gamma_j^2 - \epsilon_s)} u_j \Big|_{x=0} - u'_j \Big|_{x=0} &= 0, \\ -\omega_j \sqrt{\mu (\gamma_j^2 - \epsilon_c)} u_j \Big|_{x=h} - u'_j \Big|_{x=h} &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Дополнительные локальные условия принимают вид

$$u_1 \Big|_{x=0} = A_1, \quad u_2 \Big|_{x=0} = A_2,$$

где A_j совпадают с одноименными постоянными в (49).

Задача $\mathcal{P}(\delta)$ есть не что иное, как сформулированная здесь задача о распространении волн, если использовать обозначения $\lambda_j = \gamma_j, a_1 = \omega_1^2 \mu_0 \epsilon, a_2 = \omega_2^2 \mu_0 \epsilon, s_j = \omega_j^2 \mu_0 \epsilon_s, c_j = \omega_j^2 \mu_0 \epsilon_c; \alpha_1 = \omega_1^2 \mu_0 \tilde{\alpha}_1, \alpha_2 = \omega_2^2 \mu_0 \tilde{\alpha}_2$. Условия, перечисленные в этом разделе, дают условия (2)–(7) для $\delta \neq 0$, условия (10)–(12) и (15)–(17) для $\delta = 0$.

Поле (42)–(43) распространяется в слое Σ только на некоторых (выделенных) значениях пары (γ_1, γ_2) , которые называются (векторными или связанными) постоянными распространения. С математической точки зрения это нелинейная двухпараметрическая задача на собственные значения для системы (50) с начальными и краевыми условиями, выписанными выше. Векторные собственные значения этой задачи являются искомыми векторными постоянными распространения.

Нелинейные законы, используемые в нелинейной оптике, часто содержат множители, которые должны быть малы в силу физических ограничений модели [31, 33, 36]. Это позволяет применять методы возмущений для поиска возмущенных решений соответствующих линеаризованных задач, см., например, [8, 9, 10]. Однако такой подход не позволяет находить нелинеаризуемые решения, если они есть. Как показано в настоящей статье, в изучаемой здесь задаче такие решения есть (см. теорему 3.18).

5. Заключение. В связи с теоремой 3.18 сделаем два замечания. Во-первых, поскольку λ_j^* в Λ_j^* может быть достаточно большим, то теорема 3.18 утверждает существование векторных собственных значений задачи $\mathcal{P}(\delta)$ даже в той области, в которой нет собственных значений линейных задач \mathcal{P}_j^0 , то есть нелинеаризуемых собственных значений. Во-вторых, теорема 3.18 также утверждает существование векторных собственных значений $\tilde{\lambda}_{k,l} = (\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$, которые являются возмущениями пар решений $(\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$ линейных задач \mathcal{P}_j^0 (аналогичные результаты были получены ранее с помощью интегральных уравнений, см. [8, 9, 10]).

Теорема 3.18 утверждает существование лишь конечного числа векторных собственных значений задачи $\mathcal{P}(\delta)$. Однако принимая во внимание, что каждая из задач \mathcal{P}_j имеет бесконечное число собственных значений для любого $\alpha_1 > 0$, можно предположить, что задача $\mathcal{P}(\delta)$ также имеет бесконечное число решений. Доказательство этого результата, хотя бы для малых $\delta > 0$, было бы существенным шагом вперед.

Еще один интересный момент заключается в том, что задача $\mathcal{P}(\delta)$ может иметь решения, которые не могут быть представлены как какие-либо комбинации решений задач \mathcal{P}_j . Действительно, здесь доказано, что некоторые решения основной задачи могут быть эффективно приближены суперпозицией решений задач \mathcal{P}_j . Но поскольку основная задача является нелинейной и не может быть рассмотрена как суперпозиция \mathcal{P}_j , то задача $\mathcal{P}(\delta)$ может иметь другие решения. Разработка строго теоретического подхода для исследования этого вопроса была бы еще одним мощным продвижением в этой области.

Также представляется важным отметить, что предложенный подход может быть полезен не только в нелинейной оптике, но и в теории нелинейных задач на собственные значения с малым параметром, которые удовлетворяют пунктам i, ii, iii, сформулированным в первом разделе, в первую очередь это относится к задачам теории нелинейных колебаний.

В настоящей статье мы предполагаем зависимость основной задачи от одного малого коэффициента – δ . При необходимости можно ввести несколько коэффициентов для возмущений различных членов (1), а также и краевых условий (2)–(3).

Что касается физической задачи для более простого случая $\omega_1 = \omega_2$, в котором уравнения Максвелла имеют один временной множитель [36, 49]. Хотя этот случай известен десятилетия, существование связанных собственных волн было доказано лишь недавно. Строгое доказательство, насколько известно автору, впервые было предложено в [34], см. также и библиографию там.

В заключение заметим, что подход, использованный в настоящей статье, был развит для близких задач в [39] и существенно отличается от методов, предложенных в [11, 12]. В работах [11, 12] многопараметрическая задача на собственные значения сводится к системе интегральных характеристических

уравнений, которая является многомерным обобщением уравнений (22), (25). Анализ этой системы позволяет получить результаты, близкие к результатам, полученным здесь. В настоящей статье все результаты частично опираются на более простой подход (утверждения 3.16 и 3.17) и выкладки технически проще по сравнению с выкладками в [11, 12]. Наконец, заметим, что несмотря на то, что доказательство теоремы 3.18 опирается на, казалось бы, простую аргументацию о перемене знака непрерывной функции, сами результаты (уравнения (22), (25) и теоремы 3.4–3.7), которые позволяют прибегнуть к такой аргументации, являются достаточно сложными и самодостаточны в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Некоторые численные результаты см., например, в [9, 11].

Список литературы

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь; 1988.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.-Л.: ГИТТЛ; 1956.
3. Martynova V.Yu., Valovik D.V. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2023;46:804–833, <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/mma.9244>.
4. Valovik D.V. Asymptotic analysis of a nonlinear eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Nonlinearity*. 2020;33:3470–3499.
5. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: ТЕ-волны. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2019;59:838–858.
6. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: ТМ-волны. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60:429–450.
7. Smirnov Yu.G., Valovik D.V. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity. *Physical Review A*. 2015;91:013840(6 pages).
8. Smirnov Yu.G., Valovik D.V. Problem of nonlinear coupled electromagnetic te-te wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:083502(13).
9. Valovik D.V. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena. *Journal of Optics*. 2017;19:115502(16 pages).
10. Valovik D.V. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic te-tm wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:042902(14).
11. Tikhov S.V., Valovik D.V. Perturbation of nonlinear operators in the theory of nonlinear multifrequency electromagnetic wave propagation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019;75:76–93.
12. Kurseeva V.Yu., Tikhov S.V., Valovik D.V. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems: Linearised and nonlinearised solutions. *Journal of Differential Equations*. 2019;267:2357–2384.
13. Atkinson E.V., Mingarelli A.B. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm-Liouville Theory. USA: CRC Press; 2011.
14. Volkmer H. Multiparameter Eigenvalue Problems and Expansion Theorems. Berlin: Springer-Verlag; 1988.
15. Pons A., Gutschmidt S. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems in aeroelasticity. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019;19(5):1941008(22 pages), <https://doi.org/10.1142/S0219455419410086>.
16. Amer M.A. Constructive solutions for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 1988;35:83–90.
17. Binding P.A. On the use of degree theory for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1980;73:381–391.
18. Browne P.J., Sleeman B. D. Nonlinear multiparameter Sturm-Liouville problems. *Journal of Differential Equations*. 1979;34:139–146.
19. Shibata T. Variational methods for nonlinear multiparameter elliptic eigenvalue problems. *Nonlinearity*. 1997;10:1319–1329.
20. Gravenkamp H., Plestenjak B., Kiefer D. A., Jarlebring E. Computation of leaky waves in layered structures coupled tounbounded media by exploiting multiparameter eigenvalueproblems. *Journal of Sound and Vibration*. 2025;596:118716(22 pages).
21. Ambrosetti A., Rabinowitz P.H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*. 1973;14:349–381.
22. Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ; 1956.
23. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ; 1956.
24. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука; 1969.

25. Adams M.J., An Introduction to Optical Waveguides. New York: John Wiley & Sons; 1981.
26. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир; 1980.
27. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля. Киев: Наукова Думка; 1972.
28. Schürmann H.W., Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu. V. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides. *Phys. Rev. E*. 2005;71:016614(10).
29. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ; 1962.
30. Манькин Е.А. Взаимодействие света с веществом: феноменология нелинейной оптики. М.: МИФИ; 1996.
31. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика непрерывных сред. М.: Наука; 1982.
32. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. М.: Наука; 2003.
33. Шен И.Р. Принципы нелинейной оптики. М.: Наука; 1989.
34. Валовик Д.В., Смирнов Ю.Г. К задаче о распространении нелинейных связанных электромагнитных ТЕ-ТМ волн в слое. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2014;54:522–536.
35. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Cylindrical nonlinear waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1972;35:44–47.
36. Boardman A.D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. New York: Elsevier sci. Publ.; 1991. Reprinted from *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. H.-E. Ponath and G. I. Stegeman.
37. Eleonskii P.N. Silin V.P. Theory of self-trapping of an electromagnetic field. *Soviet Physics JETP*. 1970;31:918–923.
38. Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V. Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium. *Soviet Physics JETP*. 1966;23:1025–1033.
39. Валовик Д.В. Метод возмущений в теории распространения двухчастотных электромагнитных волн в нелинейном волноводе I: ТЕ-ТЕ волны. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2021;61(1):103–117.
40. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1973;36:282–285.
41. Boardman A.D., Twardowski T. Theory of nonlinear interaction between te and tm waves. *Journal of the Optical Society of America B*. 1988;5:523–528.
42. Boardman A.D., Twardowski T. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides. *Physical Review A*. 1989;39:2481–2492.
43. Ping Xie, Zhao-Qing Zhang Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals. *Physical Review Letters*. 2003;91:213904(4 pages).
44. Besse V., Boudebs G., Leblond H. Determination of the third- and fifth-order optical nonlinearities: the general case. *Applied Physics B*. 2014;116:911–917.
45. Ciattoni A., Rizza C., Palange E. Extreme nonlinear electrodynamics in metamaterials with very small linear dielectric permittivity. *Physical Review A*. 2010;81:043839(12 pages).
46. Boardman A.D., Alberucci A., Assanto G., Grimalsky V.V., Kibler B., McNiff J., Nefedov I.S., Rapoport Yu.G., Valagiannopoulos C.A. Waves in hyperbolic and double negative metamaterials including rogues and solitons. *Nanotechnology*. 2017;28(44):444001.
47. Borghi M., Castellan C., Signorini S., Trenti A., Pavese L. Nonlinear silicon photonics. *Journal of Optics*. 2017;19:093002.
48. Naseri M., Keshavarz A., Honarasa G. Imaging properties of a nonlinear multilayered superlens. *International Journal of Modern Physics B*. 2017;31:1750152(9 pages).
49. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P. Vector structure of electromagnetic field in self-focused waveguides. *Sov. Phys. Usp*. 1972;15:524–525.

References

1. Vainstein L.A. Electromagnetic Waves. Moscow: Radio i Svyaz; 1988. (In Russ.)
2. Malkin I.G. Some problems in the theory of nonlinear oscillations USA: U.S. Atomic Energy Commission, Technical Information Service; 1956.
3. Martynova VYu, Valovik DV. Nonclassical perturbation approach to a nonlinear multiparameter eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2023;46:804–833.
4. Valovik DV. Asymptotic analysis of a nonlinear eigenvalue problem arising in electromagnetics. *Nonlinearity*. 2020;33:3470–3499.
5. Valovik DV. Propagation of electromagnetic waves in an open planar dielectric waveguide filled with a nonlinear medium I: TE waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2019;59(6):958–977.
6. Valovik DV. Propagation of Electromagnetic Waves in an Open Planar Dielectric Waveguide Filled with a Nonlinear Medium II: TM Waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(3):427–447.

7. Smirnov YuG, Valovik DV. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity. *Physical Review A*. 2015;91:013840(6 pages).
8. Smirnov YuG, Valovik DV. Problem of nonlinear coupled electromagnetic te-te wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:083502(13).
9. Valovik DV. Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena. *Journal of Optics*. 2017;19:115502(16 pages).
10. Valovik DV. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic te-tm wave propagation. *Journal of mathematical physics*. 2013;54:042902(14).
11. Tikhov SV, Valovik DV. Perturbation of nonlinear operators in the theory of nonlinear multifrequency electromagnetic wave propagation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019;75:76–93.
12. Kurseeva VYu, Tikhov SV, Valovik DV. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems: Linearised and nonlinearised solutions. *Journal of Differential Equations*. 2019;267:2357–2384.
13. Atkinson EV, Mingarelli AB. Multiparameter Eigenvalue Problems. Sturm-Liouville Theory. USA: CRC Press; 2011.
14. Volkmer H. Multiparameter Eigenvalue Problems and Expansion Theorems. Berlin: Springer-Verlag; 1988.
15. Pons A, Gutschmidt S. Nonlinear multiparameter eigenvalue problems in aeroelasticity. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2019;19(5):1941008(22 pages).
16. Amer MA. Constructive solutions for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Computers & Mathematics with Applications*. 1988;35:83–90.
17. Binding PA. On the use of degree theory for nonlinear multiparameter eigenvalue problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1980;73:381–391.
18. Browne PJ, Sleeman BD. Nonlinear multiparameter Sturm-Liouville problems. *Journal of Differential Equations*. 1979;34:139–146.
19. Shibata T. Variational methods for nonlinear multiparameter elliptic eigenvalue problems. *Nonlinearity*. 1997;10:1319–1329.
20. Gravenkamp H, Plestenjak B, Kiefer DA, Jarlebring E. Computation of leaky waves in layered structures coupled tounbounded media by exploiting multiparameter eigenvalueproblems. *Journal of Sound and Vibration*. 2025;596:118716(22 pages).
21. Ambrosetti A, Rabinowitz PH. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*. 1973;14:349–381.
22. Vainberg MM. Variational methods for the study of nonlinear operators. USA: Holden-Day; 1964.
23. Krasnosel'skii MA. Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations. Oxford: Pergamon Press; 1964/
24. Vainberg MM, Trenogin VA. Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations. Netherlands: Wolters-Noordhoff B.V.; 1974.
25. Adams MJ. An Introduction to Optical Waveguides. New York: John Wiley & Sons; 1981.
26. Unger H-G. Planar Optical Waveguides and Fibres. Oxford: Clarendon Press; 1977.
27. Marchenko VA. Spectral Theory of Sturm-Liouville Operators. Kiev: Nauk. Dumka; 1972. (In Russ.)
28. Schürmann HW, Smirnov YuG, Shestopalov YuV. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides. *Phys. Rev. E*. 2005;71:016614(10).
29. Pontryagin L.S. Ordinary Differential Equations. Oxford: Pergamon Press; 1962.
30. Manykin EA. Interaction of Light with Matter: Phenomenology of Nonlinear Optics. Moscow: National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute); 1996. (In Russ.)
31. Landau LD, Lifshitz EM, Pitaevskii LP. Course of Theoretical Physics (vol.8). Electrodynamics of Continuous Media. Oxford: Butterworth-Heinemann; 1993
32. Akhmediev NN, Ankevich A. Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. London: Chapman and Hall; 1997.
33. Shen YR. The Principles of Nonlinear Optics. New York: John Wiley and Sons; 1984.
34. Valovik DV, Smirnov YuG. On the Problem of Propagation of Nonlinear Coupled TE-TM Wave in a Layer. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54(3):522–536.
35. Eleonskii PN, Ogan'es'yants LG, Silin VP. Cylindrical nonlinear waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1972;35:44–47.
36. Boardman AD, Egan P, Lederer F, Langbein U, Mihalache D. Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. New York: Elsevier sci. Publ.; 1991. Reprinted from *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. Ponath H-E and Stegeman GI.
37. Eleonskii PN, Silin VP. Theory of self-trapping of an electromagnetic field. *Soviet Physics JETP*. 1970;31:918–923.
38. Akhmanov SA, Sukhorukov AP, Khokhlov RV. Self-focusing and self-trapping of intense light beams in a nonlinear medium. *Soviet Physics JETP*. 1966;23:1025–1033.
39. Valovik DV. Perturbation Method in the Theory of Propagation of Two-Frequency Electromagnetic Waves in a Nonlinear Waveguide I: TE-TE Waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2021;61(1):103–117.

40. Eleonskii PN, Ogan'es'yants LG, Silin VP. Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides. *Soviet Physics JETP*. 1973;36:282–285.
41. Boardman AD, Twardowski T. Theory of nonlinear interaction between te and tm waves. *Journal of the Optical Society of America B*. 1988;5:523–528.
42. Boardman AD, Twardowski T. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides. *Physical Review A*. 1989;39:2481–2492.
43. Ping Xie, Zhao-Qing Zhang Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals. *Physical Review Letters*. 2003;91:213904(4 pages).
44. Besse V, Boudebs G, Leblond H. Determination of the third- and fifth-order optical nonlinearities: the general case. *Applied Physics B*. 2014;116:911–917.
45. Ciattoni A, Rizza C, Palange E. Extreme nonlinear electrostatics in metamaterials with very small linear dielectric permittivity. *Physical Review A*. 2010;81:043839(12 pages).
46. Boardman AD, Alberucci A, Assanto G, Grimalsky VV, Kibler B, McNiff J, Nefedov IS, Rapoport Yu.G, Valagiannopoulos CA. Waves in hyperbolic and double negative metamaterials including rogues and solitons. *Nanotechnology*. 2017;28(44):444001.
47. Borghi M, Castellan C, Signorini S, Trenti A, Pavesi L. Nonlinear silicon photonics. *Journal of Optics*. 2017;19:093002.
48. Naseri M, Keshavarz A, Honarasa G. Imaging properties of a nonlinear multilayered superlens. *International Journal of Modern Physics B*. 2017;31:1750152(9 pages).
49. Eleonskii PN, Ogan'es'yants LG, Silin VP. Vector structure of electromagnetic field in self-focused waveguides. *Sov. Phys. Usp.* 1972;15:524–525.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.01.2026

Поступила после рецензирования 27.02.2026

Принята к публикации 02.03.2026

Received January 12, 2026

Revised February 27, 2026

Accepted March 2, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Валовик Дмитрий Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry V. Valovik – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Supercomputing, Penza State University, Penza, Russia

К содержанию

Низкочастотный спектр задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе

Поздняков А. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Пенкиным О. М.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
AndAlexPozdnyakov@yandex.ru


Аннотация. Данная работа посвящена исследованию зависимости спектра частот собственных колебаний струнной сетки от распределения массы между струнами и узлами. Сетка моделируется геометрическим графом, для которого формулируется задача Штурма – Лиувилля. Показано, что при стремлении шага сетки к нулю её динамические свойства приближаются к свойствам сплошной мембраны. Проведен анализ уравнения, описывающего низкочастотную часть спектра. Доказана монотонная зависимость собственных значений от линейной плотности струн. Установлено, что спектр сетки всегда заключён между спектром разностного оператора Лапласа и спектром мембраны. На основе полученных результатов дано обоснование выбора струнной сетки в качестве эффективной редуцированной модели задачи о колебаниях мембраны, что, в свою очередь, приводит к уменьшению вычислительной сложности данной задачи.

Ключевые слова: геометрический граф, задача Штурма – Лиувилля, лапласиан, модель пониженного порядка

Для цитирования: Поздняков А.А. Низкочастотный спектр задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):130–136. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-130-136
EDN UTYLUS

Original Research

Low-frequency Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Metric Graph

Andrey A. Pozdnyakov 

(Article submitted by a member of the editorial board Penkin O. M.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
AndAlexPozdnyakov@yandex.ru

Abstract. This paper investigates the dependence of the natural oscillation frequency spectrum of a string grid on the mass distribution between the strings and nodes. The grid is modeled as a metric graph, for which a Sturm–Liouville problem is formulated. It is shown that as the grid spacing tends to zero, its dynamic properties approach those of a continuous membrane. An analysis of the equation describing the low-frequency part of the spectrum is carried out. The monotonic dependence of the eigenvalues on the linear density of the strings is proved. It is established that the spectrum of the grid is always enclosed between the spectrum of the difference Laplace operator and the spectrum of the membrane. Based on the obtained results, a justification is given for choosing the string grid as an effective reduced-order model for problems concerning membrane oscillations, which, in turn, leads to a reduction in the computational complexity of this problem.

Keywords: Metric Graph, Sturm – Liouville Problem, Laplacian, Model Order Reduction

For citation: Pozdnyakov AA. Low-frequency Spectrum of the Sturm – Liouville Problem on a Metric Graph. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):130–136. (In Russ.).
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-130-136 EDN UTYLUS

1. Постановка задачи. Пусть имеется сетка из струн с квадратными ячейками, натянутая в плоскости xOy и закреплённая по контуру квадрата $Q = [0; l] \times [0; l]$ (см. следующий рисунок).

Узлы сетки – точки примыкания струн друг к другу – имеют координаты $(ih; jh)$, где $i, j \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i, j \leq n$; $n = l/h \geq 2$. Мы считаем, что к внутренним (т. е. не лежащим на границе квадрата Q) узлам сетки прикреплены грузы одинаковой массы m_h . Мы также считаем, что вдоль струн распределена масса постоянной плотности ρ_h и они имеют постоянное натяжение σ_h .

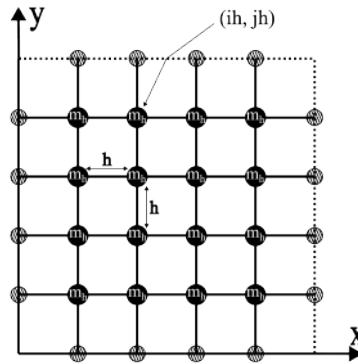


Рис. 1. Струнная сетка
Fig. 1. String grid

Будем моделировать эту механическую систему геометрическим графом $G_h = V \cup E^H \cup E^V$. Объясним, как устроены множества, которые составляют геометрический граф:

$$V = \{v_{ij} - \text{узлы сетки с координатами } (ih; jh)\};$$

$$E^H = \{e_{ij}^H - \text{горизонтальные рёбра между вершинами } v_{ij} \text{ и } v_{i+1,j}\};$$

$$E^V = \{e_{ij}^V - \text{вертикальные рёбра между вершинами } v_{ij} \text{ и } v_{i,j+1}\}.$$

Множество вершин, лежащих на границе квадрата Q , обозначим как ∂G_h . Эти вершины будем называть граничными, а остальные – внутренними. Множество, составленное из внутренних вершин и точек всех рёбер, обозначим через G_h° .

Квадраты частот собственных колебаний этой системы, как хорошо известно (см. например, [1]), являются собственными значениями следующей задачи Штурма – Лиувилля на графе G_h :

$$\sigma_h u''(x) + \lambda \rho_h u(x) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i,j \in I(v_{ij})} \sigma_h u'_{v_{ij}}(v_{ij}) + \lambda m_h u(v_{ij}) = 0, \tag{2}$$

$$u|_{\partial G_h} = 0. \tag{3}$$

Первое уравнение относится к точкам X , лежащим на рёбрах; x – координата точки X при натуральной параметризации соответствующего ребра. Производная, фигурирующая в нём, относится именно к этому параметру, меняющемуся от 0 до h (начальная вершина имеет координату 0, конечная – h).

Второе уравнение относится к внутренним вершинам $v_{ij} \in G_h^\circ$. В этом уравнении $I(v_{ij})$ – множество номеров рёбер, инцидентных этой вершине, v_j – единичный вектор, направленный от v_{ij} внутрь ребра e_{ij}^H (или e_{ij}^V).

При достаточно малых размерах ячеек данная механическая система близка по своим свойствам к мембране (в смысле близости спектров частот собственных колебаний), растянутой в квадрате $Q = [0, l] \times [0, l]$, если её напряжение σ связано с натяжением σ_h , а плотность ρ связана с плотностью сетки ρ_h так, что выполнены следующие условия:

$$\rho = \frac{2\rho_h h + m_h}{h^2}; \tag{4}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_h}{h}. \tag{5}$$

Данные соотношения имеют физический смысл. Если выделить фрагмент $h \times h$ сетки и мембраны, изображённый на рисунке, то масса, сосредоточенная на кресте, в точности равна массе, сосредоточенной на квадрате. А сила, с которой натяжение действует на концевые точки креста, совпадает с силой, с которой напряжение мембраны действует на границу квадрата. Поэтому естественно ожидать, что низкочастотные части спектров частот собственных колебаний сетки и мембраны, при достаточно малом h , будут близки.

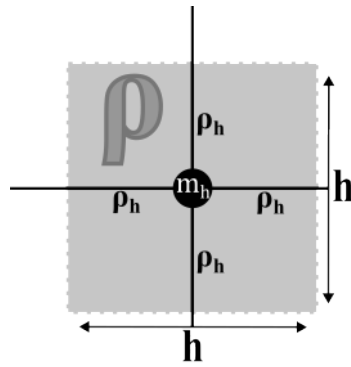


Рис. 2. Распределение масс
Fig. 2. Mass distribution

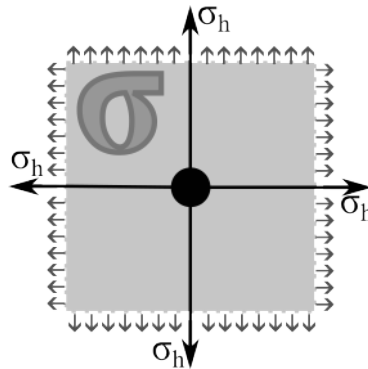


Рис. 3. Струнная сетка
Fig. 3. String grid

Квадраты частот собственных колебаний мембраны являются собственными значениями следующей краевой задачи:

$$\sigma \Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad (6)$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \quad (7)$$

Факт близости низкочастотных частей спектров задач (1)–(3) и (6)–(7) был доказан в [2]. В следующем разделе будет подробно изучен спектр задачи (1)–(3) при различных значениях ρ_h .

2. Анализ низкочастотной части спектра струнной сетки. Пусть общая масса систем является постоянной величиной, тогда верно соотношение $2\rho_h h + m_h = \rho h^2 = \text{const}$. Мы изучим поведение собственного значения λ при изменении ρ_h от его минимального значения – $\rho_h = 0$ ($m_h = 2\rho h^2$) до максимального – $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$ ($m_h = 0$).

Подробный анализ задачи (1) – (3) устанавливает, что её собственные значения могут быть выражены двумя уравнениями, приведёнными ниже. Этот факт был установлен в [1].

$$2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right) = 4 \cos\left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}}\right) - m_h \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_h \sigma_h}} \sin\left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}}\right); \quad (8)$$

$$\left(\sin\left(h \sqrt{\lambda \frac{\rho_h}{\sigma_h}}\right)\right)^{n^2-1} = 0. \quad (9)$$

Здесь и всюду далее $i, j = 1, \dots, n-1$ обозначают номера собственных частот.

Интерес представляет анализ уравнения (8), описывающего низкочастотную часть спектра. Уравнение (9) отвечает за высокочастотную «струнную» часть спектра задачи (1)–(3), которая в данной работе не рассматривается.

В частности, нас интересует λ в зависимости от распределения масс по струне. Так как m_h и ρ_h являются зависимыми друг от друга величинами: $m_h = \rho h^2 - 2\rho_h h$, то λ можно считать функцией от одной переменной $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\rho_h)$.

Возможные значения переменной ρ_h в свою очередь находятся в промежутке $\left[0, \frac{\rho h}{2}\right]$.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$F_{ij}(\lambda_{ij}, \rho_h) = 4 \cos(\alpha) - \frac{(\rho_h - 2\rho_h)\alpha \sin(\alpha) - C_{ij}}{\rho_h} = 0, \quad (10)$$

где

$$\alpha = h\sqrt{\lambda_{ij} \frac{\rho_h}{\sigma_h}}; \quad C_{ij} = 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right).$$

Начнём анализ с изучения поведения функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$ в крайних точках области определения. Пусть $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$, а $m_h = 0$, тогда уравнение (10) сводится к выражению

$$2 \cos\left(h\sqrt{\frac{\lambda \rho}{2\sigma}}\right) = \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right). \quad (11)$$

Разложение выражения (11) в ряд Тейлора приводит к следующему выражению для λ_{ij} :

$$\lambda_{ij}\left(\frac{\rho h}{2}\right) = \frac{\sigma \pi^2}{\rho l^2} (i^2 + j^2) + O(h^2).$$

Первое слагаемое данного выражения в точности соответствует выражению, которое описывает спектр колебаний квадратной мембраны.

Замечание. При $(i = j)$ из выражения (11) сразу следует, что

$$\lambda_{ii}\left(\frac{\rho h}{2}\right) = \frac{\sigma \pi^2}{\rho l^2} (i^2 + i^2).$$

Таким образом, мы выяснили, что при $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$ низкочастотная часть спектра задачи (1)–(3) близка к соответствующим собственным значениям задачи (6)–(7) с квадратичной точностью приближения (см., например, [3]). Кроме того, для кратных собственных значений $(i = j)$ значения совпадают в точности, независимо от параметра разбиения сетки h .

Теперь рассмотрим случай $\rho_h = 0$, $m_h = \rho h^2$. Прямую подстановку в выражение (11) производить нельзя, ввиду наличия параметра ρ_h в знаменателе, поэтому будем рассматривать предельное значение $F_{ij}(\lambda, \rho_h)$ при $\rho_h \rightarrow 0$. После выполнения предельного перехода получаем выражение для λ :

$$\lambda_{ij}(0) = \frac{4\sigma \left(\sin^2\left(\frac{\pi h}{2l} i\right) + \sin^2\left(\frac{\pi h}{2l} j\right) \right)}{\rho h^2}. \quad (12)$$

Выражение (12) в точности совпадает со спектром разностного оператора Лапласа, выражение для которого можно посмотреть в [4]. Это значит, что низкочастотный спектр задачи (1)–(3) совпадает со спектром задачи (6)–(7), если бы он вычислялся с помощью метода конечных разностей.

Приступим к изучению поведения функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$ при $\rho_h \in \left(0, \frac{\rho h}{2}\right)$. Для этого воспользуемся теоремой о дифференцировании неявной функции:

$$\frac{d\lambda_{ij}}{d\rho_h} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \rho_h}}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}};$$

$$\frac{d\lambda_{ij}}{d\rho_h} = \frac{\lambda_{ij}(\rho_h - 2\rho_h)(\sin(\alpha) - \alpha \cos(\alpha))}{\rho_h \left((\rho_h + 2\rho_h) \sin(\alpha) + \alpha(\rho_h - 2\rho_h) \cos(\alpha) \right)}. \quad (13)$$

Теперь необходимо изучить знак выражения (13). $\lambda_{ij} > 0$, $\rho_h \geq 0$, $h > 0$, из (4) следует, что $\rho h - 2\rho_h = \frac{m_h}{h} \geq 0$. Таким образом, знак производной определяется выражением

$$\frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{(\rho h + 2\rho_h) \sin \alpha + \alpha(\rho h - 2\rho_h) \cos \alpha}. \quad (14)$$

Для того, чтобы определить знак выражения (14), потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. $|C_{ij}| = \left| 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} i\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi h}{l} j\right) \right| < 4$.

Доказательство. Выражения C_{ij} соответствуют внутренним вершинам графа G_h , для них известно, что $i, j \in (1, n - 1)$.

$$-1 < \cos\left(\frac{\pi(n-1)}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 1;$$

$$-2 < 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) < 2.$$

Аналогичная цепочка неравенств верна и для $\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)$:

$$-2 < 2 \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) < 2.$$

Складывая неравенства, получаем

$$-4 < 2 \cos\left(\frac{\pi i}{n}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) < 4.$$

С учётом обозначений: $|C_{ij}| < 4$. ■

Утверждение 2. $\alpha \in (0, \pi)$.

Доказательство. Введём обозначение $\Phi(\alpha) = 4 \cos(\alpha) - \frac{(\rho h - 2\rho_h)}{\rho h} \alpha \sin(\alpha)$;

$\Phi(\alpha)$ – непрерывная по α функция, для которой

$$\Phi(0) = 4; \quad \Phi(\pi) = -4.$$

С другой стороны, из (10) напрямую следует $\Phi(\alpha) = C_{ij}$. Напомним, что $|C_{ij}| < 4$. По теореме о промежуточном значении, $\Phi(\alpha) = C_{ij}$ имеет хотя бы одно решение при $\alpha \in (0, \pi)$. ■

Утверждение 3. $N(\alpha) = \sin \alpha - \alpha \cos \alpha > 0$.

Доказательство. $N(\alpha)$ – непрерывная функция. Её производная $N'(\alpha) = \alpha \sin \alpha > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$. Таким образом, $N(\alpha)$ – строго возрастающая функция, причём $N(0) = 0$. Это означает, что $N(\alpha) > 0$ на всей области определения. ■

Утверждение 4. $D(\alpha) = (\rho h + 2\rho_h) \sin \alpha + \alpha(\rho h - 2\rho_h) \cos \alpha > 0$.

Доказательство. Рассмотрим случай $\cos \alpha \geq 0$. Тогда первое слагаемое положительно, а второе – неотрицательно. Значит, $D(\alpha) > 0$ при $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Теперь рассмотрим $\cos \alpha < 0$. Из уравнения (10) выразим $B = \rho h - 2\rho_h$:

$$B = \frac{\rho_h(4 \cos \alpha - C_{ij})}{\alpha \sin \alpha}.$$

$B \geq 0$, $\sin \alpha > 0$, тогда должно выполняться $4 \cos \alpha - C_{ij} \geq 0$. Учитывая $|C_{ij}| < 4$, получим оценку

$$B = \frac{\rho_h(4 \cos \alpha - C_{ij})}{\alpha \sin \alpha} \leq \frac{\rho_h(4 \cos \alpha + 4)}{\alpha \sin \alpha} = \frac{4\rho_h(\cos \alpha + 1)}{\alpha \sin \alpha}.$$

Подставим данную оценку в выражение для $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) \geq \frac{(\rho h + 2\rho_h) \sin^2 \alpha + 4\rho_h(\cos \alpha + 1) \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Отдельно рассмотрим числитель данного выражения

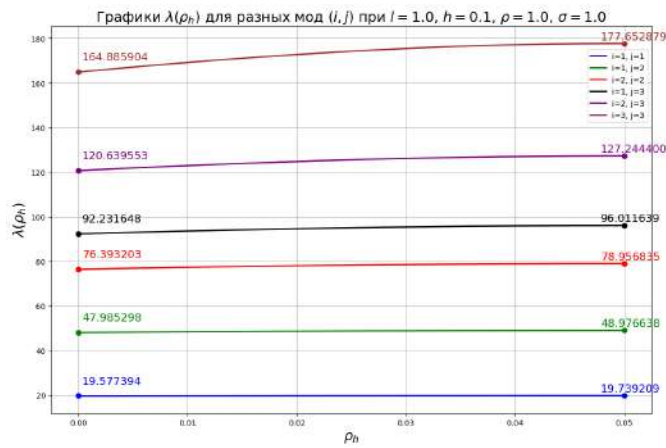
$$A \sin^2 \alpha + 4\rho_h(\cos \alpha + 1) \cos \alpha = (\cos \alpha + 1) \left(A(1 - \cos \alpha) + 4\rho_h \cos \alpha \right) = (\cos \alpha + 1)(A - B \cos \alpha),$$

где $A = \rho h + 2\rho_h$, $B = \rho h - 2\rho_h$.

Известно, что $\cos \alpha + 1 > 0$, $A - B \cos \alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$. Таким образом, получаем оценку $D(\alpha) > 0$ для $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Отсюда следует, что $D(\alpha) > 0$ на всей области определения. ■

Из утверждений 3, 4 следует, что выражение (14), а следовательно, и производная (13) положительны. Это говорит о том, что $\lambda_{ij}(\rho_h)$ является монотонно возрастающей функцией.

Весь проведённый анализ подтверждается и численными исследованиями. Ниже приведены графики функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$, построенные непосредственно из выражения (8). Расчёты выполнялись на языке программирования Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib; для численных вычислений использовался метод Брента, встроенный в библиотеку SciPy.

Рис. 4. Графики функций $\lambda_{ij}(\rho_h)$, полученные численным методом БрентаFig. 4. Graphs of the functions $\lambda_{ij}(\rho_h)$ obtained by Brent's numerical method

Графики функции $\lambda_{ij}(\rho_h)$ наглядно иллюстрируют монотонность низкочастотного спектра задачи (1)–(3) при изменении линейной плотности струн ρ_h . Кроме того, можно увидеть, что область значений $\lambda_{ij}(\rho_h)$ заключена между значениями, которые соответствуют спектру разностного лапласиана и значениями спектра для задачи (6)–(7) с погрешностью, квадратично зависящей от h . Для кратных мод ($i = j$) погрешность отсутствует, что было обнаружено и в ходе исследования. Анализ и численные эксперименты полностью согласованы.

3. Связь с MOR эффектом. Задача (1)–(3) связана с методом понижения порядка системы (Model order reduction), который позволяет перейти от высокоразмерных задач к задачам с меньшей размерностью. Данный метод значительно уменьшает вычислительную сложность, но при этом сохраняет ключевые свойства изначальной системы, что упрощает её анализ. Подробное описание метода и области его применения можно найти, например, в [5].

В работе [6] метод понижения порядка был применён к задаче о колебаниях прямоугольной мембраны на упругом основании. В качестве объекта меньшей размерности, но со схожими физическими свойствами, была выбрана сетка из струн, содержащая в узлах пружины, которая моделировалась с помощью специального геометрического графа.

Было показано, что решения изначальной и редуцированной задачи требуют разных вычислительных затрат. Применение метода конечных разностей с параметром разбиения n к задаче о колебаниях струн требует в $\frac{n^3}{8}$ меньше операций, чем применение этого же метода непосредственно к мембранной задаче.

С помощью численных экспериментов авторы обнаружили, что редуциционная модель не только требует меньше вычислений, но и даёт хорошее приближение к точным значениям. Однако строгое теоретическое обоснование этого вычислительного эффекта в статье отсутствует.

В данной же работе в качестве исследуемой задачи можно рассматривать (6)–(7), а в качестве редуцированных моделей не одну сетку из струн, а целое семейство, так как разная пропорция в распределении между m_h и ρ_h на самом деле описывает континуальное количество случаев. Физическую схожесть мембраны и сетки из струн гарантируют условия (4), (5).

Поведение спектра задачи (1)–(3) в зависимости от распределения линейной плотности и массы было подробно изучено в разделе 2 настоящей работы. Анализ показал, что весь спектр этой задачи заключён между двумя известными выражениями, стремящимися к точному собственному значению мембранной задачи $\lambda_{\text{разн.}} \leq \lambda(\rho_h) \leq \lambda_{\text{мембр.}} + O(h^2)$.

Это означает, что $\lambda(\rho_h) \rightarrow \lambda_{\text{мембр.}}$ при $h \rightarrow 0$ со скоростью не хуже $O(h^2)$, причём для любого распределения масс, что показывает состоятельность выбора струнной сетки в качестве редуциционной модели для мембраны. Выявленная монотонность указывает на то, что для большей точности следует выбирать распределение $\rho_h = \frac{\rho h}{2}$, что соответствует случаю, когда вся масса распределена по струнам.

Ввиду того, что и в задаче из [6], и в данной работе ключевую роль занимает оператор Лапласа (на графе и классический), проведённый здесь анализ может быть применён и для объяснения возникновения вычислительного эффекта, который был обнаружен в [6].

Список литературы

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит; 2005. 272 с.
2. Пенкин О.М. Некоторые вопросы качественной теории краевых задач на графах: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.; 1988. 28 с.

3. Курант Р., Гилберт Д. Методы математической физики. Т. 1. Пер. с нем. Ю. Рабиновича и Э. Либина. М.; Л.: Гостехиздат; 1951. 476 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука; 1971. 552 с.
5. Шильдерс В., Ван дер Ворст Х., Роммес Я. Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications. Heidelberg: Springer; 2008. 471 с.
6. Калдыбекова Б.К., Решетова Г.В. A numerical solution of the membrane eigenproblem by the model order reduction. *Сибирские электронные математические известия* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2017;14:1088–1099.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т. 1: Анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука; 1973. 631 с.
8. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука; 1973. 400 с.
9. Калдыбекова Б.К., Пенкин О.М. Низкая частота собственных колебаний специальной сетки из струн. *Вестник КазНПУ имени Абая. Серия «Физико-математические науки»*. 2017;1(57):28–33.
10. Кулешов П.А., Диаб А.Т., Пенкин О.М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе. *Математические заметки* [Mathematical Notes]. 2014;96(6):885–895.
11. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир; 1972. 418 с.

References

1. Pokornyi YuV, Penkin OM, Pryadiev VL, Borovskikh AV, Lazarev KP, Shabrov SA. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential equations on geometric graphs]. Moscow: Fizmatlit; 2005. 272 p. (In Russ.)
2. Penkin OM. *Nekotorye voprosy kachestvennoi teorii kraevykh zadach na grafakh* [Some questions of the qualitative theory of boundary value problems on graphs]: avtoref. dis. kand. fiz.-mat. nauk. Moscow; 1988. 28 p. (In Russ.)
3. Courant R, Hilbert D. *Metody matematicheskoi fiziki* [Methods of Mathematical Physics]. Vol. 1. Transl. from German by Yu Rabinovich and E Libin. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat; 1951. 476 p. (In Russ.)
4. Samarskii AA. *Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem* [Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow: Nauka; 1971. 552 p. (In Russ.)
5. Schilders WHA, van der Vorst HA, Rommes J. *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*. Heidelberg: Springer; 2008. 471 p.
6. Kaldybekova BK, Reshetova GV. *A numerical solution of the membrane eigenproblem by the model order reduction. Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2017;14:1088–1099. (In Russ.)
7. Bakhvalov NS. *Chislennye metody. T. 1: Analiz, algebra, obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Numerical Methods. Vol. 1: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations]. Moscow: Nauka; 1973. 631 p. (In Russ.)
8. Godunov SK, Ryabenskii VS. *Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu* [Difference Schemes. An Introduction to the Theory]. Moscow: Nauka; 1973. 400 p. (In Russ.)
9. Kaldybekova BK, Penkin OM. *Nizkaya chastota sobstvennykh kolebanii spetsial'noi setki iz strun* [On the low frequencies of natural oscillations of a special grid of strings]. *Vestnik KazNPU imeni Abaya. Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki»*. 2017;1(57):28–33. (In Russ.)
10. Kuleshov PA, Diab AT, Penkin OM. *Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya laplasiana na grafe* [Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph]. *Matematicheskie zametki* [Mathematical Notes]. 2014;96(6):885–895. (In Russ.)
11. Richtmyer R, Morton K. *Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach* [Difference Methods for Initial-Value Problems]. Moscow: Mir; 1972. 418 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 26.02.2026

Received February 26, 2026

Поступила после рецензирования 10.03.2026

Revised March 10, 2026

Принята к публикации 14.03.2026

Accepted March 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Поздняков Андрей Александрович – бакалавр 4 года обучения направления подготовки «Прикладная математика», Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Andrey A. Pozdnyakov – 4-year Bachelor's Degree in Applied Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

Усреднение уравнения Лаврентьева – Бицадзе в области, периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения

Кервенева К. Е.¹ , Мамунова Т. Р.² 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Алхутовым Ю.А.)

¹ Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика Е. А. Букетова,
Казахстан, 100024, г. Караганда, ул. Университетская, д. 28
kervenev@bk.ru

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
tomirismamunova@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена задача для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в модельной области, перфорированной вдоль линии смены типа уравнения и имеющей характерный размер микронеоднородностей ε , с однородным краевым условием Дирихле на границе полостей и однородным условием Дирихле на внешней части границы. Для этой задачи построена усреднённая задача и доказана сходимость решений исходной задачи к решению усреднённой. При этом обнаружено, что предельная (усреднённая) задача вырождается в «гиперболической» части области.

