



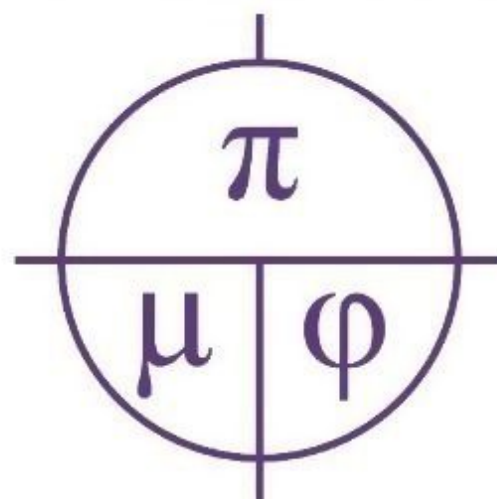
Белгородский
государственный
национальный
исследовательский
университет

ISSN 2687-0959(online)



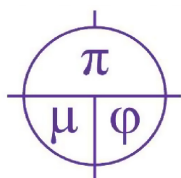
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА & ФИЗИКА

APPLIED MATHEMATICS & PHYSICS



2026. Том 58, № 3





Прикладная математика & Физика

2026. Том 58, № 3

Основан в 1995 г. Журнал принимает к публикации оригинальные и обзорные статьи отечественных и зарубежных авторов по всем разделам современной математики и физики, и их приложений, исторические обзоры научной деятельности выдающихся учёных и краткие сообщения о научной жизни и научных мероприятиях в России и за рубежом. Журнал включен в Перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук по следующим группам научных специальностей:

1.1. Математика и механика:

- 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки),
- 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки),
- 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки),
- 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки),

- 1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки);

1.2. Компьютерные науки и информатика:

- 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки);

1.3. Физические науки:

- 1.3.8. Физика конденсированного состояния (физико-математические науки).

До 2020 г. журнал издавался под названием «Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика».

УЧРЕДИТЕЛЬ:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Белгородский государственный национальный исследовательский университет».

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: В. Б. Васильев, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ»;

Заместители главного редактора:

А. В. Глушак, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Математика;

Ю. П. Вирченко, доктор физико-математических наук, НИУ «БелГУ», Физика. Математическое моделирование;

Ответственный секретарь: О. В. Чернова, кандидат физико-математических наук, НИУ «БелГУ».

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ:

Алимов Ш. А., д-р ф.-м. н., Ташкент, Узбекистан;
Алхутов Ю. А., д-р ф.-м. н., Владимир, Россия;
Ашпыралыев А., д-р ф.-м. н., Алматы, Казахстан;
Блажевич С. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Беляков А. Н., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Диблик Й., д-р ф.-м. н., Брно, Чешская Республика;
Жуковский Е. С. д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Каримов Ш.Т. д. ф.-м. н., Фергана, Узбекистан;
Кожевникова Л. М., д-р ф.-м. н., Стерлитамак, Россия;
Куликов А. Н., д-р ф.-м. н., Ярославль, Россия;
Ломов И. С., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Малай Н. В., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Меньших В. В., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Муравник А. Б., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;

Назаров А. И., д-р ф.-м. н., Санкт-Петербург, Россия;
Никуличева Т. Б., д-р ф.-м. н., Белгород, Россия;
Носков А. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Панов Е. Ю., д-р ф.-м. н., Великий Новгород, Россия;
Паровик Р. И., д-р ф.-м. н., Петропавловск-Камчатский, Россия;
Пенкин О. М., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Половинкин И. П., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия;
Радкевич Е. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Солдатов А. П., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Федоров В. Е., д-р ф.-м. н., Челябинск, Россия;
Шибков А. А., д-р ф.-м. н., Тамбов, Россия;
Шитикова М. В., д-р ф.-м. н., Москва, Россия;
Шишкина Э. Л., д-р ф.-м. н., Воронеж, Россия.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выходит 4 раза в год.

Выпускающий редактор: Ю. В. Мишенина

Корректурa Ю. В. Мишенина

Компьютерная верстка: О. В. Чернова

Оригинал-макет: В. Б. Васильев

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Гарнитура Times. Уч. изд. л. 12,0

Дата выхода 30.09.2026.

Оригинал-макет подготовлен центром полиграфического производства НИУ «БелГУ»

308015, г. Белгород, ул. Победы, 85.

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Лапин К. С., Кистенев К. Д.