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева – Бицадзе, перфорированная область, уравнение смешанного типа, усреднение

Финансирование: Статья подготовлена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (грант Минобрнауки России № 075-15-2025-345).

Для цитирования: Кервенева К.Е., Мамунова Т.Р. Усреднение уравнения Лаврентьева – Бицадзе в области, периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):137–146. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-137-146 EDN NTVWDK

Original Research

Homogenization of Lavrentiev – Bitsadze Equation in a Domain Periodically Perforated Along the Line of the Equation Type Change

Kabylgazy E. Kervenev¹ , Tomiris R. Mamunova² 

(Article submitted by a member of the editorial board Alkhutov Yu. A.)

¹ Buketov Karaganda National Research University,
28 Universitetskaya St., Karaganda 100024, Kazakhstan
kervenev@bk.ru

² Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
tomirismamunova@gmail.com

Abstract. A problem for the Lavrentiev – Bitsadze equation in a model domain perforated along the line of the equation type change with a characteristic size of micro-inhomogeneities ε is considered. Homogeneous Dirichlet boundary conditions are set on the boundary of the cavities and on the external part of the boundary. The homogenized problem is constructed for this problem, and the convergence of solutions of the original problem to the solution of the homogenized one is proved. It is found that the limiting (homogenized) problem degenerates in the “hyperbolic” part of the domain.

Keywords: Lavrentiev – Bitsadze equation, perforated domain, mixed-type equation, homogenization

Funding: This article was supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2025-345).

For citation: Kervenev KE., Mamunova TR. Homogenization of Lavrentiev – Bitsadze Equation in a Domain Periodically Perforated Along the Line of the Equation Type Change. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):137–146. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-137-146 EDN NTVWDK

1. Введение. Усреднение задач в микронеоднородных средах является важной прикладной задачей и существенной частью теории дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают во многих областях науки, таких как химия, физика, биология, биофизика и биохимия, геология, инженерия, материаловедение и др. Исследования в данной области приводят к математическим постановкам, включающим

уравнения и краевые условия с малыми параметрами, характеризующими размеры микронеоднородностей в областях со сложной геометрией, имеющей нетривиальную микронеоднородную структуру. Часто рассматриваются уравнения в частично перфорированных областях, которые требуют применения методов асимптотического анализа, теории усреднения, теории пограничного слоя и т. д. Случай уравнения Стокса рассмотрен в [43, 34, 38, 39, 35]. Модельные задачи для оператора Лапласа с различными граничными условиями на границе полостей рассмотрены в работах [7, 36, 37, 15, 16, 8]. Отметим, что краевые условия третьего рода на границе полостей рассматривались в работах [33, 32, 3, 31, 4]. Надо сказать, что также изучались диссипативные эволюционные дифференциальные уравнения, интересные результаты получены для сходимости аттракторов в перфорированных областях. В работах [19, 21] рассмотрена ситуация случайных полостей, т. е. рассматривалось случайное усреднение аттракторов. Двумерное уравнение Навье – Стокса изучено в [1, 2, 14]. В этих работах доказана слабая сходимость аттракторов. Сильная сходимость доказана в [20]. Уравнения Гинзбурга – Ландау изучены в [22, 23, 18]. В этих работах рассмотрены докритический, критический и закритический случаи.

Отметим работы в областях, перфорированных вдоль многообразий (см. [4, 7, 9, 10, 12, 8, 5, 6, 17]). В этих работах применены методы теории усреднения для асимптотического анализа краевых задач в микронеоднородных областях. При этом выявлено макровлияние микронеоднородностей в области. Подробнее о работе [4]. В ней для уравнения Пуассона с гладкой правой частью в многомерной перфорированной области рассматриваются следующие типы задач: на границах множеств малого диаметра, «разбросанных» внутри области, ставится условие Неймана, а на границе самой области – однородное условие Дирихле; на границах малых множеств ставится третье краевое условие, а на границе самой области – условие Дирихле; условие Дирихле как на границе области, так и на границах малых множеств. Показана сходимость решений и собственных значений усредненных задач к решениям соответствующих предельных задач, кроме того, получены оценки на скорость сходимости решений и собственных значений при дополнительных предположениях на размеры малых множеств. Эти же типы задач рассмотрены в области, разделенной перфорированной перегородкой. Показано, что предельная задача будет иметь скачок в граничных условиях на перегородке в случае смешанной задачи и задачи Дирихле при условии, что размеры перфорации достаточно малы. Если же в задаче Дирихле диаметры малых множеств достаточно «велики», то в пределе граничное условие на перегородке вовсе исчезает. Для такой области также получены оценки на скорость сходимости решений и собственных значений усредненных задач к решениям и собственным значениям соответствующих предельных задач.

В работах [10, 11] моделировались задачи, связанные с изучением физико-химических свойств струи газа в камере сгорания и сопле жидкостного реактивного двигателя.

В настоящей работе рассматривается уравнение переменного типа Лаврентьева – Бицадзе в области, перфорированной вдоль линии смены типа уравнения. Предполагается, что перфорация находится только в «эллиптической» части области, а в «гиперболической» она отсутствует. Ещё предполагается, что правая часть уравнения в «гиперболической» части области равна нулю.

Доказательство существования и единственности решения такой задачи в полуперфорированной области можно найти в [10]. Отметим, что вопросы существования и единственности решений задач для уравнения Лаврентьева – Бицадзе поднимались ранее. В работе [42] изучалась смешанная задача для такого уравнения. Там установлена нормальная разрешимость задачи в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до угловых точек области. Отметим также, что в случае, когда область, в которой рассматривается задача, является односвязной (например, она может быть конформно отображена на полукруг), однозначная разрешимость в Соболевском пространстве W_2^1 установлена в [12].

В работе показано, что при определённом распределении включений (пор), на которых выставлено однородное условие Дирихле, решение задачи разделяется на нетривиальное в «эллиптической» части области и нулевое – в «гиперболической» части.

2. Предварительные определения и постановка задачи. Для простоты будем рассматривать двумерную область.

Рассматривается уравнение вида

$$-u_{yy}^\varepsilon - (\text{sign } y) u_{xx}^\varepsilon = f(x, y) \quad (1)$$

в области D_ε , периодически перфорированной вдоль линии смены типа уравнения в полуплоскости $y > 0$, с характерным размером ε , а часть, лежащая в нижней полуплоскости $y < 0$, имеет однородную структуру. На части внешней границе области и на границе включений выставлено однородное условие Дирихле. Исследуется асимптотическое поведение решения при стремлении малого параметра ε к нулю. Полагаем, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и равна нулю при $y < 0$.

Перейдём к строгому определению области и краевой задачи в этой области.

Определим сначала область, перфорированную вдоль линии смены типа уравнения. Пусть D^1 – полукруг, лежащий в полуплоскости $y > 0$, граница области ∂D^1 состоит из двух частей Γ_0 и Γ , где Γ_0 – является частью окружности единичного радиуса с центром в точке $(x = 1, y = 0)$, а Γ – отрезок $[0, 2]$ на

оси абсцисс $y = 0$. Всюду далее $\varepsilon = \frac{1}{2N+1}$ – малый параметр, N – натуральное число, $N \gg 1$. Будем также использовать следующие обозначения.

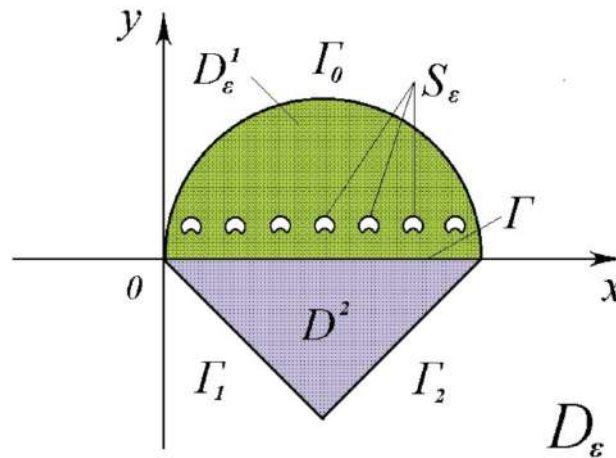


Рис. 1. Двумерная полуперфорированная область
Fig. 1. Two-dimensional partially perforated domain

Пусть B – произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup_j B_\varepsilon^j$. Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Будем также обозначать $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ – граница объединения полостей.

Следует отметить, что перфорация области подходит непосредственно к оси $\{y = 0\}$ при стремлении малого параметра ε к нулю. Поэтому ожидается влияние перфорации на эффективное поведение решения в окрестности интерфейса Γ .

Теперь остаётся добавить к «эллиптической» области D_ε^1 «гиперболическую» часть D^2 , которую мы определяем как часть полуплоскости $y < 0$, ограниченную сверху отрезком Γ , а снизу – отрезками прямых («характеристик» уравнения) $\Gamma_1 := \{(x, y) : x = -y, x \in [0, 1]\}$ и $\Gamma_2 := \{(x, y) : x = y + 2, x \in [1, 2]\}$. Итак, построена область $D_\varepsilon = D_\varepsilon^1 \cup (\text{int } \Gamma) \cup D^2$ (см. рис. 1). Рассматривается задача

$$\begin{cases} -u_\varepsilon^{yy} - (\text{sign } y)u_\varepsilon^{xx} = f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup S_\varepsilon, \end{cases} \quad (2)$$

где $n_\varepsilon(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$ – внутренняя нормаль к границе включений. Предполагается, что коэффициент q является неотрицательной достаточно гладкой функцией в D^1 , а также 1-периодической по третьему и четвёртому аргументу. Будем исследовать асимптотическое поведение решения $u^\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи (2) может быть разбито на две части. Сначала мы решаем уравнение в «гиперболической» части D^2 . В этой области функция $u(x, y) = F(x + y) + G(x - y)$, где $F(s)$ и $G(t)$ – произвольные достаточно гладкие функции. С учётом краевых условий на Γ_1 получаем, что $F(0) + G(2x) = 0$ и, следовательно, $G \equiv 0$, а $F(0) = 0$. Такое решение иницирует на «интерфейсе» Γ между «эллиптической» и «гиперболической» частями области D_ε условие $u_x = u_y$. Решая отдельно краевую задачу для уравнения Пуассона в области D_ε^1 вида

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = -f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon^1, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup S_\varepsilon, \\ u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

получаем условия для однозначного нахождения функции $F(s)$ (см. аналогично [42]).

Введём обозначения пространств

$$W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1) := \left\{ u : \int_{D_\varepsilon^1} (|\nabla^2 u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} + |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} + u^2 \rho_1^{\delta_1-4} \rho_2^{\delta_2-4}) dx dy < +\infty \right\},$$

$$W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon) := \left\{ u : u \in W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1), u = 0 \text{ на } \Gamma_0 \cup S_\varepsilon, u_x = u_y \text{ на } \Gamma \right\},$$

где $\delta_j \in (0, 1/2]$, $j = 1, 2$, $\rho_1 = \rho_1(x, y)$ – расстояние до начала координат, $\rho_2 = \rho_2(x, y)$ – расстояние до точки $(2, 0)$, здесь $|\nabla^2 u|^2$ – сумма квадратов обобщённых частных производных второго порядка, а равенства $u_x = u_y$ и $\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} = -\varepsilon^\alpha q u$ понимаются в смысле следов функций.

Пусть $u \in W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1)$. Обозначим $v_1 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}} \rho_2^{\frac{\delta_2}{2}} u$, $v_2 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}-1} \rho_2^{\frac{\delta_2}{2}-1} u$. Ясно, что функции $v_1 \in W_2^2(D_\varepsilon^1)$, $v_2 \in H^1(D_\varepsilon^1)$. В силу классической теоремы о следе $v_1 \in W_2^1(\Gamma)$, $v_2 \in L_2(\Gamma)$, и следовательно,

$$\int_{\Gamma} |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx < \infty, \quad \int_{\Gamma} u^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} dx < \infty. \quad (4)$$

Решение задачи (3) понимается как элемент пространства $W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon)$, который удовлетворяет уравнению задачи (3) почти всюду, а граничные значения понимаются в смысле следов.

В работе [42] изучалась задача (3) в однородной области без перфорации с целью решения модели Лаврентьева – Бицадзе для смешанной задачи. Там установлена нормальная разрешимость задачи (3) в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до точек $(0, 0)$ и $(2, 0)$.

Принципиальным же является вопрос об однозначной разрешимости (которая в общем случае не следует из нормальной). Доказательство однозначной разрешимости в пространстве $W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$ с некоторыми $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ для перфорированной области с условием Неймана на границе полостей проведено в [10]. Доказательство для задачи с третьим краевым условием на границе полостей совершенно аналогично доказательству из [10], которое опирается на лемму Хопфа – Олейник (см. [14]), а также на вложение $W_{\delta_1, \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0) \hookrightarrow C(\overline{D_\varepsilon^1})$ (см. [10, предложение 1]), доказательство которого опирается на результаты из [9, 13], и мы его здесь не приводим.

Умножим уравнение задачи на u^ε и проинтегрируем по частям. Запишем это равенство:

$$\int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy - \int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \int_{D_\varepsilon^1} f u^\varepsilon dx dy. \quad (5)$$

Здесь u_x^ε понимается в смысле следа функции. При этом (см. (4)) имеем

$$\int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon u^\varepsilon| dx \leq \int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx + \int_{\Gamma} |u^\varepsilon|^2 \rho_1^{-\delta_1} \rho_2^{-\delta_2} dx < \infty.$$

3. Априорные оценки. Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (3). Имеет место следующая теорема. Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (3). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Решение u^ε задачи (3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u^\varepsilon\|_{W_2^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)} \leq K \|f\|_{L_2(D^1)}, \quad (6)$$

где константа $K > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. В равенстве (5) рассмотрим третье слагаемое в левой части. Имеем

$$\int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial ((u^\varepsilon)^2)}{\partial x} dx \equiv 0.$$

Далее, используя стандартную технику интегральных оценок, учитывая неравенство типа Фридрихса

$$\int_{D_\varepsilon^1} (u^\varepsilon)^2 dx dy \leq C \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy,$$

получаем необходимую оценку. Теорема доказана.

4. Усреднение в «эллиптической» части области и сходимости. Этот раздел посвящён изучению асимптотического поведения решений уравнения Пуассона $\Delta u^\varepsilon = -f(x, y)$ в области D_ε^1 с краевыми условиями $u^\varepsilon = 0$ на Γ_0 , $u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon$ на Γ и $u^\varepsilon = 0$ на S_ε . В дальнейших рассуждениях будем отождествлять функции из пространства $W_2^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon)$ с функциями из $W_2^1(D^1, \Gamma_0)$, равными нулю в B_ε , а функции из пространства $L_2(D_\varepsilon^1)$ с функциями из $L_2(D^1)$, равными нулю в B_ε . С другой стороны, для сужения функций из $L_2(D^1)$ на D_ε^1 будем сохранять их обозначения.

Имеет место утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in L_2(D^1)$. Тогда для решения краевой задачи (3) имеет место сходимости*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{W_2^1(D^1)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (7)$$

где u^0 – решение предельной (усреднённой) краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f & \text{в } D^1, \\ u^0 = 0 & \text{на } \partial D^1. \end{cases} \quad (8)$$

Обозначим через $W_2^1(D^1)$ пространство $W_2^1(D^1, \partial D^1)$. Для доказательства теоремы будем использовать следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть $v_\varepsilon \in W_2^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0 \cup S_\varepsilon)$ и $v_\varepsilon \rightarrow v^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $W_2^1(D^1)$. Тогда $v^* \in W_2^1(D^1)$.

Доказательство леммы 4.1. Пусть длина проекции B на ось ξ_1 равна b . Область D_ε^1 представим следующим образом:

$$D_\varepsilon^1 = \bigcup_{i=-N}^N (\Pi_{1,\varepsilon}^{i+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{i-}) \cup \bigcup_{i=-N-1}^N \Pi_{2,\varepsilon}^i \cup R_\varepsilon,$$

где $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$ – область (часть вертикальной полосы) ширины $b\varepsilon$, ограниченная снизу верхней частью границы i -й области B_ε^i , а сверху частью полуокружности Γ_0 ; область $\Pi_{1,\varepsilon}^{i-}$ – полоса ширины $b\varepsilon$, ограниченная сверху нижней частью границы i -й области B_ε^i , а снизу – прямой $y = 0$; $\Pi_{2,\varepsilon}^i, i = -N, \dots, N-1$, – полоса ширины $(1-b)\varepsilon$, ограниченная снизу прямой $y = 0$, а сверху – куском границы Γ_0 , имеющая общие вертикальные границы с областями $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$ и $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+1+}$ самая левая область $\Pi_{2,\varepsilon}^{-N-1}$ и самая правая область $\Pi_{2,\varepsilon}^N$ – вертикальные полосы, ограниченные снизу прямой $y = 0$, а сверху – куском границы Γ_0 , имеющие общие вертикальные границы с областями $\Pi_{1,\varepsilon}^{-N+}$ и $\Pi_{1,\varepsilon}^{N+}$, соответственно, и имеющие суммарную ширину $(1-b)\varepsilon$, наконец, R_ε – это оставшиеся части области D_ε^1 (быть может пустые), внешняя граница которых принадлежит Γ_0 .

Пусть $\omega > \varepsilon$. Обозначим через $\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}$ – область $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+} \cap \{y < \omega\}$.

Кроме того, пусть $\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i-}$ – отрезок прямой $y = \omega$, ограничивающий сверху множество $\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}$. Аналогично определяем множества $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ и $\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что функции v_ε – вещественнозначные. Обозначим через $C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon^1}, S_\varepsilon)$ функции из $C^\infty(\overline{D^1})$, которые обращаются в нуль в окрестности B_ε . Предположим в начале, что $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon^1}, S_\varepsilon)$. Пусть $(x, \omega) \in \Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$, а точка (x, \bar{y}) лежит на нижнем основании $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+}$. Поскольку $v_\varepsilon(x, \bar{y}) = 0$, то по формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$v_\varepsilon(x, \omega) = \int_{\bar{y}}^{\omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} dy.$$

Возведем обе части данного равенства в квадрат и применим неравенство Коши – Бунаковского:

$$v_\varepsilon^2(x, \omega) = \left(\int_{\bar{y}}^{\omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} dy \right)^2 \leq \omega \int_{\bar{y}}^{\omega} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} \right)^2 dy \leq \omega \int_{\bar{y}}^{\omega} |\nabla v_\varepsilon|^2 dy. \quad (9)$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x по $\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}$, считая, что функция v_ε продолжена нулём в $B_\varepsilon^i \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{i-}$. Получаем:

$$\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}} v_\varepsilon^2(x, \omega) dx \leq \omega \int_{\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь полосу $\Pi_{2,\varepsilon}^i, i = -N, \dots, N$, и пусть область B_ε^i касается её слева. Проведём касательные из левого и правого концов отрезка $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ к области B_ε^i . Легко видеть, что угол наклона касательных α лежит в пределах $(\alpha_0, \frac{\pi}{2})$, где $\alpha_0 > 0$ не зависит от ε и ω (напомним: мы предполагали, что $\omega > \varepsilon$). Это следует из того, что диаметр и расстояние между полостями имеют один и тот же порядок. Соединим все точки отрезка $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ с границей B_ε^i так, чтобы все эти прямые пересекались в точке пересечения касательных. У нас получился пучок прямых с направляющими $l(x)$, углы наклона которых лежат в промежутке $(\alpha_0, \frac{\pi}{2})$. Пусть $(x, \omega) \in \Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$, а $(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial B_\varepsilon^i \cap l(x, \omega)$. Поскольку $v_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, то снова по формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$v_\varepsilon(x, \omega) = \int_{(\bar{x}, \bar{y})}^{(x, \omega)} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial l} dl.$$

Аналогично (9), возводя обе части данного равенства в квадрат и применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем неравенство:

$$v_\varepsilon^2(x, \omega) \leq \frac{\omega}{\sin \alpha_0} \int_{(\bar{x}, \bar{y})}^{(x, \omega)} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial l} \right)^2 dl \leq \frac{\omega}{\sin \alpha_0} \int_{(\bar{x}, \bar{y})}^{(x, \omega)} |\nabla v_\varepsilon|^2 dl.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по x по $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ и заменяя правую часть на больший интеграл, получаем

$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}} v_\varepsilon^2(x, \omega) dx \leq \frac{\omega}{\sin \alpha_0} \int_{\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,i} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i-}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx, \quad i = -N, \dots, N. \tag{11}$$

Осталось оценить интеграл по $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,-N-1}$. Используем ту же конструкцию, что и для остальных $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}, i = -N, \dots, N$, только рассмотрим область B_ε^{-N} , которая касается полосы $\Pi_{2,\varepsilon}^{-N-1}$ справа. Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,-N-1}} v_\varepsilon^2(x, \omega) dx \leq C\omega \int_{\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,-N-1} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,-N+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,-N-}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \tag{12}$$

Пусть $\Gamma^\omega = \overline{D^1} \cap (-\infty, \infty) \times \{\omega\}$ – хорда, параллельная отрезку Γ , в области D^1 на расстоянии ω от диаметра, т. е. $\Gamma^\omega = \bigcup_i \overline{\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}} \cup \overline{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}}$. Просуммировав неравенства (10), (11) по i и прибавив (12), получаем оценку:

$$\int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x) dx \leq C_1 \omega \int_{D^1} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \tag{13}$$

В силу плотности вложения $C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon^1}, S_\varepsilon)$ в $W_2^1(D_\varepsilon^1, S_\varepsilon)$ следует, что оценка (13) справедлива и для любого $v_\varepsilon \in W_2^1(D_\varepsilon^1, S_\varepsilon)$. Тогда из ограниченности v_ε в $W_2^1(D^1)$ вытекает неравенство

$$\int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x) dx \leq \omega M.$$

Поскольку $W_2^1(D^1)$ компактно вкладывается в $L_2(\Gamma^\omega)$, а v_ε слабо сходится в $W_2^1(D^1)$, то переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем:

$$\int_{\Gamma^\omega} (v^*)^2 dx \leq \omega M. \tag{14}$$

И, наконец, поскольку ω – произвольно малое положительное число, то из (14) следует, что $v^* = 0$ на границе Γ . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. По теореме 3.1 из равномерной ограниченности семейства $\{u^\varepsilon\}$ следует, что существует подпоследовательность индексов $\{k'\}$, такая, что на этой подпоследовательности при $k' \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$u^{\varepsilon_{k'}} \rightarrow u^* \quad \text{сильно в } L_2(D^1) \text{ и слабо в } W_2^1(D^1). \tag{15}$$

При этом $u^* \in \overset{\circ}{W}_2^1(D^1)$ в силу леммы 4.1.

Умножая уравнение задачи (3) на $v \in C_0^\infty(D^1)$ и интегрируя по частям по области D^1 , получаем интегральное тождество

$$\int_{D^1} (\nabla u^{\varepsilon_{k'}}, \nabla v) dx dy = \int_{D^1} f v dx dy.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, в силу (14) получаем новое интегральное тождество

$$\int_{D^1} (\nabla u^*, \nabla v) dx dy = \int_{D^1} f v dx dy,$$

которое совпадает с интегральным тождеством предельной задачи в D^1 . Из плотности вложения $C_0^\infty(D^1)$ в $W_2^1(D^1)$ и единственности решения предельной задачи (13) получаем, что $u^* = u^0$, а из произвола в выборе исходной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и сходимости (14) вытекает следующая сходимость:

$$u^\varepsilon \rightarrow u^0 \text{ сильно в } L_2(D^1) \text{ и слабо в } W_2^1(D^1) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Осталось усилить сходимость (15) до сходимости (12). Умножим уравнение предельной задачи на u^0 и проинтегрируем по частям по области D^1 . Вычитая это равенство из равенства (5) и учитывая (15), а также используя неравенство Коши – Буняковского и рассуждения в конце доказательства леммы 4.1, получаем

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(D^1)}^2 - \|\nabla u^0\|_{L_2(D^1)}^2 = \int_{D^1} f(u^\varepsilon - u^0) dx dy + \int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из (15) и (16) следует (12). Действительно, в силу (15) и (16)

$$\|\nabla(u^\varepsilon - u^0)\|_{L_2(D^1)}^2 = \|\nabla u^\varepsilon\|_{L_2(D^1)}^2 + \|\nabla u^0\|_{L_2(D^1)}^2 - 2 \int_{\Omega} (\nabla u^\varepsilon, \nabla u^0) dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из этой сходимости и сходимости (15) вытекает сходимость (12). Теорема доказана.

5. Предельная задача во всей области.

Чтобы завершить построение предельной задачи во всей области, надо вспомнить, что в «гиперболической» области решение имеет вид $F(x + y)$, которое, в свою очередь, иницирует на «интерфейсе» Γ условие $u_x = u_y$. После усреднения изменилась задача в «эллиптической» части области, а значит, и условие на «интерфейсе». Откуда следует, что на отрезке Γ имеем $F(x) = 0$. Таким образом, предельная задача во всей области принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta u^0 = -f & \text{в } D^1, \\ u^0 = 0 & \text{на } \partial D^1, \\ u^0 \equiv 0 & \text{в } D^2. \end{cases} \quad (18)$$

Список литературы

1. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах системы уравнений Навье–Стокса в двумерной пористой среде. *Проблемы математического анализа*. 2022;115:15–28.
2. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об асимптотике аттракторов системы Навье–Стокса в анизотропной среде с мелкими периодическими препятствиями. *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2023;512:42–46.
3. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей. *Сибирский математический журнал*. 1998;39(4):621–644.
4. Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием. *Математический сборник*. 2001;192(7):3–20.
5. Гадьльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения*. 2010;46(5):665–677.
6. Гадьльшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(6):819–828.
7. Егер В., Олейник О.А., Шамаев А.С. О задаче усреднения для уравнения Лапласа в частично перфорированной области. *Доклады Российской академии наук*. 1993;333(4):424–427.
8. Егер В., Олейник О.А., Шамаев А.С. Об асимптотике решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с краевыми условиями третьего рода на границах полостей. *Труды Московского математического общества*. 1997;58:187–223.
9. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. *Труды Московского математического общества*. 1967;16:209–292.
10. Кондратьев В.А., Чечкин Г.А. Усреднение уравнения Лаврентьева–Бицадзе в полуперфорированной области. *Дифференциальные уравнения*. 2002;38(10):1390–1396.
11. Кондратьев В.А., Чечкин Г.А. Об асимптотике решений уравнения Лаврентьева–Бицадзе в полуперфорированной области. *Дифференциальные уравнения*. 2003;39(5):645–655.
12. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: Изд-во Моск. ун-в.; 1988. 149 с.
13. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. М.: Наука; 1991. 335 с.

14. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными: учебник. М.: Изд-во Моск. унив.; 2024. 275 с.
15. Олейник О.А., Шамаев А.С. Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с условиями Дирихле на границе полостей. *Доклады Российской академии наук*. 1994;337(2):168–171.
16. Олейник О.А., Шапошникова Т.А. О задаче усреднения в частично перфорированной области с граничным условием смешанного типа на границе полостей, содержащим малый параметр. *Дифференциальные уравнения*. 1995;31(7):1150–1160.
17. Akimova E.A., Chechkin G.A. Random Homogenization of Lavrentiev–Bitsadze equation in Partially Perforated Domain. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2025;32(3):417–425.
18. Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2016;435(2):1652–1671.
19. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. "Strange term" in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:110208.
20. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Application of Fatou’s lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles. *Mathematics*. 2023;11(6):1448.
21. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2024;44(11):3474–3490.
22. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis A.A. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2023;3:11–27.
23. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis A.A. Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure. *Applicable Analysis*. 2024;103(1):29–44.
24. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis A.A. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024;2:40–56.
25. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Toleubay A.M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022;3:35–50.
26. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):3015.
27. Chechkin G.A., D’Apice C., De Maio U., Gadyl’shin R.R. On Singularly Perturbed Steklov Problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
28. Chechkin G.A., Friedman A., Piatnitski A.L. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1999;231(1):213–234.
29. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L.E., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations*. 2011;2011:619623.
30. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L.E., Wall P. A New Weighted Friedrichs–Type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal*. 2011;2(1):81–103.
31. Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain. *Applicable Analysis*. 1999;71(1-4):215–235.
32. Cioranescu D., Donato P. On a Robin Problem in Perforated Domains. In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*. Tokyo: Gakkōtoshō; 1997. p. 123–136.
33. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Truss Structures: Fourier Conditions and Eigenvalue Problems. In: *Boundary Variation*. Berlin–New York: Springer; 1992. p. 125–141.
34. Ene H.I., Sanchez-Palencia E. Equations et phénomènes de surface pour l’écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique*. 1975;14:73–108.
35. Jäger W., Mikelić A. On the Flow Conditions at the Boundary between a Porous Medium and an Impermeable Solid. *Progress in partial differential equations*. London: Longman Scientific & Technical; 1994. p. 145–161.
36. Jäger W., Mikelić A. On the Boundary Conditions at the Contact Interface between a Porous Medium and a Free Fluid. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1996;23(3):403–465.
37. Jäger W., Mikelić A. Homogenization of the Laplace Equation in a Partially Perforated Domain. *Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov*. River Edge: World Scientific Publishing; 1999. p. 259–284.
38. Larson R.E., Higdon J.J.L. Microscopic Flow Near the Surface of Two-Dimensional Porous Media. Part I — Axial Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;166:449–472.
39. Larson R.E., Higdon J.J.L. Microscopic Flow near the surface of Two-Dimensional Porous Media. Part II — Traverse Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;178:119–136.
40. Lions J.L., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. I. Paris: Dunod; 1968. 372 p.

41. Lobo M., Oleinik O.A., Pérez M.E., Shaposhnikova T.A. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1997;25(3–4):611–629.
42. Osher S. Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type I. The Lavrent'ev–Bitsadze Model. *Communications in Partial Differential Equations*. 1977;2(5):499–547.
43. Saffman P.G. On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mathematics*. 1971;1:93–101.

References

1. Bekmaganbetov KA., Toleubay AM., Chechkin GA. Attractors of the Navier–Stokes equations in a two-dimensional porous medium. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022;115:15–28. (In Russ.)
2. Bekmaganbetov KA., Toleubay AM., Chechkin GA. On asymptotics of attractors of the Navier–Stokes system in anisotropic medium with small periodic obstacles. *Doklady Mathematics*. 2023;512:42–46. (In Russ.)
3. Belyaev AG., Piatnitski AL., Chechkin GA. Asymptotic behavior of a solution to a boundary value problem in a perforated domain with an oscillating boundary. *Siberian Mathematical Journal*. 1998;39(4):621–644. (In Russ.)
4. Belyaev AG., Piatnitski AL., Chechkin GA. Homogenization in a perforated domain with an oscillating third boundary condition. *Sbornik: Mathematics*. 2001;192(7):3–20. (In Russ.)
5. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the convergence of solutions and eigensubspaces of a boundary value problem in a domain perforated along the boundary. *Differential Equations*. 2010;46(5):665–677. (In Russ.)
6. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the asymptotics of a simple eigenvalue of a boundary value problem in a domain perforated along the boundary. *Differential Equations*. 2011;47(6):819–828. (In Russ.)
7. Jäger W., Oleinik OA., Shamaev AS. On the homogenization problem for the Laplace equation in a partially perforated domain. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*. 1993;333(4):424–427. (In Russ.)
8. Jäger W., Oleinik OA., Shamaev AS. Asymptotics of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with third-kind boundary conditions on the boundaries of cavities. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*. 1997;58:187–223. (In Russ.)
9. Kondrat'ev VA. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conic and angular points. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*. 1967;16:209–292. (In Russ.)
10. Kondrat'ev VA., Chechkin GA. Homogenization of the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain. *Differential Equations*. 2002;38(10):1390–1396. (In Russ.)
11. Kondrat'ev VA., Chechkin GA. On the asymptotics of solutions of the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain. *Differential Equations*. 2003;39(5):645–655. (In Russ.)
12. Moiseev EI. Equations of mixed type with a spectral parameter. Moscow: Moscow State University Publishing; 1988. 149 p. (In Russ.)
13. Nazarov SA., Plamenevsky BA. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Moscow: Nauka; 1991. 335 p. (In Russ.)
14. Oleinik OA. Lectures on partial differential equations: a textbook. Moscow: Moscow State University Publishing; 2024. 275 p. (In Russ.)
15. Oleinik OA., Shamaev AS. On the homogenization of solutions of a boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with the Dirichlet condition on the boundary of cavities. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*. 1994;337(2):168–171. (In Russ.)
16. Oleinik OA., Shaposhnikova TA. On the homogenization problem in a partially perforated domain with mixed boundary conditions on the boundary of cavities. *Differential Equations*. 1995;31(7):1150–1160. (In Russ.)
17. Akimova EA., Chechkin GA. Random Homogenization of Lavrentiev–Bitsadze equation in Partially Perforated Domain. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2025;32(3):417–425.
18. Amirat Y., Bodart O., Chechkin GA., Piatnitski AL. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2016;435(2):1652–1671.
19. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. "Strange term" in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:110208.
20. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. Application of Fatou's lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles. *Mathematics*. 2023;11(6):1448.
21. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. 2024;44(11):3474–3490.
22. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2023;3:11–27.

23. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure. *Applicable Analysis*. 2024;103(1):29–44.
24. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2024;2:40–56.
25. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Toleubay AM. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2022;3:35–50.
26. Chechkin GA. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):3015.
27. Chechkin GA., D’Apice C., De Maio U., Gadyl’shin RR. On Singularly Perturbed Steklov Problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
28. Chechkin GA., Friedman A., Piatnitski AL. The Boundary Value Problem in Domains with Very Rapidly Oscillating Boundary. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1999;231(1):213–234.
29. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson LE., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations*. 2011;2011:619623.
30. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson LE., Wall P. A New Weighted Friedrichs–Type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal*. 2011;2(1):81–103.
31. Chechkin GA., Piatnitski AL. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain. *Applicable Analysis*. 1999;71(1-4):215–235.
32. Cioranescu D., Donato P. On a Robin Problem in Perforated Domains. In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*. Tokyo: Gakkōtoshō; 1997. p. 123–136.
33. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Truss Structures: Fourier Conditions and Eigenvalue Problems. In: *Boundary Variation*. Berlin–New York: Springer; 1992. p. 125–141.
34. Ene HI., Sanchez-Palencia E. Equations et phénomènes de surface pour l’écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique*. 1975;14:73–108.
35. Jäger W., Mikelić A. On the Flow Conditions at the Boundary between a Porous Medium and an Impermeable Solid. *Progress in partial differential equations*. London: Longman Scientific & Technical; 1994. p. 145–161.
36. Jäger W., Mikelić A. On the Boundary Conditions at the Contact Interface between a Porous Medium and a Free Fluid. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1996;23(3):403–465.
37. Jäger W., Mikelić A. Homogenization of the Laplace Equation in a Partially Perforated Domain. *Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov*. River Edge: World Scientific Publishing; 1999. p. 259–284.
38. Larson RE., Higdon JJJ. Microscopic Flow Near the Surface of Two-Dimensional Porous Media. Part I – Axial Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;166:449–472.
39. Larson RE., Higdon JJJ. Microscopic Flow near the surface of Two-Dimensional Porous Media. Part II – Traverse Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1986;178:119–136.
40. Lions JL., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. I. Paris: Dunod; 1968. 372 p.
41. Lobo M., Oleinik OA., Pérez ME., Shaposhnikova TA. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1997;25(3–4):611–629.
42. Osher S. Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type I. The Lavrent’ev–Bitsadze Model. *Communications in Partial Differential Equations*. 1977;2(5):499–547.
43. Saffman PG. On the Boundary Condition at the Surface of a Porous Medium. *Studies in Applied Mathematics*. 1971;1:93–101.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 19.01.2026

Received January 19, 2026

Поступила после рецензирования 05.03.2026

Revised March 05, 2026

Принята к публикации 14.03.2026

Accepted March 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кервенов Кабылгазы Ержепович – доцент, Карагандинский национальный исследовательский университет имени академика Е. А. Букетова, г. Караганда, Казахстан

Мамунова Томирис Руслановна – студентка, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kabylgazy E. Kervenev – Associate Professor, Buketov Karaganda National Research University, Karaganda, Kazakhstan

Tomiris R. Mamunova – Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Об усреднении аттракторов двумерной системы Навье – Стокса в периодическом слое с мелкими препятствиями

Бекмаганбетов К. А.^{1,2} , Чепыжов В. В.³ , Чечкин Г. А.⁴ 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Алхутовым Ю.А.)

¹ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал,
Казахстан, 010010, г. Астана, ул. Кажимукана, 11

² Институт математики и математического моделирования,
Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Пушкина, 125

³ Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный пер., 19с1

⁴ Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1

chekkin@mech.math.msu.su

Аннотация. В работе рассмотрена периодическая задача для двумерной системы Навье – Стокса в слое с мелкими препятствиями около дна. Предполагая, что на границе препятствий выставлено условие прилипания, а на дне условие непротекания, а также третье краевое условие на горизонтальную компоненту, мы исследуем асимптотическое поведение траекторных аттракторов. В этих предположениях доказана слабая сходимость траекторных аттракторов этой системы к траекторным аттракторам усредненной системы Навье – Стокса с условием прилипания на всей границе.

Ключевые слова: система Навье – Стокса, траекторный аттрактор, усреднение, область, перфорированная в окрестности границы

Финансирование: Работа выполнена при поддержке РФФ (проект 25-11-00133).

Для цитирования: Бекмаганбетов К.А., Чепыжов В.В., Чечкин Г.А. Об усреднении аттракторов двумерной системы Навье – Стокса в периодическом слое с мелкими препятствиями. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):147–156. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-147-156 EDN KNJLLL

Original Research

On Homogenization of Attractors to Two-Dimensional Navier – Stokes System in Periodic Layer with Small Obstacles

Kuanysh A. Bekmaganbetov^{1,2} , Vladimir V. Chepyzhov³ , Gregory A. Chechkin⁴ 

(Article submitted by a member of the editorial board Alkhutov Yu. A.)

¹ Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch,
11 Kazhimukan St., Astana 010010, Kazakhstan

² Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
125 Pushkin St., Almaty 050010, Kazakhstan

³ Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences,
19c1 Bol'shoi Karetny, Moscow 127051, Russia

⁴ Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia

chekkin@mech.math.msu.su

Abstract. This paper considers a periodic problem for a two-dimensional Navier-Stokes system in a layer with small obstacles near the bottom. Assuming a no-slip condition at the obstacle boundary and a no-flow condition at the bottom, as well as a third boundary condition on the horizontal component, we investigate the asymptotic behavior of the trajectory attractors. Under these assumptions, we prove weak convergence of the trajectory attractors of this system to the trajectory attractors of the averaged Navier-Stokes system with a no-slip condition on the entire boundary.

Keywords: Navier – Stokes System, Trajectory Attractor, Homogenization, Domain Perforated in the Vicinity of the Boundary

Funding: The work was supported by the Russian Science Foundation (project 25-11-00133)

For citation: Bekmaganbetov KA., Chepyzhov VV., Chechkin GA. On Homogenization of Attractors to Two-Dimensional Navier – Stokes System in Periodic Layer with Small Obstacles. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):147–156. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-147-156 EDN KNJLLL

1. Введение. Аттракторы используются для описания поведения решений диссипативных эволюционных уравнений в течение длительного времени. В частности, аттракторы содержат устойчивые

или неустойчивые предельные режимы соответствующих динамических систем, которые являются бесконечномерными для дифференциальных уравнений в частных производных. Аттракторы позволяют наблюдать наиболее существенные предельные множества траекторий, которые характеризуют динамику сложной модели, описываемой эволюционными уравнениями (см., например, монографии [1, 2, 3] и ссылки в них).

Задачи усреднения в областях, перфорированных вдоль многообразий, являются интересными с точки зрения теории и важными в прикладных моделях. Отметим некоторые работы [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Усреднение систем Навье – Стокса в микронеоднородных средах рассмотрены в [13, 14]. Также см. работы об усреднении аттракторов в микронеоднородных средах [15, 16, 17, 18].

2. Постановка задачи и предварительные замечания. Начнем постановку задачи с описания области определения в \mathbb{R}^2 . Пусть область $D = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ с координатами $x = (x_1, x_2)$. Ее граница $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где $\Gamma_1 = \{x : x_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], x_2 = -\frac{1}{2}\}$, $\Gamma_2 = \{x : x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$, $\Gamma_3 = \{x : x_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], x_2 = \frac{1}{2}\}$, $\Gamma_4 = \{x : x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$. Везде ниже $\varepsilon = \frac{1}{2N+1}$ – малый параметр, N – натуральное число, $N \gg 1$.

Мы также будем использовать следующие обозначения. Пусть B – произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим $B_\varepsilon^j = \{x \in D : \varepsilon^{-1}(x_1 - \varepsilon j, x_2 + \frac{1}{2}) \in B\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $B_\varepsilon = \bigcup_j B_\varepsilon^j$, $\Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Определим область D_ε как $D \setminus \overline{B_\varepsilon}$. Пусть также $Q_\varepsilon = D_\varepsilon \times (0, +\infty)$, $Q = D \times (0, +\infty)$.

Введем следующие обозначения для пространств

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &:= \{u = (u^1, u^2) \in [L_2(D)]^2, \nabla \cdot u = 0\}, \\ \mathbf{H}_\varepsilon &:= \{u = (u^1, u^2) \in [L_2(D_\varepsilon)]^2, \nabla \cdot u = 0\}, \\ \mathbf{V} &:= \{u \in [H^1(D)]^2, \nabla \cdot u = 0, u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), u|_{\Gamma_3} = 0, u^2|_{\Gamma_1} = 0\}, \\ \mathbf{V}_\varepsilon &:= \{u \in [H^1(D_\varepsilon)]^2, \nabla \cdot u = 0, u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), u|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon} = 0, u^2|_{\Gamma_1} = 0\} \end{aligned}$$

(множество вектор-функций из $[H^1(D_\varepsilon)]^2$ с нулевым следом на $\Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon$ и нулевым следом второй компоненты u^2 вектор-функции $u(x) = (u^1(x), u^2(x))$ на Γ_1). Здесь $y_1 \cdot y_2$ обозначает скалярное произведение векторов $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$. Нормы в этих пространствах определяются, соответственно, следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &:= \int_D \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_\varepsilon^2 := \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx, \\ \|v\|_1^2 &:= \int_D \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1\varepsilon}^2 := \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Обозначим через \mathbf{V}' и \mathbf{V}'_ε двойственные пространства к пространствам \mathbf{V} и \mathbf{V}_ε , соответственно.

Заметим, что эквивалентную постановку задачи можно сделать в полосе $\mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ если периодически продолжить области D и D_ε вдоль оси x_1 с периодом и рассмотреть функции, 1-периодические по этой оси.

Рассмотрим следующую задачу для 2D системы Навье – Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p = g(x, \frac{x}{\varepsilon}), & x = (x_1, x_2) \in D_\varepsilon, t > 0, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0, & x \in D_\varepsilon, t > 0, \\ \nu \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n} + \alpha u_\varepsilon^1 = 0, \quad u_\varepsilon^2 = 0, & x \in \Gamma_1, t > 0, \\ u_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon, t > 0, \\ u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), & x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ u_\varepsilon = U(x), & x \in D_\varepsilon, t = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$ – неизвестная вектор-функция скорости, $p = p(x, t)$ – неизвестная скалярная функция давления, $g = g(x) = (g^1, g^2) \in \mathbf{H}$ – известная внешняя сила, $n = (0, -1)$ – вектор внешней нормали к части границы Γ_1 и коэффициенты $\nu > 0, \alpha > 0$.

Предполагается, что вектор-функция $g : D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является функцией Каратеодори, т. е., отображение $x \rightarrow g(x, \xi)$ измеримо по Лебегу при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, а отображение $\xi \rightarrow g(x, \xi)$ непрерывно для почти всех $x \in D$. Тогда отображение $x \rightarrow g(x, \frac{x}{\varepsilon})$ корректно задано и измеримо.

Для вектор-функции g будем предполагать, что функции $g_\varepsilon(x) \equiv g(x, \frac{x}{\varepsilon}) \in \mathbf{H}$ для любого $\varepsilon > 0$ и имеют среднее $\bar{g}(x)$ в пространстве \mathbf{H} при $\varepsilon \rightarrow 0+$, то есть

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \bar{g}(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \text{ слабо в } \mathbf{H}. \quad (2)$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, из условия (2) получаем

$$\int_{D_\varepsilon} g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \varphi(x) dx \rightarrow \int_D \bar{g}(x) \cdot \varphi(x) dx \quad (3)$$

для любой функции $\varphi \in \mathbf{H}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$.

Известно, что если $U \in \mathbf{H}$, то существует единственное слабое решение $u(s)$ начально-краевой задачи (1), которое принадлежит пространству $L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$, такое, что $u(0) = U$. При этом, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon)$. Для доказательства смотри, например, [1, 2], где изучен классический случай нулевого условия Дирихле на всей границе области. Аналогично доказывается для граничного условия 3-го рода для компоненты вектора скорости u^2 на части границы Γ_1 .

Исходя из вышесказанного, будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1), то есть функции

$$u_\varepsilon(x, s) \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap L_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}$$

которые удовлетворяют задаче (1) в смысле обобщенных функций, то есть

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dx dt + \nu \int_{Q_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi dx dt + \int_{Q_\varepsilon} (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot \psi dx dt + \\ & + \alpha \int_{\Gamma_1 \times (0, +\infty)} u_\varepsilon^1 \psi^1 dx_1 dt = \int_{Q_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dx dt \end{aligned} \quad (4)$$

для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$. Здесь $\eta_1 \cdot \eta_2$ означает скалярное произведение векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$.

Покажем, что так выбранные граничные условия для части границы Γ_1 обеспечивают выполнение свойства ортогональности для нелинейного члена, т. е.,

$$(u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon = 0, \forall u_\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon. \quad (5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1 \partial_{x_1} + u_\varepsilon^2 \partial_{x_2}) u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^2 u_\varepsilon^i \partial_{x_i} u_\varepsilon^j \cdot u_\varepsilon^j = \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i \partial_{x_i} u_\varepsilon^j u_\varepsilon^j dx = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i \partial_{x_i} (u_\varepsilon^j)^2 dx = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \partial_{x_i} u_\varepsilon^i (u_\varepsilon^j)^2 dx + \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2 \left(\sum_{j=1}^2 (u_\varepsilon^j)^2 \right) ds = \\ & = -\frac{1}{2} \int_{D_\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_\varepsilon^i \right) \left(\sum_{j=1}^2 (u_\varepsilon^j)^2 \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{D_\varepsilon} (\partial_{x_1} u_\varepsilon^1 + \partial_{x_2} u_\varepsilon^2) \left(\sum_{j=1}^2 (u_\varepsilon^j)^2 \right) dx = 0 \end{aligned}$$

В средней строке применяется формула Грина интегрирования по частям, причем последний интеграл по Γ_1 равен нулю в силу нулевых граничных условий на u_ε^2 . В последней строке $\partial_{x_1} u_\varepsilon^1 + \partial_{x_2} u_\varepsilon^2 = 0$ в силу равенства нулю дивергенции вектора скорости.

Покажем также, что для таких краевых условий оператор Стокса является симметричным и отрицательным. Имеем для достаточно гладких вектор-функций $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon$, применяя формулу интегрирования по частям,

$$\begin{aligned} & u_\varepsilon \cdot \Delta v_\varepsilon = \sum_{i=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i(x) \Delta v_\varepsilon^i(x) dx = - \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_\varepsilon^j}{\partial x_j}(x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^i(x) \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial n}(x) ds = \\ & = -\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon + \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^1(x) \frac{\partial v_\varepsilon^1}{\partial x_2}(x) ds = -\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon - \alpha \nu^{-1} \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^1(x) v_\varepsilon^1(x) ds = \sum_{i=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon^i(x) v_\varepsilon^i(x) dx = \Delta u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon. \end{aligned}$$

Мы проверили симметричность. Одновременно при $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ получили формулу

$$u_\varepsilon \cdot \Delta u_\varepsilon = -\nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \alpha \nu^{-1} \int_{\Gamma_1} (u_\varepsilon^1(x))^2 ds, \quad (6)$$

из которой следует отрицательность оператора Стокса.

Следующая лемма имеет ключевое значение при выводе основных априорных оценок для решения задачи (1), а также при доказательстве теоремы существования и единственности слабого решения этой задачи. При ее доказательстве существенно используется свойство ортогональности (5), а также тождество (6). Аналогичное утверждение для нулевых условий Дирихле доказано в [3, предложение XV.3.1].

Лемма 2.1. Пусть $u_\epsilon(x, t)$ – слабое решение задачи (1). Тогда

(i) $u_\epsilon \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\epsilon)$;

(ii) функция $\|u_\epsilon(\cdot, t)\|_\epsilon^2$ является абсолютно непрерывной на \mathbb{R}_+ , и выполнено следующее дифференциальное тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\epsilon(\cdot, t)\|_\epsilon^2 + \nu \int_{D_\epsilon} |\nabla u_\epsilon(x, t)|^2 dx + \alpha \int_{\Gamma_1} (u_\epsilon^1(x, t))^2 ds = \int_{D_\epsilon} g_\epsilon(x) \cdot u_\epsilon(x, t) dx.$$

При описании пространства траекторий \mathcal{K}_ϵ^+ для задачи (1) будем следовать общей схеме из [3] и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{t_1, t_2} := L_{2, w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}_\epsilon) \cap L_{\infty, *w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{H}_\epsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \in L_{2, w}^{loc}(t_1, t_2; \mathbf{V}'_\epsilon) \right\} \quad (7)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} := \|v\|_{L_2(t_1, t_2; \mathbf{V})} + \|v\|_{L_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(t_1, t_2; \mathbf{V}')} . \quad (8)$$

Пусть $S(h)$ для $h \in \mathbb{R}$ обозначает оператор сдвига

$$S(h)f(t) = f(h + t).$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = L_2(t_1, t_2; \mathbf{V})$ получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, а если $u(s) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, тогда $A(u(s)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Далее можно рассматривать слабые решения задачи (1) как решение системы уравнений из общей схемы (см. [19, 20], а также [3]).

Определим следующие пространства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+^{loc} &= L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}, \\ \mathcal{F}_{\epsilon, +}^{loc} &= L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\epsilon) \cap L_\infty^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\epsilon) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\epsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через \mathcal{K}_ϵ^+ множество всех слабых решений задачи (1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}$ существует траектория $u(\cdot) \in \mathcal{K}_\epsilon^+$ такая, что $u(0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий \mathcal{K}_ϵ^+ задачи (1) не пусто и достаточно велико.

Ясно, что $\mathcal{K}_\epsilon^+ \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ и пространство траекторий \mathcal{K}_ϵ^+ является трансляционно-инвариантным, то есть, если $u(t) \in \mathcal{K}_\epsilon^+$, тогда и $u(h + t) \in \mathcal{K}_\epsilon^+$ для любых $h \geq 0$. Следовательно, $S(h)\mathcal{K}_\epsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\epsilon^+, \forall h \geq 0$.

Далее, используя норму пространства $L_2(t_1, t_2; \mathbf{H})$, определим метрики $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах \mathcal{F}_{t_1, t_2} следующим образом

$$\rho_{0, M}(u, v) = \left(\int_0^M \|u(t) - v(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0, M}.$$

Эти метрики порождают топологию Θ_+^{loc} в пространстве \mathcal{F}_+^{loc} (соответственно $\Theta_{\epsilon, +}^{loc}$ в $\mathcal{F}_{\epsilon, +}^{loc}$). Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_+^{loc}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_+^{loc}$ при $k \rightarrow \infty$ в Θ_+^{loc} , если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(0, M; \mathbf{H})} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любого $M > 0$. Топология Θ_+^{loc} метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Мы рассматриваем топологию в пространстве траекторий \mathcal{K}_ϵ^+ задачи (1). Полугруппа сдвигов $\{S(h)\}$, действующая на \mathcal{K}_ϵ^+ , непрерывна в рассматриваемой топологии Θ_+^{loc} .

Следуя общей схеме, определим ограниченные множества в \mathcal{K}_ϵ^+ , используя банаховы пространства \mathcal{F}_+^b . Ясно, что

$$\mathcal{F}_+^b = L_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}. \quad (9)$$

и \mathcal{F}_+^b – подпространство пространства \mathcal{F}_+^{loc} .

Рассмотрим полугруппу сдвигов $\{S(h)\}$ на $\mathcal{K}_\epsilon^+, S(h) : \mathcal{K}_\epsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\epsilon^+, h \geq 0$.

Пусть \mathcal{K}_ε означает ядро задачи (1), которое состоит из всех слабых решений $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$ ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}^b = L_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}) \cap L_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}') \right\}$$

Предложение 2.1. *Задача (1) имеет траекторные аттракторы \mathfrak{A}_ε в топологическом пространстве Θ_+^{loc} . Множество \mathfrak{A}_ε равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в \mathcal{F}_+^b и компактно в Θ_+^{loc} . Более того,*

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon,$$

ядро \mathcal{K}_ε – непусто и равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничено в \mathcal{F}^b . Напомним, что пространства \mathcal{F}_+^b и Θ_+^{loc} зависят от ε .

Доказательство этого предложения практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [3] для нулевых условий Дирихле на всей границе.

3. Вспомогательные утверждения. В данном разделе приводятся результаты из работы [5], которые будут использованы ниже.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} -v\Delta w_\varepsilon = g^1(x, \frac{x}{\varepsilon}), & x \in D_\varepsilon, \\ v \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial n} + \alpha w_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_1, \\ w_\varepsilon = 0, & x \in \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon. \end{cases} \quad (10)$$

Также предполагается, что у нас выполнено периодическое условие на решение w_ε по x_1 . Задача для второй компоненты g^2 вектор-функции g будет иметь однородные условия Дирихле на Γ_1 . В дальнейшем будем опускать верхний индекс у функции g^1 .

3.1 Априорные оценки. Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (10). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Решение u^ε задачи (10) удовлетворяет неравенству*

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon)} \leq K_1 \|g\|_{L_2(D)} \leq K, \quad (11)$$

где константы K_1 и $K > 0$ не зависят от ε .

Доказательство. Используя стандартную технику интегральных оценок, учитывая неравенство типа Фридрихса

$$\int_{D_\varepsilon} w_\varepsilon^2 dx \leq C \int_{D_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx,$$

неравенство для следов

$$\int_{\Gamma_1} w_\varepsilon^2 dx_1 \leq C \int_{D_\varepsilon} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx$$

и неравенство Коши – Буняковского, из интегрального тождества задачи (10) с пробной функцией равной w_ε получаем первую оценку. Воспользовавшись условием (2), получим и вторую оценку. Теорема доказана.

3.2 Усреднение линейной вспомогательной задачи. Этот раздел посвящён изучению асимптотического поведения решений задачи (10).

Замечание. В дальнейших рассуждениях будем отождествлять функции из пространства $W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_3 \cup \Gamma_\varepsilon)$ с функциями из $W_2^1(D, \Gamma_3)$, равными нулю в B_ε , а функции из пространства $L_2(D_\varepsilon)$ с функциями из $L_2(D)$, равными нулю в B_ε . С другой стороны, для сужения функций из $L_2(D)$ на D_ε будем сохранять их обозначения.

Имеет место утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $g \in L_2(D)$. Тогда для решения краевой задачи (10) имеет место сходимость*

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_{W_2^1(D)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

где w_0 – решение предельной (усреднённой) краевой задачи

$$\begin{cases} -v\Delta w_0 = g & \text{в } D, \\ w_0 = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases} \quad (13)$$

Обозначим через $H_{per}^1(D)$ пространство 1-периодических по x_1 функций из $H^1(D, \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$. Для доказательства теоремы будем использовать следующее утверждение (см. [5]). Аналогично введём определение пространства $H_{per}^1(D_\varepsilon)$ – пространство 1-периодических по x_1 функций из $H^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_3)$.

Лемма 3.1. Пусть $v_\varepsilon \in H_{per}^1(D_\varepsilon)$ и $v_\varepsilon \rightharpoonup v^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $H_{per}^1(D)$. Тогда $v^* \in H_{per}^1(D)$.

Доказательство теоремы. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. По теореме 3.1 из равномерной ограниченности семейства $\{w_\varepsilon\}$ следует, что существует подпоследовательность индексов $\{k'\}$, такая что на этой подпоследовательности при $k' \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость

$$w_{\varepsilon_{k'}} \rightarrow w^* \quad \text{сильно в } L_2(D) \text{ и слабо в } H_{per}^1(D). \quad \text{при } \varepsilon_{k'} \rightarrow 0. \quad (14)$$

При этом $w^* \in H_{per}^1(D)$ в силу леммы 3.1.

Умножая уравнение задачи (10) на $v \in C_{per}^\infty(D, \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ и интегрируя по частям по области D , при достаточно малых ε получаем интегральное тождество. Переходя в этом тождестве к пределу, в силу (14) и леммы 3.1 получаем новое интегральное тождество

$$v \int_D \nabla w^* \cdot \nabla v \, dx = \int_D \bar{g} v \, dx,$$

которое совпадает с интегральным тождеством предельной задачи в D . Из плотности вложения $C_{per}^\infty(D, \Gamma_1 \cup \Gamma_3)$ в $H_{per}^1(D)$ и единственности решения предельной задачи (13) получаем, что $w^* = w_0$, а из произвола в выборе исходной последовательности $\{\varepsilon_k\}$ и сходимости (14) вытекает следующая сходимость:

$$w_\varepsilon \rightarrow w_0 \quad \text{сильно в } L_2(D) \text{ и слабо в } W_2^1(D) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

Осталось усилить сходимость (15) до сходимости (12). Умножим уравнение предельной задачи на w_0 и проинтегрируем по частям по области D . Вычитая это равенство из интегрального тождества задачи (10) с пробной функцией w_ε и учитывая (15), а также используя неравенство Коши – Буняковского и рассуждения в конце доказательства леммы 3.1, получаем

$$\begin{aligned} \|\nabla w_\varepsilon\|_{L_2(D)}^2 - \|\nabla w_0\|_{L_2(D)}^2 &= \int_D (g w_\varepsilon - \bar{g} w_0) \, dx + \alpha \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 = \int_D (g - \bar{g}) w_0 \, dx + \\ &+ \int_D g (w_\varepsilon - w_0) \, dx + \alpha \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \|g - \bar{g}\|_{L_2(D)} \|w_0\|_{L_2(D)} + \\ &+ \|g\|_{L_2(D)} \|w_\varepsilon - w_0\|_{L_2(D)} + \alpha \|w_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует (12). Действительно, в силу (15) и (16)

$$\|\nabla (w_\varepsilon - w_0)\|_{L_2(D)}^2 = \|\nabla w_\varepsilon\|_{L_2(D)}^2 + \|\nabla w_0\|_{L_2(D)}^2 - 2 \int_D \nabla w_\varepsilon \cdot \nabla w_0 \, dx \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из этой сходимости и сходимости (15) вытекает сходимость (12). Теорема доказана.

Таким образом, усредненная задача имеет вид (13).

4. Усреднение исходной задачи. В этом разделе изучается предельное поведение аттракторов \mathfrak{A}_ε для системы уравнений Навье – Стокса (1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и их сходимость к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения.

Усреднённая (предельная) задача имеет следующий вид (см. предыдущий раздел):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \Delta u_0 + (u_0 \cdot \nabla) u_0 + \nabla p = \bar{g}(x), & x \in D, t > 0, \\ \nabla \cdot u_0 = 0, & x \in D, t > 0, \\ u_0 = 0, & x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, t > 0, \\ u(-1/2, x_2, t) = u(1/2, x_2, t), & x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \\ u_0 = U(x), & x \in D, t = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Рассматриваются слабые 1-периодические по x_1 решения начально-краевой задачи (17), то есть функции

$$u_0(x, t) \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap L_{\infty,*w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\}.$$

которые удовлетворяют задаче (17) в смысле обобщенных функций, то есть

$$-\int_Q u_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_Q \nabla u_0 \cdot \nabla \psi dxdt + \int_Q (u_0 \cdot \nabla) u_0 \cdot \psi dxdt = \int_Q \bar{g}(x) \cdot \psi dxdt \quad (18)$$

для любых функций $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})$.

Как известно, при любом $U \in \mathbf{H}$ задача (17) имеет единственное слабое решение (см. [1, 2]).

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 2.1 (см. также [3]).

Лемма 4.1. Пусть $u(x, t)$ – слабое решение задачи (17). Тогда

(i) $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})$;

(ii) функция $\|u(\cdot, t)\|^2$ является абсолютно непрерывной на \mathbb{R}_+ , и более того

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + \nu \int_Q |\nabla u(x, t)|^2 dx = \int_D \bar{g}(x) \cdot u(x, t) dx.$$

Задача (17) имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\bar{\mathcal{K}}^+$, соответствующем задаче (17), причем

$$\bar{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \bar{\mathcal{K}},$$

где $\bar{\mathcal{K}}$ – ядро задачи (17) в \mathcal{F}^b .

Определение. Будем говорить, что траекторные аттракторы \mathfrak{A}_ε сходятся к траекторному аттрактору $\bar{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc} , если для любой окрестности $O(\bar{\mathfrak{A}})$ в Θ_+^{loc} найдется $\varepsilon_1 \geq 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq O(\bar{\mathfrak{A}})$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$, то есть для любого $M > 0$

$$\text{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M} \bar{\mathfrak{A}}) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Сформулируем основную теорему об усреднении систем уравнений Навье – Стокса.

Теорема 4.1. В топологическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{A}} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+ . \quad (19)$$

Кроме того,

$$\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{K}} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+ \quad \text{в } \Theta^{loc}. \quad (20)$$

Замечание. Функции из множеств \mathfrak{A}_ε и \mathcal{K}_ε заданы на перфорированных областях D_ε . Однако все эти функции можно продолжить нулем внутрь отверстий, и при этом нормы продолженных функций в пространствах \mathbf{H} и \mathbf{V} (определенных без перфорации), очевидно, совпадают с соответствующими нормами в перфорированных пространствах \mathbf{H}_ε и \mathbf{V}_ε . Поэтому в теореме все расстояния измеряются в пространствах без перфорации с учетом нулевого продолжения внутрь отверстий.

Доказательство теоремы. Ясно, что (20) влечет (19). Поэтому достаточно доказать (20), то есть показать, что для любой окрестности $O(\bar{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} найдется число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(O) > 0$ такое, что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset O(\bar{\mathcal{K}}) \quad \text{для всех } \varepsilon < \varepsilon_1. \quad (21)$$

Предположим, что (21) неверно. Тогда найдется окрестность $O'(\bar{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} , последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0+$ ($k \rightarrow \infty$) и $u_{\varepsilon_k}(\cdot) = u_{\varepsilon_k}(s) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$ такие, что

$$u_{\varepsilon_k} \notin O'(\bar{\mathcal{K}}) \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Из условия (2) вытекает, что последовательность $\left\{g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right)\right\}$ ограничена в \mathbf{H} . Следовательно, используя дифференциальное тождество из леммы 2.1 и неравенство Коши – Буняковского, заключаем, что последовательность решений $\{u_{\varepsilon_n}\}$ ограничена в \mathcal{F}^b . Переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{в } \Theta^{loc}.$$

Утверждается, что $u_0 \in \bar{\mathcal{K}}$. Функции $u_{\varepsilon_n}(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t} - \nu \Delta u_{\varepsilon_n} + (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} + \nabla p = g_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

с условием

$$v \frac{\partial u_{\varepsilon_n}^1}{\partial n} + \alpha u_{\varepsilon_n}^1 = 0, \quad u_{\varepsilon_n}^2 = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

и энергетическому тождеству

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{-M}^M \|u_{\varepsilon_n}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \psi'(t) dt + v \int_{-M}^M \|u_{\varepsilon_n}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \psi(t) dt + \\ & + \alpha \int_{-M}^M \int_{\Gamma_1} u_{\varepsilon_n}^1(x, t) \psi(t) dx_1 dt = \int_{-M}^M g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \cdot u_{\varepsilon_n}(t) \psi(t) dt \end{aligned} \quad (24)$$

при любом $M > 0$ и для любой функции $\psi \in C_0^\infty([-M, M])$, $\psi \geq 0$. Кроме того, $u_{\varepsilon_n}(t) \rightharpoonup u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{V})$, *-слабо в $L_\infty(-M, M; \mathbf{H})$ и $\frac{\partial u_{\varepsilon_n}(t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0(t)}{\partial t}$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{V}')$. По теореме о компактности заключаем, что $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$ и $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ ($n \rightarrow \infty$) при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$. В частности, $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно в $\Theta_+^{loc} = L_2^{loc}(\mathbb{R}; \mathbf{H})$.

Для предельного перехода в нелинейном члене, заметим, что

$$(u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 u_{\varepsilon_n}^i \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}) - \left(\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i \right) u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}), \quad (25)$$

поскольку $\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i = \nabla \cdot u_{\varepsilon_n} = 0$. Выше было установлено, что $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ ($n \rightarrow \infty$) при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$. Следовательно, в силу того, что $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0^i u_0$ при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$, а из неравенства Ладыженской вытекает, что $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}$ ограничено в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$. Поэтому, $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0^i u_0$ слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$ (см. [3, Лемма II.1.2]), и, значит, $\partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow \partial_{x_i} u_0^i u_0$ слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{V}')$. Следовательно, из (25) получаем, что

$$(u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} \rightharpoonup (u_0 \cdot \nabla) u_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{слабо в } L_2(-M, M; \mathbf{V}'). \quad (26)$$

В силу (2) имеем, что $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup \bar{g}(x)$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в пространстве \mathbf{H}_w и, следовательно, слабо в $L_2(-M, M; \mathbf{H})$. Теперь, имея в виду теорему 3.2 и сходимости (26), переходим к пределу в (23) и (24) при $\varepsilon \rightarrow 0$, используя стандартное рассуждение (смотри подробное доказательство в [3, 19, 20]). Следовательно, $u_0 \in \bar{\mathcal{K}}$, то есть, u_0 – решение (17), удовлетворяющее соответствующему тождеству (24) с внешней силой $\bar{g}(x)$. В то же время мы установили, что $u_{\varepsilon_n}(s) \rightarrow u_0(s)$ ($n \rightarrow \infty$) в Θ_+^{loc} и, следовательно, $u_{\varepsilon_n}(s) \in \mathcal{O}'(u_0(s)) \subset \mathcal{O}'(\bar{\mathcal{K}})$ при $\varepsilon_n \ll 1$. Это противоречит (22). Теорема доказана.

Список литературы

1. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series, 68. New York (NY)–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest: Springer-Verlag; 1988. 500 p.
2. Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука; 1989. 294 с.
3. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. Providence, RI: American Mathematical Society; 2002. 363 с.
4. Lobo M., Oleinik O.A., Pérez ME., Shaposhnikova TA. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV.* 1997;25(3–4):611–629.
5. Гадильшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения.* 2010;46(5):665–677.
6. Гадильшин Р.Р., Королева Ю.О., Чечкин Г.А. Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы. *Дифференциальные уравнения.* 2011;47(6):819–828.
7. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L-E., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations.* 2011;2011:Art.No 619623.
8. Chechkin G.A., Koroleva Y.O., Persson L-E., Wall P. A new Weighted Friedrichs–type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal.* 2011;2(1):81–103.
9. Amirat Y., Bodart O., Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *J. Math. Anal. Appl.* 2016;435(2):1652–1671. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.11.014

10. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
11. Chechkin G.A., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On the Steklov problem in a Domain Perforated Along a Part of the Boundary. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M²AN)*. 2017;51(4)1317–1342. DOI: 10.1051/m2an/2016063
12. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):Art.No 3015.
13. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Goritsky A.Yu. Homogenization of Trajectory Attractors of 3D Navier–Stokes system with Randomly Oscillating Force. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A (DCDS-A)*. 2017;37(5):2375–2393.
14. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Toleubay A.M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2022;3:35–50. DOI: 10.31489/2022M3/35-50
15. Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S. Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B (DCDS-B)*. 2018;23(3):1133–1154.
16. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Weak Convergence of Attractors of Reaction–Diffusion Systems with Randomly Oscillating Coefficients. *Applicable Analysis*. 2019;98(1-2):256–271.
17. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:Art.No 110208.
18. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2024;(2):40–56.
19. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Trajectory attractors for the 3D Navier-Stokes system and some generalizations, *Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center*. 1996;8:217–243.
20. Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors. *J. Math.Pures Appl.* 1997;76(10):913–964.

References

1. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Applied Mathematics Series, 68. New York (NY)–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest: Springer-Verlag; 1988. 500 p.
2. Babin AV., Vishik MI. Attractors of evolution equations. Amsterdam: North–Holland Publishing Co.; 1992. 300 p.
3. Chepyzhov V.V., Vishik MI. Attractors for equations of mathematical physics, American Mathematical Society Colloquium Publications, 49. Providence, RI: American Mathematical Society; 2002. 363 p.
4. Lobo M., Oleinik OA., Pérez ME., Shaposhnikova TA. On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze. Serie IV*. 1997;25(3–4):611–629.
5. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the Convergence of Solutions and Eigenelements of a Boundary Value Problem in a Domain Perforated Along the Boundary. *Differential Equations*. 2010;46(5):667–680.
6. Gadyl'shin RR., Koroleva YuO., Chechkin GA. On the Asymptotics of a Simple Eigenvalue to Boundary Value Problem in a Domain Perforated Along the Boundary. *Differential Equations*. 2011;47(6):822–831.
7. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson L-E., Wall P. On Spectrum of the Laplacian in a Circle Perforated Along the Boundary: Application to a Friedrichs–Type Inequality. *International Journal of Differential Equations*. 2011;2011:Art.No 619623.
8. Chechkin GA., Koroleva YO., Persson L-E., Wall P. A new Weighted Friedrichs–type Inequality for a Perforated Domain with a Sharp Constant. *Eurasian Mathematical Journal*. 2011;2(1):81–103.
9. Amirat Y., Bodart O., Chechkin GA., Piatnitski AL. Asymptotics of a spectral-sieve problem. *J. Math. Anal. Appl.* 2016;435(2):1652–1671. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.11.014
10. Chechkin GA., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On Singularly Perturbed Steklov problem in Domain Perforated Along the Boundary. *Comptes Rendus Mécanique*. 2016;344(1):12–18.
11. Chechkin GA., D'Apice C., De Maio U., Gadyl'shin RR. On the Steklov problem in a Domain Perforated Along a Part of the Boundary. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique (M²AN)*. 2017;51(4)1317–1342. DOI: 10.1051/m2an/2016063
12. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated Along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):Art.No 3015.
13. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov V.V., Goritsky AYu. Homogenization of Trajectory Attractors of 3D Navier–Stokes system with Randomly Oscillating Force. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A (DCDS-A)*. 2017;37(5):2375–2393.
14. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Toleubay AM. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2022;3:35–50. DOI: 10.31489/2022M3/35-50
15. Chechkin GA., Chepyzhov V.V., Pankratov L.S. Homogenization of Trajectory Attractors of Ginzburg–Landau equations with Randomly Oscillating Terms. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B (DCDS-B)*. 2018;23(3):1133–1154.
16. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov V.V. Weak Convergence of Attractors of Reaction–Diffusion Systems with Randomly Oscillating Coefficients. *Applicable Analysis*. 2019;98(1-2):256–271.

17. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV. “Strange Term” in Homogenization of Attractors of Reaction–Diffusion Equation in Perforated Domain. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020;140:Art.No 110208.
18. Bekmaganbetov KA., Chechkin GA., Chepyzhov VV., Tolemis AA. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases. *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* 2024;(2):40–56.
19. Chepyzhov VV. , Vishik MI. Trajectory attractors for the 3D Navier-Stokes system and some generalizations, *Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center*. 1996;8:217–243.
20. Chepyzhov VV. , Vishik MI. Evolution equations and their trajectory attractors. *J. Math.Pures Appl.* 1997;76(10):913–964.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 30.01.2026

Received January 30, 2026

Поступила после рецензирования 20.03.2026

Revised March 20, 2026

Принята к публикации 23.03.2026

Accepted March 23, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Бекмаганбетов Куаныш Абдрахманович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал, г. Астана; Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

Чепыжов Владимир Викторович – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва, Россия

Чечкин Григорий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kuanysh A. Bekmaganbetov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Kazakhstan Branch, Astana; Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Vladimir V. Chepyzhov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Gregory A. Chechkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

К содержанию

Теоретические основы задачи нахождения пространственных координат подвижного объекта

Иванова М. С. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Половинкиным И. П.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
Marliberty123@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается задача определения пространственных координат подвижного объекта по азимутально-угломерным измерениям в его системе координат относительно трех наземных реперных точек. Использован подход, разбивающий задачу на два этапа: на первом — находится расстояние от реперных точек до подвижного объекта, а на втором — осуществляется трилатерация. Поведение математической модели задачи описывается расположением кривых пересечения тороидальных поверхностей. Сформулированы и доказаны достаточные условия существования и единственности решения задачи. Разработанный метод не требует измерения дальности и глобальной временной синхронизации, что делает его перспективным для применения в условиях деградации или отсутствия спутниковых навигационных сигналов. Результаты подтверждены численным моделированием и могут быть использованы в задачах навигации и 3D-реконструкции.

Ключевые слова: азимутально-угломерный метод, трилатерация, замкнутый тор

Для цитирования: Иванова М.С. Теоретические основы задачи нахождения пространственных координат подвижного объекта. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):157–167. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-157-167 EDN KYVHR

Original Research

Theoretical Foundations of the Problem of Determining Spatial Coordinates of a Moving Object

Mariia S. Ivanova 

(Article submitted by a member of the editorial board Polovinkin I. P.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
Marliberty123@gmail.com

Abstract. The paper deals with the problem of determining the spatial coordinates of a moving object using azimuth–elevation measurements in its local coordinate system relative to three ground-based reference points. The proposed approach splits the problem into two stages: first, the estimation of the distances from the reference points to the moving object; second, the application of trilateration. The behavior of the mathematical model is described via the geometry of intersection curves of toroidal surfaces. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to the problem are formulated and rigorously proved. The developed method does not require range measurements or global time synchronization. This makes it promising for use under conditions of degradation or denial of satellite navigation signals. The theoretical results are validated through numerical simulations and can be applied in navigation and 3D reconstruction tasks.

Keywords: Azimuth-Elevation Method, Trilateration, Closed Torus

For citation: Ivanova MS. Theoretical Foundations of the Problem of Determining Spatial Coordinates of a Moving Object. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):157–167. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-157-167 EDN KYVHR

1. Введение. Определение пространственных координат и угловой ориентации подвижных объектов представляет собой ключевую задачу в современных навигационных системах. Традиционные методы, основанные на спутниковых радионавигационных технологиях, используют дальномерно-угломерный принцип, требующий высокой точности временной синхронизации, описываемой общей теорией относительности. Однако в условиях возможного подавления или деградации спутниковых сигналов возникает необходимость разработки альтернативных методов навигации. Одним из таких подходов является азимутально-угломерный метод, который позволяет определять координаты объекта без измерения дальности. Несмотря на значительный вклад научных исследований заслуженного изобретателя России А. Д. Виноградова и его научной группы (Л. А. Минин, С. Н. Ушаков, Е. Ю. Морозов) [1, 2], многие вопросы остаются открытыми. Классические работы М. Н. Маркова [3] и А. И. Куприянова с

А. В. Сахаровым [4] заложили основы многопозиционных радиотехнических систем, однако трёхмерная геометрическая интерпретация задачи на основе тороидальных поверхностей требует дополнительного исследования. В данной работе рассматривается детерминированный подход (число входных данных совпадает с числом выходных) при моделировании задачи нахождения координат и угловой ориентации подвижного объекта с использованием азимутально-углового метода. Основное внимание уделено восполнению теоретических пробелов и повышению корректности алгоритма за счёт поиска условий существования решения при определении координат. В частности, предложен метод анализа кривых пересечения двух торов, образованных вращением семейства окружностей относительно сторон треугольника, что развивает идеи, представленные в [5]. Это позволяет наглядно представить геометрическую схему возникновения всех возможных решений, включая теорему, описывающую достаточные условия существования и единственности решения, сформулированные ранее в [6] и обобщённые в [7]. Подход согласуется с методами инженерной геодезии, где триангуляция и анализ геометрии реперов играют ключевую роль [8].

2. Постановка задачи. В исходной задаче в декартовой системе координат заданы три стационарных источника радиоизлучения (репера), расположенных в точках пространства с известными координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Подвижный объект M_0 с неизвестными координатами (x, y, z) осуществляет пеленгование каждого репера, получая три пары угловых измерений в своей системе координат: азимуты α_i (углы в горизонтальной плоскости собственной системы координат подвижного объекта) и углы места ε_i (углы между проекцией приходящего луча в M_0 и горизонтальной плоскостью подвижной системы координат), где $i = 1, 2, 3$ [3].

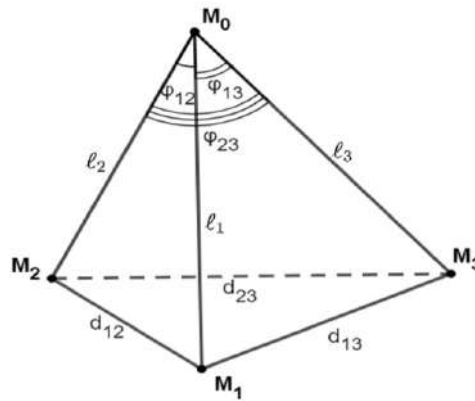


Рис. 1. Пирамида $M_0M_1M_2M_3$

Fig. 1. Pyramid $M_0M_1M_2M_3$

В работах [1, 2] было предложено разбить решение задачи на отдельные этапы: сначала найти координаты объекта, затем его ориентацию. По трём парам углов азимута и места ищутся три угла ориентации подвижного объекта, находящегося в точке M_0 , а также трёхмерные координаты самой точки, то есть по шести входным параметрам ищутся шесть выходных значений. В настоящей статье рассматривается только первый этап. Он осуществляется переходом от пар углов места и азимута к плоским углам при вершине пирамиды $M_0M_1M_2M_3$ (рис. 1). Геометрическая конфигурация задачи на рис. 1 характеризуется l_i — расстоянием от объекта до i -го репера, d_{ij} — расстоянием между реперами, φ_{ij} — углом между направлениями. Таким образом, в системе координат подвижного объекта известны направляющие векторы \vec{s}_i лучей M_0M_i , определяемые формулами:

$$\vec{s}_i = (\cos \alpha_i \cos \varepsilon_i, \sin \alpha_i \cos \varepsilon_i, \sin \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Косинусы плоских углов φ_{ij} при вершине M_0 тетраэдра $M_0M_1M_2M_3$ задаются скалярными произведениями, то есть

$$\cos \varphi_{ij} = \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j = \cos \varepsilon_i \cos \varepsilon_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \sin \varepsilon_i \sin \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Система уравнений для поиска расстояний l_i выводится из теоремы косинусов для трёх треугольников:

$$\begin{cases} l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \varphi_{12} = d_{12}^2, \\ l_1^2 + l_3^2 - 2l_1l_3 \cos \varphi_{13} = d_{13}^2, \\ l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \cos \varphi_{23} = d_{23}^2. \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 1. Дополнительными условиями задачи являются неотрицательность расстояний $l_i \geq 0$ и ограничения на углы $0 \leq \varphi_{ij} \leq \pi$. Ребро l_i может быть равно 0, если M_0 совпадает с одной из вершин

$\Delta M_1 M_2 M_3$. Если M_0 лежит на стороне $\Delta M_1 M_2 M_3$, то один из $\angle \varphi_{ij} = \pi$; если на продолжении стороны – то $\varphi_{ij} = 0$. Перейдём к этапу нахождения координат точки M_0 . Рассмотрим систему уравнений для определения координат $M_0(x, y, z)$ подвижного объекта на основе заданных параметров ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 при условии, что точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ и не лежат на одной прямой. Итак

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \ell_1^2, \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = \ell_2^2, \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = \ell_3^2. \end{cases} \quad (2)$$

Если от точек M_i описать сферы с соответствующими радиусами ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, то решением системы (2) будет являться точка пересечения этих сфер. Не для каждой тройки неотрицательных чисел ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 система (2) имеет решение. Для определения необходимого и достаточного условия существования решения системы (2) обратимся к геометрической интерпретации задачи, поскольку аналитический подход в общем виде не даёт простых критериев и четкого понимания структуры математической модели. Анализ вырожденных случаев, а именно положение точки M_0 в плоскости $M_1 M_2 M_3$ и на сторонах $\Delta M_1 M_2 M_3$, и условий совместности систем уравнений может быть дополнен общими методами линейной алгебры.

Лемма 1. Пусть точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, где $i = 1, 2, 3$, не лежат на одной прямой. Тогда для существования решения системы (2) относительно неизвестных x, y, z необходимо и достаточно либо выполнения системы неравенств

$$|\ell_j - \ell_i| \leq d_{ij} \leq \ell_i + \ell_j, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad (3)$$

где $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$, причём равенство в (3) достигается не более чем в одном из шести неравенств, либо выполнения одной из трёх систем равенств:

$$\begin{cases} \ell_1 = 0, \\ d_{12} = \ell_2, \\ d_{13} = \ell_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ell_2 = 0, \\ d_{12} = \ell_1, \\ d_{23} = \ell_3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \ell_3 = 0, \\ d_{13} = \ell_1, \\ d_{23} = \ell_2. \end{cases} \quad (4)$$

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что система (2) имеет решение $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Обозначим расстояния от M_0 до M_i :

$$\ell_i = M_0 M_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим три возможных геометрических случая.

Случай 1. M_0 не лежит ни на одной из сторон $\Delta M_1 M_2 M_3$ (рис. 2).

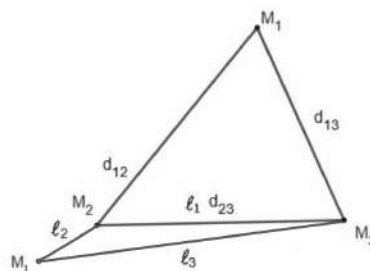


Рис. 2. M_0 вне плоскости $\Delta M_1 M_2 M_3$
Fig. 2. M_0 outside the plane of $\Delta M_1 M_2 M_3$

Тогда точки M_0, M_i, M_j образуют невырожденные треугольники для каждой пары $1 \leq i < j \leq 3$. В силу неравенства треугольника выполняются строгие неравенства (3).

Случай 2. Без ограничения общности, пусть $M_0 = M_1$. Тогда

$$\ell_1 = 0, \quad \ell_2 = d_{12}, \quad \ell_3 = d_{13}.$$

Для пары (1, 2) имеем $d_{12} = \ell_1 + \ell_2$, то есть верхняя граница в неравенстве (3) достигается как равенство. Аналогично для пары (1, 3). Для пары (2, 3) неравенство $|\ell_2 - \ell_3| \leq d_{23} \leq \ell_2 + \ell_3$ выполняется, поскольку M_1, M_2, M_3 образуют треугольник. Аналогично для остальных вершин.

Случай 3. M_0 лежит на стороне (рис. 3), например, на отрезке $M_1 M_2$.

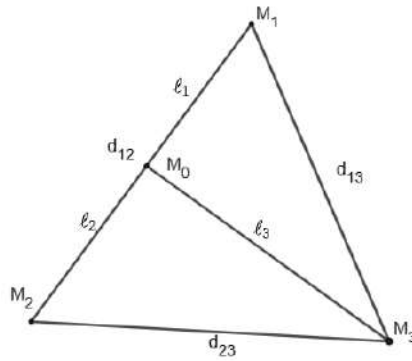


Рис. 3. M_0 лежит на стороне $\triangle M_1M_2M_3$
 Fig. 3. M_0 lies on the side of $\triangle M_1M_2M_3$

Тогда

$$l_1 + l_2 = d_{12}, \quad l_3 > 0,$$

и треугольники $M_0M_1M_3$ и $M_0M_2M_3$ невырождены. Для пары (1, 2) достигается равенство в верхней границе неравенства (3); для остальных пар – строгие неравенства.

Достаточность. Предположим, что выполнены неравенства (3).

Случай 1. Все неравенства (3) строгие. Тогда существуют четыре треугольника со сторонами $\{l_1, l_2, d_{12}\}$, $\{l_2, l_3, d_{23}\}$, $\{l_1, l_3, d_{13}\}$, $\{d_{12}, d_{13}, d_{23}\}$, из которых можно собрать два тетраэдра (симметричных относительно плоскости $\triangle M_1M_2M_3$) или плоскую фигуру. Их вершины и являются решениями системы (2).

Случай 2. Выполняется одно из равенств в (3). Тройки $\{l_1, l_2, d_{12}\}$ и т. д. образуют два треугольника и один отрезок. Это соответствует случаю, когда M_0 лежит на стороне основания.

Случай 3. Выполняется одна из систем (2). Тогда достаточно взять $M_0 = M_1$, $M_0 = M_2$ или $M_0 = M_3$ соответственно.

Следствие. Если тройка l_1, l_2, l_3 является решением системы (1) с известными значениями d_{12}, d_{13}, d_{23} и углами $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$, и существуют точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ такие, что $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$, то система (2) имеет хотя бы одно решение.

3. Формулировка результатов.

Предложение 1. Пусть заданы длины сторон d_{12}, d_{13}, d_{23} треугольника $\triangle M_1M_2M_3$ и три угла $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ при вершине M_0 . Тогда для существования решения системы (1) необходимо выполнение либо следующих условий:

$$\begin{cases} \varphi_{12} \leq \varphi_{13} + \varphi_{23}, \\ \varphi_{13} \leq \varphi_{12} + \varphi_{23}, \\ \varphi_{23} \leq \varphi_{12} + \varphi_{13}, \\ \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{23} \leq 2\pi, \end{cases} \quad (5)$$

либо альтернативного условия:

$$\begin{cases} \varphi_{12} = \angle M_1M_3M_2, \\ \varphi_{13} = \angle M_1M_2M_3, \\ \varphi_{23} = \angle M_2M_1M_3. \end{cases}$$

Замечание 3. Предложение 1 является необходимым, но не достаточным условием, что демонстрируется следующим примером.