Функционалы Ляпунова – Красовского и частичная эквивограниченность в пределе решений с частичным контролем предыстории 217

Казакевич К. И., Шабров С. А.

О достаточных условиях слабого экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильеса 226

Архипов В. П., Глушак А. В.

Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с двойным вырождением 232

Кожевникова Л. М., Малышева В. А.

Условия существования слабых решений эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником 248

Корнев С. В., Обуховский В. В., Гетманова Е. Н., Афонина С. Н.

Применение метода негладких интегральных направляющих функций для исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью 262

Алхутов Ю. А., Чечкин Г. А.

Однозначная разрешимость задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка наиболее общего вида 270

Григорьева Е. И.

Аналог теоремы Штейнгауза для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе 277

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Никулин И. С., Милостной Д. Н., Кунгурцев М. С., Воропаев В. С., Никуличева Т. Б., Ядута А. З.

Моделирование и прочностные свойства при изгибе эпоксидных композитов с вискерами сульфата кальция 291

Лекомцев Д. Г.

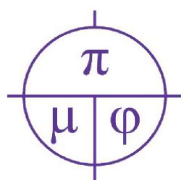
Численное исследование работы скважины с треугольным контуром питания в анизотропном однородном пласте 299

Бардакова И. Н.

Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде 307

Сафронов И. С., Ушаков А. И., Кобзарь А. Н.

Физико-механические эффекты при высокоскоростных ударных воздействиях на трехслойную панель микрометеоритной защиты 318



Applied Mathematics & Physics

2026. Volume 58, No 3

Founded in 1995. The journal accepts for publication original and review articles by domestic and foreign authors on all areas of modern mathematics and physics and their applications, historical reviews of the scientific activities of prominent scientists and brief reports on scientific life and scientific events in Russia and abroad. The journal is included into the List of Higher Attestation Commission of peer-reviewed scientific publications where the main scientific results of dissertations for obtaining scientific degrees of a candidate and doctor of science should be published in the following groups of scientific specialties:

1.1. Mathematics and Mechanics:

1.1.1. Material, Complex and Functional Analysis (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.4. Theory of Probability and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.5. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory and Discrete Mathematics (Physical and Mathematical Sciences),

1.1.6. Computational Mathematics (Physical and Mathematical Sciences);

1.2. Computer Science and Information Science:

1.2.2. Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software Packages (Physical and Mathematical Sciences);

1.3. Physical Sciences:

1.3.8. Condensed Matter Physics

(Physical and Mathematical Sciences).

Until 2020, the journal was published with the name «Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics».

FOUNDER:

Federal state autonomous educational establishment of higher education
"Belgorod National Research University".

EDITORIAL BOARD:

Chief Editor: V. B. Vasilyev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University;

Deputy Editor-in-Chief:

A. V. Glushak, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Mathematics;

Yu. P. Virchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University, Physics. Mathematical modeling;

Executive Secretary: O. V. Chernova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod National Research University.

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Alimov Sh. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tashkent, Uzbekistan;

Alkhutov Yu. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Vladimir, Russia;

Ashyralyev A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Almaty, Kazakhstan;

Blazhevich S. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Belyakov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Diblik J., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Brno, Czech Republic;

Zhukovsky E. S. Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Karimov Sh.T., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Fergana, Uzbekistan;

Kozhevnikova L. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Sterlitamak, Russia;

Kulikov A. N., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Yaroslavl, Russia

Lomov I. S., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Malay N. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Menshih V. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Muravnik A. B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Nazarov A. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg, Russia;

Nikulicheva T.B., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Belgorod, Russia;

Noskov A. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Panov E. Yu., Dr. Sci. (Phys.-Math.), V. Novgorod, Russia;

Parovik R. I., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia;

Penkin O. M., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Polovinkin I. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia;

Radkevich E. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Soldatov A. P., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Fedorov V. E., Dr.Sc. (Phys.-Math.), Chelyabinsk, Russia;

Shibkov A. A., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Tambov, Russia;

Shitikova M. V., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Moscow, Russia;

Shishkina E. L., Dr. Sci. (Phys.-Math.), Voronezh, Russia.

The journal has been registered at the Federal service for supervision of communications information technology and mass media (Roskomnadzor). Publication frequency: 4 /year.

Commissioning Editor Yu. V. Mishenina

Proofreading Yu. V. Mishenina

Computer imposition O. V. Chernova

Dummy layout by V. B. Vasilyev

E-mail: vasilyev_v@bsuedu.ru

Mass media registration certificate

EL № FS 77-77959 dd 19.02.2020.