Пример. Согласно Предложению 1 угол φ_{23} может принимать любые значения от 0 до π . Рассмотрим частный случай, когда $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \frac{\pi}{2}$. Система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} l_1^2 + l_2^2 = 1, \\ l_1^2 + l_3^2 = 1, \\ l_2^2 - 2l_2l_3 \cos \varphi_{23} + l_3^2 = 1. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует $l_2 = l_3$ и $l_2^2 \leq 1$. Тогда система сводится к:

$$\begin{cases} 2l_2^2(1 - \cos \varphi_{23}) = 1, \\ l_2^2 \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем ограничение на угол φ_{23} :

$$\frac{\pi}{3} \leq \varphi_{23} \leq \pi.$$

Теорема 1. Пусть заданы длины сторон d_{12}, d_{13}, d_{23} треугольника $\Delta M_1 M_2 M_3$ и три угла $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ при вершине M_0 . Тогда достаточным условием существования и единственности решения системы (2) является выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < \varphi_{12} < \pi, \\ \frac{\pi}{2} < \varphi_{13} < \pi, \\ \angle M_1 M_2 M_3 \leq \varphi_{23} \leq 2\pi - (\varphi_{12} + \varphi_{13}). \end{cases}$$

Доказательство. Для заданных углов φ_{12} и φ_{13} необходимо определить такие конфигурации, при которых система (2) имеет решения. Рассмотрим случай, когда подвижный объект находится в вершине M_1 , то есть M_1 совпадает с точкой M_0 . В этом случае система (2) имеет тривиальное решение:

$$\ell_1 = 0, \quad \ell_2 = d_{12}, \quad \ell_3 = d_{13}.$$

В плоскости $\Delta M_1 M_2 M_3$ множества точек, из которых ребро $M_1 M_2$ видно под углом φ_{12} , а ребро $M_1 M_3$ — под углом φ_{13} , образуют соответственно две меньшие дуги окружностей (так как оба угла тупые):

$$\smile M_1 M_2 \quad \text{и} \quad \smile M_1 M_3,$$

описанных вокруг треугольников $\Delta M_0 M_1 M_2$ и $\Delta M_0 M_1 M_3$ с радиусами:

$$R_{12} = \frac{d_{12}}{2 \sin \varphi_{12}}, \quad R_{13} = \frac{d_{13}}{2 \sin \varphi_{13}}.$$

Пусть M' — точка пересечения этих дуг. Она будет единственной, если выполняется условие:

$$\angle M_2 M_1 M_3 = 2\pi - (\varphi_{12} + \varphi_{13}).$$

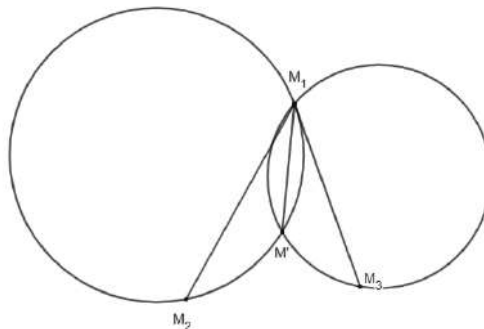


Рис. 4. Условия пересечения двух меньших дуг в двух точках
Fig. 4. Conditions for intersection of two minor arcs at two points

Для анализа случаев, когда дуги пересекаются в двух точках, рассмотрим рис. 4. В этом случае при:

$$\begin{cases} \angle M_2 M_1 M' < \frac{1}{2} \smile M_2 M' M_1, \\ \angle M_3 M_1 M' < \frac{1}{2} \smile M_3 M' M_1, \end{cases}$$

где $\smile M_2 M' M_1 = \pi - \varphi_{12}$ и $\smile M_3 M' M_1 = \pi - \varphi_{13}$, окружности могут иметь не более двух точек пересечения. Следовательно:

$$\angle M_2 M_1 M_3 < 2\pi - \varphi_{12} - \varphi_{13}.$$

Третья точка пересечения невозможна, так как меньшие дуги лежат внутри областей, ограниченных большими дугами, которые не пересекаются. Кроме того, выполняются неравенства:

$$M_1 M' < M_1 M_2 \quad \text{и} \quad M_1 M' < M_1 M_3.$$

Для системы (2) решения существуют в точках M' и M_1 . В точке M_1 решение возникает при $\angle M_3 M_1 M_2$, а в точке M' — при $\angle M_3 M' M_2$. По формулам (6) с учетом, что длины ребер неотрицательные числа, а углы φ_{12} и φ_{13} тупые:

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \ell_1 \cos \varphi_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{12}}, \\ \ell_3 &= \ell_1 \cos \varphi_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{13}}. \end{aligned}$$

Функции $\ell_2(\ell_1)$ и $\ell_3(\ell_1)$ непрерывны на отрезке $\ell_1 \in [0, M_1M']$, где:

$$\ell_1 \leq \min(2R_{12}, 2R_{13}).$$

Далее введём функцию:

$$f(\ell_1) = \frac{\ell_2^2(\ell_1) + \ell_3^2(\ell_1) - d_{23}^2}{2\ell_2(\ell_1)\ell_3(\ell_1)},$$

которая соответствует $\cos \varphi_{23}$. Функция $f(\ell_1)$ непрерывна на отрезке $[0, M_1M']$ и принимает все значения между $f(0)$ и $f(M_1M')$. Согласно теореме Больцано – Коши, для любого φ_{23} , удовлетворяющего условиям теоремы, существует решение ℓ_1 , при котором $f(\ell_1) = \cos \varphi_{23}$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Следствие о единственности. Если в условиях теоремы 1 все три угла $\varphi_{12}, \varphi_{13}, \varphi_{23}$ являются тупыми и выполняются дополнительные ограничения:

$$\begin{cases} \varphi_{12} \neq \angle M_1M'M_2, \\ \varphi_{13} \neq \angle M_1M'M_3, \end{cases}$$

то система (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Производные функций $\ell_2(\ell_1)$ и $\ell_3(\ell_1)$:

$$\ell_2'(\ell_1) = \cos \varphi_{12} - \frac{\ell_1 \sin^2 \varphi_{12}}{\sqrt{d_{12}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{12}}},$$

$$\ell_3'(\ell_1) = \cos \varphi_{13} - \frac{\ell_1 \sin^2 \varphi_{13}}{\sqrt{d_{13}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{13}}},$$

являются отрицательными для тупых углов $\varphi_{12}, \varphi_{13}$, что свидетельствует о монотонном убывании ℓ_2 и ℓ_3 по ℓ_1 . Следовательно, выражение $\ell_2^2 - 2\ell_2\ell_3 \cos \varphi_{23} + \ell_3^2$ также монотонно убывает, что гарантирует единственность решения.

4. Геометрическая интерпретация. Треугольная пирамида $M_0M_1M_2M_3$ характеризуется основанием $M_1M_2M_3$ и вершиной M_0 . Для каждой боковой грани $M_0M_iM_j$ ($1 \leq i < j \leq 3$) известны длина стороны d_{ij} и $\angle \varphi_{ij}$, что позволяет определить радиус R_{ij} описанной окружности около $\triangle M_0M_iM_j$. Если вокруг ребра M_iM_j описать множество окружностей радиуса $R_{ij} = \frac{d_{ij}}{2 \sin \varphi_{ij}}$ с центрами, находящимися в плоскости перпендикулярной ребру M_iM_j , на окружности с радиусом $\sqrt{R_{ij}^2 - d_{ij}^2/4}$ и центром в середине M_iM_j , то образуется поверхность вращения – замкнутый тор. Он отличается от стандартного тора отсутствием отверстия в центре.

Множество точек, из которых ребро M_iM_j видно под углом φ_{ij} , в случае острого угла образует внешнюю часть замкнутого тора, тупого – внутреннюю, а если φ_{ij} прямой, то – сферу, в которую вырождается замкнутый тор. Так как в основании пирамиды $M_0M_1M_2M_3$ лежат три ребра, то положение точки M_0 можно определить по пересечению трех тороидальных поверхностей, описанных выше. Это позволяет сформулировать следующие ограничения на искомые длины ребер:

$$\begin{cases} \ell_1 \leq \min(2R_{12}, 2R_{13}), \\ \ell_2 \leq \min(2R_{12}, 2R_{23}), \\ \ell_3 \leq \min(2R_{13}, 2R_{23}). \end{cases}$$

Из системы (1) выразим рёбра через ℓ_1 :

$$\ell_2 = \ell_1 \cos \varphi_{12} \pm \sqrt{d_{12}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{12}}, \quad \ell_3 = \ell_1 \cos \varphi_{13} \pm \sqrt{d_{13}^2 - \ell_1^2 \sin^2 \varphi_{13}}. \quad (6)$$

Ограничения на ℓ_1 :

$$\ell_1 \leq \min\left(\frac{d_{12}}{\sin \varphi_{12}}, \frac{d_{13}}{\sin \varphi_{13}}\right).$$

Эти ограничения позволяют проверять корректность входных данных при численных экспериментах, как это сделано в [7]. Необходимые тригонометрические тождества и формулы для анализа геометрии поверхностей можно найти в справочнике Г. Корна и Т. Корна [10].

Анализ условий о существовании решений систем (1) и (2) по известным углам $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ удобно проводить геометрическим образом. Строится множество точек, из которого сторона M_1M_2 видна под углом φ_{12} , а M_1M_3 – под углом φ_{13} соответственно. Как было указано в первом абзаце текущего пункта,

это множество может быть описано как кривая пересечения частей двух торов. Кривая пересечения определяет возможные положения точки M_0 при неизвестном третьем угле φ_{23} . Это дает наглядный инструмент для изучения системы (2), впервые предложенный в [5]. В рамках настоящей статьи приведены примеры только для равностороннего $\triangle M_1 M_2 M_3$, так как это наиболее используемый на практике вариант. Для анализа количества и характера решений проведено численное моделирование, результаты которого представлены на рис. 5–рис. 10.

На рис. 5 изображена кривая пересечения двух торов при $\varphi_{13} = \varphi_{12} = 2\pi/3$. При пересечении этой кривой тороидальной поверхностью, образованной вращением семейства окружностей вокруг ребра $M_2 M_3$, существует до одного решения у системы (1), и до двух решений у (2) (выше плоскости треугольника и ниже). рис. 5 иллюстрирует общий случай, когда углы $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ при вершине M_0 – тупые. Эти наблюдения позволили сформулировать достаточные условия существования и единственности решения в п. 3.

В случае рис. 6–рис. 7 структура возможных положений точки M_0 существенно усложняется и соответствует двум замкнутым кривым. Кривые пересечения пар торов допускают до восьми возможных положений точки M_0 . Наличие нескольких решений свидетельствует о принципиальной неоднозначности обратной задачи в такой геометрической конфигурации.

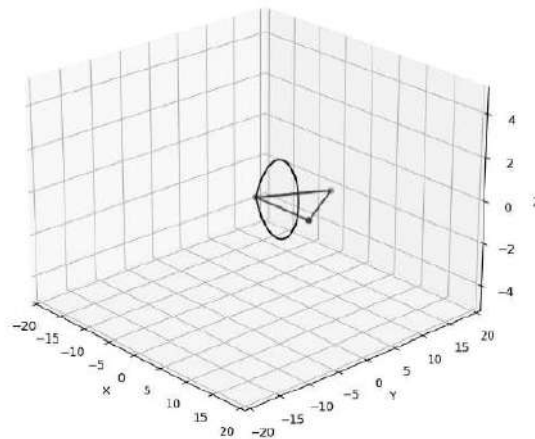


Рис. 5. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = 2\pi/3$

Fig. 5. Intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = 2\pi/3$

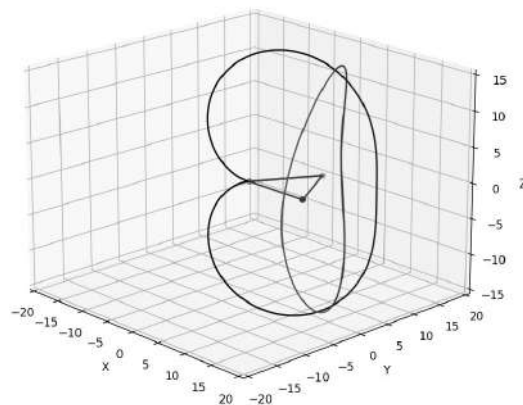


Рис. 6. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/6$

Fig. 6. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/6$

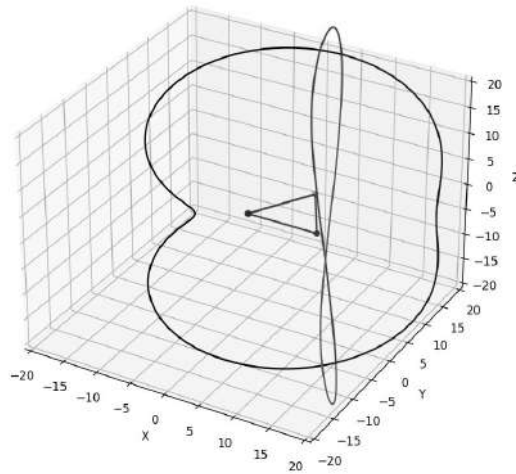


Рис. 7. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/10$
 Fig. 7. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/10$

В случае рис. 8 углы $\varphi_{12}, \varphi_{13}$ при вершине M_0 — прямые, кривая пересечения двух торов превращается в окружность.

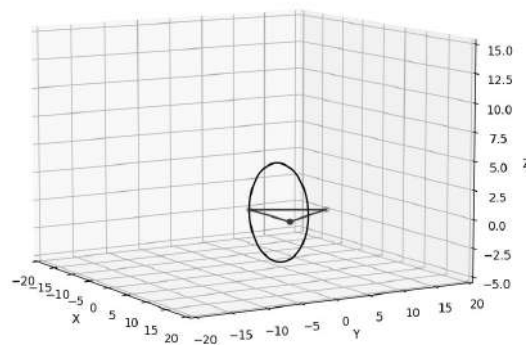


Рис. 8. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/2$
 Fig. 8. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{13} = \varphi_{12} = \pi/2$

На рис. 9 представлено, что не всегда кривая пересечения двух тороидальных поверхностей является замкнутой. На рис. 10 кривая не является плоской.

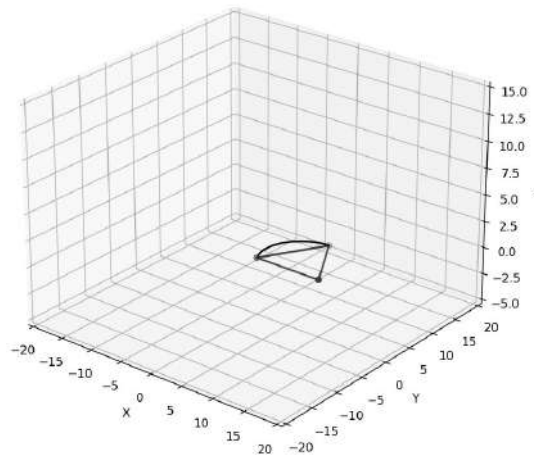


Рис. 9. Кривая пересечения двух торов в треугольнике с углами $\varphi_{12} = 2\pi/3, \varphi_{13} = \pi/3$
 Fig. 9. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{12} = 2\pi/3, \varphi_{13} = \pi/3$

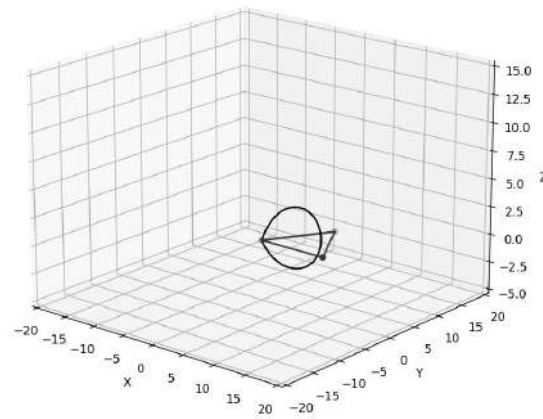


Рис. 10. Кривая пересечения двух торус в треугольнике с углами $\varphi_{12} = \pi/2$, $\varphi_{13} = 2\pi/3$
 Fig. 10. The intersection curve of two torus in a triangle with angles $\varphi_{12} = \pi/2$, $\varphi_{13} = 2\pi/3$

Для исследования поведения решений задачи о поиске координат подвижного объекта по трем углам φ_{13} , φ_{12} , φ_{23} и известным положениям точек M_1 , M_2 , M_3 был создан алгоритм и разработана программа. С помощью нее, на первом шаге по косинусам трех углов φ_{13} , φ_{12} , φ_{23} ищется решение системы (1) методом Ньютона. На втором шаге по известным длинам ребер ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 и координатам точек M_1 , M_2 , M_3 ищется решение системы (2).

На рис. 11(а, б) построен $\Delta M_1 M_2 M_3$ с координатами вершин $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, \sqrt{3}, 0)$, $M_3(2, 0, 0)$. Моделируется последовательность точек $\{M_0^k\}$ с координатами $(1, \sqrt{3}/3, 0.1 \cdot k)$. На левом рисунке $k = 0, \dots, 9$, а на правом — $k = 0, \dots, 29$. Для каждой точки из $\{M_0^k\}$ ищутся косинусы трех углов φ_{13} , φ_{12} , φ_{23} , затем разработанная программа на основе этих данных ищет возможные положения точки M_0 . В силу симметрии задачи относительно плоскости $\Delta M_1 M_2 M_3$ решения системы (2) отображаются и сверху, и снизу. При численном моделировании было замечено, что пока косинусы углов при вершине пирамиды $M_0 M_1 M_2 M_3$ остаются меньше $1/2$, задача имеет два решения, как показано на рис. 11(а). При прохождении этого значения возникает до 8 решений системы (2), что видно на рис. 11(б).

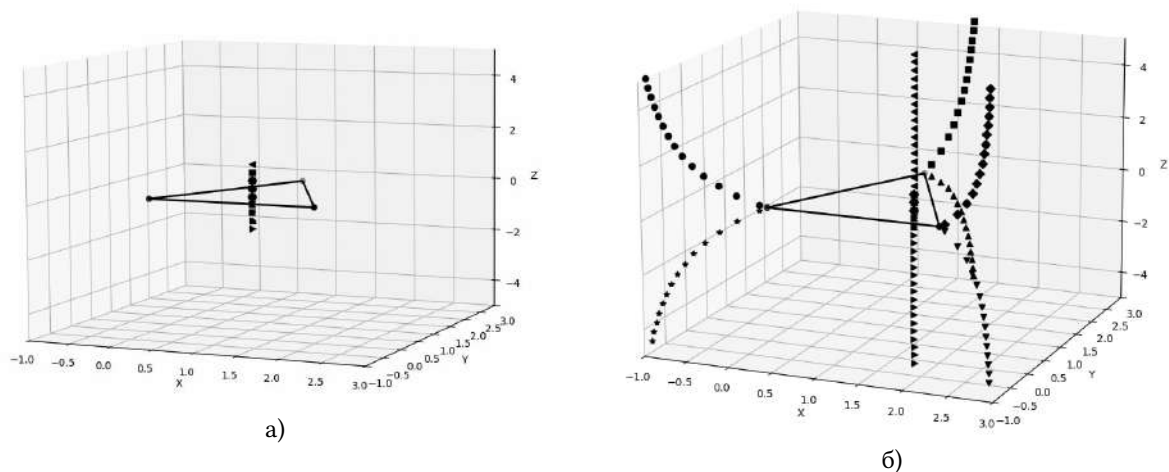


Рис. 11. Возможные положения точек при одинаковых входных данных
 Fig. 11. Possible positions of points with the same input data

Метод Ньютона, используемый для решения системы (1), особенно в случае неоднозначности решения чувствителен к выбору стартовой точки алгоритма. Для начального приближения выбирается расстояние от точки пересечения медиан $\Delta M_1 M_2 M_3$ до его вершин. В случае, когда решений несколько, дополнительно выбираются последовательно три набора расстояний от каждой из вершин M_1 , M_2 , M_3 до остальных трех вершин этого же треугольника. Такой «наивный» подход, в общем случае, не всегда дает все возможные решения системы (1). Для поиска всех решений этой системы помогает геометрическая интерпретация. В случае, если не найдены все решения, то есть их меньше четырех, дополнительно запускается метод Ньютона, где в качестве начального приближения выбирается расстояние от точки на винтовой траектории цилиндра с основанием, вписанной в $\Delta M_1 M_2 M_3$ окружностью, до вершин этого треугольника. «Истинным» решением является положение точки, проекция которой падает внутрь

$\Delta M_1 M_2 M_3$. Но при уменьшении углов $\varphi_{13}, \varphi_{12}, \varphi_{23}$, начиная с некоторого момента, проекции всех решений попадают в плоскость $\Delta M_1 M_2 M_3$.

5. Заключение. Проведенное исследование позволило разработать и теоретически обосновать новый метод определения пространственных координат подвижного объекта, основанный на азимутально-угломестных измерениях относительно системы наземных реперных точек. Принципиальное отличие предложенного подхода от традиционных спутниковых систем навигации заключается в исключении требования глобальной временной синхронизации, что открывает перспективы для его применения в условиях недоступности или преднамеренного подавления сигналов глобальных навигационных спутниковых систем. Основным научным результатом работы является построение комплексной математической модели задачи. В рамках исследования была проанализирована проблема неоднозначности решений. Главным стало доказательство теоремы, устанавливающей условия существования и единственности решения системы уравнений для произвольной конфигурации реперных точек, впервые сформулированной в [6] и обобщенной в [7]. Геометрическая интерпретация задачи через построение торов в пространстве решений предоставила аналитический инструмент, позволивший визуализировать и формализовать условия возникновения нескольких решений [5]. Опираясь на доказанную Теорему 1 о существовании решений, удалось повысить устойчивость алгоритма, предложенного в [1, 2]. Благодаря знанию о числе всех возможных положений искомой точки, разработанная программа численно обнаружила их все, несмотря на использование приближенных численных методов. Метод представляет значительный интерес для приложений в робототехнике, автономной навигации и 3D-реконструкции, где требуется альтернативная или резервная система позиционирования, особенно в условиях, рассмотренных в работах [1, 2]. Подход может быть интегрирован в гибридные навигационные системы, сочетающие угловые и дальномерные данные, как описано в работах по основам навигации [12].

Список литературы

1. Виноградов А.Д., Минин Л.А., Морозов Е.Ю., Ушаков С.Н. Детерминированный подход к решению задачи определения координат и угловой ориентации бортовой пеленгаторной антенны по результатам радиопеленгования радиоориентиров. Информационно-измерительные и управляющие системы. 2019;17(2):5-23.
2. Виноградов А.Д., Минин Л.А., Морозов Е.Ю., Ушаков С.Н. Анализ детерминированного подхода к определению координат и угловой ориентации бортовых пеленгаторных антенн на основе экспериментальных данных. Сборник трудов XXVI Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». 2020;4:150-155.
3. Марков М.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Советское радио; 1972. 288 с.
4. Куприянов А.И., Сахаров А.В. Теоретические основы радиотехнических систем определения местоположения. Учебное пособие. М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана; 2010. 328 с.
5. Иванова М.С. Алгоритм построения линий пересечения закрытых торов, образованных вращением двух семейств окружностей около сторон треугольника. Сборник VIII-ой международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвящённой 100-летию Н.Ф.Неклюдовой. 2024;14:68-70.
6. Иванова М.С., Ушаков С.Н. Достаточные условия существования решения в задаче определения местоположения подвижного объекта по трем реперным точкам при помощи азимутально-угломестного метода. Сборник материалов международной Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понtryгинские чтения». 2024:148-150.
7. Иванова М.С., Минин Л.А., Ушаков С.Н. Об условиях существования решения в задаче определения местоположения подвижного объекта по трем реперным точкам при помощи азимутально-угломестного метода. Сборник трудов XXX Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». 2024;2:442-449.
8. Шеховцов А.Н. Инженерная геодезия. Ростов-на-Дону: Феникс; 2016. 448 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. М.: Физматлит; 2010. 560 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1974. 832 с.
11. Лейк А. Спутниковая геодезия. Пер. с англ. Под ред. В.В.Болотина. М.: Маркетинг; 2003. 464 с.
12. Голован А.А., Паркин П.А. Основы навигации и навигационные системы. М.: МГУ; 2018. 272 с.

References

1. Vinogradov AD, Minin LA, Morozov EYu, Ushakov SN. A deterministic approach to solving the problem of determining the position and angular orientation of an onboard direction-finding antenna based on radio direction finding of radio beacons. Information-Measuring and Control Systems. 2019;17(2):5-23. (In Russ.)
2. Vinogradov AD, Minin LA, Morozov EYu, Ushakov SN. Analysis of a deterministic approach to determining the position and angular orientation of onboard direction-finding antennas based on experimental data. Proceedings of the XXVI International Scientific and Technical Conference "Radar, Navigation, and Communications". 2020;4:150-155. (In Russ.)

3. Markov MN. Multistatic Radio Engineering Systems. M.: Soviet Radio; 1972. 288 p.(In Russ.)
4. Kupriyanov AI, Sakharov AV. Theoretical Foundations of Radio Engineering Positioning Systems. M.: Bauman Moscow State Technical University; 2010. 328 p. (In Russ.)
5. Ivanova MS. An algorithm for constructing intersection curves of closed tori formed by rotating two families of circles about the sides of a triangle. Proceedings of the VIII International Youth Scientific School "Current Trends in Mathematical Analysis and Related Topics" Dedicated to the 100th Anniversary of N.F.Neklyudova. 2024;14:68-70.(In Russ.)
6. Ivanova MS, Ushakov SN. Sufficient conditions for the existence of a solution in the problem of determining the position of a moving object using three reference points by the azimuth-elevation method. Proceedings of the International Voronezh Spring Mathematical School "Modern Methods in Boundary Value Problem Theory. Pontryagin Readings". 2024:148-150.(In Russ.)
7. Ivanova MS, Minin LA, Ushakov SN. On the conditions for the existence of a solution in the problem of determining the position of a moving object using three reference points by the azimuth-elevation method. Proceedings of the XXX International Scientific and Technical Conference "Radar, Navigation, and Communications". 2024;2:442-449. (In Russ.)
8. Shekhovtsov AN. Engineering Geodesy. Rostov-on-Don: Fenix; 2016. 448 p. (In Russ.)
9. Gantmacher FR. The Theory of Matrices. 5th ed. M.: Fizmatlit; 2010. 560 p. (In Russ.)
10. Korn G, Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. M.: Nauka; 1974. 832 p. (In Russ.)
11. Leick A. GPS Satellite Surveying. Translated from English. Edited by V.V.Bolotin. M.: Marketing; 2003. 464 p. (In Russ.)
12. Golovan AA, Parkin PA. Fundamentals of Navigation and Navigation Systems. M.: Lomonosov Moscow State University; 2018. 272 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 23.02.2026

Поступила после рецензирования 15.04.2026

Принята к публикации 24.04.2026

Received February 23, 2026

Revised April 15, 2026

Accepted April 24, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Иванова Мария Сергеевна – аспирантка, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Mariia S. Ivanova – Graduate Student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию

Краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости с особенностью в младшем коэффициенте

Расулов А. Б. , Капицына Т. В. , Тарасова О. А. ,

(Статья представлена членом редакционной коллегии Солдатовым А. П.)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
Россия, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14
rasulzoda55@gmail.com, kapitsynatv@mpei.ru, tarasovaOA@mpei.ru

Аннотация. В работе в ограниченной области на плоскости рассматривается одно эллиптическое уравнение второго порядка с полярной особенностью в младшем коэффициенте, главным оператором которого является оператор Лапласа. Изучены вопросы построения явного интегрального представления общего решения. Отдельно рассмотрен случай с полярной особенностью первого порядка с использованием видоизмененного интеграла Помпейю – Векую. Полученное интегральное представление применяется в нахождении единственного решения задачи типа Дирихле. Полученное явное решение рассматриваемого уравнения также дает возможность непосредственно ставить и исследовать задачи типа линейного сопряжения и Римана – Гильберта.




Ключевые слова: уравнение Лапласа, полярная особенность, задача Дирихле

Для цитирования: Расулов А.Б., Капицына Т.В., Тарасова О.А. Краевая задача для уравнения Лапласа на плоскости с особенностью в младшем коэффициенте. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(2):168–175.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-168-175 EDN BYARBE

Original Research

A Boundary Value Problem for the Laplace Equation on a Plane with a Peculiarity in the Least Coefficient

Abdurauf B. Rasulov , Tatyana V. Kapitsyna , Oksana A. Tarasova 

(Article submitted by a member of the editorial board Soldatov A. P.)

National Research University "Moscow Power Engineering Institute",
14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia
rasulzoda55@gmail.com, kapitsynatv@mpei.ru, tarasovaOA@mpei.ru

Abstract. In a bounded domain on a plane, a second-order elliptic equation with a polar singularity in the lower-order coefficient is considered, whose principal operator is the Laplace operator. The problem of constructing an explicit integral representation of the general solution is studied. The case with a first-order polar singularity is considered separately using a modified Pompeiu – Vekua integral. The obtained integral representation is applied to find the unique solution of the Dirichlet-type problem. The obtained explicit solution of the considered equation also allows for the direct formulation and investigation of linear conjugation and Riemann – Hilbert type problems.

Keywords: Laplace Equation, Polar Singularity, Dirichlet Problem

For citation: Rasulov AB., Kapitsyna TV., Tarasova OA. A Boundary Value Problem for the Laplace Equation on a Plane with a Peculiarity in the Least Coefficient. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(2):168–175. (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-168-175 EDN BYARBE

1. Введение. Уравнения Лапласа с сингулярными коэффициентами в младших членах – это особый класс эллиптических уравнений, коэффициенты или правая часть которых могут быть разрывными или даже бесконечными в определенных точках. Это усложняет их исследование. Такие уравнения встречаются в физике при описании неоднородных сред, например, при моделировании распространения волн в материалах с дефектами.

В работе [1] найдены интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решение уравнений с регулярными коэффициентами. Более подробную информацию по эллиптическим уравнениям с сингулярными коэффициентами можно найти в работах [2, 3, 4].

Пусть область D содержит начало координат, ограничена границей Γ , ориентированной против часовой стрелки. В дальнейшем $D_0 = D \setminus \{0\}$.

Настоящая работа посвящена построению интегрального представления общего решения уравнения Лапласа в ограниченной области D на плоскости с полярной особенностью первого порядка в младшем коэффициенте. Полученные интегральные представления применяются к исследованию краевых задач.

В стандартных обозначениях $2\partial\bar{z} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, $4\partial_z\bar{z} = \Delta$, $u = u_1 + iu_2$ в области D_0 рассмотрим следующее сингулярное уравнение Лапласа с особенностью в младшем коэффициенте:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} - \left(\frac{a}{z} + A \right) \frac{\partial u}{\partial z} = f, \tag{1}$$

причем $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ – комплексное число, функции $A(z), f(z) \in L^p(D)$, $p > 2$.

Для уточнения класса решений уравнения (1) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в работах [5, 6].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D_0)$, если в любой подобласти $G_0 \in D_0$ ее обобщенные производные $f_z, f_{\bar{z}} \in L^p_{loc}(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{loc}(G)$, т. е. принадлежат $W^{1,p}(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{loc}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\bar{G}_0)$ с показателем $\mu \leq (p-2)/p$. Этот факт был доказан И.Н. Векуа (см. [5]). В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение линейной эллиптической системы первого порядка предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Так как уравнение (1) сводится к интегрированию двух эллиптических уравнений первого порядка в соответствии с внутренней регулярностью решений, в дальнейшем решение уравнения (1) предполагается регулярным в открытом множестве D_0 .

Более точно функцию $u(z) \in W^{1,p}_{loc}(D_0)$, где $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (1), почти всюду называем его регулярным решением.

2. Интегральные представления решений. Введем операторы Помпейю – Векуа ([5, с. 29])

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta, \tag{2}$$

где $d_2\zeta$ – элемент площади. Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\bar{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(T\varphi)_{\bar{z}} = \varphi, \tag{3}$$

а также

$$(\bar{T}f)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d_2\zeta, \tag{4}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности (см. [5]), оператор \bar{T} также компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\bar{D})$, и

$$((\bar{T}f))_z = f. \tag{5}$$

В обозначениях

$$\operatorname{Re} a = a_1, \quad \omega = 2a \ln |z|, \quad h(z) = (TA)(z) + \frac{a}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta \tag{6}$$

о представлении решения уравнения (1) справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $-1 < 2a_1 < 1$ и функция $A(z) \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда при $|z|^{-2a} f \in L^p(D)$, $p > 2$ любое регулярное решение уравнения (1) в области D_0 задается формулой

$$u = \bar{\psi} + \bar{T}|z|^{2a} e^{h\phi} + \bar{T}|z|^{2a} e^{hT}|z|^{-2a} e^{-h} f, \tag{7}$$

где $\bar{\psi}$ – антианалитическая функция, и функция ϕ аналитична в области D_0 , причем $|z|^{-2a} \phi \in L^p(D)$, $p > 2$. Функции ψ и ϕ определяются однозначно по функции u и ее производной u_z .

Доказательство. Вначале установим существование интегральных операторов в обобщенном решении и их принадлежности классу Гельдера, из которых составлено интегральное представление (7). С этой целью необходимо предварительно напомнить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(K_0\varphi)(z) = \int_D \frac{\varphi(\zeta)}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha} d_2\zeta, \quad z \in D, \tag{8}$$

где положительные m, α удовлетворяют условиям

$$0 < m < 1 \leq \alpha < (3 - m)/2, \quad (9)$$

таким образом $0 < 3 - m - 2\alpha < 1$.

Лемма 1. Пусть

$$p > 2/(3 - m - 2\alpha), \quad \mu = 3 - m - 2\alpha - 2/p. \quad (10)$$

Тогда оператор K_0 ограничен $L^p(D) \rightarrow C^\mu(\bar{D})$.

Доказательство леммы 1 можно найти в [7].

Применяем лемму 1 к интегральным операторам в формуле (7):

$$(K_1 f)(z) \equiv (T|z|^{-2\alpha} e^{-h} f)(z) = \int_D \frac{e^{-h} f(\zeta)}{|\zeta|^{2\alpha} (\zeta - z)} d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

где положительные $m = 2\alpha, \alpha = 1$, удовлетворяют условиям леммы 1, при этом $h, e^{-h} \in C^\mu(\bar{D})$. Следовательно, оператор K_1 ограничен $L^p(D) \rightarrow C^{\mu_1}(\bar{D}), 0 < \mu_1 < 1$;

$$(K_2 K_1 f)(z) \equiv (T|z|^{2\alpha} e^{-h} K_1 f)(z) = \int_D \frac{|\zeta|^{2\alpha} e^h K_1 f(\zeta)}{\bar{\zeta} - \bar{z}} d_2 \zeta, \quad z \in D,$$

где положительные $m = 2\alpha, \alpha = 1$ удовлетворяют условиям леммы 1, при этом $h, e^h \in C^\mu(\bar{D})$. Следовательно, оператор K_2 ограничен $L^p(D) \rightarrow C^{\mu_2}(\bar{D}), 0 < \mu_2 < 1$.

Аналогично, при $|z|^{2\alpha} \phi \in L^p(D), p > 2$ оператор

$$(K_3 \phi)(z) \equiv (T|z|^{2\alpha} e^{-h} \phi)(z), \quad z \in D,$$

ограничен $L^p(D) \rightarrow C^{\mu_3}(\bar{D}), 0 < \mu_3 < 1$.

Уравнение (1) сводится к интегрированию двух уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} U_{\bar{z}} - \left(\frac{a}{\bar{z}} + A\right) U = f, \\ u_z = U. \end{cases} \quad (11)$$

Положим

$$\Omega = \omega + h, \quad \text{где } \omega = 2a \ln |z|, \quad (12)$$

$h(z)$ определяется согласно формуле (6).

При доказательстве теоремы 1 существенную роль играет следующая

Лемма 2. Пусть в первом однородном уравнении (11) коэффициент $A \in L^p(D), p > 2$. Тогда функция Ω удовлетворяет уравнению

$$\Omega_{\bar{z}} = \frac{a}{\bar{z}} + A. \quad (13)$$

Доказательство. Приведем доказательство леммы 2 сначала с обратного. Действительно, поскольку

$$2 \frac{\partial |z|}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{|z|},$$

и согласно свойству (3) оператора Помпейю – Векуа, получим

$$(TA)_{\bar{z}} = A.$$

С учетом этих соображений, справедливость равенства (13) установлена.

Теперь рассмотрим прямое доказательство леммы 2. Напомним классическую формулу Помпейю. Если $u(z) \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, то имеет место тождество, которое называется классической формулой Помпейю:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_D u_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad z \in D,$$

где интеграл по области понимается как несобственный интеграл, $d_2 \zeta = d\xi d\eta$ – элемент площади.

На основе формулы Помпейю нетрудно получить формулу, дающую все решения уравнения

$$\partial_{\bar{z}} u = f(z).$$

Как известно, если плотность f суммируема в области D и в каждом замкнутом круге $B \subseteq D$ принадлежит $L^p(B)$ с любым $p > 2$, то функция $u = Tg$ принадлежит $W^{1,p}(B)$ и удовлетворяет неоднородному уравнению Коши – Римана, то

$$u(z) = \phi(z) + (Tf)(z), \quad \phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

где

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим уравнение

$$U = |z|^{2a} e^h [\phi + T(|z|^{-2a} e^{-h} f)].$$

Тогда формула Помпейю для функции Ω , производная которой имеет полярную особенность первого порядка в точке $z = 0$, в предположении $a \in \mathbb{C}$, $A \in L^p(D)$ представима в виде

$$\Omega = 2a \ln |z| + \frac{a}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{A(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta,$$

которая вблизи особой точки $z = 0$ имеет поведение

$$\Omega = O(\ln |z|) \text{ при } z \rightarrow 0.$$

Обозначая через $h(z)$ последние два слагаемые, приходим к формуле (12).

Лемма 3. Пусть функция $\Omega(z)$ определена формулой (12) и функция $|z|^{-2a} e^{-h} f \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда общее решение первого уравнения (11) в классе $C(\bar{D} \setminus 0)$ задается формулой

$$U = |z|^{2a} e^h [\phi + T(|z|^{-2a} e^{-h} f)], \tag{14}$$

где функция $\phi \in C(\bar{D} \setminus 0)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus 0$.

Доказательство. Легко проверить, что функции $U = e^\Omega$ удовлетворяет однородное уравнение

$$U_{\bar{z}} - \left(\frac{a}{\rho} + A \right) U = f.$$

Тогда для функции $V = e^{-\Omega} U$ имеем соотношение

$$V_{\bar{z}} = e^{-\Omega} U_{\bar{z}} - (A) e^{-\Omega} U = e^{-\Omega} f.$$

Из этой формулы, с помощью оператора T , получим $V = \phi + T(e^{-\Omega} f)$, где функция $\phi \in C(\bar{D} \setminus 0)$ аналитична в открытом множестве $D \setminus 0$. В результате приходим к представлению (14). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.

Рассмотрим вопрос интегрирования второго уравнения (11):

$$u_z = U.$$

В получении общего решения данного уравнения и в его описании существенную роль играет интегральный оператор (4) Помпейю – Векуа. Следовательно, общее решение этого уравнения задается формулой ([5, с. 29])

$$u = \bar{\psi} + \bar{T}U \tag{15}$$

с произвольной в D антианалитической функцией $\bar{\psi}$. Подставляя значение $U(z)$ из формулы (14), в формуле (15) получим интегральное представление (7).

Находим формулу обращения полученного интегрального представления. Из формулы (14), в случае $-1 < 2a < 1$ с учетом $u_z = U$, а также из формулы (15) получим

$$\phi = |z|^{2a} u_z - T(e^{-\Omega} f),$$

$$\psi = \bar{u} - \overline{\bar{T}u_z}.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие. Если $\psi \in C^{\mu_4}(\bar{D})$, тогда в интегральном представлении (7) регулярное решение уравнения (1) также принадлежит классу Гельдера $u \in C^{\nu}(\bar{D})$, где $\nu = \min\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$.

3. Интегральные представления решений в особом случае. Обозначим $C_\lambda(\bar{D}, 0)$, $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\bar{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \rightarrow 0$. Оно снабжается нормой

$$|\varphi| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|,$$

относительно которой, очевидно, банахово.

Для исследования уравнения (1) в особом случае ($2a_1 = -1$), в дальнейшем удобнее иметь дело с видоизмененным интегралом Помпейю – Векуа

$$(T_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\varphi(t)}{t(t-z)} d_2t, \quad z \in D, \quad (16)$$

который, очевидно, имеет смысл для функций $\varphi \in C_\lambda(\bar{D}, 0)$ с $\lambda > -1$, которая была изучена в работах [8, 9, 10]. Мы воспользуемся леммой, приведенной в работе [9], которую для наглядности изложим с коротким ее доказательством.

Лемма 4. а) Оператор T_0 ограничен в пространстве $C_\lambda(\bar{D}, 0)$, $-1 < \lambda < 0$ и его норма $|T_0|_{\mathcal{L}}$ совпадает с постоянной

$$\sigma(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t. \quad (17)$$

б) Функция $\sigma(\lambda)$ обладает свойством симметрии $\sigma(\lambda) = \sigma(-\lambda-1)$ на интервале $(-1, 0)$ и возрастает от $\sigma(-1/2)$ до $+\infty$ на интервале $(-1/2, 0)$.

Доказательство. а) Пусть $\varphi \in C_\lambda(\bar{D}, 0)$, $-1 < \lambda < 0$. Тогда

$$|z|^{-\lambda} |(T_0\varphi)(z)| \leq |\varphi|_{C_\lambda} \int_D \frac{|t|^\lambda}{|z|^\lambda |t(t-z)|} d_2t.$$

Легко видеть, что интеграл здесь не превосходит постоянной (17), так что функция $T_0\varphi \in C_\lambda(\bar{D}, 0)$ и по определению отсюда

$$|T_0\varphi|_{C_\lambda} \leq \sigma(\lambda) |\varphi|_{C_\lambda}. \quad (18)$$

Пусть $0 < r < 1$ столь мало, что проколотый круг $0 < |z| \leq \sqrt{r}$ содержится в D . Рассмотрим функцию $\varphi(z) \in C_\lambda$ единичной нормы, которая в круге $|z| \leq r$ совпадает с

$$\varphi(z) = |z|^\lambda \frac{z(z-r)}{|z(z-r)|}.$$

Тогда

$$(T_0\varphi)(r) \geq \frac{1}{\pi} \left(\int_{|t| \leq \sqrt{r}} - \int_{|t| \geq \sqrt{r}} \right) \frac{|t|^\lambda}{|t||t-r|} d_2t = \frac{r^\lambda}{\pi} \left(\int_{|t| \leq 1/\sqrt{r}} - \int_{|t| \geq 1/\sqrt{r}} \right) \frac{|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t.$$

Следовательно,

$$r^{-\lambda} (T_0\varphi)(r) \geq \left(\sigma(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_{|t| \geq 1/\sqrt{r}} \frac{|t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t \right),$$

что в соединении с (18) означает, что норма оператора T_0 в пространстве C_λ в точности совпадает с $\sigma(\lambda)$.

б) Равенство $\sigma(\lambda) = \sigma(-\lambda-1)$ получается заменой $t = 1/t'$ в интеграле (17). Аналогично убеждаемся, что производная

$$\sigma'(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \frac{(\ln |t|) |t|^\lambda}{|t||t-1|} d_2t = \int_{|t| < 1} \frac{(\ln |t|) (|t|^\lambda - |t|^{-\lambda-1})}{|t||t-1|} d_2t,$$

что доказывает второе утверждение в (b). Лемма 4 доказана.

Заметим, что положительная постоянная $\sigma(-1/2)$ достаточно сложным образом выражается через эллиптические интегралы первого и третьего рода.

Рассмотрим интеграл для функций $\varphi \in C_\lambda$ с $0 < \lambda < 1$. В этом случае он имеет смысл и при $z = 0$. Поскольку $\tilde{\varphi}(z) = z^{-1} \in C_{\lambda-1}$, на основании леммы 4 функция $T_0\tilde{\varphi}$ принадлежит $C_{\lambda-1}$. С учетом очевидного тождества

$$(T_0\varphi)(z) = (T_0\varphi)(0) = z(T_0\tilde{\varphi})(z)$$

закключаем, что оператор $(T_0\varphi)(z) = (T_0\varphi)(0)$ ограничен в пространстве C_λ и его норма совпадает с $\sigma(\lambda-1)$.

В случае $2a_1 = -1$, об интегральном представлении решения уравнения (1) имеет место следующая
Теорема 2. Пусть $2a_1 = -1$ и функция $A(z) \in L^p(D)$, $p > 2$. Тогда при $f \in L^p(D)$, $p > 2$ любое регулярное решение уравнения (1) в области D_0 и ограниченное в особой точке $z = 0$ задается формулой

$$u = \bar{\psi} + \overline{T_0}|z|^{i2a_2} e^h \phi + \overline{T_0}|z|^{i2a_2} e^h T|z|^{1-i2a_2} e^{-h} f, \tag{19}$$

где $\bar{\psi} \in C(\overline{D})$ — антианалитическая функция в области D , функция ϕ аналитична в области D_0 , причем $\phi \in L^p(D)$, $p > 2$. Функции ψ и ϕ определяются однозначно по функции u и ее производной u_z .