Typeface Times. Publisher's signature 12,0

Date of publishing 30.09.2026.

The layout is presented by Printing production center
Belgorod National Research University

Address: 85 Pobeda St., Belgorod, 308015, Russia

© Belgorod National Research University, 2026

CONTENTS

MATHEMATICS

Lapin K. S., Kistenev K. D.

Lyapunov – Krasovsky Functionals and Partial Ultimate Equiboundedness of Solutions with Partial Control of Prehistories 217

Kazakevich K. I., Shabrov S. A.

On Sufficient Conditions for the Weak Extremum of a Quadratic Functional with the Stieltjes Integral 226

Arkhipov V. P., Glushak A. V.

Homogenization of Lavrentiev – Bitsadze Equation in a Domain Periodically Perforated Along the Line of the Equation Type Change 232

Kozhevnikova L. M., Malysheva V. A.

Conditions for the Existence of Weak Solutions of an Elliptic Equation with the p-Laplacian and a Nonlinear Source 248

Kornev S. V., Obukhovskii V. V., Getmanova E. N., Afonina S. N.

Application of the Nonsmooth Integral Guiding Functions Method for Studying of the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions with a Perturbed Right-Hand Side 262

Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A.

Unique Solvability of the Dirichlet Problem for a Second Order Linear Elliptic Equation of the Most General Form 270

Grigorieva E. I.

An Analogue of the Steinhaus Theorem for a Functional-Differential Operator with Involution on a Graph 277

PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

Nikulin I. S., Milostnoy D. N., Kungurtsev M. S., Voropaev V. S., Nikulicheva T. B., Yaduta A. Z.

Modeling and Flexural Strength Properties of Calcium Sulfate Whisker / Epoxy Resin Composites .. 291

Lekomtsev D. G.

Numerical Study of Work of the Well by a Triangular Boundary of Reservoir in an Anisotropic Homogeneous Layer 299

Bardakova I. N.

Spectral-angular Densities of Parametric X-ray Radiation and Diffraction Transition Radiation from Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium 307

Safronov I. S., Ushakov A. I., Kobzar A. N.

Physical and Mechanical Effects During High-Speed Impacts on Three-Layer Micrometeorite Protection Panel 318

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.925.5
MSC 34C11
Оригинальное исследование

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-217-225
EDN MLUGYH

Функционалы Ляпунова – Красовского и частичная эквиограниченность в пределе решений с частичным контролем предысторий

Лапин К. С.^{1b}, Кистенев К. Д.^{2b}

(Статья представлена членом редакционной коллегии Половинкиным И. П.)

Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева,
Россия, 430007, г. Саранск, ул. Студенческая, 11 А
klapin@mail.ru, kistenev.kir@yandex.ru

Аннотация. Для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности решений, частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предысторий, эквиограниченности в пределе решений и частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий. С использованием функционалов Ляпунова – Красовского получены достаточные условия указанных выше видов эквиограниченности решений и эквиограниченности в пределе решений. Полученные результаты могут быть использованы для анализа поведения решений сложных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа в различных задачах качественной теории дифференциальных уравнений, теоретической механики и математической физики.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, эквиограниченность в пределе решений, функционал Ляпунова – Красовского

Финансирование: Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00830.

Для цитирования: Лапин К.С., Кистенев К.Д. Функционалы Ляпунова – Красовского и частичная эквиограниченность в пределе решений с частичным контролем предысторий. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):217–225. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-217-225 EDN MLUGYH

Original Research

Lyapunov – Krasovsky Functionals and Partial Ultimate Equiboundedness of Solutions with Partial Control of Prehistories

Kirill S. Lapin^{1b}, Kirill D. Kistenev^{2b}

(Article submitted by a member of the editorial board Polovinkin I. P.)

Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev,
11 A Studencheskaya St., Saransk 430007, Russia
klapin@mail.ru, kistenev.kir@yandex.ru

Abstract. For solutions of functional differential equations of delay type, the concepts of equiboundedness of solutions, partial equiboundedness of solutions with partial control of their prehistories, ultimate equiboundedness of solutions, and partial ultimate equiboundedness of solutions with partial control of their prehistories are introduced. Using Lyapunov-Krasovsky functionals, sufficient conditions for the above-mentioned types of equiboundedness of solutions and ultimate equiboundedness of solutions are obtained. The results obtained can be used to analyze the behavior of solutions of complex retarded functional differential equations in various problems in the qualitative theory of differential equations, theoretical mechanics, and mathematical physics.

Keywords: Functional Differential Equation, Ultimate Equiboundedness of Solutions, Lyapunov – Krasovsky functional

Funding: This work was supported by the Russian Science Foundation grant № 25-21-00830.

For citation: Lapin KS., Kistenev KD. Lyapunov – Krasovsky Functionals and Partial Ultimate Equiboundedness of Solutions with Partial Control of Prehistories. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):217–225. (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-217-225 EDN MLUGYH

1. Введение. В работе Т. Йосидзавы [1] на основе метода функционалов Ляпунова – Красовского [2] была создана теория ограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Эта теория является аналогом классической теории Т. Йосидзавы ограниченности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3] в том смысле, что в этой теории

вместо конечномерного пространства начальных положений решений используется бесконечномерное функциональное пространство предыстории решений. Основные трудности развития данной теории ограниченности решений, как это было показано в [1] (см. также [4]), возникают именно в связи с бесконечномерностью функционального пространства предыстории решений. С другой стороны, в работах К. С. Лапина (см., например, [5]–[8]) с использованием прямого метода Ляпунова была развита теория частичной ограниченности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с частичным контролем начальных условий. Весьма значимой частью данной теории является подраздел этой теории, связанный с изучением различных видов ограниченности в пределе решений или, как еще говорят, финальной ограниченности решений. Наиболее общим видом такой ограниченности решений является частичная эквиограниченность в пределе решений с частичным контролем начальных условий. Теория ограниченности, развитая К. С. Лапиным, обобщает указанную выше теорию Йосидзавы ограниченности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений в том смысле, что если часть переменных, относительно которых изучается ограниченность решений, совпадает с полным набором переменных и, кроме того, контролируемая часть координат начальных условий совпадает с полным набором координат начальных условий, то теория ограниченности, развитая в работах К. С. Лапина, становится теорией ограниченности Йосидзавы. При анализе соотношений между указанными выше теориями ограниченности решений естественным образом возникает интересная и важная для приложений задача построения на основе метода функционалов Ляпунова – Красовского теории частичной ограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с частичным контролем предыстории. Естественное требование к построению такой теории ограниченности состоит в том, чтобы эта теория, с одной стороны, обобщала теорию Йосидзавы ограниченности решений для функционально-дифференциальных уравнений, а с другой стороны, являлась бы в указанном выше смысле аналогом развитой в работах К. С. Лапина теории частичной ограниченности решений с частичным контролем начальных условий. Важной частью построения указанной выше теории ограниченности является введение различных видов понятия эквиограниченности и эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа и получение с использованием функционалов Ляпунова – Красовского достаточных условий этих видов эквиограниченности и эквиограниченности в пределе решений.

В настоящей работе для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности решений и частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предыстории. С использованием функционалов Ляпунова – Красовского получено достаточное условие частичной эквиограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с частичным контролем предыстории (теорема 1). Как следствие (следствие 1) в терминах Ляпунова – Красовского получено достаточное условие эквиограниченности решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Далее для решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа введены понятия эквиограниченности в пределе решений и частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предыстории. С использованием функционалов Ляпунова – Красовского получено достаточное условие частичной эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с частичным контролем предыстории (теорема 2). Как следствие (следствие 2) в терминах функционалов Ляпунова – Красовского получено достаточное условие эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

2. Предварительные сведения. Напомним сначала необходимые понятия и конструкции (см., например, [1], [4]), которые требуются для рассмотрения функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

Пусть $h > 0$ – фиксированная постоянная, и пусть $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ – линейное пространство всех непрерывных отображений вида $\varphi : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, рассматриваемое вместе с нормой $\|\varphi\| = \max_{(-h \leq \vartheta \leq 0)} \|\varphi(\vartheta)\|$, где $\|\varphi(\vartheta)\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ вектора $\varphi(\vartheta) \in \mathbb{R}^n$. Несложно видеть, что любое непрерывное отображение $x : [-h; A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < A$, где $A > 0$ или $A = +\infty$, определяет непрерывное отображение $\bar{x} : [0; A) \rightarrow C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, $\bar{x}(t) = x_t \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, $0 \leq t < A$, где отображение $x_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается формулой $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$. Из этой формулы видно, что $x_t(0) = x(t)$ и $x_t(-h) = x(t - h)$. Далее указанное семейство отображений $x_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $0 \leq t < A$, будем называть параметризованной $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ -траекторией или, более кратко, h -траекторией отображения $x : [-h; A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < A$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = F(t, x_t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < +\infty$, $F : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – любое непрерывное отображение, $\dot{x}(t)$ – правосторонняя производная отображения $x(t)$ и семейство отображений $x_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$, определяется указанным выше способом по отображению $x(t)$, $-h \leq t < +\infty$. При $n \geq 2$ для уравнения (1) также используется название функционально-дифференциальная система запаздывающего типа.