Напомним, что здесь через $\overline{(T_0)\phi}$ обозначено

$$(\overline{T_0\phi})(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{\phi(\zeta)}{\bar{\zeta}(\bar{\zeta} - \bar{z})} d_2\zeta.$$

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что интегральное представление решений (19) действительно удовлетворяет уравнению (1) в случае $2a_1 = -1$. Поэтому достаточно проверить ее принадлежность к классу $W^{1,p}(D_0)$ и ограниченности при $z \rightarrow 0$. В интегральном представлении решений (19) второе слагаемое

$$\overline{T_0}|z|^{i2a_2} e^h \phi$$

согласно условию $\phi(z) \in L^p$, $p > 2$ является ограниченной функцией при $z \rightarrow 0$, так как классы L^p , $p > 2$ и $C_\lambda(\overline{D}, 0)$, $-1 < \lambda < 0$ в данном случае совпадают.

В интегральном представлении решений (19) третье слагаемое

$$\overline{T_0}|z|^{i2a_2} e^h T|z|^{1-i2a_2} e^{-h} f,$$

согласно лемме 4 является ограниченной функцией. С учетом функции $\bar{\psi} \in C(\overline{D})$ теорема доказана.

Полученное интегральное представление (19) также дает возможность ставить и исследовать различные краевые задачи.

Если простой контур $\Gamma = \partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, тогда по теореме Келлога конформно можно отобразить эту область на единичный круг $\mathbb{D} = \{z : |z| \leq 1\}$. Поэтому при исследовании краевых задач мы ограничимся случаем, когда область является единичным кругом и при этом $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$.

4. Краевые задачи. Краевая задача D. Найти решение $u(z) \in C(\overline{D})$ уравнения (1), удовлетворяющее на контуре Γ граничным условиям

$$\begin{cases} \operatorname{Re} |z|^{2a} u_z(t) = g_1(t), & t \in \Gamma, \\ \operatorname{Re} \bar{u}(t) = g_2(t), & t \in \Gamma, \\ u(z_0) = 0, \quad u_{\bar{z}}(z_0) = 0, & z_0 \in D, \end{cases} \tag{20}$$

где $g_k(t) \in C(\Gamma)$ ($k = 1, 2$) — заданные функции, z_0 — произвольная фиксированная точка области D .

Решение. На основе формулы (14) с учетом $U = u_z$, используя первое условие задачи D, приходим к новой формулировке:

Требуется найти решение первого уравнения из (11) класса $u \in C(\overline{D})$ в виде (14), в котором произвольная функция $\phi(z)$ удовлетворяет на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \phi|_\Gamma = \bar{g}_1(t), \\ \operatorname{Im} \phi(z_0) = 0, \quad z_0 \in D_0, \end{cases} \tag{21}$$

где $\bar{g}_1 = g_1 - \operatorname{Re} T|z|^{2a} f$ и $\bar{g}_1(t) \in C^v(\Gamma)$, $v < 1 - 2/p$, $p > 2$.

Точное решение (14) представимо в виде ([11, с. 124])

$$\phi = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \bar{g}_1(\zeta) d\zeta + ic_0, \tag{22}$$

где $c_0 = -\frac{1}{\pi} \int_\Gamma \frac{\operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \bar{g}_1(\zeta) d\zeta$.

Теперь, подставляя значение ϕ из формулы (22) в (7), а также используя второе условие из (16), т. е.

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \bar{u}(t) = g_2(t), & t \in \Gamma, \\ u(z_0) = 0, \quad z_0 \in D, \end{cases} \tag{23}$$

для нахождения неизвестной антианалитической функции $\bar{\psi}(z)$ приходим к следующей краевой задаче:

Требуется найти аналитическую функцию $\psi(z)$, которая удовлетворяет на контуре Γ граничному условию

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \psi|_{\Gamma} = \tilde{g}_2(t), \\ \operatorname{Im} \psi(z_0) = 0, \quad z_0 \in D_0, \end{cases} \quad (24)$$

где $\tilde{g}_2 = \bar{g}_2 + f_1(\bar{g}_1)$, $f_1(\bar{g}_1) = -\operatorname{Re}\{\bar{T}|\zeta|^{2a}e^{h\phi}(\bar{g}_1) + \bar{T}|\zeta|^{2a}e^{hT}|\zeta|^{-2a}e^{-h}f\}$ и $\tilde{g}_2(t) \in C^v(\Gamma)$, $v < 1 - 2/p$, $p > 2$.

Точное решение задачи (24) представимо в виде ([11, с. 124])

$$\psi = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \tilde{g}_2(\zeta) d\zeta + ic_1,$$

где $c_1 = -\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \tilde{g}_2(\zeta) d\zeta$.

В результате приходим к решению исходной краевой задачи D.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $g_k(t) \in H(\Gamma)$, $k = 1, 2$. Тогда краевая задача D в классе $u(z) \in C^v(\bar{D})$ имеет единственное решение

$$u = I_0(g_2)(z) + \bar{T}|\zeta|^{2a}e^{h}I_0(g_1) + \bar{T}|\zeta|^{2a}e^{hT}|\zeta|^{-2a}e^{-h}f,$$

где

$$I_0(g_k)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{2i \operatorname{Im}(\zeta z_0)}{|\zeta - z_0|^2} \right] \tilde{g}_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2,$$

где \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 соответственно выражаются формулами, приведенными в (21) и (24) [12].

Замечание. Полученное выше интегральное представление также дает возможность ставить и исследовать задачи типа линейного сопряжения и Римана – Гильберта.

Список литературы

1. Раджабов Н.Р. Интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решение уравнений с регулярными коэффициентами. Доклады АН СССР. 1977;233(5):796–799.
2. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука; 1968. 511 с.
3. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I. Функциональный анализ, СМФН. 2017;63(1):1–189.
4. Radjabov N. An Introduction to the Theory of Partial Differential Equations With Super-Singular Coefficients. Tehran; 1996. 236 p.
5. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука; 1988. 510 с.
6. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир; 1966. 351 с.
7. Расулов А.Б. Об общем решении уравнения типа Коши – Римана со степенными особенностями в младших коэффициентах. Математические заметки. 2020;108(5):791–795.
8. Солдатов А.П. Краевая задача линейного сопряжения теории функций. Известия АН СССР. Серия математическая. 1979;43(1):184–202.
9. Soldatov AP., Rasulov AB. Generalized Cauchy – Riemann Equations with Power-law Singularities in Coefficients of Lower Order. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2021;357:535–548.
10. Солдатов А.П. Сингулярные интегро-функциональные операторы на кусочно-гладкой кривой. Новосибирск; 2024. 296 с.
11. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука; 1982. 336 с.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука; 1977. 640 с.

References

1. Radjabov NR. Integral representations for some classes of elliptic differential equations with singular hyperplanes through the solution of equations with regular coefficients. Doklady AN SSSR. 1977;233(5):796–799. (In Russ.).
2. Muskhelishvili NI. Singulyarnyye integral'nyye uravneniya [Singular integral equations]. Moscow: Nauka, 1968. 511 p.
3. Soldatov AP. Singular integral operators and elliptic boundary value problems. I. Funktsional'nyy analiz, SMFN. 2017;63(1):1–189. (In Russ.)
4. Radjabov N. An Introduction to the Theory of Partial Differential Equations With Super-Singular Coefficients. Tehran; 1996. 236 p.

5. Vekua IN. Obobshchennyye analiticheskiye funktsii [Generalized analytical functions]. Moscow: Nauka, 1988. 510 p.
6. Bers L., John F., Schechter M. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi [Partial Differential Equations]. Moscow: Mir, 1966. 351 p.
7. Rasulov AB. On the general solution of a Cauchy – Riemann type equation with power singularities in the lower coefficients. *Matematicheskiye zametki*. 2020;108(5):791–795. (In Russ.)
8. Soldatov AP. Boundary value problem of linear conjugation of function theory. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya*. 1979;43(1):184–202. (In Russ.)
9. Soldatov AP., Rasulov AB. Generalized Cauchy – Riemann Equations with Power-law Singularities in Coefficients of Lower Order. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. 2021;357:535–548.
10. Soldatov AP. Singulyarnyye integro-funktsional'nyye operatory na kusochno-gladkoy krivoy [Singular integro-functional operators on a piecewise smooth curve]. Novosibirsk; 2024. 296 p.
11. Bitsadze AV. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Nauka, 1982. 336 p.
12. Gakhov FD. Krayevyye zadachi [Boundary Value Problems]. Moscow: Nauka, 1977. 640 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.12.2025

Поступила после рецензирования 27.04.2026

Принята к публикации 04.05.2026

Received December 18, 2025

Revised April 27, 2026

Accepted May 4, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Расулов Абдурауф Бабаджанович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

Капицына Татьяна Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

Тарасова Оксана Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Abdurauf B. Rasulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of the Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

Tatyana V. Kapitsyna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of the Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

Oksana A. Tarasova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of the Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Об одном нелинейном уравнении Коши – Римана с особенностью в младшем коэффициенте

Якивчик Н. В. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Солдатовым А. П.)

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,

Россия, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14

YakivchikNV@mpei.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается один класс нелинейных уравнений с оператором Коши – Римана. Такое уравнение подстановкой сводится к линейному уравнению; сформулированы условия, при которых указанная подстановка обеспечивает взаимно-однозначное отображение. Коэффициент уравнения при неизвестной функции имеет изолированную сильную степенную особенность в нуле, после устранения которой он достаточно число раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля. Применяя разложение коэффициента по формуле Тейлора и прямое интегрирование полиномиальной части, с помощью оператора Помпейю – Векуа построено интегральное представление решений этого уравнения.

Ключевые слова: оператор Коши – Римана, сильные изолированные особенности, интегральный оператор Помпейю – Векуа

Для цитирования: Якивчик Н.В. Об одном нелинейном уравнении Коши – Римана с особенностью в младшем коэффициенте. *Прикладная математика & Физика.* 2026;58(2):176–182. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-176-182 EDN EFSJLX

Original Research

On One Type of Nonlinear Cauchy – Riemann Equation with a Singularity in the Lowest Coefficient

Natalia V. Yakivchik 

(Article submitted by a member of the editorial board Soldatov A. P.)

National Research University "Moscow Power Engineering Institute",

14 Krasnokazarmennaya St., Moscow 111250, Russia

YakivchikNV@mpei.ru

Abstract. In this paper, one class of nonlinear equations with the Cauchy – Riemann operator is considered. Such equation is reduced to a linear equation by a substitution; conditions under which this substitution makes a one-to-one mapping are formulated. The coefficient of the equation at the unknown function has an isolated strong power singularity at zero, and after its elimination it is continuously differentiable in a neighborhood of zero sufficiently many times. Using the Taylor expansion of the coefficient and direct integration of the polynomial part, by means of the Pompeiu – Vekua operator an integral representation of solutions to this equation is obtained.

Keywords: Cauchy – Riemann Operator, Strong Isolated Singularities, Pompeiu – Vekua Integral Operator

For citation: Yakivchik NV. On One Type of Nonlinear Cauchy – Riemann Equation with a Singularity in the Lowest Coefficient. *Applied Mathematics & Physics.* 2026;58(2):176–182. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-176-182 EDN EFSJLX

1. Постановка задачи. Пусть гладкий контур Γ разбивает комплексную плоскость \mathbb{C} на «конечную» – D и «бесконечную» – D' области. Для определенности пусть $0 \in D$ и $D_0 = D \setminus \{0\}$.

В конечной области $D_0 \subset \mathbb{C}$ рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\bar{u} = f \quad (1)$$

с функциями $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$, заданными в ограниченной области D , причем коэффициенты a , b этого уравнения могут допускать в множестве $l \subset D$ степенные особенности по z . Здесь и ниже используется стандартное обозначение $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$.

Если младшие коэффициенты a и b и правая часть f уравнения (1) принадлежат пространству суммируемых функций со степенью $p > 2$, то теория этого уравнения построена И. Н. Векуа [1] и называется теорией *регулярных* обобщенных аналитических функций.

В построении теории регулярных обобщенных аналитических функций и исследовании уравнения (1) существенную роль играет интегральный оператор Помпейю – Векуа [1, с. 31]

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z}; \quad (2)$$

здесь и ниже $d_2\zeta$ обозначает элемент площади.

Хорошо известно, что при $p > 2$ этот оператор действует $L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D) \subseteq H(\bar{D})$ и удовлетворяет уравнению

$$(Tf)_z = f. \quad (3)$$

Когда $b \equiv 0$ и $a, f \in L^p(D)$, $p > 2$, с помощью этого оператора общее решение уравнения (1) в обозначении

$$\Omega(z) = (Ta)(z) \quad (4)$$

дается формулой

$$u = e^\Omega \phi + e^\Omega T(e^{-\Omega} f) \quad (5)$$

с произвольной аналитической в области D функцией ϕ .

Интегральное представление (5) решений уравнения (1) при $b(z) = 0$ называется интегральным представлением *первого рода*; в его построении центральное место занимает построение функции $\Omega(z)$ по формуле (4). Интегральное представление решений уравнения (1) при $b(z) \neq 0$ называется интегральным представлением *второго рода*, и при его построении используется представление первого рода (5).

Теперь переходим к случаю, когда младшие коэффициенты a и b и правая часть f уравнения (1) не принадлежат пространству суммируемых функций. В этом случае полученные результаты по исследованию уравнения (1) относятся к теории *сингулярных* обобщенных аналитических функций. Для краткого обзора по этой теории удобно ввести класс функций $C_{-\alpha}(\bar{D}, 0)$.

Обозначим $C_{-\alpha}(\bar{D}, 0)$, где $\alpha > 0$, пространство всех непрерывных в $\bar{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с поведением $O(|z|^{-\alpha})$ при $z \rightarrow 0$.

Основная трудность заключается в построении функции $\Omega(z)$ по формуле (4), так как при $a \in C_{-\alpha}(\bar{D}, 0)$, $\alpha \geq 1$, интеграл Ta является расходящимся интегралом. Поэтому в работах различных авторов были использованы разнообразные методы исследования. Например, представления решения уравнения (1) в виде рядов по степеням z и \bar{z} в окрестности сингулярной точки $z = 0$, также исходя из представления $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, метод разделения переменных по переменным (r, φ) , метод сведения уравнения (1) к эквивалентному линейному уравнению, типа метода Фукса и т. п.

Построению интегральных представлений решений и исследованию краевых задач для уравнения (1) с коэффициентами из класса $C_{-\alpha}(\bar{D}, 0)$, где $\alpha > 0$, посвящены работы Л. Г. Михайлова [2], З. Д. Усманова [3], Н. Р. Раджабова [4], Н. Begehr [5], А. Meziani [6], А. П. Солдатова и А. Б. Расулова [7], А. Б. Тунгатарова [8] и др.

Но, к сожалению, использование вышеперечисленных методов не дало таких полноценных результатов, как в теории регулярных обобщенных аналитических функций И. Н. Векуа.

В последние десятилетия на пути исследования обобщенного уравнения Коши – Римана с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$, и $b \in C_{-1}$ со специальными видами (когда $a(z) = z|z|^{-\alpha-1} a_0(z)$, где $a_0 \in C(D)$, т. е. когда коэффициент имеет специальный множитель $z|z|^{-1} = e^{i\varphi}$), получен ряд результатов (см., например, [9]) с использованием сингулярного оператора Помпейю – Векуа (2). Заметим, что этот множитель играл важную роль при построении функции $\Omega(z)$ и в вопросе существования глобального решения. Именно в случае такого типа коэффициентов для решений уравнения (1) построена функция $\Omega(z)$ и получены интегральные представления первого рода и второго рода. Заметим, что при этом случаи $a \in C_{-1}$ и $a \in C_{-\alpha}$, $\alpha > 1$, исследованы независимо.

В настоящей работе снято условие ограниченности с коэффициента $a \in C_{-\alpha}$, $\alpha \geq 1$, и получено представление общего решения для одного нелинейного уравнения Коши – Римана с изолированной сильной особенностью в младшем коэффициенте.

В области D_0 рассмотрим нелинейное уравнение

$$\partial_z u - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) = f(z) \frac{u(z)}{\sqrt[m]{u(z)}}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (6)$$

с коэффициентом $a(z) \in C(\bar{D})$, который n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, а $n = [\alpha]$ – целая часть α .

В правой части (6) функция f принадлежит классу $L^p_{loc}(D_0)$, $p > 2$. Число $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число.

Как сказано выше, результаты, полученные в случае $\alpha \geq 1$, относятся к теории сингулярных обобщенных аналитических функций.

Для уточнения класса решений уравнения (6) напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенные в монографии И. Н. Векуа [1] и в книге Л. Берса, Ф. Джона, М. Шехтера [10].

Заметим, что функция f принадлежит соболевскому пространству $W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$, если в любой замкнутой подобласти $G_0 \subset D_0$ сама функция $f(z)$ и ее обобщенные производные $f_z, f_{\bar{z}}$ принадлежат $L^p(G_0)$, $p > 2$.

Пусть в некотором открытом множестве G на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L_{\text{loc}}^p(G)$, т. е. принадлежат $L^p(G_0)$ в любой ограниченной области G_0 , лежащей в G вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. монографию И. Н. Векуа [1]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,p}(G)$ и удовлетворяет рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\bar{G}_0)$ с показателем $\mu = (p-2)/p$. Этот факт был доказан И. Н. Векуа в [1]. В соответствии с внутренней регулярностью решений в дальнейшем решение уравнения (6) предполагается регулярным в открытом множестве D_0 . Более точно, функцию $u(z) \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$, $p > 2$, удовлетворяющую уравнению (6) почти всюду, называем *регулярным решением*.

2. Интегральное представление решений. Напомним, что коэффициент уравнения (6), $a(z) \in C(\bar{D})$, n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$ и $n = [\alpha]$ – целая часть α . Следовательно, функцию $a(z)$ в окрестности особой точки $z = 0$ можно разложить по формуле Тейлора

$$a(z) = p_n(z) + a_0(z), \quad \text{где } a_0(z) = o(z^n) \quad \text{при } z \rightarrow 0.$$

Здесь $p_n(z) = \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \cdot z^{k_1} \bar{z}^{k_2}$ – ее главная часть (полином), $a_{k_1 k_2}$ – коэффициенты Тейлора по степеням z и \bar{z} , а $a_0(z)$ – остаток в форме Пеано. Введем обозначение

$$\Omega(z) = \omega_n(z) + h(z), \quad (7)$$

где

$$\omega_n(z) = \frac{2}{m|z|^\alpha} \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha}, \quad \text{в случае } \frac{\alpha}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad \text{либо}$$

$$\omega_n(z) = \frac{2}{m|z|^\alpha} \sum_{\substack{k_1+k_2 \leq n \\ k_2 \neq k_0}} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha} + \frac{1}{m} \sum_{k_1=0}^{n-k_0} a_{k_1 k_0} z^{k_1} \cdot \ln \bar{z}, \quad \text{в случае } \frac{\alpha}{2} - 1 = k_0 \in \mathbb{Z},$$

причем

$$h(z) \equiv \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} \right) (z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} + \omega_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z};$$

здесь $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число.

Теорема. Пусть $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha]$ – целая часть α , и дан коэффициент $a(z) \in C(\bar{D})$, который n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число.

Тогда соответственно в предположении $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ общее решение уравнения (6) в классе $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ для каждого фиксированного натурального числа $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, дается формулой

$$u = \left\{ e^{\Omega} \left[\phi + \frac{1}{m} T(e^{-\Omega} f) \right] \right\}^m, \quad (8)$$

где $\phi \in C_{\text{loc}}^\mu(D_0)$ – произвольная аналитическая в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ функция.

При четном $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, и $1 \leq \alpha < 2$ также имеет место интегральное представление (8) в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$.

Доказательство. Введем новую функцию $v(z)$, которая с исходной искомой функцией $u(z)$ связана соотношением

$$u(z) = v^m(z). \quad (9)$$

Сперва заметим, что мы решения уравнения (6) рассматриваем в классе $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ и в проколотой области $D_0 = D \setminus \{0\}$, которая является двусвязной областью.

Взаимно-однозначная (или однолистная) комплекснозначная функция в многосвязной области – это функция, которая отображает каждую точку области в единственное значение в другой области, при этом каждому значению в области значений соответствует единственная точка в исходной области. Другими словами, функция является и инъективной (различным элементам исходной области соответствуют различные элементы в области значений), и сюръективной (каждый элемент области значений имеет свой прообраз в исходной области). В многосвязной области, в отличие от односвязной, существуют замкнутые кривые, которые не могут быть стянуты в точку без выхода за пределы области.

Для наглядности рассмотрим степенную функцию $u(z) = z^\beta$, где показатель β – комплексное число. Ее однозначность определяется ее связью с логарифмической функцией и многозначностью последней. Поскольку логарифм комплексного числа является многозначной функцией (имеет бесконечно много значений для одного аргумента), то и степенная функция, выраженная через логарифм $z^\beta = \exp(\beta \ln z)$, также является многозначной, если показатель степени β не является целым числом. Если β – целое число, то функция z^β однозначна.

Представим функции $u(z)$ и $v^m(z)$ соответственно в виде

$$u(z) = |u(z)| e^{i(\text{Arg } u + 2k\pi)}, \quad v^m(z) = |v(z)|^m e^{im(\text{Arg } v + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

где z – произвольная фиксированная точка области D_0 , а $\text{Arg } u$ и $\text{Arg } v$ соответственно – главные значения аргументов чисел $u(z)$ и $v(z)$. Видно, что для всех таких точек двусвязной области D_0 модуль $|u(z)| = |v(z)|^m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (т. е. сохраняется взаимная однозначность модулей функций), а для аргумента $e^{i \text{Arg } u} = e^{im \text{Arg } v + 2imk\pi} = e^{im \text{Arg } v}$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что при любом нечетном натуральном $m > 2$ между функциями $u(z)$ и $v(z)$ соотношение (9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие. Но при четном $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, может нарушиться эта взаимная однозначность, так как $u = (+v)^{2l} = v^{2l}$ и $u = (-v)^{2l} = v^{2l}$. Поэтому, чтобы соотношение (9) между функциями $u(z)$ и $v(z)$ устанавливало взаимно-однозначное соответствие при любом фиксированном натуральном $m \geq 2$, проведем разрез, соединяющий точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$. Тогда требование интегрируемости вблизи разреза накладывает ограничение $\alpha < 2$.

Очень важно отметить одинаковое поведение функций $u(z)$ и $v(z)$ при $z \rightarrow 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} u(z) = \lim_{z \rightarrow 0} v(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } \text{Re } \Omega(z) < 0, \\ \infty, & \text{при } \text{Re } \Omega(z) > 0. \end{cases}$$

Другой способ добиться однозначного соответствия между значениями функций $u(z)$ и $v(z)$ – рассматривать соотношение (9) в римановой поверхности – поверхности в многомерном комплексном пространстве, на которой данные функции становятся однозначными. Конечно, в рамках настоящей статьи этот способ мы не рассматриваем.

Следовательно, все наше действие происходит в области D_0 с разрезом, соединяющим точку $z = 0$ с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$, и при этом соотношение (9) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между значениями функций $u(z)$ и $v(z)$.

Тогда уравнение (6), где $m \geq 2$ – некоторое фиксированное натуральное число, сводится к эквивалентному линейному уравнению:

$$\partial_z v - \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha} v(z) = \frac{1}{m} f(z), \quad m = 2, 3, \dots, \quad (10)$$

в силу взаимно-однозначного соответствия решений уравнений (6) и (10) согласно (9).

Кроме того, функции $u(z)$ и $v(z)$ принадлежат одному и тому же классу $u, v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$, что видно из следующего соотношения между уравнениями (6) и (10):

$$\partial_z u - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) - f(z) \frac{u(z)}{\sqrt[m]{u(z)}} = m v^{m-1}(z) \left(\partial_z v - \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha} v(z) - \frac{1}{m} f(z) \right) = 0.$$

Поэтому при выполнении условий теоремы проверка принадлежности $u, v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ сводится к проверке принадлежности к этому классу функций $e^{\Omega} f$, $e^{\Omega} T(e^{-\Omega} f)$.

Лемма. Если $\alpha \geq 1$, то существует регулярное решение $\Omega(z)$ уравнения

$$\Omega_z = \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha}, \quad (11)$$

представимое в виде (7).

Прежде чем доказывать лемму, заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости вдоль линии, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции и этот выбор в дальнейшем учитываем при дифференцировании. В самом деле, имеем равенство $|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2} \bar{z}^{-\alpha/2} = e^{-\frac{\alpha}{2} \ln z} e^{-\frac{\alpha}{2} \ln \bar{z}}$. А так как логарифмы $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ и $\ln \bar{z} = \ln |z| - i \arg z$ комплексно сопряжены и $\alpha \in \mathbb{R}$, то значение функции $|z|^{-\alpha}$ остается положительным вещественным числом. Обратим внимание, что функция $\omega_n(z)$ из формулы (7) является результатом прямого интегрирования функции $r(z, \bar{z}) = |z|^{-\alpha} p_n(z)$ по переменной \bar{z} , что объясняет появление логарифма в случае четного α , т. е. присутствия в некоторых слагаемых множителя \bar{z}^{-1} .

При первом варианте доказательства леммы достаточно проверить справедливость равенства (11) для функции $\Omega(z)$, представленной формулой (7), т. е. дифференцируя по \bar{z} функцию $\Omega(z)$:

$$\Omega_{\bar{z}}(z) = ((\omega_n(z))_{\bar{z}} + (h(z))_{\bar{z}}).$$

Рассмотрим случай $\alpha/2 \notin \mathbb{Z}$; более конкретно, случай, когда $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$ ни для какого неотрицательного целого $k_2 \leq n$. Имеем

$$\begin{aligned} (\omega_n(z))_{\bar{z}} &= \left(\frac{2}{m|z|^\alpha} \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha} \right)_{\bar{z}} = \\ &= \frac{2}{m} \sum_{k_1+k_2 \leq n} a_{k_1 k_2} z^{k_1 - \frac{\alpha}{2}} \left(\frac{\bar{z}^{k_2 - \frac{\alpha}{2} + 1}}{2(k_2+1) - \alpha} \right)_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m|z|^\alpha}. \end{aligned}$$

Согласно формуле (3),

$$\begin{aligned} (h(z))_{\bar{z}} &= \left(\left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} \right) (z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} + \omega_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right)_{\bar{z}} = \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m|\zeta|^\alpha} \right)_{\bar{z}} = \frac{1}{m} \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha}, \\ \Omega_{\bar{z}}(z) &= (\omega_n(z))_{\bar{z}} + (h(z))_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m|z|^\alpha} + \frac{1}{m} \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha} = \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha}, \end{aligned}$$

т. е. имеет место равенство (11).

Аналогичным образом проверяется и второй случай, т. е. когда $\alpha/2 - 1 = k_0 \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим второй вариант доказательства леммы.

Область D содержит точку $z = 0$ и ограничена гладким контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки. Обозначим $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon(a(\zeta)|\zeta|^\alpha))(z) \equiv - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{a(\zeta) d_2\zeta}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)}, \tag{12}$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области D_ε .

Напомним, что если $f(x, y)$ – аналитическая функция переменных x и y , то можно указать формулу, которая несколько упрощает вычисление интеграла Помпейю – Векуа Tf . Сделав замену $x = 2^{-1}(z + \bar{z})$, $y = (2i)^{1-} (z - \bar{z})$ и вычислив неопределенный интеграл

$$F(z, \bar{z}) = \int f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) d\bar{z},$$

согласно формуле Бореля – Помпейю получим

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z} = F(z, \bar{z}) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$. Используя представление коэффициента

$$a(z) = p_n(z) + a_0(z), \quad \text{где } a_0(z) = o(z^n) \quad \text{при } z \rightarrow 0,$$

в вышеприведенных обозначениях

$$\left(T_\varepsilon \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \left(T_\varepsilon \frac{p_n(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) + \left(T_\varepsilon \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z).$$

Так как $p_n(z)$ – некоторый многочлен по степеням z и \bar{z} , то согласно вышеприведенной формуле

$$\left(T_\varepsilon \frac{p_n(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \left(T \frac{p_n(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \omega_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega_n(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Вынесем отдельно малую окрестность особой точки $z = 0$, иначе говоря, представим область $\bar{D} = D \cup \Gamma = D_\varepsilon \cup \Gamma + \{|z| \leq \varepsilon\}$, где $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$. Согласно этому разбиению

$$\left(T_\varepsilon \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T(a_0(\zeta)|\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta,$$

или, что равносильно,

$$\begin{aligned} \left(T_\varepsilon \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) &= \omega_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{T(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta, \quad |z| > \varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Убедимся, что семейство функций $\Omega_\varepsilon(z) = (T_\varepsilon(a(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}))(z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно сходится к функции $\Omega(z) = (T(a(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}))(z)$ и, в частности, справедливо равенство (11) при $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$. В самом деле, используя неравенство Гёльдера, можно показать, что последний интеграл в правой части (13) по модулю не превосходит $CL_p(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}) \varepsilon^\delta$, где $C = C(d)$ – постоянная, d – диаметр области, $\delta = 1 - p^{-1}$, так что соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате приходим к равенству

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(T_\varepsilon \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) \equiv \left(T \frac{a(\zeta)}{|\zeta|^\alpha} \right) (z) = \omega_n(z) - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{T(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

С учетом наличия множителя $1/m$ в формуле (11), при исходном обозначении функции $\Omega(z)$ получим

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \left(T \frac{a(\zeta)}{m |\zeta|^\alpha} \right) (z) = \frac{1}{m} \omega_n(z) - \frac{1}{m\pi} \int_D \frac{a_0(\zeta)}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2\zeta + \\ &+ \frac{1}{2m\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2m\pi i} \int_\Gamma \frac{T(a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha})}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Контурные интегралы по границе Γ в последней формуле можно объединить в один контурный интеграл, и тогда функция $h(z)$ выражается формулой

$$h(z) \equiv \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m |\zeta|^\alpha} \right) (z) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(T \frac{a_0(\zeta)}{m |\zeta|^\alpha} + \frac{1}{m} \omega_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что $h(t) \equiv (T(m^{-1} a_0(\zeta) |\zeta|^{-\alpha}))(t)$ при $t \in \Gamma$, где $a_0(t) |t|^{-\alpha} \in H(\Gamma)$, в частности, $h(t) \in C^\mu(\Gamma)$.

В результате для представления функции $\Omega(z)$ получим

$$\Omega(z) = \frac{1}{m} \omega_n(z) + h(z).$$

Заметим, что контурный интеграл в представлении функции $h(z)$ представляет собой аналитическую функцию от комплексного переменного z , производная которой по \bar{z} равна нулю, так что

$$\left(\frac{1}{m} \omega_n(z) \right)_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m |z|^\alpha}$$

и согласно формуле (3)

$$\Omega_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{m} (\omega_n(z))_{\bar{z}} + (h(z))_{\bar{z}} = \frac{p_n(z)}{m |z|^\alpha} + \frac{1}{m} \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha} = \frac{1}{m} \frac{a(z)}{|z|^\alpha}.$$

Аналогичным образом рассматривается случай $\alpha/2 - 1 = k_0 \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы.

Итак, на основе приведенной выше леммы и формулы (7), в предположении $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$ общее решение (10) в классе $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(D_0)$ согласно формуле (5) дается формулой

$$v = e^{\Omega} \left[\phi + \frac{1}{m} T(e^{-\Omega} f) \right],$$

где $\phi \in C_{\text{loc}}^\mu(D_0)$ – произвольная аналитическая в области $D_0 = D \setminus \{0\}$ функция. Пользуясь формулой (9) и последующими замечаниями, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. Теорема доказана.

Полученное интегральное представление решений рассматриваемого уравнения позволяет решать краевые задачи: типа Дирихле, Римана – Гильберта и др.

Список литературы

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука; 1988. 512 с.
2. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе; 1963. 183 с.
3. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши – Римана с сингулярной точкой. Душанбе; 1993. 244 с.
4. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями, ч. 2. Душанбе: Изд-во ТГУ; 1981. 170 с.
5. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solution of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity. *Journal of Differential Equations*. 2004;196(1):67–90.
6. Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008;53(12):1111–1130.
7. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(5):637–650.
8. Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б. Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы: Наука; 2005. 169 с.
9. Расулов А.Б. Интегральные представления для одной системы второго порядка со сверхсингулярной точкой. *Дифференциальные уравнения*. 2004;40(8):1133–1138.
10. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир; 1966. 352 с.

References

1. Vekua IN. Generalized Analytic Functions. London etc.: Pergamon Press; 1962. 668 p.
2. Mikhailov LG. Novye klassy singulyarnykh integralnykh uravnenii i ikh primeneniye k differentsialnym uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami [New classes of singular integral equations and their applications to differential equations with singular coefficients]. Dushanbe; 1963. 183 p.
3. Usmanov ZD. Obobshchennyye sistemy Koshi–Rimana s singulyarnoi tochkoj [Generalized Cauchy–Riemann systems with a singular point]. Dushanbe; 1993. 244 p.
4. Radzhabov NR. Integralnye predstavleniya i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsialnykh uravnenii s singulyarnoi liniyey ili singulyarnymi poverkhnostyami, Chast 2 [Integral representations and boundary value problems for some differential equations with a singular line or singular surfaces, Part 2]. Dushanbe: Tajik State Univ. Press; 1981. 170 p.
5. Begehr H., Dai D-Q. On continuous solution of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity. *Journal of Differential Equations*. 2004;196(1):67–90.
6. Meziani A. Representation of solutions of a singular CR equation in the plane. *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2008;53(12):1111–1130.
7. Rasulov AB., Soldatov AP. Boundary value problem for a generalized Cauchy – Riemann equation with singular coefficients. *Differential Equations*. 2016;52(5):619–629.
8. Abdymonapov SA., Tungatarov AB. Nekotorye klassy ellipticheskikh sistem na ploskosti s singulyarnymi koeffitsientami [Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients]. Almaty: Nauka; 2005. 169 p.
9. Rasulov AB. Integral representations for a second-order system with a supersingular point. *Differential Equations*. 2004;40(8):1200–1204.
10. Bers L., John F., Schechter M. Partial Differential Equations. New York etc.: Interscience; 1964. XIV + 343 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 06.03.2026

Received March 6, 2026

Поступила после рецензирования 29.04.2026

Revised April 29, 2026

Принята к публикации 04.05.2026

Accepted May 4, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Якивчик Наталья Витальевна – старший преподаватель кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт», г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Natalia V. Yakivchik – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.218
MSC 60G50
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-183-194
EDN DXVMBI

Модель случайного блуждания с сильной памятью

Зенюк Д. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Вирченко Ю. П.)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4

eldrich@yandex.ru


Аннотация. В статье рассматривается случайное блуждание, в котором стандартный диффузионный механизм конкурирует со случайным возвратом к предыдущим значениям. Предложен полуаналитический подход к отысканию характеристических функций введенного процесса. Для случая равномерного распределения сдвигов во времени получены точные выражения для моментов первых двух порядков, а также установлено предельное распределение процесса. Для усеченного геометрического распределения найдены асимптотические оценки моментов. Для еще двух рассмотренных распределений, где получение даже таких асимптотических оценок затруднено, приведены результаты вычислительного эксперимента. На примере биномиального распределения показано, что медленно убывающие распределения сдвигов не обязательно приводят к формированию степенной асимптотики дисперсии, которая характерна для аномальной диффузии.

Ключевые слова: случайные блуждания, немарковские процессы

Для цитирования: Зенюк Д.А. Модель случайного блуждания с сильной памятью. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):183–194. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-183-194 EDN DXVMBI

Original Research

A Random Walk with Strong Memory

Dmitry A. Zenyuk 

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia

eldrich@yandex.ru

Abstract. In this paper we study a particular random walk model where the walker can randomly revert to its previous positions. We propose a general semi-analytical approach to the calculation of the characteristic functions of the process. It is shown that under the uniform distribution of lags equations for the moments of the first two orders can be solved explicitly and the process itself has the limiting standard normal distribution after normalization. If the lags have exponential distribution with a small base, only some asymptotical estimations are available for the moments. Under other studied lag distributions, which do not allow even for such simple asymptotical analysis, direct numerical simulations have been performed. The study shows that the lag distribution with heavy tails and divergent expectation does not necessarily imply that the dispersion has power-law asymptotics, which is typical of anomalous diffusion.

Keywords: Random Walks, Non-markovian Processes

For citation: Zenyuk DA. A Random Walk with Strong Memory. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):183–194. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-183-194 EDN DXVMBI

1. Введение. Известно несколько классов стохастических немарковских процессов, которые характеризуются сильной зависимостью от всей предыстории. Например, к ним относятся случайные блуждания без самопересечений. В простейшем случае это случайное блуждание на двумерной решетке, в котором запрещено занимать положения, которые ранее уже посещались. Здесь зависимость от предыстории процесса является неявной и связана с сокращением допустимых будущих состояний после каждого шага. Несмотря на достаточно простую формулировку, полное описание вероятностных и комбинаторных свойств этих процессов остается все еще нерешенной задачей. Хорошо разработана теория процессов с дальними зависимостями (*long-range dependencies*, LRD), см. [1, 2]. Изначально характеристическое свойство, выделяющее этот класс, было связано с асимптотическим поведением дисперсии или поведением спектральной плотности в окрестности нуля. Позже эти подходы были обобщены на случай процессов, у

которых вторые моменты расходятся. Но даже в современной трактовке LRD-процессы должны быть стационарными, хотя бы в широком смысле, что ограничивает область применимости этой теории.

Более важный с точки зрения дальнейшего изложения пример стохастического процесса с памятью известен под названием «слоновье» случайного блуждания (*elephant random walk*, ERW). Модель была предложена в [3] и на сегодняшний день изучена достаточно подробно, см. [4] и цитированную там литературу. ERW стала первой моделью, допускающей аналитическое решение, на которой удалось наглядно продемонстрировать переход к аномальной диффузии. Аномальные диффузионные режимы в последние десятилетия привлекают большой интерес, поскольку считаются более адекватными для описания многих физико-химических процессов и позволяют более точно воспроизводить экспериментальные данные, см., например, обзор [5].

ERW конструируется следующим образом:

$$X_{n+1} = X_n + \eta_{n+1}, \quad X_0 = 0. \quad (1)$$

На первом шаге приращение принимает значения ± 1 , причем $\mathbb{P}(\eta_0 = 1) = s$. На каждом последующем шаге реализуется действие одного из двух стохастических механизмов: либо с вероятностью $1-p$ разыгрывается обычное случайное блуждание, когда значение может измениться на единицу с равными вероятностями, либо с вероятностью p наудачу выбирается и повторяется одно из предыдущих приращений. Поэтому для приращений процесса справедливо представление

$$\eta_{n+1} = \epsilon_{n+1}\xi_{n+1} + (1 - \epsilon_{n+1})\eta_{U_{n+1}},$$

где ϵ_n — бинарная случайная величина с $\mathbb{P}(\epsilon_n = 0) = p$, ξ_n — случайная величина с симметричным распределением Радемахера, т. е. $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1/2$, а U_{n+1} — дискретная случайная величина с равномерным распределением на $\{1, \dots, n\}$. Последовательности случайных величин $\{\epsilon_n\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{U_n\}$ независимы в совокупности, а также независимы друг от друга. Заметим, что оригинальная модель ERW выглядела несколько иначе, но в [6] было продемонстрировано, что указанная выше конструкция ей стохастически эквивалентна. Дисперсия X_n имеет вид

$$D[X_n] = \frac{n}{2p-1} \left[\frac{\Gamma(n+2p)}{\Gamma(2p)\Gamma(n+1)} - 1 \right] - \left[\frac{(2s-1)\Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n)} \right]^2.$$

Значение $p = 1/2$ является критическим: если $p < 1/2$, то дисперсия растет асимптотически линейно, так же, как и для обычного случайного блуждания, но для $p > 1/2$ при больших n выполняется $D[X_n] \sim n^{2p}$, что характерно для супердиффузионных режимов. В [7] эта модель была расширена за счет возможности с некоторой вероятностью сохранить текущую позицию на каждом шаге, что позволило получить и субдиффузионный режим, когда $D[X_n] \sim n^\gamma$ с $\gamma < 1$.

В [8], среди прочего, был рассмотрен стохастический процесс, для которого случайно выбранные прошлые значения явным образом определяют его значения на каждом шаге:

$$X_{n+1} = X_n + X_{U_n}, \quad X_0 = 1,$$

где U_n имеет равномерное распределение на $\{0, \dots, n\}$. Затем в [9] были получены точные выражения для первых двух начальных моментов этого процесса, а также продемонстрировано, что эти моменты имеют логарифмическую асимптотику. Однако сразу после публикации этих двух исследований в 1969 г. модель была забыта почти на полвека. Лишь в начале 2000-х гг. появилась серия работ, где изучались другие свойства этого процесса и обсуждались некоторые другие модели, построенные по тому же принципу — их реферативный обзор можно найти в [10].

Если использовать терминологию обучения с подкреплением, то значения случайного блуждания можно считать состояниями (*states*), а приращения — решениями (*actions*). С этой точки зрения ERW описывает поведение актора, который может случайным образом повторять ранее принятые решения. Но возможен и другой подход, когда память ассоциирована не с решениями, а с внутренними состояниями актора, подобно тому как это было сделано в [8]. Можно предложить разные прикладные задачи, в которых тот или иной механизм является более адекватным исходя из специфики предметной области. Так, при моделировании социокультурных процессов (например, динамики и поляризации мнений в сообществах) память о решениях кажется более подходящей, поскольку изменение мнения важно для нас человека с большей вероятностью приведет к изменению нашей собственной позиции. А при работе с моделями популяционной динамики и демографии, напротив, подход с припоминанием состояний представляется более удачным.

Настоящая работа посвящена изучению модели, максимально приближенной к ERW, но использующей второй механизм памяти — с припоминанием прошлых состояний. Понятно, что между двумя такими моделями есть существенные математические отличия: распределения приращений ERW-процесса всегда имеют одинаковый носитель, а для процесса с припоминанием состояний приращения формально

ограничены лишь предшествующими экстремальными значениями самого процесса, поэтому его поведение должно быть менее регулярным, чем ERW. Помимо упомянутых выше, необходимо отметить еще несколько работ, где возникали конструкции, тесно связанные с концепцией припоминания состояний. Так, в [11] рассматривались процессы, названные случайно-возвратными (*occasionally reverting processes*). Исследованная там модель очень похожа на ту, что будет рассмотрена здесь, и некоторые их результаты будут непосредственно нами использованы. Однако там рассматривалось только равномерное распределение величин U_n , определяющих действие механизма памяти. Еще один дискретный стохастический процесс, порождаемый конкуренцией диффузии и случайного припоминания, был рассмотрен в [12] — там он возникает в результате дискретизации одного уравнения с производными нецелого порядка.

2. Модель и ее общие свойства. Будем рассматривать следующий случайный процесс с дискретным временем:

$$X_{n+1} = \epsilon_{n+1} (X_n + \xi_{n+1}) + (1 - \epsilon_{n+1}) X_{U_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Здесь ϵ_n — независимые в совокупности случайные величины с распределением Бернулли, такие что $\mathbb{P}(\epsilon_n = 1) = p$, ξ_n — независимые в совокупности дискретные случайные величины с конечными математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 , а U_n — независимые в совокупности дискретные случайные величины с носителем $\{0, 1, \dots, n\}$. Все три порождающие последовательности также независимы друг от друга. Начальное значение считается заданной дискретной случайной величиной X_0 , возможно вырожденной, которая независима от $\{\epsilon_n\}$, $\{\xi_n\}$ и $\{U_n\}$. Не ограничивая общности рассмотрения, будем всюду далее считать $X_0 = 0$. Распределения ξ_n и U_n являются свободными параметрами.

Случайный процесс (2) формируется конкуренцией двух базовых механизмов: диффузионного и эредитарного. Диффузия здесь принимает вид обычного случайного блуждания с шагами ξ_n . Механизм памяти реализован как явное возвращение к одному из ранее принимавшихся значений. Параметр p определяет удельную значимость диффузионного механизма. На каждом шаге процесса реализуется действие лишь одного из этих механизмов. В этом заключается основное отличие от модели из [11] — там рассматривался процесс, который в принятых нами обозначениях имеет вид $V_n = \epsilon_n n + (1 - \epsilon_n) U_n$, $X_{n+1} = X_{V_n} + \xi_{n+1}$. Другими словами, диффузионное смещение там прибавляется всегда, даже если действует эредитарный механизм.

Мы будем рассматривать лишь некоторое подмножество всех возможных распределений лагов, которое можно задать в виде

$$\mathbb{P}(U_n = s) = \frac{u_s}{w_n}, \quad w_n = \sum_{s=0}^n u_s, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Это достаточно большое семейство включает в себя многие известные распределения. Например, при $u_s = 1$ лаги U_n будут иметь равномерные распределения. Легко убедиться, однако, что не всякое распределение может быть представлено в таком виде. К примеру, пусть разрешено возвращаться лишь к двум предыдущим значениям с равными вероятностями, так что

$$\mathbb{P}(U_n = s) = \frac{\delta_{s,n} + \delta_{s,n-1}}{2}, \quad n \geq 1.$$

Понятно, что такое распределение не может быть порождено единственной последовательностью u_s — мы не можем «расцепить» здесь связь между s и n , возникающую из-за того, что носитель U_n постоянно увеличивается.

Между моментами возврата к прошлым значениям процесс (2) представляет собой простое случайное блуждание. Если бы возврат осуществлялся к какому-то фиксированному значению (например, к нулю), то X_n представлял бы собой пример процесса восстановления, свойства которого хорошо изучены. Более того, если бы даже возврат выполнялся к какому-нибудь случайному значению, независимому от предыстории самого процесса, то эта конструкция все равно была бы процессом восстановления. Именно возврат к случайно выбранному из когда-либо ранее принимавшихся значению отличает этот случайный процесс от других стохастических моделей.

Введем некоторые вспомогательные величины. Пусть

$$L_n = \max \left\{ k : \sum_{s=1}^k (1 - \epsilon_s) = n - 1 \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Другими словами, L_n равен последнему индексу n -й «диффузионной серии» — непрерывной последовательности диффузионных шагов. Или, что то же самое, индексу непосредственно перед n -м припоминанием. Легко видеть, что L_n является суммой независимых в совокупности случайных величин Y_k с геометрическим распределением, причем Y_k имеет смысл длительности k -й диффузионной серии. Мы будем считать, что диффузионная серия всегда начинается с момента возврата ($\epsilon_n = 0$), так что $Y_k \geq 1$. Сам

L_n как сумма независимых случайных величин с геометрическим распределением имеет отрицательное биномиальное распределение. Для примера на рис. 1 показана одна выборочная траектория процесса, когда диффузионные смещения имеют симметричное распределение Радемахера. Здесь $U_4 = 2$ и $U_9 = 6$, $Y_1 = 3$ (начальное значение не принадлежит первой диффузионной серии) и $Y_2 = 5$.

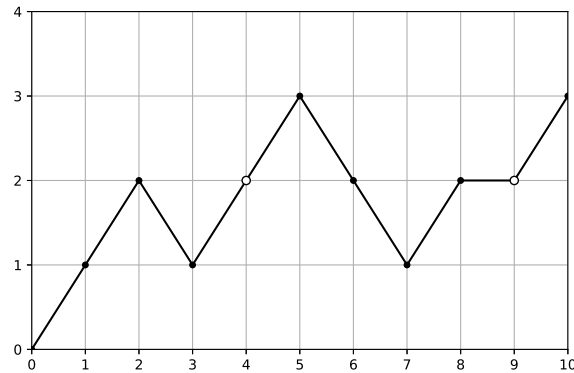


Рис. 1. Пример выборочной траектории процесса (2). Точки, в которых действует механизм памяти, показаны как выколотые

Fig. 1. Sample trajectory of the process (2). Points where reversions occur are depicted as punctured

Следуя [11], можно показать, что процесс стохастически эквивалентен (в широком смысле, т. е. совпадают все конечномерные функции распределения) случайной сумме слагаемых типа ξ_n . Продолжим рассмотрение примера с рис. 1. На первом шаге $X_1 = X_0 + \xi_1$, затем $X_2 = X_0 + \xi_1 + \xi_2$, аналогично для X_3 . Когда в первый раз действует механизм памяти ($n = 4$), процесс возвращается к своему прошлому значению при $n = 2$, которое равно $X_0 + \xi_1 + \xi_2$. На следующем шаге получим $X_5 = X_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_5$. Понятно, что продолжая далее, мы всегда будем получать сумму X_0 и некоторых ξ_n . Таким образом, справедливо представление

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{T_n} \xi_k^* \quad (3)$$

где $\{\xi_k^*\}$ — вспомогательная последовательность независимых в совокупности случайных величин, имеющих то же самое распределение, что и ξ_n . При $T_n = 0$ будем считать, что сумма в правой части обращается в ноль. Важно, что ξ_k^* и T_n не зависят друг от друга при любых n и k . Управляющий процесс T_n может быть записан в виде

$$T_n = \epsilon_n(1 + T_{n-1}) + (1 - \epsilon_n)T_{U_n}, \quad T_0 = 0 \quad (4)$$

и принимает значения в диапазоне $\{0, \dots, n\}$. Фактически T_n сам является процессом типа (2) с вырожденными диффузионными смещениями. Отметим также, что введенный здесь процесс T_n отличается от использованного в п. 3.2 [11] лишь сдвигом индекса на единицу.

3. Распределения и характеристические функции.

Положим $\mathbb{P}(X_n = k) = P_{k,n}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда уравнение, описывающее эволюцию распределений процесса, принимает вид

$$P_{k,n+1} = p \sum_r v_r P_{k-r,n} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s P_{k,s}. \quad (5)$$

Здесь $v_r = \mathbb{P}(\xi_{n+1} = r)$ задают распределение диффузионного смещения ξ_{n+1} . Само уравнение следует из теоремы о полной вероятности. Действительно, попасть в k за счет диффузии можно, если на предыдущем шаге процесс находился в $k - r$ и был реализован шаг, в точности равный r . Либо попасть в k можно за счет механизма памяти, если на s -м шаге процесс также находился в том состоянии и был реализован сдвиг, в точности равный s . Поскольку все упомянутые события являются несовместными, выражение в правой части (5) является суммой с соответствующими коэффициентами.

Легко можно убедиться, что уравнение (5) сохраняет нормировочное условие: при любом n сумма $P_{k,n}$ по k всегда равна единице. Уравнение сохраняет также и симметрию: если распределения начального значения X_0 симметричны относительно k' , а распределение диффузионных шагов симметрично относительно нуля, т. е.

$$P_{k'+m,0} = P_{k'-m,0}, \quad v_m = v_{-m} \quad \forall m \neq 0,$$

то $P_{k,n}$ также остается симметричным относительно k' при любом $n > 0$ независимо от распределения U_n . Доказательство проводится индукцией по n . Пусть уже известно, что при $n = 0, 1, \dots, n'$ распределение

симметрично, тогда для произвольного m

$$P_{k'+m,n'+1} = p \left\{ \sum_{r=1}^{+\infty} v_{-r} P_{k'+m+r,n'} + v_0 P_{k'+m,n'} + \sum_{r=1}^{+\infty} v_r P_{k'+m-r,n'} \right\} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^{n'} u_s P_{k'+m,s} =$$

$$= p \left\{ \sum_{r=1}^{+\infty} v_r P_{k'-(m+r),n'} + v_0 P_{k'-m,n'} + \sum_{r=1}^{+\infty} v_{-r} P_{k'-(m-r),n'} \right\} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^{n'} u_s P_{k'-m,s} = P_{k'-m,n'+1}.$$

Соотношение (5) представляет собой уравнение в частных разностях, но зависимость от одного из дискретных аргументов можно устранить, переходя от распределений к характеристическим функциям. Фактически такой переход означает выполнение преобразования Фурье – Стилтеса:

$$\phi_{n+1}(\omega) = \mathbb{E}[e^{i\omega X_{n+1}}] = \sum_k P_{k,n+1} e^{i\omega k} = p \sum_k \sum_r v_r P_{k-r,n} e^{i\omega k} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \phi_s(\omega) =$$

$$= p \sum_r v_r e^{i\omega r} \sum_k P_{k-r,n} e^{i\omega(k-r)} + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \phi_s(\omega) = p\psi(\omega)\phi_n(\omega) + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \phi_s(\omega).$$

Здесь $\psi(\omega)$ – характеристическая функция ξ_{n+1} . Для удобства нотации далее будем опускать зависимость от ω . Введем также обозначение $x = p\psi$. Если распределения ξ_{n+1} симметричны относительно нуля, то ψ является вещественнозначной четной функцией – всюду далее мы будем предполагать выполнение этого требования.

Уравнение для характеристических функций можно переписать без суммирования, как обычное разностное уравнение второго порядка. Действительно, если в

$$(\phi_{n+1} - x\phi_n)w_n = q \sum_{s=0}^n u_s \phi_s$$

увеличить индекс n на единицу, получим

$$(\phi_{n+2} - x\phi_{n+1})w_{n+1} = q \sum_{s=0}^{n+1} u_s \phi_s = q \sum_{s=0}^n u_s \phi_s + qu_{n+1}\phi_{n+1} = (\phi_{n+1} - x\phi_n)w_n + qu_{n+1}\phi_{n+1}.$$

Выполнив несложные преобразования, окончательно приходим к

$$\phi_{n+2} - \left(x + q + p \frac{w_n}{w_{n+1}}\right)\phi_{n+1} + x \frac{w_n}{w_{n+1}}\phi_n = 0. \tag{6}$$

Здесь мы воспользовались очевидным равенством $w_{n+1} = w_n + u_{n+1}$. Видно, что вся зависимость от распределения диффузионного смещения реализуется через параметр x , поэтому некоторые общие утверждения можно сделать, не выбирая какое-нибудь определенное распределение смещений. Но, разумеется, чтобы восстановить по характеристической функции само распределение, зависимость x от ω нужно будет некоторым образом конкретизировать. В простейшем случае, для симметричного распределения Радемахера, $x = p \cos \omega$.

Уравнение (6) является функционально-разностным и линейным по ϕ_n . Легко показать, что если $\phi_0(x) = 1$ (это соответствует $X_0 = 0$), то ϕ_n являются приведенными полиномами n -й степени по x . Рекуррентная зависимость (6) похожа на ту, что вводится для последовательности Шеффера (см. гл. 2 в [13]) – разница заключается в последнем слагаемом, где появляется умножение на x . Тем не менее не удалось найти работ, где такие полиномиальные последовательности уже были бы исследованы.

Зная, что решения являются приведенными полиномами n -й степени, мы можем редуцировать зависимость от x , перейдя к системе связанных разностных уравнений для коэффициентов этих полиномов. Положим

$$\phi_n(x) = A_{n,0}x^n + A_{n,1}x^{n-1} + \dots + A_{n,n-1}x + A_{n,n} = \sum_{k=0}^n A_{n,k}x^{n-k},$$

$A_{n,0} \equiv 1$ и будем считать $A_{n,k} = 0$, если $k > n$. Тогда после подстановки в (6), приравнявая выражения при одинаковых степенях, получим, что неопределенные коэффициенты подчиняются системе уравнений

$$A_{n+2,k} = (q + p\alpha_n)A_{n+1,k-1} + A_{n+1,k} - \alpha_n A_{n,k-1}, \quad \alpha_n = \frac{w_n}{w_{n+1}}, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n+2.$$

Введем также обозначение $f_{n,k} = (q + p\alpha_n)A_{n+1,k} - \alpha_n A_{n,k}$. Для коэффициентов при второй старшей степени получим

$$A_{n+2,1} - A_{n+1,1} = f_{n,0} \iff A_{n,1} - A_{1,1} = \sum_{s=0}^{n-2} f_{s,0} = q \sum_{s=0}^{n-2} (1 - \alpha_s).$$

Коэффициент $A_{1,1}$ равен q , т. к. $\phi_1(x) = x + q$ — это легко установить напрямую. Теперь, зная $A_{n,1}$, мы можем определить $f_{n,1}$, а значит, найти $A_{n,2}$ и т. д. Уравнение для свободного члена $A_{n,n}$ и его общее решение выглядят несколько иначе:

$$A_{n+2,n+2} = (q + p\alpha_n)A_{n+1,n+1} \iff A_{n,n} = q \prod_{s=0}^{n-2} (q + p\alpha_s), \quad n \geq 2.$$

Формально, зная характеристическую функцию, мы можем вычислить все остальные представляющие интерес величины. Пусть диффузионные смещения имеют асимметричное распределение Радемахера, т. е. $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = r$, $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - r$, где $0 < r < 1$. В этом случае $\psi = re^{i\omega} + (1-r)e^{-i\omega}$. Тогда справедливо

$$\phi_n = \sum_{k=0}^n A_{n,n-k} p^k (re^{i\omega} + (1-r)e^{-i\omega})^k = \sum_{k=0}^n A_{n,n-k} p^k \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} r^s (1-r)^{k-s} e^{i\omega(2s-k)}, \quad (7)$$

что позволяет вычислить вероятности $P_{k,n}$ — они будут коэффициентами при $e^{i\omega k}$ в итоговом выражении для ϕ_n . К примеру,

$$P_{0,n} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,n-2m} p^{2m} \binom{2m}{m} r^m (1-r)^m,$$

суммирование выполняется по четным индексам, поскольку во внутренней сумме в (7) при нечетных k нет членов, пропорциональных единице.

4. Уравнения для начальных моментов первого и второго порядков. Моменты X_n могут быть найдены с помощью дифференцирования характеристической функции, однако уже даже для второго порядка это приводит к достаточно громоздким и утомительным вычислениям. Поэтому для их исследования удобнее работать непосредственно с рекуррентными соотношениями. В первую очередь заметим, что моменты процесса X_n можно выразить через моменты управляющего процесса T_n . Введем обозначения $\theta_n = \mathbb{E}[T_n]$ и $\Delta_n = \mathbb{E}[T_n^2]$. Тогда из представления (3) и известных тождеств Вальда и Гиршика следует

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] + \mu\theta_n, \quad \mathbb{D}[X_n] = \mathbb{D}[X_0] + \sigma^2\theta_n + \mu^2\Delta_n.$$

Уравнение для θ_n принимает вид

$$\theta_{n+1} = p(1 + \theta_n) + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \theta_s. \quad (8)$$

При выводе его мы сначала взяли условное ожидание относительно ϵ_n , а потом относительно U_n и воспользовались тем, что все порождающие процесс случайные величины независимы друг от друга. Так же как и в уравнениях для распределений и характеристических функций, здесь можно избавиться от суммирования в правой части, используя тот же самый прием, что приводит к

$$\theta_{n+2} - \beta_n \theta_{n+1} + p\alpha_n = p\gamma_{n+1}, \quad \beta_n = 1 + p\alpha_n, \quad \gamma_n = \frac{u_n}{w_n}. \quad (9)$$

Возводя определение (4) в квадрат, формально получим

$$T_{n+1}^2 = \epsilon_{n+1}^2 [1 + T_n]^2 + (1 - \epsilon_{n+1})^2 T_{U_n}^2 + 2\epsilon_n(1 - \epsilon_n)(1 + T_n)T_{U_n}.$$

Легко проверить, что $\mathbb{E}[\epsilon_n^2] = p$ и $\mathbb{E}[\epsilon_n(1 - \epsilon_n)] = 0$ при любых n . Тогда, пользуясь тем же самым приемом с условным математическим ожиданием и учитывая независимость порождающих процесс случайных величин друг от друга, приходим к

$$\Delta_{n+1} = p(1 + 2\theta_n + \Delta_n) + \frac{q}{w_n} \sum_{s=0}^n u_s \Delta_s. \quad (10)$$

Укажем и второе уравнение для Δ_n , не содержащее суммы в правой части:

$$\Delta_{n+2} - \beta_n \Delta_{n+1} + p\alpha_n = p\gamma_n + 2p(\theta_{n+1} - \alpha_n \theta_n). \quad (11)$$

Уравнения в разностной форме удобнее для вычислений, поскольку не нужно хранить все предыдущие значения, а форма с суммированием, как будет показано далее, в некоторых случаях удобнее для поиска аналитических решений.

5. Результаты для равномерного распределения сдвигов. Простейшим случаем является равномерное распределение U_n , порожденное последовательностью $u_s = 1$. Здесь $w_n = n + 1$, $\alpha_n = 1 - 1/(n + 2)$, и

$$A_{n,1} = q + q \sum_{s=0}^{n-2} \frac{1}{s+2} = qH_n, \quad A_{n,n} = q \prod_{s=0}^{n-2} \left(1 - \frac{p}{s+2}\right) = \frac{(1-p)(2-p)\dots(n-p)}{n!},$$

где H_n — гармонические числа. Получить выражения для других коэффициентов в замкнутом виде, который мог бы быть полезен для дальнейшего анализа, не удалось.

Для моментов управляющего процесса T_n будем отталкиваться от уравнения с суммированием (8) и введем производящую функцию $M(t) = \sum \theta_n t^n$. Эту функцию нужно трактовать как формальный степенной ряд, т. е. вопросы его сходимости нас интересовать не будут. Вводные замечания о формальных степенных рядах см., например, в [14]. Умножим обе части уравнения на t^n и суммируем по n . Все возникающие при этом ряды могут быть выражены через функцию M и ее производные, например,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\theta_n t^n = \theta_0 + 2\theta_1 t + 3\theta_2 t^2 + \dots = M + tM' = (tM)'$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменному t . Для слагаемого, отвечающего за эридитарный механизм, группируя в другом порядке, получим

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sum_{s=0}^n \theta_s = \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n \sum_{s=n}^{+\infty} t^s = \frac{1}{1-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n t^n = \frac{M}{1-t}.$$

Таким образом, производящая функция M должна удовлетворять неоднородному линейному дифференциальному уравнению первого порядка

$$M' = p \left[t \left(M + \frac{1}{1-t} \right) \right]' + \frac{q}{1-t} M$$

с начальным условием $M(0) = \theta_0 = 0$. Его решение имеет вид

$$M(t) = \frac{A}{1-t} \ln F(t), \quad A = \frac{p}{q}, \quad F(t) = \frac{1-pt}{1-t}.$$

Заметим теперь, что производящая функция $\ln F$ соответствует последовательности $(1-p^n)/n$ — чтобы убедиться в этом, достаточно представить ее как разность логарифмов, каждый из которых затем разложить по степеням t . Умножение производящей функции на $(1-t)^{-1}$ соответствует суммированию исходной последовательности. Окончательно, математические ожидания T_n имеют вид

$$\theta_n = A \sum_{k=1}^n v_k = A \left(H_n - \sum_{k=1}^n \frac{p^k}{k} \right), \quad v_k = \frac{1-p^k}{k}. \quad (12)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, замкнутое выражение для конечной суммы в правой части неизвестно. Но легко видеть, что она представляет собой частичную сумму разложения Маклорена для $\ln(1-x)$ в точке p . Отсюда следует, что при больших n математическое ожидание ведет себя как $A \ln n$.

Перейдем теперь к моментам второго порядка. Работать снова будем с производящей функцией $D(t) = \sum \Delta_n t^n$. Из (10), с использованием тех же приемов, что и при выводе уравнения для производящей функции ожиданий, следует дифференциальное уравнение

$$(1-pt)D' - \left(p + \frac{q}{1-t} \right) D = 2p(tM)' + \frac{p}{(1-t)^2},$$

где M — уже известная нам функция. Начальное условие имеет вид $D(0) = \Delta_0 = 0$. После несложных, но весьма утомительных преобразований, общее решение принимает вид

$$D(t) = \frac{1}{1-t} \left[A^2 \ln^2 F(t) + A(1+2A) \ln F(t) - \frac{2pAt}{1-pt} \right].$$

Производящая функция $\ln F$ нам уже встречалась при анализе математического ожидания. Основную трудность представляет первое слагаемое, $\ln^2 F$. Используем тот факт, что произведению производящих функций соответствует свертка исходных последовательностей. Тогда выражение для D можно представить в виде формального степенного ряда

$$A^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} v_k v_{n-k} t^n + A(1+2A) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n t^n - 2pA \sum_{n=1}^{+\infty} p^n t^n.$$

Теперь необходимо снова использовать тот факт, что множитель $(1 - t)^{-1}$ соответствует суммированию, так что окончательно для вторых моментов получим весьма громоздкое выражение

$$\Delta_n = \sum_{s=1}^n \left[A(1 + 2A)v_s - 2Ap^{s+1} + A^2 \sum_{k=1}^{s-1} v_k v_{s-k} \right].$$

Получить удобное представление для суммы сверток в правой части здесь не так легко. Но асимптотическое поведение последовательности можно исследовать напрямую, используя только производящую функцию. Соответствующий инструментарий подробно описан в [14]. Заметим, что доминирующая особенность в нашем случае находится в точке $t = 1$ (поскольку $t = 1/p > 1$ в представляющих интерес случаях). Из таб. VI.5 в [14] следует, что ведущий асимптотический член для Δ_n имеет вид $A^2 \ln^2 n$.

В [11] с помощью предельной теоремы Добрушина для неоднородных марковских цепей было строго доказано, что их версия управляющего процесса подчиняется центральной предельной теореме. Поэтому и рассмотренный здесь процесс T_n , который отличается лишь индексацией, также ей удовлетворяет. Это позволяет воспользоваться предельной теоремой Роббинса [15], из которой следует, что $(X_n - E[X_n])/\sqrt{D[X_n]}$ сходится по распределению к стандартному нормальному закону. Заметим также, что [11] использует другой инструмент — предельную теорему Энскомба — чтобы прийти к тому же результату для изученного ими процесса.

Выполнение центральной предельной теоремы хорошо видно и в численном эксперименте: зная выражения для характеристической функции, полученные с помощью описанной в предыдущем разделе техники, мы легко можем сравнить их с характеристической функцией стандартного нормального закона. Результаты для нескольких p и диффузионных смещений с симметричным распределением Радемахера (для которого $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$) показаны на рис. 2. Поскольку характеристические функции в этом случае также симметричны, показана только правая часть графика. Дать теоретическую оценку скорости сходимости затруднительно, однако в экспериментах она была тем медленнее, чем меньше p . Локальная предельная теорема, которая позволила бы приближенно выразить вероятности $P_{n,k}$ через функцию плотности стандартного нормального закона, здесь не выполняется — это вполне естественно, поскольку даже для неслучайных сумм теоремы такого рода требуют соблюдения более тонких условий.

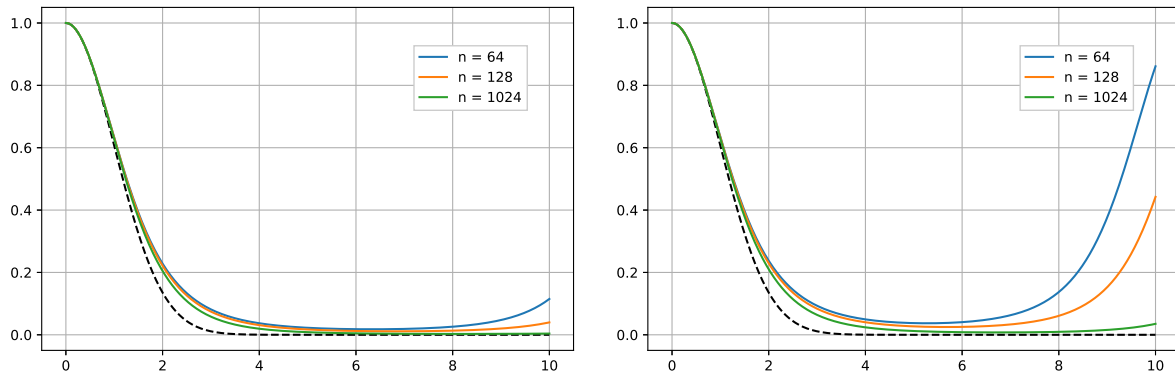


Рис. 2. Характеристические функции $X_n/\sqrt{\Delta_n}$ для случая равномерного распределения U_n и симметричного распределения Радемахера при нескольких n , $p = 0.5$ (слева) и $p = 0.4$ (справа). Характеристическая функция стандартного нормального закона показана пунктиром

Fig. 2. Characteristic functions of $X_n/\sqrt{\Delta_n}$ under the uniform distribution of U_n and symmetrical Rademacher distribution for several n values, $p = 0.5$ (left) and $p = 0.4$ (right). Characteristic function of the standard normal law is depicted as a dash line

6. Результаты для показательного распределения сдвигов. Пусть теперь $u_s = r^s$, $r > 0$ и $r \neq 1$. Формально такая последовательность дает два качественно отличных распределения: при $r < 1$ более вероятным является припоминание самых ранних шагов (а само распределение U_n будет усеченным геометрическим), а при $r > 1$ — наоборот, самым вероятным будет предыдущее значение. Случай $r = 1$ соответствует уже рассмотренному равномерному распределению.

Умножим соотношение (8) на t^n и суммируем по n . Возникающие ряды снова могут быть выражены через производящую функцию M , например:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \theta_{n+1} r^{n+1} t^n = \theta_1 r + \theta_2 r^2 t + \theta_3 r^3 t^2 + \dots = \frac{M(rt)}{t}.$$

Окончательно, получим для M функциональное уравнение

$$M(rt) = H(t)M(t) + F(t), \quad H(t) = \frac{(1-t)(1-prt)}{(1-rt)(1-pt)}, \quad F(t) = \frac{p(r-1)t}{(1-pt)(1-rt)^2}.$$

Общее решение этого уравнения известно, см. п. 2 гл. 8 [16], при условии, что $r < 1$ и функции F и H могут быть представлены в виде степенных рядов. В нашем случае они являются рациональными функциями t , так что могут быть разложены как суммы простейших дробей, для которых представления в виде рядов известны. Однако это решение имеет крайне сложную форму, в частности, оно содержит конечные произведения величин $H(r^k t)$ по k , которые не удастся выразить в замкнутом виде, что делает такое аналитическое решение непригодным для дальнейшего анализа.

Тем не менее асимптотическое поведение решений (9) можно описать и не имея аналитического решения — для этого будем использовать приемы гл. 8 из [17]. В первую очередь, необходимо преобразовать (8) в однородное уравнение. Для этого формально разделим обе части на γ_{n+1} , а затем в полученном уравнении увеличим все индексы на единицу, после чего вычтем из последнего первое. Это приводит к уравнению

$$\theta_{n+3} - C_{2,n}\theta_{n+2} + C_{1,n}\theta_{n+1} - C_{0,n}\theta_n = 0,$$

$$C_{2,n} = \beta_{n+1} + \frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}, \quad C_{1,n} = p\alpha_{n+1} + \beta_n \frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}, \quad C_{0,n} = p\alpha_n \frac{\gamma_{n+2}}{\gamma_{n+1}}.$$

Теперь заметим, что последовательности $C_{k,n}$ имеют конечные пределы, а значит, могут быть представлены в виде $c_k + E_{k,n}$, где $E_{k,n}$ — бесконечно малые последовательности (по n). Тогда мы можем использовать утверждение 8.27 из [17] при условии, что $E_{k,n}$ удовлетворяют некоторому дополнительному техническому требованию.

Пусть $r < 1$. Тогда $c_2 = 1 + p + r$, $c_1 = p + r + pr$ и $c_0 = pr$. Опорное характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - c_2\lambda^2 + c_1\lambda - c_0 = 0$$

имеет корни 1, p и r . Дополнительное требование заключается в том, что ряды с членами $E_{k,n}$ должны абсолютно сходиться при всех k . Оно действительно выполняется. Например, для $E_{0,n}$:

$$E_{0,n} = p \frac{v_n u_{n+2}}{v_{n+2} u_{n+1}} - pr = p \frac{v_n u_{n+2} - r u_{n+1} v_{n+2}}{v_{n+2} u_{n+1}} = pr(1-r) \frac{r^{n+1} + r^{n+2}}{r^{n+2} - 1} \sim pr(r-1)r^{n+1},$$

значит, соответствующий ряд сходится. Для остальных коэффициентов выкладки более громоздки, но сводятся также к манипуляциям с геометрическими прогрессиями. Тогда в силу упомянутой теоремы ведущий член в асимптотическом представлении решения должен иметь вид $(1 + o(1))1^n$, т. к. p и r меньше единицы. Другими словами, ожидается, что при больших n решение должно сходиться к некоторой постоянной. Именно это и видно в результатах вычислительного эксперимента на рис. 3 слева.

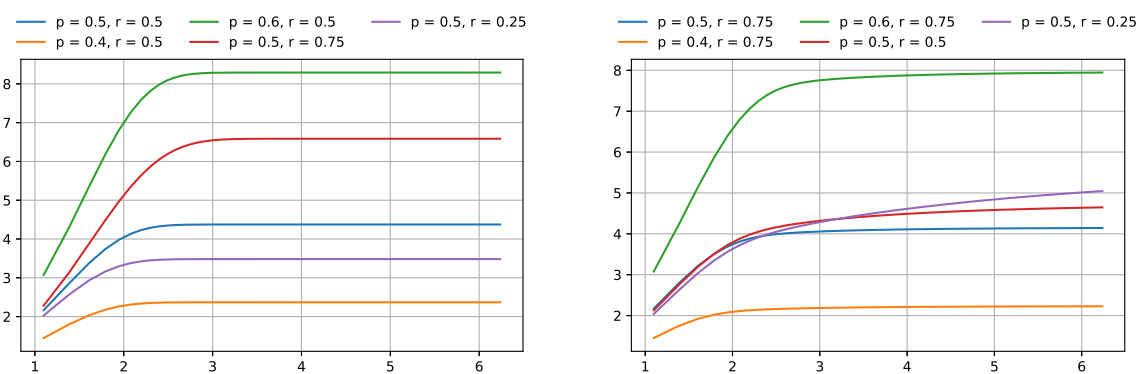


Рис. 3. Зависимости моментов второго порядка Δ_n от $\ln n$ для сценариев со стремлением к постоянным значениям: показательное распределение с $r < 1$ (слева) и биномиальное распределение с $r < 1$ (справа)

Fig. 3. Second order moments Δ_n versus $\ln n$ for cases when moments stabilize: exponential distribution with $r < 1$ (left) and binomial distribution with $r < 1$ (right)

Оценки скорости сходимости к решениям опорного разностного уравнения с соответствующими постоянными коэффициентами также известны (см. библиографию к гл. 8 [17]), но строятся достаточно сложным образом и потому не приводятся. В экспериментах относительная точность такого приближения для стационарных значений моментов варьировалась от 0.6% до 7% в зависимости от p и r . Кроме того, нужно иметь в виду, что при $p = r$ у опорного характеристического уравнения появляется кратный корень. Тем не менее вычисления показали, что и в этом случае математические ожидания стремятся к некоторому стационарному значению. Для моментов второго порядка ситуация аналогичная. Формально можно было бы применить ту же самую технику, но из-за наличия θ_n в правой части (11) итоговые выражения занимали бы слишком много места.

Стремление моментов первых порядков дает некоторые основания полагать, что возможно и распределения в этом случае стремятся к некоторому предельному закону. Установить этот факт строго с помощью каких-либо известных теорем для случайных сумм и указать форму этого предельного распределения пока не удалось. Однако в серии вычислительных экспериментов установление характеристических функций хорошо видно.

Пусть теперь $r > 1$. Пределы коэффициентов будут равны $c_2 = 2 + p/r$, $c_1 = 1 + 2p/r$ и $c_0 = p/r$. Опорное характеристическое уравнение имеет простой корень p/r и двукратный корень 1. В этом случае результаты раздела 8.4 из [17] неприменимы, как и другие инструменты, описанные там. Вычисления демонстрируют, что моменты первого порядка хорошо соответствуют линейной по n зависимости, в то время как моменты второго порядка растут по n быстрее, см. рис. 4.

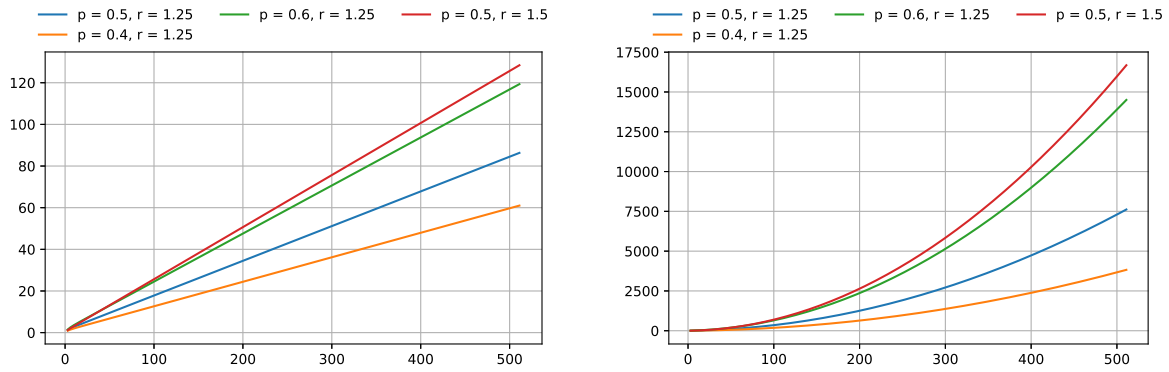


Рис. 4. Зависимости моментов первого (слева) и второго (справа) порядков от n для показательного распределения при некоторых значениях p и r

Fig. 4. First (left) and second (right) order moments versus n for exponential lag distribution with $r > 1$

7. Результаты для биномиального распределения сдвигов. Теперь рассмотрим пример, который упоминался во введении — схему из [12]. Сразу же заметим, что основным объектом исследования там был не случайный процесс с сильной памятью, а дискретная схема, полученная из детерминированного уравнения с производными нецелого порядка, которой формально был поставлен в соответствие случайный процесс. Кроме того, важно, что распределение сдвигов для механизма памяти, введенное там, не может быть представлено с помощью одной последовательности u_s . В принятых здесь обозначениях, там рассматривался сценарий, при котором

$$\mathbb{P}(U_n = s) = (-1)^{s-1} \binom{r}{s} = \left| \frac{\Gamma(r+1)}{s! \Gamma(r-s)} \right|, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbb{P}(U_n = 0) = 1 - \sum_{s=1}^n \mathbb{P}(U_n = s), \quad 0 < r \leq 1.$$

Фундаментальные решения задачи Коши для исследовавшегося там уравнения имеют смысл плотностей некоторых абсолютно непрерывных распределений и демонстрируют характерный субдиффузионный режим: дисперсия асимптотически ведет себя как t^r .

Введем в рассмотрение следующие последовательности:

$$u_0 = 1, \quad u_s = (-1)^{s-1} \binom{r}{s}, \quad w_n = 2 - \binom{n-r}{n}, \quad 0 < r < 1.$$

Выражение для w_n см. в п. 4.2.1 в [18]. Основное отличие схемы [12] заключается в вычислении вероятности $\mathbb{P}(U_n = 0)$, однако именно из-за этого меняются и нормировочные коэффициенты w_n . Кроме того, при некоторых сочетаниях r и n распределение там не является монотонным, т. к. $\mathbb{P}(U_n = 0) < \mathbb{P}(U_n = 1)$.

Точные решения для моментов при таком выборе u_s найти весьма трудно, но можно попробовать использовать ту же самую технику асимптотического анализа, что и для показательных распределений. Пределы коэффициентов равны $c_2 = 2 + p$, $c_1 = 1 + 2p$ и $c_0 = p$. Опорное характеристическое уравнение имеет корни p (простой) и 1 (двукратный), что снова препятствует использованию результатов из [17]. Впрочем, прямые вычисления показали, что и в этом случае, несмотря на гораздо более медленное убывание вероятностей, происходит установление моментов на некоторых постоянных значениях, см. рис. 3 справа. Характеристические функции здесь также сходятся к некоторой предельной функции, но как и в случае с показательным распределением, доказать это строго пока весьма затруднительно.

8. Заключение. Рассмотренная модель является одной из наиболее простых в семействе дискретных процессов с явным припоминанием прошлых состояний. Тем не менее точные выражения удалось получить лишь в самом простом случае, когда сдвиги имеют равномерное распределение. Ситуация здесь сильно отличается от модели ERW, поведение которой на сегодняшний день изучено максимально

подробно. Более интересно, однако, что в этой модели пока не удалось наблюдать аномальной диффузии (которая характеризуется степенной асимптотикой дисперсии), хотя в ERW формирование таких режимов возможно уже при равномерном распределении случайных сдвигов. Даже специальный выбор медленно убывающего биномиального распределения, для которого математическое ожидание расходится, не привел к такому результату. Это еще раз подчеркивает, что формальное соответствие дискретной схемы некоторой непрерывной интегродифференциальной модели (как в [12]) вовсе не гарантирует сохранение характерных свойств последней. Впрочем, авторы [12] и не утверждали, что описанный ими случайный процесс должен демонстрировать степенную асимптотику моментов. Приведенные результаты также позволяют указать, что одного только лишь механизма памяти недостаточно для объяснения возникновения аномальных диффузионных режимов: многое зависит от конкретной реализации этого механизма и его тонкого взаимодействия с другими элементами, управляющими динамикой процесса. С другой стороны, логарифмическое поведение моментов тоже не соответствует нормальной диффузии, так что, возможно, требование именно степенной асимптотики является излишне ограничивающим.

Стохастические модели с явным припоминанием прошлых состояний пока изучены слабо. Даже в простейшем случае, вроде рассмотренного здесь, многие вопросы остаются пока открытыми: например, точные распределения (здесь удалось лишь предложить способ вычисления характеристических функций при некоторых дополнительных предположениях), автокорреляционные функции, поведение экстремумов, времена первого достижения и т. п. Еще одним направлением исследований могло бы стать изучение моделей вида

$$X_{n+k} = a_1 X_{n+k-1} + \dots + a_k X_n + b X_{U_n},$$

где случайное возвращение к предыдущим значениям конкурирует с более сложной детерминированной динамикой. Такие конструкции по форме похожи на хорошо известные модели авторегрессии ARIMA, с той разницей, что в последних случайность вводится с помощью аддитивного возмущения, независимого от предыстории процесса. Наконец, интересным представляется и поведение классических нелинейных дискретных отображений (например, кусочно-линейного отображения тента или квадратичного отображения Фейгенбаума), если у них в правой части будут использованы случайно выбираемые из прошлого значения. Решение указанных задач может заложить основу для построения систематической теории функционально-разностных уравнений со случайно отклоняющимися аргументами. Такого рода конструкции могут найти свое применение в задачах оптимального управления для систем, где невозможно гарантировать постоянную задержку сигнала, или при исследовании алгоритмов, принадлежащих классу «разделяй и властвуй» — в связи с последним см. [19]. Других содержательных примеров приложения подобных уравнений к моделированию реальных физико-химических, демографических или социоэкономических процессов пока найти не удалось, что дает еще одно важное направление для будущих исследований в этой области.

Список литературы

1. Samorodnitsky G. Stochastic processes and long range dependence. Springer International; 2016. 415 p.
2. Beran J., Feng Y., Ghosh S, Kulik R. Long-memory processes. Springer-Verlag Berlin; 2013. 884 p.
3. Schütz GM., Trimper S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. *Physical Review E*. 2004;70(4):045101.
4. Laulin L. About the elephant random walk. PhD thesis. Université de Bordeaux; 2022. 154 p.
5. Metzler R., Jeon J-H., Cherstvy AG., Barkai E. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking. *Physical Chemistry & Chemical Physics*, 2014;16(44):24128–24164.
6. Kürsten R. Comment on «Anomalous diffusion induced by enhancement of memory». arXiv:1503.03302. 2015. 3 p.
7. Kumar N., Harbola U., Lindenberg K. Memory-induced anomalous dynamics: Emergence of diffusion, subdiffusion, and superdiffusion from a single random walk model. *Physical Review E*. 2010;82(2):021101.
8. Beyer WA., Schrandt RG., Ulam SM. Computer studies of some history-dependent random processes. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 9 p.
9. Кас М. A history-dependent random sequence defined by Ulam. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 5 p.
10. Зенюк Д.А. Дискретные динамические системы со случайным запаздыванием. *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2024;70. 35 с.
11. Clifford P., Stirzaker D. Reverting processes. arXiv:1911.07269. 2019. 15 p.
12. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G, Paradisi P. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chemical Physics*. 2002;284(1–2):521–541.
13. Roman S. The umbral calculus. Academic Press; 1984. 193 p.

14. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Press; 2009. 810 p.
15. Robbins H. The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1948;54(12):1151–1161.
16. Kuczma M. Functional equations in a single variable. PWN Warszawa; 1968. 383 p.
17. Elaydi S. An introduction to difference equations. Springer New York; 2005. 562 p.
18. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука; 1981. 800 с.
19. Karp RM. Probabilistic recurrence relations. *Journal of the ACM*. 1994;41(6):1136–1150.

References

1. Samorodnitsky G. Stochastic processes and long range dependence. Springer International; 2016. 415 p.
2. Beran J., Feng Y., Ghosh S, Kulik R. Long-memory processes. Springer-Verlag Berlin; 2013. 884 p.
3. Schütz GM., Trimper S. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-Markovian random walk. *Physical Review E*. 2004;70(4):045101.
4. Laulin L. About the elephant random walk. PhD thesis. Université de Bordeaux; 2022. 154 p.
5. Metzler R., Jeon J-H., Cherstvy AG., Barkai E. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking. *Physical Chemistry & Chemical Physics*, 2014;16(44):24128–24164.
6. Kürsten R. Comment on «Anomalous diffusion induced by enhancement of memory». arXiv:1503.03302. 2015. 3 p.
7. Kumar N., Harbola U., Lindenberg K. Memory-induced anomalous dynamics: Emergence of diffusion, subdiffusion, and superdiffusion from a single random walk model. *Physical Review E*. 2010;82(2):021101.
8. Beyer WA., Schrandt RG., Ulam SM. Computer studies of some history-dependent random processes. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 9 p.
9. Кас М. А history-dependent random sequence defined by Ulam. Technical report. Los Alamos National Lab; 1969. 5 p.
10. Zenyuk DA. Discrete dynamical systems with random delays. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*. 2024;70. 35 p. (In Russ.)
11. Clifford P., Stirzaker D. Reverting processes. arXiv:1911.07269. 2019. 15 p.
12. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G, Paradisi P. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chemical Physics*. 2002;284(1–2):521–541.
13. Roman S. The umbral calculus. Academic Press; 1984. 193 p.
14. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge University Press; 2009. 810 p.
15. Robbins H. The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1948;54(12):1151–1161.
16. Kuczma M. Functional equations in a single variable. PWN Warszawa; 1968. 383 p.
17. Elaydi S. An introduction to difference equations. Springer New York; 2005. 562 p.
18. Karp RM. Probabilistic recurrence relations. *Journal of the ACM*. 1994;41(6):1136–1150.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 12.12.2025

Received December 12, 2025

Поступила после рецензирования 05.05.2026

Revised May 5, 2026

Принята к публикации 11.05.2026

Accepted May 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Зенюк Дмитрий Алексеевич – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник отдела нелинейной динамики, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Dmitry A. Zenyuk – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Fellow at the Nonlinear Dynamics Department, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Визуализация в жидкокристаллической ячейке распределения заряда, имплантированного в SiO₂/Si фокусированным ионным пучком

Колесников Д. А. , Кучеев С. И. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Носковым А. В.)