Напомним, что решением $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с начальными условиями $(t_0, \varphi_0) \in [0, A) \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$, где $A > 0$ или $A = +\infty$, называется отображение $x(-, t_0, \varphi_0) : [t_0 - h; A) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t, t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 - h \leq t < A$, для которого выполнены следующие условия:

- 1) $x(t, t_0, \varphi_0)$, $t_0 \leq t < A$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. при $t_0 \leq t < A$ справедливо равенство $\dot{x}(t, t_0, \varphi_0) = F(t, x_t(t_0, \varphi_0))$, где $x_t(t_0, \varphi_0) = x(-, t_0, \varphi_0)_t$;
- 2) $x_{t_0}(t_0, \varphi_0) = \varphi_0$, т. е. $x_{t_0}(t_0, \varphi_0)(\vartheta) = x(t_0 + \vartheta, t_0, \varphi_0) = \varphi_0(\vartheta)$, $-h \leq \vartheta \leq 0$. Отображение $\varphi_0 : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется предисторией решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ от момента времени $t_0 - h$ до момента времени t_0 или, более кратко, предисторией этого решения.

Далее всегда будем предполагать, что для непрерывного отображения $F(t, \varphi)$, при помощи которого определяется правая часть уравнения (1), выполнено локальное условие Липшица по переменной φ . Хорошо известно [4], что непрерывность отображения $F(t, \varphi)$ и выполнение указанного условия Липшица для этого отображения обеспечивают, соответственно, существование и единственность решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с любыми заданными начальными условиями $(t_0, \varphi_0) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$.

Многочисленные примеры функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа вида (1) дают дифференциальные уравнения с положительным постоянным запаздыванием по времени. В самом деле, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

с постоянным запаздыванием $h > 0$, где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $-h \leq t < +\infty$, и отображение $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – любое непрерывное отображение. При $n \geq 2$ для уравнения (2) также используется название дифференциальная система с постоянным запаздыванием. Легко видеть, что каждое дифференциальное уравнение (2) с постоянным запаздыванием $h > 0$ определяет функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа $\dot{x}(t) = F(t, x_t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, где непрерывное отображение $F : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ задается по следующей формуле:

$$F(t, \varphi) = f(t, \varphi(0), \varphi(-h)).$$

Напомним (см., например, [9]), что верхней правой производной непрерывной функции $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ называется отображение $f'^+ : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, определяемое по следующей формуле:

$$f'^+(t) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} (f(t+\delta) - f(t)).$$

Хорошо известно [9], что непрерывная функция $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является невозрастающей тогда и только тогда, когда $f'^+(t) \leq 0$ при всех $t \geq a$. Ясно, что если непрерывная функция $f : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является дифференцируемой в обычном смысле, то $f'^+(t) = f'(t)$, $t \geq a$, где $f'(t)$ – обычная производная функции $f(t)$.

Рассмотрим теперь для любого непрерывного функционала $V(t, \varphi)$ и решения $x(\tau, t, \varphi)$ уравнения (1) с любыми начальными условиями (t, φ) непрерывную функцию $v(\tau) = V(\tau, x_\tau(t, \varphi))$, $\tau \geq t$. При помощи этой непрерывной функции $v(\tau)$ производная непрерывного функционала $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ в силу уравнения (1) определяется как отображение $\dot{V} : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, задаваемое по следующей формуле:

$$\dot{V}(t, \varphi) = v'^+(\tau)|_{\tau=t} = v'^+(t) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} \{V(t+\delta, x_{t+\delta}(t, \varphi)) - V(t, \varphi)\}. \quad (3)$$

3. Полученные результаты. Перейдем теперь к введению различных видов эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Введем сначала понятие эквиограниченности решений для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, которое является аналогом понятия эквиограниченности решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Определение 1. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены, если для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta, \quad t \geq t_0.$$

Несложно видеть, что понятие эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|x(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$.