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

kolesnikov_d@bsuedu.ru, kucheev@bsuedu.ru

Аннотация. Экспериментально показано, что в жидкокристаллической ячейке, в которой одна из подложек является структурой SiO₂/Si с имплантированным зарядом в пленке SiO₂ с помощью фокусированного пучка ионов Ga⁺ в сканирующем электронно-ионном микроскопе, возможна визуализация распределения этого заряда при использовании эффекта Фредерикса. Визуализация облученных участков SiO₂ без дополнительной обработки поверхности, становится возможной благодаря различию в двулучепреломлении жидкого кристалла (ЖК) над участками с разной дозой облучения. Установлено, что облучение SiO₂ дозой ~ 10¹¹ ион/см² вызывает формирование наклонной ориентации молекул ЖК 5CB на поверхности SiO₂. Визуализация облученных участков поверхности SiO₂ в ячейке с планарной ориентацией ЖК основывается на различии двулучепреломления ЖК над участками с разной дозой облучения, которое возникает вследствие перераспределения приложенного к ячейке напряжения между ЖК и структурой SiO₂/Si, из-за образования обедненного приповерхностного слоя в кремнии. На формирование обеднённого слоя влияют электрическое поле имплантированного заряда в SiO₂, и, как предполагается, токи утечек в Si через дефекты плёнки SiO₂. Оценка минимальной дозы облучения SiO₂, регистрируемой в планарной ЖК-ячейке, даёт величину ~ 2 * 10⁶ ион/см².

Ключевые слова: фокусированные ионные пучки, имплантированный заряд в окисле, эффект Фредерикса

Для цитирования: Колесников Д.А., Кучеев С.И. Визуализация в жидкокристаллической ячейке распределения заряда, имплантированного в SiO₂/Si фокусированным ионным пучком. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):195–205. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-195-205 EDN GEDVPL

Original Research

Distribution Imaging of Charge Implanted into SiO₂/Si using a Focused Ion Beam by a Liquid Crystal Cell

Dmitry A. Kolesnikov , Sergey I. Kucheev 

(Article submitted by a member of the editorial board Noskov A. V.)

Belgorod National Research University,

85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia

kolesnikov_d@bsuedu.ru, kucheev@bsuedu.ru

Abstract. It has been experimentally demonstrated that in a liquid crystal cell in which one of the substrates is a SiO₂/Si structure with an implanted charge in the SiO₂ film by means of a focused Ga⁺ ion beam in a scanning ion microscope imaging of this charge distribution is possible using the Fredericksz effect. Visualization of irradiated SiO₂ areas without additional surface treatment is made possible by the difference in the birefringence of the liquid crystal over areas with different irradiation doses. It was found that irradiation of SiO₂ with a dose of ~ 10¹¹ ions/cm² causes the formation of an inclined orientation of 5CB liquid crystal molecules on the SiO₂ surface. Visualization of irradiated SiO₂ surface areas in a cell with a planar liquid crystal orientation obtained by polyimide covering is based on the difference in the birefringence of the liquid crystal over areas with different irradiation doses. This difference arises from the redistribution of the voltage applied to the cell between the liquid crystal and the SiO₂/Si structure due to the formation of a depletion layer near the surface of silicon. The formation of the depletion layer is influenced by the electric field of the implanted charge in SiO₂ and, presumably, by leakage currents in Si through defects in the SiO₂ film. An estimate of the minimum irradiation dose of SiO₂ detected in a planar liquid crystal cell yields a value of ~ 2*10⁶ ions/cm².

Keywords: FIB, Charge Implanted in Oxide, Fredericksz Effect

For citation: Kolesnikov DA., Kucheev SI. Distribution Imaging of Charge Implanted into SiO₂/Si using a Focused Ion Beam by a Liquid Crystal Cell. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):195–205. (In Russ.).

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-195-205 EDN GEDVPL

1. Введение. Электрические заряды, локализованные в плёнке SiO₂ структуры SiO₂/Si (в объёме, на межфазной границе SiO₂/Si или на поверхности SiO₂) играют ключевую роль в функционировании

полупроводниковых приборов, в которых реализуется эффект поля [1]. Всесторонний анализ параметров локализации этого электрического заряда является неотъемлемым этапом совершенствования существующих или создания новых приборов, а также, не разрушающей инспекции отказов полупроводниковых изделий. При этом именно визуализация распределения электрических зарядов в плоскости диэлектрической пленки SiO_2 может представлять наибольший интерес при решении задач в разработке сенсоров химико-биологических сред. В таких приборах на границе SiO_2 с «мягкой» средой может иметь место адсорбция ионов [2] или их накопление и перераспределение в приповерхностном слое (в двойном электрическом слое), электрическое поле которых может влиять на поверхностную проводимость кремния в структуре SiO_2/Si [3, 4, 5]. С этой точки зрения визуализация распределения электрического заряда, осуществляемая за счет оптических (электрооптических) свойств «мягкой» среды будет рассматриваться как оптический способ получения информации с сенсора, в плоскости которого в слое «мягкой» среды протекают соответствующие физико-химико-биологические процессы. В таком варианте функционирования сенсор становится пространственно временным модулятором света, в котором происходит модуляция (амплитудная и/или фазовая) считывающей световой волны, с преимуществом в виде параллельного характера обработки и предоставления визуальной информации о протекающих процессах, в отличие от существующих сенсоров, функционирующих на эффекте поля, в которых главным элементом является ионно чувствительный полевой транзистор [6, 7] с последовательными электрическими преобразованиями. Принимая во внимание, что в сенсоре должен быть контакт с «мягкой» средой, а в качестве перспективных кандидатов «чувствительных» сред рассматриваются жидкие кристаллы [8, 9], становится очевидным, что методы, которые разработаны для изучения распределения электрических зарядов в диэлектриках с открытой поверхностью, такие как, например, метод вольт-фарадных характеристик, метод растровой электронной (ионной) микроскопии не применимы для данной цели из-за необходимости этапов подготовки поверхности диэлектрика в виде термического напыления электропроводящих покрытий или помещения исследуемой структуры в вакуум, при которых существенно изменяются условия на поверхности. Картину распределения электрического заряда в плоскости диэлектрика могут обеспечить методы, представляющие собой разновидности атомной силовой микроскопии [10, 11], обладающие большой чувствительностью и высоким латеральным разрешением. Однако с точки зрения использования в сенсорных устройствах эти методы имеют существенные недостатки, а именно: (1) время-затратное сканирование поверхности кантилливером, (2) высокая чувствительность к механическим воздействиям, (3) сложное, дорогое и не компактное оборудование, которое не подразумевает его использование на удалении в изменяющихся окружающих условиях. Целью работы является демонстрация возможности визуализировать распределение имплантированного заряда в плоскости диэлектрической пленки SiO_2 в структуре SiO_2/Si , используя эффект Фредерикса в нематическом ЖК.

2. Эксперимент. Структура Si/SiO_2 , которая использовалась в работе в качестве тестовой, представляла собой подложку монокристаллического кремния (Si) p – типа проводимости с удельным сопротивлением $4,5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$ с термически выращенной пленкой окиси кремния (SiO_2) толщиной 100 нм. Имплантирование электрического заряда в пленку SiO_2 с заданным распределением в её плоскости выполнялось сфокусированным ионным пучком в дуальном (электроны/ионы) сканирующем микроскопе Quanta 200 3D. Облучение осуществлялось ионами галлия (Ga^+) с энергией 30 кэВ под углом 0° к нормали.

Растр сканирования составлял 1024×884 пикселей. Доза облучения задавалась числом полных растров прохождения ионного пучка по поверхности выбранного участка пленки SiO_2 , его площадью, временем облучения единичного пикселя (dwell time), и током ионного пучка (1 нА). Области облучения представляли собой прямоугольные участки поверхности пленки SiO_2 , вложенные последовательно друг в друга с уменьшающимися размерами. Каждый последующий вложенный участок облучался с увеличенной дозой. Для шести участков поверхности пленки SiO_2 доза облучения контролировалась. Дозы облучения (ион/см²) этих участков, начиная с 1-го, были следующими: 1-й – $6,6 \cdot 10^7$; 2-й – $4,2 \cdot 10^8$; 3-й – $7,36 \cdot 10^9$; 4-й – $1,7 \cdot 10^{11}$; 5-й – $3,1 \cdot 10^{12}$; 6-й – $3,67 \cdot 10^{13}$. Принимая во внимание, что дозы облучения участков изменяются практически на один порядок, суммированием доз из-за перекрывания площадей облучения пренебрегали.

На рис. 1а представлено изображение фрагмента поверхности пленки SiO_2 после её облучения, которое получено в оптический микроскоп. Видно, что облученные участки пленки на данном изображении практически не визуализируются. После значительного увеличения контраста участки (4, 5 и 6), которые соответствуют наибольшим дозами облучения, становятся визуально разрешёнными, рис. 1б.

Визуализацию этих участков можно объяснить наличием дефектов в пленке SiO_2 , возникшим в результате ионного облучения, на которых происходит дополнительное рассеяние света, причем, чем больше доза облучения, тем большее рассеяние света. Однако такой закономерности подчиняются только 4-й и 5-й участки (рис. 1б).

Для 6-го участка такая закономерность не выполняется несмотря на то, что доза облучения 6-го участка больше дозы облучения 4-го и 5-го участков. На 6-м участке визуально не наблюдается какое-либо

рассеяние света (рис. 1b). Месторасположение этого участка регистрируется на контрасте с предыдущим 5-м участком.

На рис. 1c представлено оптическое изображение поверхности SiO_2 с облученными участками, полученное методом конденсации водяного пара. Из приведенной иллюстрации видно, что облученные участки визуализируются за счет декорирования границ между ними, и визуализация начинается с границы 2-го участка. Граница 1-го участка этим методом не обнаруживается, а 5-й и 6-й участки не разрешаются на фоне 4-го участка. Декорирование участков этим методом может служить дополнительным аргументом в пользу присутствия электрических зарядов разной величины на разных участках поверхности SiO_2 .

На рис. 1d приведено изображение поверхности SiO_2 , охватывающее все шесть облученных участков, которое получено в режиме сканирования сфокусированным ионным пучком. Параметры сканирования ионным пучком поверхности SiO_2 при получении этого снимка были такими же, как для 1-го участка, за исключением увеличенной площади. Из приведенной иллюстрации видно, что уровень почернения визуализируемых участков (в среднем) увеличивается с ростом номера участка, что качественно согласуется с фактом увеличения дозы в эксперименте по облучению. Участки 5 и 6 не разрешаются на фоне 4-го участка. Последний факт можно рассматривать как проявление недостатков метода растровой ионной микроскопии, которые связаны с электрической зарядкой как объема, так и поверхности диэлектрика SiO_2 . Имеющиеся отклонения в степени почернения от среднего, например, некоторых фрагментов поверхности 1-го и 2-го участков, или фрагмента F на поверхности 2-го участка могут быть связаны с исходным загрязнением поверхности SiO_2 перед облучением, но более вероятно, связаны с дополнительными и не продолжительными актами облучения при «настройках» ионного пучка. «Настройки» включали в себя ступенчатые изменения формы и местоположения сканов поверхности (отличающиеся от вышеупомянутых шести участков), происходившие при «привязке» ионного пучка к реперной метке на поверхности SiO_2 .

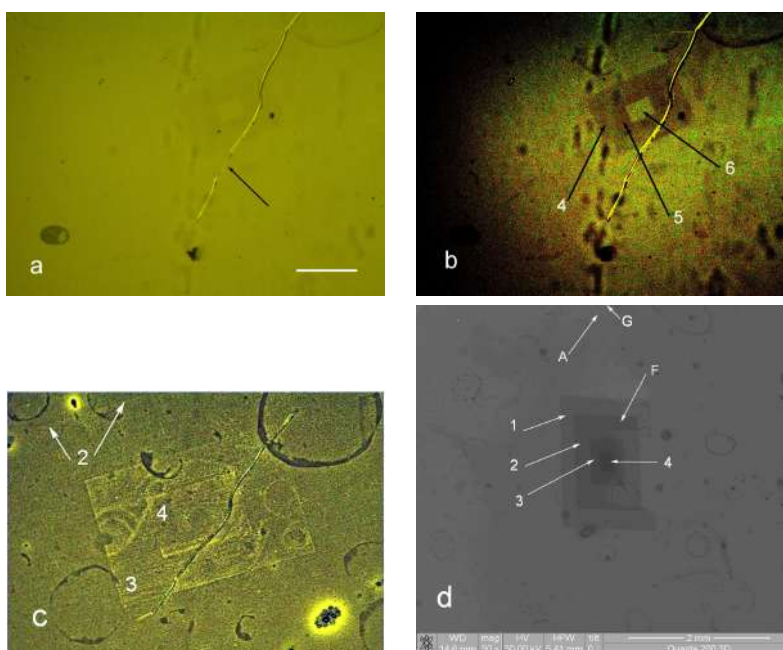


Рис. 1. Поверхность пленки SiO_2 с облученными участками. а) Оптическое изображение (исходное). Стрелкой отмечена царапина на пленке SiO_2 , выполняющая роль реперной метки. Масштаб – 200 мкм. б) Оптическое изображение того-же участка пленки SiO_2 после 3-кратного увеличения контраста. в) Визуализация облученных участков пленки SiO_2 методом конденсации водяного пара. д) Снимок поверхности SiO_2 , полученный сфокусированным ионным пучком. F – прямоугольный фрагмент на 2-м участке. «A» – фрагмент поверхности SiO_2 на краю снимка. «G» – граница снимка

Fig. 1. The surface of the SiO_2 film with irradiated areas. a) Optical image (original). The arrow indicates a scratch on the SiO_2 film, which serves as a reference mark. Scale – 200 mkm. b) Optical image of the same area of the SiO_2 film after triple increasing the contrast. c) Visualization of irradiated areas of the SiO_2 film by the water vapor condensation method. d) Image of the SiO_2 surface obtained with a focused ion beam. F – rectangular fragment in the 2-nd area. "A" – fragment of the SiO_2 surface at the edge of the image. "G" – border of the image

Далее в экспериментах структура SiO_2/Si была использована в качестве нижней подложки в жидкокристаллической ячейке. В этих экспериментах поверхность SiO_2 структуры после облучения ионным пучком кроме очистки диметилформамидом не подвергалась какой-либо дополнительной специальной обработке с целью получения предпочтительной ориентации молекул ЖК. Верхним электродом в

ЖК-ячейке служила пленка окиси индия (ITO) на стеклянной пластинке. На поверхность ITO наносилась плёнка полиимида, которая натиралась в одном направлении. Это обеспечивало однородную планарную ориентацию молекул ЖК на этой поверхности. Толщина ЖК 5СВ была 10 мкм. Наблюдение проводилось в поляризационный микроскоп со скрещенными поляризаторами в отраженном режиме. К ЖК-ячейке прикладывалось управляющее переменное напряжение U_{ac} .

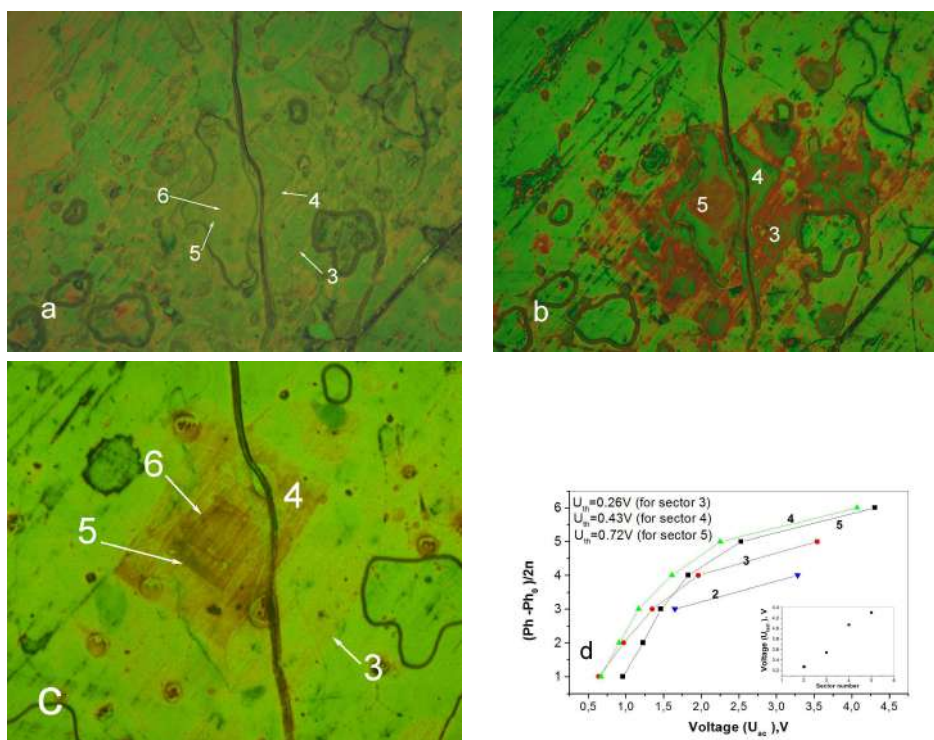


Рис. 2. Поляризационное изображение фрагмента ЖК-ячейки с облученными участками пленки SiO_2 . Частота 60 кГц. Напряжение U_{ac} , В: а) – 0; б) – 2.02; в) – 5.03. д) Зависимость фазовой задержки от приложенного к ЖК-ячейке напряжения U_{ac} . (2, 3, 4, 5) – номера участков пленки SiO_2 . Вставка: Зависимость напряжения U_{last} от номера участка. Fig. 2. Polarization image of a fragment of an LC cell with irradiated areas of the SiO_2 film. Frequency 60 kHz. Voltage U_{ac} , V: а) – 0; б) – 2.02; в) – 5.03. д) Dependence of the phase retardance on the voltage U_{ac} applied to the LC cell. (2, 3, 4, 5) – numbers of areas of the SiO_2 film. Inset: Dependence of voltage U_{last} on the area number

На рис. 2а представлено поляризационное изображение ЖК-ячейки с облученными участками пленки SiO_2 (без приложенного к ячейке управляющего напряжения). Видно, что 3-й, 4-й, 5-й и 6-й участки слабоконтрастно проявляют себя за счет фрагментарного декорирования границ между собой. Границы участков 1 и 2 не регистрируются. Принимая во внимание однородность ориентации молекул ЖК на верхнем электроде ITO, факт визуализации указанных выше участков можно объяснить тем, что углы преднаклона молекул ЖК над этими участками SiO_2 в ЖК-ячейке отличаются друг от друга.

При прикладывании к ЖК-ячейке напряжения U_{ac} контраст картины визуализации облученных участков SiO_2 значительно увеличивается. Это связано с изменением фазовой задержки между обыкновенным и необыкновенным лучами в результате переориентации молекул ЖК над участками, и как следствие, псевдоокрашиванием слоя ЖК в поляризованном свете. В качестве примера на рис. 2б отображена картина визуализации 3-го, 4-го и 5-го участков на фоне друг друга.

Известно, что зависимость пропускания света ЖК-слоем от приложенного напряжения в эффекте Фредерикса имеет осциллирующий вид [12], причём в последовательности максимумов интенсивности интерференции монохроматического света последний максимум наиболее широкий и хорошо отделен по величине напряжения (далее U_{last}) от значений напряжений, соответствующих предыдущим максимумам. По максимумам пропускания монохроматического света через ЖК-слой была построена зависимость фазовой задержки (Ph) (относительно начальной (Ph_0)) от приложенного напряжения U_{ac} для визуализируемых участков SiO_2 , рис. 2д. Из приведенных кривых следует, что с ростом порядкового номера участка (для 3-го, 4-го и 5-го) возрастает пороговое напряжение (U_{th} , рис. 2д) переориентации молекул ЖК в эффекте Фредерикса, а также возрастает напряжение U_{last} (вставка на рис. 2д). Для управляющих напряжений U_{ac} , близких к U_{last} (как выше, так и ниже), вследствие отделения максимумов интерференции поляризованного света друг от друга, наблюдается хорошее оптическое разрешение участков с разной дозой облучения. Благодаря этому, например, стало возможным разрешить 2-й участок, который не разрешался при малых (пороговых) напряжениях, а 6-й участок визуализировать более контрастно (рис. 2с). Повышение порогового напряжения эффекта Фредерикса (U_{th} , рис. 2д), а также

напряжения последнего максимума интерференции U_{last} (вставка на рис. 2d) на облученных участках SiO_2 можно объяснить увеличением энергии сцепления молекул ЖК-с поверхностью SiO_2 с ростом дозы облучения.

Следует отметить следующее: при прикладывании к ячейке управляющего напряжения относительная фазовая задержка ЖК-слоя между участками с разной дозой облучения уверенно лежит в диапазоне 2π , рис. 2с. Такой величины фазовой задержки вполне достаточно для фазовой модуляции волнового фронта световой волны в плоскости ЖК-ячейки, причем в случае использования когерентной волны в качестве считывающей, преимуществом такой модуляции (за счет вариации энергии сцепления молекул ЖК-дозой облучения) будет отсутствие дифракции света на границах между участками SiO_2 .

Факт влияния ионного облучения поверхности SiO_2 на ориентацию молекул ЖК на этой поверхности иллюстрируется на рис. 3. На изображении показана облученная поверхность SiO_2 с оставшимся слоем жидкого кристалла 5СВ после аккуратной разборки ЖК-ячейки. Хорошо видно, что на поверхности 4-го участка имеет место наклонная ориентация молекул 5СВ, тогда как над остальной поверхностью SiO_2 , подвергнутой другим (как большими, так и меньшими) дозам облучения, близкая к нормальной (гомеотропная). Заметим, что визуализируемая с помощью слоя ЖК граница 4-го участка с соседними 3-м и 5-м участками резкая. Это указывает на пороговый эффект влияния дозы облучения G^+ на ориентацию молекул 5СВ на поверхности термического SiO_2 . Аналогичный экспериментальный факт о зависимости ориентации молекул 5СВ на поверхности кремния от дозы облучения ионами Ga^+ сообщался ранее [13]. По всей видимости совпадающее поведение ориентации молекул 5СВ, как на поверхности SiO_2 (в данной работе), так и на поверхности кремния в [13] связано с тем, что поверхность кремния покрыта плёнкой естественного окисла.

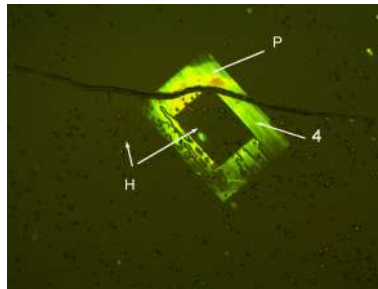


Рис. 3. Поляризационное изображение фрагмента пленки SiO_2 с жидким кристаллом 5СВ без покровного стекла. P – планарная (наклонная) на 4-м участке и H – нормальная ориентации ЖК на остальной поверхности пленки SiO_2 соответственно

Fig. 3. Polarization image of a SiO_2 film fragment with a 5CB liquid crystal without a cover glass. P is the planar (tilted) orientation over the 4th area and H is the normal orientation of the LC on the remaining surface of the SiO_2 film respectively

Близкая к нормальной ориентация молекул ЖК в ячейке, очевидно, уменьшает двулучепреломление ЖК-слоя, и тем самым уменьшает «чувствительность» описываемого метода визуализации. Поэтому с целью увеличения двулучепреломления ЖК-слоя, а также исключения влияния имплантированного в SiO_2 электрического заряда на сцепление молекул ЖК-с подложкой, далее в экспериментах облученная поверхность SiO_2 была покрыта полиимидной пленкой.

На рис. 4а представлено поляризационное изображения ЖК-ячейки с планарными граничными условиями в окрестности реперной метки на поверхности SiO_2 без приложения к ней управляющего напряжения. На приведенной иллюстрации видно, что облученные участки пленки SiO_2 не визуализируются. Это подтверждает, что имплантированный в SiO_2 электрический заряд из-за наличия полиимидной пленки на поверхности SiO_2 не оказывает влияния на исходную ориентацию молекул ЖК.

Визуализация облученных участков пленки SiO_2 осуществляется при прикладывании к ЖК-ячейке управляющего напряжения, которое для ниже описываемой группы экспериментов представляло собой суперпозицию переменной составляющей U_{ac} и постоянной составляющей U_{dc} , «нижний» и «верхний» пределы которой были -6В и $+6\text{В}$ соответственно. Полярность постоянного напряжения (смещение) U_{dc} отсчитывалась относительно Si подложки.

На рис. 4b-d представлены типичные картины визуализации всех облученных участков поверхности SiO_2 с имплантированным зарядом при прикладывании управляющего напряжения. Когда в процессе возрастания смещения U_{dc} от «нижнего» предела его полярность становится положительной, начинают визуализироваться участки 1, 2 и 3 последовательно друг за другом, начиная с 1-го, рис. 4b. Когда появляется граница 2-го участка, включая фрагмент F, перестает быть видимым 1-й участок (рис. 4с), а когда появляется 3-й участок перестает визуализироваться 2-й участок (вставка в рис. 4с). Такая закономерность в появлении картинок визуализации выполняется только для первых (1, 2 и 3) участков. Визуализация 4, 5 и 6-го участков осуществляется за счет контраста на фоне соседних участков.

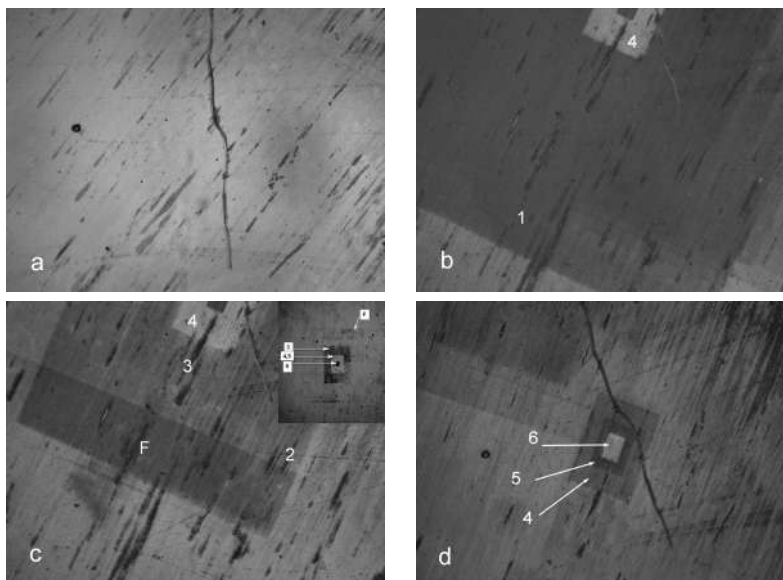


Рис. 4. Визуализация облученных участков SiO_2 в ячейке с планарной ориентацией жидкого кристалла 5CB. Частота 100 кГц. Напряжение U_{ac} , В: а) – 0; б) – 2.69; в) – 2.69; д) – 5.03. Напряжение U_{dc} , В: а) – 0; б) – +2.19; в) – +3.11; д) – +2.09. в) На вставке: визуализация 3-го и 6-го участков на фоне 4-го и 5-го соответственно. Толщина ЖК-слоя 5 мкм.

Частота 104 кГц. $U_{ac} = 3.8\text{В}$. $U_{dc} = +5.1\text{В}$

Fig. 4. Visualization of irradiated areas of SiO_2 in a cell with planar orientation of the 5CB liquid crystal. Frequency 100 kHz. Voltage U_{ac} , V: a) – 0; b) – 2.69; c) – 2.69; d) – 5.03. Voltage U_{dc} , V: a) – 0; b) – +2.19; c) – +3.11; d) – +2.09. c) Inset: Visualization of the 3rd and 6th areas against the background of the 4th and 5th, respectively. The thickness of the LC layer is 5 μm . Frequency 104 kHz. $U_{ac} = 3.8\text{ V}$. $U_{dc} = +5.1\text{ V}$

Визуализация какого-либо участка SiO_2 при соответствующем значении смещения U_{dc} на фоне соседнего участка обусловлена появлением разницы в напряжениях, падающих на ЖК-слое над этими участками. Это различие в напряжениях возникает вследствие формирования под пленками SiO_2 соответствующих участков приповерхностного слоя в кремнии, обеднённого основными носителями заряда, причем на обеднение поверхности кремния влияет как смещение U_{dc} , так и имплантированный в SiO_2 заряд вследствие эффекта поля. На обедненном слое в кремнии имеет место дополнительное падение управляющего напряжения.

Формирование приповерхностного обеднённого слоя в кремнии регистрировалось по факту наличия или отсутствия светочувствительности ЖК-ячейки в окрестности исследуемого участка поверхности SiO_2 при действии управляющего напряжения. Под светочувствительностью какого-либо фрагмента ЖК-ячейки подразумевается наличие электрооптической реакции ЖК в области этого фрагмента ячейки, которая происходит в окрестности пятна сфокусированного лазерного излучения (He-Ne лазер, 0.63 мкм) при его включении. Наблюдаемую светочувствительность можно было условно разделить по характеру «отображения» слоев ЖК распределения интенсивности света на поверхности кремния на два типа: «слабую» (SL) и «дифракционную» (SD), а также полное её отсутствие (NS). В первом случае переориентация ЖК в плоскости ячейки происходит без резких границ между зонами переориентированного ЖК, и, следовательно, такой электрооптический ответ ЖК-слоя не «отображает» имеющееся в плоскости поверхности кремния распределение интенсивности лазерного излучения. Второй (SD) тип светочувствительности характеризуется резкими границами между зонами переориентированного ЖК. В этом случае картина распределения зон переориентации ЖК контрастно повторяет распределение интенсивности света на поверхности кремния. Последовательность изменения типов светочувствительности с ростом U_{dc} от «нижнего» к «верхнему» пределу следующая: $SL \rightarrow SD \rightarrow NS$. Такая последовательность смены типов светочувствительности в ЖК-ячейке имеет место для любой поверхности SiO_2 (включая не облученные), за исключением 6-го участка. Принимая во внимание, что в ЖК-ячейке используется кремний р-типа проводимости, можно считать, что с ростом U_{dc} толщина обеднённого слоя уменьшается [14], и полностью исчезает, когда светочувствительность пропадает.

Рис. 5 отображает смену характерных картин проявления типов светочувствительности, наблюдаемую при изменении U_{dc} от «нижнего» до «верхнего» пределов. При отрицательном смещении U_{dc} любой фрагмент ЖК-ячейки демонстрирует светочувствительность SL типа за исключением 6-го участка, на котором светочувствительность SD типа, рис. 5а. Над этим участком SiO_2 электрооптический ответ слоя ЖК «отображает» распределение интенсивности лазерного излучения на поверхности кремния, вид которого соответствует дифракционным кольцам (с небольшим искажением «колец» в «эллипсы» вследствие падения лазерного луча на поверхность кремния не по нормали, а под углом ~ 45 град.).

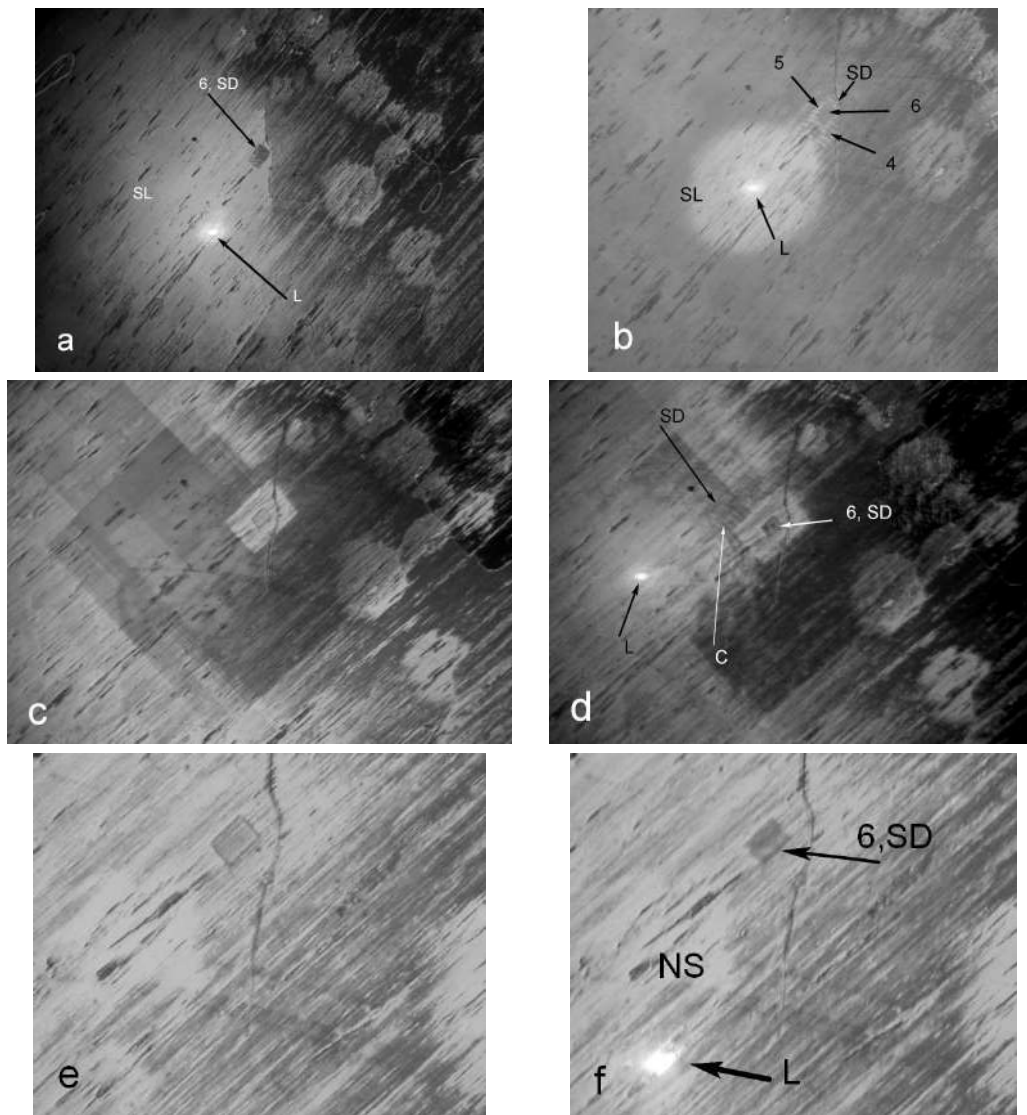


Рис. 5. Тип светочувствительности в окрестности участков пленки SiO₂. L – пятно сфокусированного лазерного излучения на поверхности Si. Частота 100 кГц. U_{ac} = 4В. Напряжение U_{dc}, В: а) – -5.8; б) – +1.35; в) – +2.6; г) – +6.1
 Fig. 5. Type of photosensitivity in the vicinity of SiO₂ film areas. L is the spot of focused laser radiation on the Si surface. Frequency 100 kHz. U_{ac} = 4 V. Voltage U_{dc}, V: а) – -5.8; б) – +1.35; в) – +2.6; г) – +6.1

После смены полярности U_{dc} на положительное значение, SD тип светочувствительности обнаруживается на 4-м и 5-м участках, но при этом, в остальных областях ЖК-ячейки остается SL тип, рис. 5б. Принимая во внимание, что вокруг лазерного пятна (L, рис. 5б) вблизи и на удалении от него распределение интенсивности света на поверхности Si имеет симметрию близкую к осевой, а SD тип светочувствительность регистрируется только над участками (4, 5 и 6) (рис. 5б), причем на хорошо заметном удалении от пятна (L), можно считать очевидным, что под этими участками SiO₂ толщина обеднённого слоя в кремнии меньше, чем в других частях поверхности кремния.

Дальнейший рост смещения U_{dc} приводит к смене светочувствительности SL типа на SD тип на участках 1, 2, и 3, а светочувствительность на участках 4 и 5 пропадает, рис. 5cd. При этих значениях U_{dc} участки 1, 2, и 3 становятся визуализируемыми, рис. 5cd, причем электрооптический ответ ЖК на лазерное излучение на этих участках хорошо «отображает» распределение интенсивности света на кремнии в виде фрагментов колец (С, рис. 5d).

При увеличении смещения U_{dc} до «верхнего» предела вся ЖК-ячейка теряет светочувствительность, за исключением 6-го участка, рис. 5ef. На 6-м участке остается SD тип светочувствительности. Таким образом, по результатам исследования светочувствительности ЖК-ячейки следует, что факт визуализации какого-либо облученного участка SiO₂ совпадает с установлением в данном месте ЖК-ячейки светочувствительности SD типа, а влияние имплантированного в SiO₂ заряда на обеднение кремния в этом случае проявляется максимально.

Зависимость смещения U_{dc}, которому соответствует переход SD → NS светочувствительности от дозы облучения участков SiO₂, представлена на рис. 6. По характеру изменения этой зависимости от дозы облучения все участки можно разделить на 3 группы. В первую группу входят 1-й, 2-й и 3-й

участки, а также фрагмент «А» поверхности SiO_2 (рис. 1d,7a). Во вторую группу входят 4-й и 5-й участки. К 3-й группе можно отнести 6-й участок.

Для первой группы участков поверхности SiO_2 дозы облучения условно можно считать малыми. Для этой группы на обеднение поверхности кремния влияет только электрическое поле положительно заряженного имплантированного в SiO_2 заряда ионов Ga^+ . Для этих участков качественно выполняется эффект компенсации поля имплантированного заряда электрическим полем смещения U_{dc} . Наблюдается удовлетворительная линейная аппроксимация зависимости U_{dc} от дозы облучения, рис. 6.

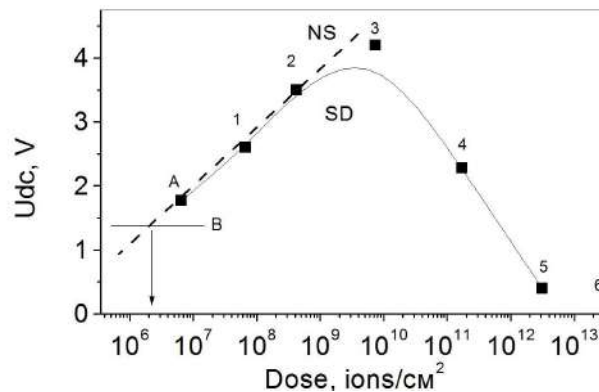


Рис. 6. Зависимость смещения U_{dc} перехода $\text{SD} \rightarrow \text{NS}$ от дозы облученного участка SiO_2 . «А» соответствует дозе облучения при индивидуальных проходах ионного пучка (снимок рис. 1d); «В» – порог визуализации прямоугольников «В» в ЖК-ячейке (рис. 7b)

Fig. 6. Dependence of the bias U_{dc} of the $\text{SD} \rightarrow \text{NS}$ transition on the irradiated dose of the SiO_2 areas. “A” corresponds to the irradiation dose of individual passes of the ion beam (image in Fig. 1d); “B” is the visualization threshold of rectangles “B” in the LC cell (Fig. 7b)

Для второй группы участков (дозы облучения условно можно считать средними) поведение светочувствительности от смещения U_{dc} противоположное: переход $\text{SD} > \text{NS}$ при росте U_{dc} наступает раньше на участке с большей дозой облучения (5-й участок), а затем на участке с меньшей дозой (4-й участок). Такой ход зависимости U_{dc} от дозы облучения можно объяснить следующим образом. С увеличением дозы облучения растет имплантированный положительный заряд, но одновременно нелинейно растет концентрация ловушек электронов [15] на дефектах SiO_2 . Электрическое поле локализованного на ловушках отрицательного заряда электронов компенсирует влияние имплантированного положительного заряда ионов Ga^+ .

Для третьей группы (6-й участок) дозы облучения пленки SiO_2 условно можно считать большими. К последствиям облучения большой дозой можно отнести: (1) светочувствительность SD типа 6-го участка для всех положительных и отрицательных значений смещения U_{dc} , а также (2) явное отсутствие рассеяния света на этом участке (рис. 1b). Для таких доз облучения пленки SiO_2 , по-всей видимости, добавляется эффект утечки в Si положительного заряда (дырок) по дефектам в SiO_2 [16, 17, 18]. Ток утечки при отрицательном смещении U_{dc} поддерживает малую толщину обеднённого слоя в кремнии, необходимую для SD типа светочувствительности.

О высоком разрешении, с точки зрения метода оптической микроскопии и чувствительности описываемого ЖК метода визуализации распределения имплантированного заряда в диэлектрике SiO_2 , указывают следующие экспериментальные факты. На рис. 7a представлено изображение фрагмента ЖК-ячейки, которое соответствует участку «А» в окрестности границы «G» полного растра финального снимка (на рис. 1d отмечен буквой «А»). Хорошо видно, что в ЖК-ячейке визуализируются отдельные единичные проходы ионного пучка по поверхности SiO_2 с разрешением ~ 7 мкм/(линия).

На рис. 7b представлено поляризационное изображение в ЖК-ячейке поверхности SiO_2 , на которой были выполнены сканы в виде прямоугольников «В» при «настройке» ионного пучка. Длительность облучения указанных участков SiO_2 в данном случае не фиксировалась, но визуализация этих прямоугольных сканов осуществляется при $U_{dc} = +1.35\text{В}$, что меньше смещения U_{dc} визуализации области «А», (рис. 7a). По пересечению линейной аппроксимации смещения U_{dc} от дозы с порогом визуализации участка «В» (рис. 6) получается доза облучения $\sim 2 \cdot 10^6$ ион/см². Эту величину дозы облучения SiO_2 , по всей видимости, можно рассматривать (для данного эксперимента по облучению), как оценку наименьшей дозы, которую возможно зарегистрировать в ЖК-ячейке.

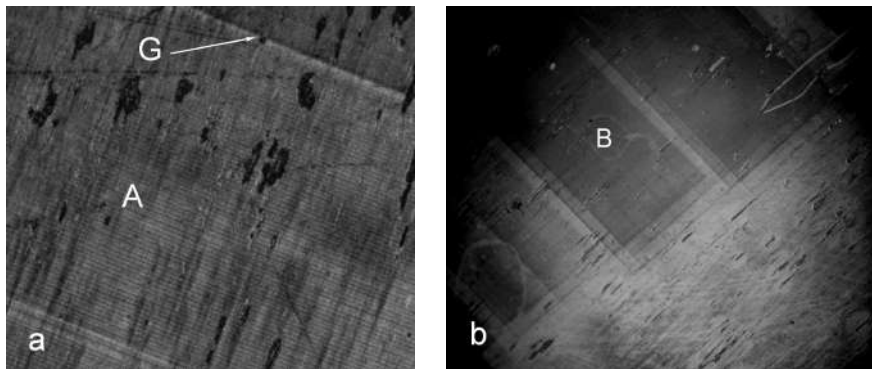


Рис. 7. Визуализация в ЖК-ячейке поверхностей SiO_2 , облученных малыми дозами.

Частота 100 кГц. $U_{ac} = 4\text{В}$. а) Визуализация в ЖК-ячейке индивидуальных проходов ионного пучка по поверхности SiO_2 в окрестности фрагмента «А» поверхности SiO_2 возле края «G» снимка, отображенного на рис. 1d. $U_{dc} = 1,77\text{В}$.