Далее для произвольной точки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, и любого фиксированного числа $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, будем использовать обозначение $y = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Кроме того,

для произвольного непрерывного отображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$ и любого фиксированного числа $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющего условию $1 \leq k \leq n$, далее будем использовать обозначение $\varphi^{(k)} = (\varphi_1, \dots, \varphi_s) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$. Таким образом, для каждой точки $\varphi(\vartheta) = (\varphi_1(\vartheta), \dots, \varphi_n(\vartheta)) \in \mathbb{R}^n$, $\vartheta \in [-h; 0]$, имеем $\varphi^{(k)}(\vartheta) = (\varphi_1(\vartheta), \dots, \varphi_k(\vartheta)) \in \mathbb{R}^k$. Наконец, для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) семейство отображений $y_t : [-h; 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $y_t(t_0, \varphi_0) = x_t(t_0, \varphi_0)^{(k)}$, далее будем называть y - h -траекторией решения $x(t, t_0, \varphi_0)$.

Введем теперь понятие частичной эквиограниченности решений с частичным контролем предыстории для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, которое является аналогом понятия частичной эквиограниченности решений с частичным контролем начальных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [8].

Определение 2. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены по части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \leq k \leq n$, с частичным контролем предыстории $\varphi_0^{(k)} = ((\varphi_0)_1, \dots, (\varphi_0)_k) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$ или, более кратко, y -эквиограничены с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем, если для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta, \quad t \geq t_0.$$

Легко видеть, что если в определении 2 положить $k = n$, то получим определение 1 эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Нетрудно проверить, что понятие y -эквиограниченности с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для любых чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$.

Далее для каждого числа $R_0 > 0$ и любого целого $1 \leq k \leq n$ будем через $C^{(k)}(R_0)$ обозначать подмножество $\{\varphi \in C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi^{(k)}\| \geq R_0\}$ множества $C([-h; 0], \mathbb{R}^n)$. При $k = n$ подмножество $C^{(k)}(R_0)$ будем обозначать через $C(R_0)$. Кроме того, для произвольных функций $a(t, r)$ и $b(r)$, где $t, r \in \mathbb{R}^+$, далее будем использовать запись $a(t, r) \in \mathcal{K}$ и $b(r) \in \mathcal{K}$, если эти функции удовлетворяют, соответственно, следующим требованиям:

- 1) функция $a(t, r) \geq 0$ является при каждом фиксированном значении $t \in \mathbb{R}^+$ неубывающей по r функцией;
- 2) функция $b(r) \geq 0$ является неубывающей функцией, для которой выполнено условие $b(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$.

Получим теперь с использованием функционалов Ляпунова – Красовского следующее достаточное условие y -эквиограниченности с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Теорема 1. Предположим, что для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$, число $R_0 > 0$ и целое число $1 \leq k \leq n$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi^{(k)}(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi^{(k)}\|);$$

- 2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq 0.$$

Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Доказательство. Найдем для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ такое $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Несложно видеть, что доказательство достаточно провести для случая, когда y - h -траектория $y_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ удовлетворяют условию $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \geq R_0$ при любых $t \geq t_0$. Это следует из того, что если $\|y_{t_1}(t_0, \varphi_0)\| < R_0$ для некоторого $t_1 \geq t_0$, то либо $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < R_0$ при всех $t \geq t_0$, либо найдется такое $t_2 \geq t_1$, что $\|y_{t_2}(t_0, \varphi_0)\| = R_0$. Поэтому далее будем рассматривать только случай, когда $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \geq R_0$ при любых $t \geq t_0$. Из условия 1) теоремы получаем, что в рассматриваемом случае для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ и h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) справедливо неравенство

$$b(\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0)), \quad t \geq t_0.$$

Из условия 2) теоремы и формулы (3) получаем, что в рассматриваемом случае для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) функция $V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ от переменной $t \geq t_0$ является невозрастающей и, следовательно, имеем неравенство

$$V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq V(t_0, \varphi_0), \quad t \geq t_0.$$

Из условия 1) теоремы получаем неравенство $V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|)$. Так как функция $a(t, r)$ удовлетворяет условию $a(t, r) \in \mathcal{K}$, то при $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$ имеем

$$V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|) \leq a(t_0, \alpha)$$

и, следовательно, для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ и h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$, где $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, уравнения (1) получаем при всех $t \geq t_0$ неравенства

$$b(\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \alpha).$$

Пользуясь теперь тем, что функция $b(r)$ удовлетворяет условию $b(r) \in \mathcal{K}$, выберем некоторое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > \alpha$, для которого справедливо неравенство $a(t_0, \alpha) \leq b(\beta)$. При помощи этого неравенства получаем неравенство

$$b(\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\|) \leq b(\beta), \quad t \geq t_0.$$

Так как $b(r) \in \mathcal{K}$, то из последнего неравенства следует справедливость неравенства $\|y_t(t_0, \varphi_0)(0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Из этого, пользуясь равенством $y_t(t_0, \varphi_0)(0) = y(t, t_0, \varphi_0)$ для всех $t \geq t_0$, получаем $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ для всех $t \geq t_0$, что эквивалентно справедливости неравенства $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Таким образом, показано, что решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Если теорему 1 рассмотреть для случая, когда $k = n$, то эта теорема превращается в следующее достаточное условие эквиограниченности решений функционально-дифференциального уравнения (1) в терминах функционалов Ляпунова – Красовского.

Следствие 1. Пусть для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V: \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$ и число $R_0 > 0$, для которых выполнены следующие условия:

1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi\|);$$

2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq 0.$$

Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются эквиограниченными.

Перейдем теперь к введению различных видов эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Начнём с введения понятия эквиограниченности в пределе решений для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, которое является аналогом понятия эквиограниченности в пределе решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1].

Определение 3. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены в пределе, если для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T.$$

Несложно видеть, что понятие эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|x(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$.

Введем теперь для функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа понятие частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем предысторий, которое является аналогом понятия частичной эквиограниченности в пределе решений с частичным контролем начальных условий для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [5].

Определение 4. Будем говорить, что решения (имеется в виду все решения) функционально-дифференциального уравнения (1) эквиограничены в пределе по части переменных $y = (x_1, \dots, x_k)$, $1 \leq k \leq n$, с

частичным контролем предисторий $\varphi_0^{(k)} \in C([-h; 0], \mathbb{R}^k)$ или, более кратко, y -эквиограниченны в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем, если для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для y -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо следующее неравенство:

$$\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B, \quad t \geq t_0 + T.$$

Легко видеть, что если в определении 4 положить $k = n$, то получим определение 3 эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Нетрудно проверить, что понятие y -эквиограниченности в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1) эквивалентно тому, что для этого уравнения найдется такое число $B > 0$, и для произвольных чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$.

Далее для произвольного фиксированного числа $R_0 > 0$ и любой непрерывной функции $c(r)$, где $r \in \mathbb{R}^+$, будем использовать запись $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$, если для этой функции выполнено условие $c(r) > 0$ при $r > R_0$.

Получим теперь с использованием функционалов Ляпунова – Красовского следующее достаточное условие y -эквиограниченности в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем решений функционально-дифференциального уравнения (1).

Теорема 2. Предположим, что для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), число $R_0 > 0$, функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$, $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$ и целое число $1 \leq k \leq n$, для которых выполнены следующие условия:

1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi^{(k)}(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi^{(k)}\|);$$

2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^{(k)}(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(\|\varphi^{(k)}(0)\|);$$

3) существуют числа $R > R_0$ и $\gamma > 0$, для которых справедливо неравенство $a(t, R) \leq \gamma$ при всех $t \geq 0$.

Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 1, несложно видеть, что доказательство достаточно провести для случая, когда y -траектория $y_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) удовлетворяют при любых $t \geq t_0$ условию $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| \geq R_0$. Поэтому далее будем рассматривать только этот случай. Очевидно, что при выполнении условий теоремы решения уравнения (1) y -эквиограничены с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем, поскольку из выполнения условий теоремы следует выполнение условий теоремы 1. Покажем теперь, что при выполнении условий доказываемой теоремы решения уравнения (1) являются y -эквиограниченными в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем. Для этого нужно найти для уравнения (1) такое число $B > 0$ и, кроме того, для произвольных чисел $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ найти такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для y -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предисторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, будет справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T$ или, что эквивалентно, будет справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$. Для нахождения указанных выше чисел B и $T = T(t_0, \alpha)$ исследуем по отдельности следующие случаи:

$$1) \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha \leq R \text{ или } \|\varphi_0^{(k)}\| \leq R \leq \alpha; \quad 2) R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha.$$