б) Визуализация прямоугольников «В» на SiO_2 , сформированных при «настройках» ионного пучка. $U_{dc} = 1,35\text{В}$
 Fig. 7. Visualization of SiO_2 surfaces irradiated with low doses in an LC cell. Frequency 100 kHz. $U_{ac} = 4\text{ V}$. a) Visualization in an LC cell of individual passes of the ion beam on the SiO_2 surface in the vicinity of fragment “A” of the SiO_2 surface located near the edge “G” of the image shown in Fig. 1d. $U_{dc} = 1.77\text{ V}$. b) Visualization of rectangles “B” on SiO_2 formed during “adjustments” of the ion beam. $U_{dc} = 1.35\text{ V}$

3. Заключение. Таким образом, экспериментально показано, что в ЖК-ячейке, в которой одна из подложек является структурой SiO_2/Si с имплантированным зарядом в пленке SiO_2 с помощью сфокусированного пучка ионов галлия в сканирующем ионном микроскопе возможна визуализация в плоскости ячейки распределения этого заряда посредством эффекта Фредерикса. Исследовались два варианта использования структуры SiO_2/Si : (1) без дополнительной обработки облученной поверхности SiO_2 для получения предпочтительной ориентации молекул ЖК, и (2) с нанесением на облученную поверхность SiO_2 полиимидной пленки, которая выполняла две функции, а именно, исключение непосредственного влияния имплантированного заряда на ориентацию молекул ЖК и формирование планарной ориентации молекул ЖК. В первом варианте использования структуры визуализация облученных участков SiO_2 становится возможной благодаря различию в двулучепреломлении ЖК на участках с разной дозой облучения. Установлена зависимость порогового напряжения эффекта Фредерикса и напряжения последнего максимума пропускаемого ЖК-слоя при интерференции поляризованного света от дозы облучения. Во-втором случае визуализация облученных участков поверхности SiO_2 с полиимидным покрытием осуществляется благодаря перераспределению приложенного к ЖК-ячейке напряжения между слоем ЖК и структурой SiO_2/Si , которое вызвано появлением обедненного приповерхностного слоя в кремнии. Исследование светочувствительности ЖК-ячейки позволяет предположить, что на обеднение кремния оказывают влияние электрическое поле имплантированного заряда в SiO_2 , а также при больших дозах облучения токи утечек в Si через дефектные участки пленки SiO_2 .

Список литературы

1. Маллер Р., Кейминс Т. Элементы интегральных схем. Пер.с англ. М.:Мир; 1989. 433 с.
2. Huang Y., Bhowmik A., Bos P.J. Characterization of ionic impurities adsorbed onto a SiO_x alignment film. *Japanese Journal of Applied Physics*. 2012;51:031701-031711. DOI: 10.1143/JJAP.51.031701
3. Choi J., Lee H.H., Ahn J., Seo S.H., Shin J.K. Differential-mode biosensor using dual extended gate metal oxide semiconductor field effect transistors. *Japanese Journal of Applied Physics*. 2012;51:06FG05-06FG10. DOI: 10.1143/JJAP.51.06FG05
4. Кучеев С.И. Переключение ориентации нематика обусловленное диффузией фосфолипида в МДП структуре. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2016;27(248)45:115–120.
5. Захвалинский В.С., Кучеев С.И., Межаков Н.Н., Перервенко Э.О., Пилюк Е.А. Ионная адсорбция и ориентация нематика на карбиде кремния в нематической ячейке. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2014;25(196)37:138-142.
6. Hajmirzaheydarali M., Sadeghipari M., Akbari M., Shahsafi A., Mohajerzadeh S. Nano-textured high sensitivity ion sensitive field effect transistors. *Journal of Applied Physics*. 2016;119:054303-054311. DOI:10.1063/1.4940915
7. Jang H.J., Cho W.J. Fabrication of high performance ion-sensitive field-effect transistors using an engineered sensing membrane for bio-sensor application. *Japanese Journal of Applied Physics*. 2012;51:02BL05-02BL09. DOI:10.1143/JJAP.51.02BL05
8. Choudhary A., George T.F., Li G. Conjugation of nanomaterials and nematic liquid crystals for futuristic applications and biosensors. *Biosensors*. 2018;8:69-86. DOI:10.3390/bios8030069

9. Валетова Е.А., Колесников Д.А., Кучеев С.И. Адсорбция и переориентация нематика на наноразмерной углеродной плёнке, индуцированная парами органических растворителей. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2017;50(1):64–72.
10. Lyubchenko Yu. Direct AFM visualization of the nanoscale dynamics of biomolecular complexes. *Journal of Physics D: Applied Physics.* 2018;51:403001-403018. DOI: 10.1088/1361-6463/aad898
11. Kim J., Choi MH., Jung GE., Ferhan AR., Cho NJ., Cho SJ. Dimensional comparison between amplitude-modulation atomic force microscopy and scanning ion conductance microscopy of biological samples. *Japanese Journal of Applied Physics.* 2016;55:08NB18-08NB23. DOI:10.7567/JJAP.55.08NB18
12. Blinov L.M., Chigrinov V.G. *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials.* New York: Springer; 1993. 464 p.
13. Кучеев С.И., Тучина Ю. С. О возможности контролируемой ориентации нематического жидкого кристалла на кремнии, обработанном фокусированным пучком ионов Ga. *Журнал технической физики.* 2010;80(6):131-134. DOI:10.1134/S1063784210060253
14. Гончаров И.Ю., Колесников Д.А., Кучеев С.И., Омельченко Е.И., Тучина Ю.С. Обеднение кремния, облученного фокусированным пучком ионов Ga в структуре Si/нематик/электрод. *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика.* 2012;23(142):29:122-127.
15. Hoffman A., Andrienko I., Jamieson DN., Prawer S. Electron trapping and detrapping in ion-beam-damaged diamond surfaces. *Applied Physics Letters.* 2005;86:044103-044106.
16. Рау Э.И., Татаринцев А.А., Зыкова Е.Ю., Иваненко И.П., Купреенко С.Ю., Миннебаев К.Ф., Хайдаров А.А. Электронно-лучевая зарядка диэлектриков, предварительно облученных ионами и электронами средних энергий. *Физика твердого тела.* 2017;59(8):1504-1513.
17. Cornet N., Goeriot D., Guerret-Piecourt C., Juve D., Treheux D., Touzin M., Fitting HJ. Electron beam charging of insulators with surface layer and leakage currents. *Journal of Applied Physics.* 2008;103:064110-064123.
18. Schuegraf KF, Hu C. Metal-oxide-semiconductor field effect transistor substrate current during Fowler Nordheim tunneling stress and silicon dioxide reliability. *Journal of Applied Physics.* 1994;76:3695–3700. DOI:10.1063/1.357438

References

1. Muller R., Kamins T. *Device electronics for integrated circuits.* New York, Wiley; 1986. 433 p.
2. Huang Y., Bhowmik A., Bos PJ. Characterization of ionic impurities adsorbed onto a 5⁰ SiOx alignment film. *Japanese Journal of Applied Physics.* 2012;51:031701-031711. DOI: 10.1143/JJAP.51.031701
3. Choi J., Lee HH., Ahn J., Seo SH., Shin JK. Differential-mode biosensor using dual extended gate metal oxide semiconductor field effect transistors. *Japanese Journal of Applied Physics.* 2012;51:06FG05-06FG10. DOI: 10.1143/JJAP.51.06FG05
4. Kucheev SI. Pereklucheniye orientatsiyi nematica obuslovlennoe diffuziyey fosfolipida v MDP strukture [Switching orientation of nematic due to phospholipid diffusion in the MIS structure]. *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathem. Physics.* 2016;27(248):45:115-120. (In Russian)
5. Zahvalinski VS., Kucheev SI., Mezhakov NN., Perervenko EO., Piluk EA. Ionnaya adsorbsiya i orientatsiya namatica na karbite kremiya v nematicheskoi yacheike [The ionic adsorption and the orientation of the nematic on the silicon carbide in the nematic cell]. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathem. Physics.* 2014;25(196):37:138-142. (In Russian)
6. Hajmirzaheydarali M., Sadeghipari M., Akbari M., Shahsafi A., Mohajerzadeh S. Nano-textured high sensitivity ion sensitive field effect transistors. *Journal of Applied Physics.* 2016;119:054303-054311. DOI:10.1063/1.4940915
7. Jang HJ., Cho WJ. Fabrication of high performance ion-sensitive field-effect transistors using an engineered sensing membrane for bio-sensor application. *Japanese Journal of Applied Physics.* 2012;51:02BL05-02BL09. DOI:10.1143/JJAP.51.02BL05
8. Choudhary A., George TF., Li G. Conjugation of nanomaterials and nematic liquid crystals for futuristic applications and biosensors. *Biosensors.* 2018;8:69-86. DOI:10.3390/bios8030069
9. Valetova EA., Kolesnikov DA., Kucheev SI. Adsorbtsiya i pereorientatsiya nematika na nanorazmernoy uglerodnoy plyonke, indutsirovannaya parami organicheskikh rastvoriteley [Adsorption and reorientation of a nematic on a nanoscale carbon film induced by vapors of organic solvents]. *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathem. Physics.* 2017;50(1):64-72. (In Russian)
10. Lyubchenko Yu. Direct AFM visualization of the nanoscale dynamics of biomolecular complexes. *Journal of Physics D: Applied Physics.* 2018;51:403001-403018. DOI: 10.1088/1361-6463/aad898
11. Kim J., Choi MH., Jung GE., Ferhan AR., Cho NJ., Cho SJ. Dimensional comparison between amplitude-modulation atomic force microscopy and scanning ion conductance microscopy of biological samples. *Japanese Journal of Applied Physics.* 2016;55:08NB18-08NB23. DOI:10.7567/JJAP.55.08NB18
12. Blinov LM., Chigrinov VG. *Electrooptic Effects in Liquid Crystal Materials.* New York: Springer; 1993. 464 p.
13. Kucheev SI., Tuchina YuS. On the control of the nematic orientation on the silicon surface processed by a focused gallium ion beam. *Technical Physics.* 2010;55(6):883–886. DOI: 10.1134/S1063784210060253

14. Goncharov IYu., Kolesnikov DA., Kucheev SI., Omelchenko EI., Tuchina YuS. Obednenie kremniya, obluchennogo fokusirovannim puchkom ionov Ga v strukture Si/nematik/electrod[Depletion of silicon treated by Ga focused ion beam in Si/nematic/electrod structure]. *Belgorod State University Scientific bulletin. Mathem. Physics.* 2012;23(142)29:122-127. (In Russian)
15. Hoffman A., Andrienko I., Jamieson DN., Prawer S. Electron trapping and detrapping in ion-beam-damaged diamond surfaces. *Applied Physics Letters.* 2005;86:044103-044106.
16. Rau EI., Tatarintsev AA., Zykova EYu., Ivanenko IP., Kupreenko SYu., Minnebaev KF., Khaidarov AA. Electron-beam charging of dielectrics preirradiated with moderate-energy ions and electrons. *Physics of the Solid State.* 2017;59(8):1526–1535. DOI:10.21883/FTT.2017.08.44749.460
17. Cornet N., Goeriot D., Guerret-Piecourt C., Juve D., Treheux D., Touzin M., Fitting HJ. Electron beam charging of insulators with surface layer and leakage currents. *Journal of Applied Physics.* 2008;103:064110-064123.
18. Schuegraf KF., Hu C. Metal–oxide–semiconductor field effect transistor substrate current during Fowler Nordheim tunneling stress and silicon dioxide reliability. *Journal of Applied Physics.* 1994;76:3695–3700. DOI:10.1063/1.357438

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 26.02.2026

Received February 26, 2026

Поступила после рецензирования 05.03.2026

Revised March 5, 2026

Принята к публикации 11.05.2026

Accepted May 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Колесников Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Кучеев Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Dmitry A. Kolesnikov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher at the Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Sergey I. Kucheev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Особенности термофоретического движения крупной испаряющейся капли в бинарной газовой смеси при малых относительных перепадах температуры

Малай Н. В.^{ID}, Сохань П. В.^{ID}

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
malay@bsuedu.ru, sokhanp95@gmail.com

Аннотация. В квазистационарном приближении при малых числах Стокса, тепловом и диффузионном числах Пекле рассматривается влияние тепло- и массопереноса на термофорез крупной испаряющейся сферической капли в бинарной газовой смеси. Линеаризованная по скорости система уравнений Навье – Стокса, описывающая поля скорости и давления вне и внутри испаряющейся капли, конвективное уравнение теплопереноса и уравнение диффузии решались методом теории возмущения. В качестве малого параметра использовался относительный перепад температуры на размере частицы. Получены аналитические выражения для силы и скорости термофореза при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности и проведены качественные оценки влияния тепло- и массообмена на скорость термофореза крупных испаряющихся капель.

Ключевые слова: термофорез испаряющихся капель, движение капель в поле градиента температуры

Для цитирования: Малай Н.В., Сохань П.В. Особенности термофоретического движения крупной испаряющейся капли в бинарной газовой смеси при малых относительных перепадах температуры. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(2):206–212. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-206-212 EDN GLEKJO

Original Research

Features of the Thermophoretic Motion of a Large Evaporating Droplet in a Binary Gas Mixture at Small Relative Temperature Differences

Nikolay V. Malai^{ID}, Pavel V. Sohan^{ID}

Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia,
malay@bsuedu.ru, sokhanp95@gmail.com

Abstract. The effect of heat and mass transfer on thermophoresis of a large evaporating spherical droplet in a binary gas mixture is considered in the quasi-stationary approximation for small Stokes numbers, thermal and diffusion Peclet numbers. The velocity-linearized system of Navier-Stokes equations describing the velocity and pressure fields outside and inside the evaporating droplet, the convective heat transfer equation and the diffusion equation were solved using the perturbation theory method. The relative temperature difference on the particle size was used as a small parameter. Analytical expressions have been obtained for the strength and velocity of thermophoresis at small relative temperature differences in its vicinity, and qualitative estimates of the effect of heat and mass transfer on the thermophoresis rate of large evaporating droplets have been carried out.

Keywords: Thermophoresis of Evaporating Droplets, the Movement of Droplets in the Field of a Temperature Gradient

For citation: Malai NV., Sohan PV. Features of the Thermophoretic Motion of a Large Evaporating Droplet in a Binary Gas Mixture at Small Relative Temperature Differences. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(2):206–212. (In Russ). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-2-206-212 EDN GLEKJO

1. Введение. В конденсированных средах широко используются термодинамические системы (газы и жидкости) со взвешенными в них частицами. Взвешенные частицы в газе называют аэрозолями, а в жидкости – гидрозольями. В первом случае термодинамическая система называется аэродисперсной, а во втором случае – гидродисперсной. В статье рассматриваются аэродисперсные системы. Однако многие результаты, полученные для аэродисперсных систем, могут быть применимы (с определенными допущениями) и для гидродисперсных систем.

Интерес к исследованию физических и динамических свойств аэрозолей и создание на их основе математических моделей, позволяющих оценивать поведение аэрозольной системы, не ослабевает, а только растет. Это обусловлено тем, что аэрозольные частицы, входящие в состав реальных аэродисперсных систем, могут быть твердыми, летучими (если на их поверхности происходит испарение или конденсация) и нелетучими (в случае отсутствия фазового перехода на их поверхности); кроме того, они могут иметь сферическую, цилиндрическую, сфероидальную или произвольную форму поверхности и различаться по размерам, обладать анизотропией теплофизических свойств и т. д.

Аэрозоли играют большую роль в природе и жизни человека. В связи с интенсификацией производства (использование авиационной и ракетной техники) аэрозольные загрязнения наиболее динамичны и представляют собой непосредственную угрозу окружающей среде.

Аэрозоли находят все более широкое применение в технике и технологии, сельском хозяйстве, медицине, быту и т. д. В промышленности аэрозоли используются в различных технологических процессах; аэрозольные препараты используются в медицине, например, для дезинфекции и ингаляции; в ветеринарии – для обработки животных; в сельском хозяйстве – для защиты посевов от вредителей и т. д. Это явление применяется для улавливания частиц; при фракционировании частиц в полевых условиях; термофорез предложен в качестве механизма сортировки одностенных углеродных нанотрубок. Несмотря на относительную малость характерных градиентов температуры в тропосфере и стратосфере по сравнению с используемыми в различных технологических процессах, термофорез может играть важную роль в физике облаков и очистке атмосферы от аэрозольных частиц и т. д.

Среднее расстояние между аэрозольными частицами у значительной части встречающихся на практике аэродисперсных систем намного больше характерного размера частиц. В таких системах учет влияния аэрозоля на развитие физического процесса можно проводить, основываясь на знании законов динамики движения и тепло- и массообмена с бесконечной окружающей средой отдельных аэрозольных частиц.

Таким образом, важной причиной возрастающего интереса к изучению аэродисперсных систем является разнообразие и фундаментальный характер задач, которые возникают в этой области [1, 2, 3, 4, 5]. С учетом этого, одной из основных проблем механики аэродисперсных систем, активно разрабатываемой как в нашей стране, так и за рубежом, является проблема теоретического описания поведения взвешенных частиц в неоднородных аэродисперсных системах и в первую очередь – по температуре. Без знания закономерностей этого поведения невозможно математическое моделирование эволюции аэродисперсной системы и решение такого важного вопроса, как целенаправленное воздействие на аэрозоли.

В неравновесных по температуре термодинамических аэродисперсных системах возникает упорядоченное движение взвешенных в этих системах частиц. Это движение обусловлено силами молекулярной природы. В частности, так называемое термофоретическое движение [6, 7], которое, обусловлено наличием в газообразной среде градиента температуры.

Остановимся вкратце на механизме возникновения термофоретического движения аэрозольной частицы при малых числах Кнудсена в газообразной среде, в которой с помощью внешних источников поддерживается постоянный малый градиент температуры. Если теплопроводность частицы относительно невелика, ее сторона, обращенная к «горячей» области газа, становится более нагретой, и на поверхности частицы возникает наведенный градиент температуры, сопоставимый с аналогичным градиентом в газе. В результате вдоль поверхности возникает явление, которое в литературе называют тепловым скольжением газа, направленное от холодной к горячей области, а частица испытывает силу в направлении, противоположном градиенту температуры в газе. Эту силу называют термофоретической. Наряду с термофоретической силой действует сила вязкого сопротивления среды (сила Стокса). Когда обе эти силы уравниваются, частица движется прямолинейно и равномерно со скоростью U . Скорость равномерного движения частицы называют термофоретической скоростью и обозначают U_{th} ($U_{th} = U$) [6, 7]. Таким образом, термофоретическая сила перемещает частицы из области с более высокой в области с более низкой температурой.

2. Математическая постановка задачи. Основные уравнения и граничные условия.

В неограниченной неподвижной вязкой бинарной газовой смеси с помощью внешних источников поддерживается постоянный малый градиент температуры ∇T , направленный вдоль полярной оси $z = r \cos \theta$ ($\nabla T \parallel Oz$). В эту неограниченную неподвижную бинарную газовую смесь с температурой T_e , плотностью ρ_e , теплопроводностью λ_e , коэффициентом диффузии D_{12} и вязкостью μ_e , помещается крупная [6] равномерно нагретая испаряющаяся капля сферической формы радиусом R с плотностью ρ_i , теплопроводностью λ_i и вязкостью μ_i .

В статье рассматривается малый относительный перепад температуры $\Theta(T)$, под которым понимают отношение разности между средней температурой поверхности частицы T_{IS} и температурой области вдали от нее T_∞ к последней, то есть величину $\Theta(T) = (T_{IS} - T_\infty)/T_\infty$. Относительный перепад температуры считается малым при выполнении неравенства $\Theta(T) \ll 1$. При выполнении этого условия коэффициенты теплопроводности, диффузии, динамической и кинематической вязкости бинарной газовой смеси можно считать постоянными величинами. Движение капли происходит при малых числах Рейнольдса и Пекле.

Термофоретическое движение осложнено нагревом поверхности капли, т. е. внутри капли действуют тепловые источники плотностью q_i , за счёт которых происходит однородный нагрев ее поверхности. Нагрев поверхности может происходить, например, если капля находится в поле лазерного излучения. В этом случае плотность тепловых источников можно оценить с помощью формулы $q_i = \frac{4\pi n_i a_i}{n_e \lambda_0} I_0 B(r)$ [8]. Здесь $m_i = n_i + i a_i$ – комплексный показатель преломления капли, n_e – показатель преломления среды,

λ_0, I_0 – длина волны и интенсивность падающего излучения, $B(\mathbf{r})$ – функция координат, рассчитываемая по теории Ми [8]. За счет нагрева поверхности частицы мы можем также влиять на силу и скорость термофореза, а не только за счет градиента температуры ∇T , что важно в практических приложениях термофореза. Индексы «e» и «i» здесь и далее относятся к газу и частице соответственно; индексом «S» обозначены значения физических величин, взятых при средней температуре поверхности частицы и индексом « ∞ » – физические величины, характеризующие газовую среду вдали от частицы.

Бинарная газовая смесь состоит из двух компонентов, относительные концентрации которых обозначим через C_1 и C_2 . При этом $C_1 = \frac{n_1}{n_e}$, $C_2 = \frac{n_2}{n_e}$, $n_e = n_1 + n_2$ – полное количество молекул в единице объема смеси, $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$, $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$, m_1, n_1 и m_2, n_2 – масса и числовая концентрация молекул первого и второго компонентов смеси. Первый компонент с концентрацией C_1 по физическому составу совпадает с веществом жидкой капли, второй компонент с концентрацией C_1 считается основным (несущим).

Предполагается, что $C_1 \ll C_2$, т. е. рассматривается диффузионный режим испарения, в котором основное влияние на процесс тепломассопереноса в окрестности капли определяется молекулярной диффузией. Учитываются циркуляция вещества внутри капли и испарение (реактивный эффект). Радиус капли считается неизменным (время изменения радиуса капли значительно больше времени релаксации диффузионных и тепловых неоднородностей вблизи нее) [9]. При движении капля сохраняет сферическую форму, т. е. силы поверхностного натяжения значительно больше силы вязкого сопротивления. Вследствие малого времени тепловой и диффузионной релаксации процесс тепломассопереноса в системе частица – газ является квазистационарным и свободной конвекцией можно пренебречь (число Грасгофа мало). Задача решается гидродинамическим методом, т. е. решаются уравнения гидродинамики и тепломассопереноса с соответствующими граничными условиями.

С учетом выбранной системы координат (газ на бесконечности покоится) и допущений векторные поля среднemasовых скоростей $U_e(\mathbf{r})$ и $U_i(\mathbf{r})$, распределения давлений $P_e(\mathbf{r})$ и $P_i(\mathbf{r})$, относительной концентрации $C_1(\mathbf{r})$ летучего компонента в бинарной газовой смеси, скалярных полей температур $T_e(\mathbf{r})$ и $T_i(\mathbf{r})$ вне и внутри капли описываются системой уравнений (1)–(3) [10, 11], смешанных краевых условий (4)–(12) [12]. Векторные и скалярные поля должны быть симметричными относительно оси Oz , проходящей через центр масс частицы и параллельной вектору скорости U , а вектор U_e должен быть расположен в плоскости, проходящей через эту ось. Задача решается в сферической системе координат $y = r/R, \theta, \varphi$

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e, \operatorname{div}(\rho_e U_e) = 0, \mu_i \Delta U_i = \nabla P_i, \operatorname{div}(\rho_i U_i) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_e c_p (U_e \nabla) T_e = \lambda_e \Delta T_e, \Delta C_1 = 0, \quad (2)$$

$$\Delta T_i = -\frac{q_i}{\lambda_i}. \quad (3)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} U_r^{(e)}(y, \theta) = 0, \lim_{y \rightarrow \infty} U_\theta^{(e)}(y, \theta) = 0, \lim_{y \rightarrow \infty} P_e(y, \theta) = P_\infty, \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T_e(y, \theta) = T_\infty + |\nabla T| R y \cos \theta, \lim_{y \rightarrow \infty} C_1(y, \theta) = C_0, \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} P_i(y, \theta) \neq \infty, \lim_{y \rightarrow 0} |U_i(y, \theta)| \neq \infty, \lim_{y \rightarrow 0} T_i(y, \theta) \neq \infty, \quad (6)$$

$$\lim_{y=1} \left(n_2 U_r^{(e)} + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} - n_2 U \cos \theta \right) = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{y=1} \left(n_1 U_r^{(e)} - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y} \right) = \lim_{y=1} \left(n_1 U \cos \theta + n_{1i} U_r^{(i)} \right), \quad (8)$$

$$\lim_{y=1} \left(U_\theta^{(e)} - U_\theta^{(i)} \right) = \lim_{y=1} \left(-U \sin \theta + K_{TS} \frac{v_e}{RT_e} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \frac{\partial C_1}{\partial \theta} \right), \quad (9)$$

$$\lim_{y=1} T_e = \lim_{y=1} T_i, \lim_{y=1} \left(-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial y} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) = \lim_{y=1} \left(L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} D_{12} \frac{\partial C_1}{\partial y} - \sigma_0 \sigma_1 R (T_i^4 - T_\infty^4) \right), \quad (10)$$

$$\lim_{y=1} \left(C_1(y, \theta) \right) = \lim_{y=1} \left(C_{1S}^{(H)} + C_{1S}^* \delta T_i \right), \quad (11)$$

$$\lim_{y=1} \left(\mu_e \left[\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{y} \right] + \frac{\partial \sigma(y, \theta)}{\partial T_i(y, \theta)} \frac{\partial T_i(y, \theta)}{\partial \theta} \right) = \lim_{y=1} \left(\mu_i \left[\frac{\partial U_\theta^{(i)}}{\partial y} + \frac{1}{y} \frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(i)}}{y} \right] \right). \quad (12)$$

Здесь $U_r^{(e)}, U_\theta^{(e)}, U_r^{(i)}, U_\theta^{(i)}$ – компоненты массовых скоростей U_e и U_i , L – удельная теплота испарения жидкости, D_{12}, λ_e – коэффициенты взаимной диффузии и теплопроводности газовой смеси, λ_i – коэффициент теплопроводности капли, σ_0 – постоянная Стефана – Больцмана, σ_1 – интегральная степень черноты частицы, K_{TS}, K_{DS} – коэффициенты теплового и диффузионного скольжения, которые определяются из решения в слое Кнудсена уравнения Больцмана и в общем случае они зависят от

вида использованной модели межмолекулярного взаимодействия и средней температуры поверхности частицы [6, 13, 14] и при коэффициентах аккомодации по энергии и тангенциального импульса равных единице $K_{TS} = 1.161$, $K_{DS} = 0.3$ [6, 13, 14]. Невозмущенные параметры (T_∞ , P_∞ , C_0) наблюдаются в месте нахождения геометрического центра капли при ее отсутствии (величина C_0 определяется через численные концентрации n_1 и n_2 газовых молекул).

На поверхности капли ($y = 1$) учитываются следующие условия: непроницаемость радиального потока массы для второго и непрерывность радиального потока для первого компонентов бинарной газовой смеси (7)–(8). Здесь $n_2 U_r(y, \theta)$, $n_1 U_r(y, \theta)$, $D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y}$, $D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{R \rho_e} \frac{\partial C_1}{\partial y}$ – радиальные конвективные и диффузионные потоки первой и второй компоненты, соответственно; в (9) учтены разность касательных составляющих скоростей внутренней и внешней сред, которая равна сумме тепловой и диффузионной скоростей скольжений; равенство температур и непрерывность радиальных потоков тепла с учетом тепла, идущего на фазовый переход вещества капли в первый компонент бинарной газовой смеси и на излучение учтены в (10); численная относительная концентрация молекул первого (испытывающего фазовый переход) компонента внешней смеси $C_1 = C_{1S}(T_{iS}$ у поверхности капли в линейном приближении по возмущению температуры $\delta T_i(y, \theta)$ удовлетворяет условию (11); $C_{1S}^{(H)}(T_{iS}) = n_{1S}^{(H)}/n_e$, $n_{1S}^{(H)}$ – насыщенная концентрация молекул первого компонента смеси, зависящая от средней температуры поверхности капли T_{iS} , в (12) учтено, что $C_{1S}^* = \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_{1S}^{(H)}}{\partial T_i}$ – производная от насыщенной концентрации и непрерывность касательных составляющих тензора вязких напряжений с учетом зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. На бесконечности ($y \rightarrow \infty$) справедливы краевые условия (4)–(5), конечность физических величин, характеризующих каплю при $y \rightarrow 0$, учтена в (6). Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные λ_e , μ_e и сохраняющиеся в процессе движения частицы R , T_∞ , $|\nabla T|$ и U . Из этих параметров можно составить безразмерную комбинацию, которая характеризует перепад температуры на размере частицы и играет роль малого параметра задачи $\varepsilon = R|\nabla T|/T_\infty \ll 1$ [6, 7]. При нахождении силы и скорости термофореза ограничимся первой поправкой малости. При $\varepsilon \ll 1$ решение уравнений газовой динамики будем искать в виде разложения по малому параметру, т. е. воспользуемся теорией возмущения [15].

3. Поля скоростей, давлений, температур и относительной концентрации первого компонента.

Общие решения системы уравнений (1), описывающей поля скоростей и давлений вне и внутри испаряющейся капли, удовлетворяющие краевым условиям вдали от капли и внутри неё, имеет вид [10, 11]:

$$U_r^{(e)}(y, \theta) = U \cos \theta \left(\frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y} \right), U_\theta^{(e)}(y, \theta) = -U \sin \theta \left(\frac{1A_1}{2y^3} + \frac{A_2}{2y} \right), P_e(y, \theta) = P_\infty + \frac{\mu_e}{R} U \cos \theta \frac{A_2}{y^2}, \quad (13)$$

$$U_r^{(i)}(y, \theta) = U \cos \theta \left(A_3 + A_4 y^2 \right), U_\theta^{(i)}(y, \theta) = -U \sin \theta \left(A_3 + 2A_4 y^2 \right), P_i(y, \theta) = P_0 + \frac{\mu_i}{R} U \cos \theta 10A_4 y. \quad (14)$$

Решения уравнений тепло- и массопереноса будем искать в виде:

$$t_e(y, \theta) = t_{e0}(y) + \varepsilon t_{e1}(y, \theta), t_i(y, \theta) = t_{i0}(y) + \varepsilon t_{i1}(y, \theta), C_1(y, \theta) = C_{10}(y) + \varepsilon C_{11}(y, \theta). \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнения (2)–(3), получаем:

$$t_{e0}(y) = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, t_{e1}(y, \theta) = \cos \theta \left[y + \frac{\Gamma_1}{y^2} + \frac{\omega}{2} \left(A_2 - \frac{A_1}{2y^3} \right) \right], \quad (16)$$

$$t_{i0}(y) = B_0 - q_i \frac{R^2}{6\lambda_i T_\infty} y^2, t_{i1}(y, \theta) = \cos \theta B_1 y, \quad (17)$$

$$C_{10}(y) = C_0 + \frac{M_0}{y}, C_{11}(y, \theta) = \cos \theta \frac{M_1}{y^2}. \quad (18)$$

Здесь $\omega = \Gamma_0 Pr$, Pr – число Прандтля [10, 11].

Постоянные интегрирования $A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, \Gamma_0, \Gamma_1, M_0$ и M_1 определяются из смешанных краевых условий на поверхности испаряющейся капли.

Среднее значение температуры поверхности капли $T_S = t_{iS} T_\infty$ определяется из решения следующей системы уравнений (19):

$$\begin{cases} t_{eS} = t_{iS}, \Gamma_0 = t_{eS} - 1, \\ \frac{\lambda_e}{\lambda_i} (t_{eS} - 1) = q_i \frac{R^2}{3\lambda_i T_\infty} + LD_{12} \frac{n_e^2 m_1 m_2}{T_\infty \lambda_i \rho_e} (C_0 - C_{1S}^{(H)}) - \sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_\infty^3}{\lambda_i} (t_{iS}^4 - 1). \end{cases} \quad (19)$$

Здесь $t_{eS} = t_{e0}(y = 1)$, $t_{iS} = t_{i0}(y = 1)$.

4. Сила и скорость термофореза. Анализ полученных результатов. После того как получены в первом приближении по ε выражения для полей температур вне и внутри испаряющейся капли и первого компонента бинарной газовой смеси, общая сила, действующая на каплю, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности капли (20) [10]:

$$F_z = \int_{(S)} (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi |_{r=R}. \quad (20)$$

Здесь

$$\sigma_{rr} = 2\mu_e \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left(\frac{\partial U_\theta^{(e)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(e)}}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^{(e)}}{r} \right).$$

Приравнявая общую силу, действующую на испаряющуюся каплю, к нулю (капля движется равномерно и прямолинейно), получаем следующее выражение для скорости термофореза (21):

$$\begin{aligned} U_{th} = & -\frac{1}{1 + \frac{2\mu_e}{3\mu_i}} \left\{ 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \left[K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} D_{12} C_{1S}^* T_\infty + \frac{R}{3\mu_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} + \frac{n_e^2}{n_2} D_{12} C_{1S}^* T_\infty \left(\frac{2}{n_{1i}} + \frac{m_1}{\rho_e} \times \right. \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left[1 + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} \right] \right] \frac{|\nabla T|}{T_\infty \delta} + \frac{\omega}{6\delta} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \left[K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} D_{12} C_{1S}^* T_\infty + \frac{R}{3\mu_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} + \frac{n_e^2}{n_2} D_{12} C_{1S}^* T_\infty \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{2}{n_{1i}} + \frac{m_1}{\rho_e} \left[1 + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} \right] \right) \right] \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}}{1 + \frac{2\mu_e}{3\mu_i}} \right) \right\} \mathbf{n}_z, \quad (21) \\ & \delta = 1 + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} + 4\sigma_0 \sigma_1 \frac{RT_\infty^3}{\lambda_i} t_{iS}^3 + 2L \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\lambda_e \rho_e} D_{12} C_{1S}^*. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{n}_z – единичный вектор в направлении оси Oz , $\omega = \Gamma_0 Pr$.

В работе получено выражение для термофоретической скорости крупной равномерно нагретой испаряющейся капли при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности с учетом влияния конвективного переноса тепла, реактивного эффекта, зависимости коэффициента поверхностного натяжения капли от температуры, внутренних течений и нагрева поверхности капли внутренними источниками тепла.

Выражение для термофоретической скорости крупной равномерно нагретой испаряющейся капли можно представить в виде суммы двух слагаемых: из “чистого” термофореза, пропорционального градиенту температуры $|\nabla T|$, и термофореза, обусловленного движением среды, т. е. учета конвективного члена в уравнении теплопроводности (2). За счет первого слагаемого частица стремится двигаться в сторону падения температуры во внешней газообразной среде (из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой); второе слагаемое пропорционально ω и по знаку совпадает с первым. Отметим, что для большинства газов число Прандтля порядка единицы. Следовательно, вклад конвективного теплообмена в скорость термофореза зависит от средней температуры поверхности частицы T_{iS} , которая определяется из решения системы уравнений (19), т. е. от нагрева поверхности частицы.

Для качественного анализа скорости термофореза крупной равномерно нагретой испаряющейся капли представим формулу (21) в виде суммы двух слагаемых:

$$U_{th} = f_{th}^{(1)} \frac{|\nabla T|}{T_\infty} \mathbf{n}_z + f_{th}^{(2)} \omega \mathbf{n}_z, \quad (22)$$

$$f_{th}^{(1)} = -\frac{2}{1 + \frac{2\mu_e}{3\mu_i}} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{\Omega_0}{\delta}, \quad f_{th}^{(2)} = -\frac{2}{1 + \frac{2\mu_e}{3\mu_i}} \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \frac{\Omega_0}{12\delta} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}}{1 + \frac{2\mu_e}{3\mu_i}} \right),$$

$$\Omega_0 = K_{TS} \frac{v_e}{t_{eS}} + K_{DS} D_{12} C_{1S}^* T_\infty + \frac{R}{3\mu_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t_i} + \frac{n_e^2}{n_2} D_{12} C_{1S}^* T_\infty \left(\frac{2}{n_{1i}} + \frac{m_1}{\rho_e} \left[1 + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} \right] \right).$$

Входящий в скорость термофореза коэффициент Ω_0 состоит из суммы четырех слагаемых: первое слагаемое, которое пропорционально коэффициенту теплового скольжения K_{TS} и за счет которого испаряющаяся капля стремится двигаться в сторону падения температуры во внешней среде, т. е. из области с более высокой температурой в область с более низкой температурой; четвертое слагаемое (описывающее реактивную часть импульса, действующего на каплю) связано с фазовым переходом и

циркуляцией вещества внутри капли (внутреннее течение); третье слагаемое обусловлено переменным межфазовым поверхностным натяжением на поверхности капли. В силу того, что для большинства жидкостей поверхностное натяжение уменьшается с ростом температуры ($\partial\sigma/\partial t_i < 0$), третье слагаемое дает вклад в скорость, направленный в сторону роста температуры во внешней к капле среде; за счет второго слагаемого (диффузионного скольжения, которое пропорционально коэффициенту K_{DS}) капля может двигаться, как в сторону роста, так и в сторону падения температуры (в зависимости от масс компонентов бинарной газовой смеси). Если масса молекул компонента внешней смеси $m_1 < m_2$, то $K_{DS} > 0$. В противном случае $K_{DS} < 0$. В противном случае $K_{DS} < 0$.

Отношение $f_{th}^{(2)}/f_{th}^{(1)}$ имеет вид:

$$\frac{f_{th}^{(2)}}{f_{th}^{(1)}} = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}}{1 + \frac{2\mu_e}{3\mu_i}} \right).$$

Рассмотрим каплю воды радиусом $R = 20 \cdot 10^{-6}$ м, взвешенной в воздухе при температуре 20°C и $\mu_e = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Па·с, $\mu_i = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Тогда получаем, что $f_{th}^{(2)}/f_{th}^{(1)} \approx 0.21$. Это отношение показывает умеренный вклад. Термофорез, обусловленный движением среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности (2)), составляет не более 21 процента от «чистого» термофореза, пропорционального градиенту температуры $|\nabla T|$.

При дальнейшем увеличении средней температуры поверхности уже необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. Уравнения газовой динамики становятся уже нелинейными и при решении такой системы возникают большие математические трудности. Следует отметить, что такие оценки были проведены (без учета вклада конвективного переноса тепла и частица считается однородной по своим теплофизическим характеристикам), например, в работах [16, 17], и показано, что зависимость скорости термофореза от средней температуры поверхности частицы, когда $(T_{is} - T_\infty)/T_\infty \gg 1$, носит нелинейный характер.

5. Заключение. В статье в квазистационарном приближении при малых числах Стокса, тепловом и диффузионном числах Пекле проведено теоретическое описание влияния тепло- и массопереноса на термофорез крупной испаряющейся сферической капли в бинарной газовой смеси, с учетом влияния на скорость термофореза нагрева поверхности частицы, конвективного теплообмена, реактивного эффекта и внутренних течений. Линеаризованная по скорости система уравнений Навье – Стокса, описывающая поля скорости и давления вне и внутри испаряющейся капли, конвективное уравнение теплопереноса и уравнение диффузии решались методом теории возмущения. В качестве малого параметра использовался относительный перепад температуры на размере частицы. Получены аналитические выражения для силы и скорости термофореза при малых относительных перепадах температуры в ее окрестности и проведены качественные оценки влияния теплообмена на скорость термофореза крупных испаряющихся капель. Анализ показал умеренный вклад движения среды (учет конвективного члена в уравнении теплопроводности) не более 21 процента.

Список литературы

- Berger C., Harvath H., Scindler W. The deposition of so or particles from hot gas streams through pipes. *Journal of Aerosol Science*. 1995;26:211–218.
- Selim A., Hossain M.A. and Rees D.A.S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis. *International Journal of Thermal Sciences*. 2003;42:973–982.
- Бубенчиков А.М., Потехаев А.И., Бубенчиков М.А. Термофорез ультрамелких и наноразмерных частиц. *Известия вузов. Физика*. 2013;56(7):59–61.
- Reineck P, Wienken CJ, Braun D Thermophoresis of single stranded DNA. *Известия вузов. Физика*. 2010;31(1):279–286.
- Jerabek-Willemsen M, Andre T, Wanner A, Roth HM, Duhr S, Baaske P, Breitsprecher D. MicroScale Thermophoresis: Interaction analysis and beyond. *Journal of Molecular Structure*. 2014;107:101–113.
- Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс; 1985. 207 с.
- Шукин Е.Р., Малай Н.В. Фотофоретическое и термодиффузиофоретическое движение нагретых нелетучих аэрозольных частиц. *Инженерно-физический журнал*. 1988;54(4):628–634.
- Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир; 1986. 660 с.
- Шукин Е. Р., Яламов Ю. И., Шулиманова З. Л. Избранные вопросы физики аэрозолей. М.: МПУ; 1992. 297 с.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит; 2003. 731 с.
- Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир; 1976. 630 с.

12. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука; 1972. 735 с.
13. Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И. 1980. К вопросу о термофорезе умеренно крупных аэрозольных частиц. *Журнал технической физики*. 1980;50(1):158–160.
14. Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. 1980. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны. *ДАН СССР*. 1980;254(2):1047–1050.
15. Найфэ А. Введение в методы возмущения. М.: Мир; 1984. 525 с.
16. Малай Н.В., Шукин Е.Р., Стукалов А.А., Рязанов К.С. Гравитационное движение равномерно нагретой твердой частицы в газообразной среде. *Прикладная механика и техническая физика*. 1980;1:74–80.
17. Малай Н.В., Лиманская А.В., Шукин Е.Р. Термофоретическое движение нагретых крупных аэрозольных частиц сферической формы. *Прикладная механика и техническая физика*. 2016;57(2):164–171.

References

1. Berger C., Harvath H., Scindler W. The deposition of so or particles from hot gas streams through pipes. *Journal of Aerosol Science*. 1995;26:211–218.
2. Selim A., Hossain M.A. and Rees D.A.S. The effect of surface mass transfer on mixed convection flow past a heated vertical flat permeable plate with thermophoresis. *International Journal of Thermal Sciences*. 2003;42:973–982.
3. Bubenchikov A.M., Potekaev A.I., Bubenchikov M.A. Thermophoresis of ultrafine and nanoscale particles. *Izvestiya vuzov. Physics*. 2013;56(7):59–61.
4. Reineck P, Wienken CJ, Braun D Thermophoresis of single stranded DNA. *Izvestiya vuzov. Physics*. 2010;31(1):279–286.
5. Jerabek-Willemsen M, Andre T, Wanner A, Roth HM, Duhr S, Baaske P, Breitsprecher D. MicroScale Thermophoresis: Interaction analysis and beyond. *Journal of Molecular Structure*. 2014;107:101–113.
6. Galoyan V.S., Yalamov Yu.I. Dynamics of droplets in inhomogeneous viscous media. Yerevan: Luys; 1985. 207 p. (In Russ.)
7. Shchukin E.R., Malai N.V. Photophoretic and thermodiffusiophoretic motion of heated non-volatile aerosol particles. *Engineering and Physics Journal*. 1988;54(4):628–634.
8. Boren K., Hafman D. Absorption and scattering of light by small particles. Moscow: Mir; 1986. 660 p. (In Russ.)
9. Shchukin E. R., Yalamov Yu. I., Shulimanova Z. L. Selected issues of aerosol physics. Moscow: MPU; 1992. 297 p. (In Russ.)
10. Landau L.D., Lifshits E.M. Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics. Moscow: Fizmatlit; 2003. 731 p. (In Russ.)
11. Happel J., Brenner G. Hydrodynamics at small Reynolds numbers. Moscow: Mir; 1976. 630 p. (In Russ.)
12. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka; 1972. 735 p. (In Russ.)
13. Poddoskin A.B., Yushkanov A.A., Yalamov Yu.I. 1980. On the issue of thermophoresis of moderately large aerosol particles. *Journal of Technical Physics*. 1980;50(1):158–160.
14. Yalamov Yu.I., Poddoskin A.B., Yushkanov A.A. 1980. On boundary conditions during the flow of an inhomogeneously heated gas around a spherical surface of low curvature. *Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1980;254(2):1047–1050.
15. Naife A. Introduction to perturbation methods. Moscow: Mir; 1984. 525 p. (In Russ.)
16. Malai N.V., Shchukin E.R., Stukalov A.A., Ryazanov K.S. Gravitational motion of a uniformly heated solid particle in a gaseous medium. *Applied mechanics and technical physics*. 1980;1:74–80.
17. Malai N.V., Limanskaya A.V., Shchukin E.R. Thermophoretic motion of heated large spherical aerosol particles. *Applied mechanics and technical physics*. 2016;57(2):164–171.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.02.2026

Received February 20, 2026

Поступила после рецензирования 06.04.2026

Revised April 6, 2026

Принята к публикации 18.05.2026

Accepted May 18, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Малай Николай Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Сохань Павел Витальевич – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nikolay V. Malai – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Pavel V. Sohan – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)