Исследуем сначала случай 1). Из условия 1) данной теоремы получаем, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) при всех $t \geq t_0$ имеет место неравенство $b(\|(x_t(t_0, \varphi_0))^{(k)}(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$. Так как $x_t(t_0, \varphi_0)(0) = x(t, t_0, \varphi_0)$, то $(x_t(t_0, \varphi_0))^{(k)}(0) = y(t, t_0, \varphi_0)$ и, следовательно, при всех $t \geq t_0$ получаем неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$. Из условия 2) теоремы следует, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq 0$. Из этого неравенства и формулы (3) следует, что для h -траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) функция $V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ от переменной $t \geq t_0$ является невозрастающей и, поэтому, при всех $t \geq t_0$ получаем неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq V(t_0, \varphi_0)$. Из условия 1) теоремы имеем неравенство $V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|)$ и, следовательно, при всех $t \geq t_0$ имеем неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq a(t_0, \|\varphi_0^{(k)}\|)$. Так как $a(t, r) \in \mathcal{K}$ и $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq R$, то получаем для любых $t \geq t_0$ неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq a(t_0, R)$. Из этого неравенства и условия 3) теоремы следует, что при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) \leq \gamma$. Пользуясь теперь тем, что $b(r) \in \mathcal{K}$, выберем такое число $B > 0$, что $\gamma < b(B)$. При

помощи неравенства $\gamma < b(B)$ получаем при всех $t \geq t_0$ неравенство $b(\|y(t, t_0, \varphi_0)\|) < b(B)$. Так как $b(r) \in \mathcal{K}$, то из последнего неравенства для всех $t \geq t_0$ имеем неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$, т. е. имеем неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$, где $T = h$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ справедливо неравенство $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T$. Таким образом, в случае 1), т. е. в случае, когда предыстория φ_0 решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ удовлетворяет неравенству $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha \leq R$ или неравенству $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq R \leq \alpha$, в качестве искомых чисел $B > 0$ и $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$ можно взять, соответственно, выбранное выше число $B > 0$ и число $T = h$. Отметим, что проведенные выше рассуждения говорят о том, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $\|\varphi_0^{(k)}\| \leq R$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0$.

Исследуем теперь случай 2), т. е. случай, когда для предыстории φ_0 решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) справедливо двойное неравенство $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$. Покажем, что в этом случае найдется такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что при всех $t \geq t_0 + T - h$ справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$, где число $B > 0$ является ранее выбранным числом, удовлетворяющим условию $\gamma < b(B)$. Как было отмечено выше, из выполнения условий доказываемой теоремы следует, что решения уравнения (1) являются y -эквиограниченными с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем. Поэтому для любых чисел $\alpha > R$ и $t_0 \geq 0$ имеется такое число $\beta = \beta(t_0, \alpha) > 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Для доказательства существования указанного выше числа $T = T(t_0, \alpha)$ покажем, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, всегда найдется такое $t' > t_0$, что $\|y(t', t_0, \varphi_0)\| \leq R$. Предположим от противного, что для любого $t \geq t_0$ выполнено условие $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| > R$. Тогда имеем $R < \|y(t, t_0, \varphi_0)\| \leq \beta$ при всех $t \geq t_0$. Из условия 2) получаем, что для числа $\mu = \min_{(R \leq r \leq \beta)} c(r) > 0$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \leq -\mu$ при любых $t \geq t_0$ и любых $\varphi \in C^{(k)}(R_0)$, для которых $R \leq \|\varphi^{(k)}(0)\| \leq \beta$. Так как для решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ при всех $t \geq t_0$ имеется равенство $\dot{V}(t, x_t(t_0, \varphi_0)) = V^{'+}(t, x_t(t_0, \varphi_0))$, то из указанного выше неравенства $\dot{V}(t, \varphi) \leq -\mu$ получаем при всех $t \geq t_0$ неравенство $V^{'+}(t, x_t(t_0, \varphi_0)) < -\mu$. Из этого следует, что справедливо неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) - V(t_0, \varphi_0) \leq -\mu(t - t_0)$ для всех $t \geq t_0$. Из последнего неравенства получаем, что при достаточно больших $t \geq t_0$ будем иметь неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) < 0$, что противоречит условию $0 \leq b(\|x_t(t_0, \varphi_0)^{(k)}(0)\|) \leq V(t, x_t(t_0, \varphi_0))$ при всех $t \geq t_0$. Таким образом, предположение о том, что для любого $t \geq t_0$ выполнено условие $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| > R$, неверно и, следовательно, для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, всегда найдется такое $t' > t_0$, что $\|y(t', t_0, \varphi_0)\| \leq R$. Из этого получаем, что для решения $x(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))$ уравнения (1) справедливо неравенство $\|y(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))\| < B$ при всех $t \geq t'$, поскольку $\|y_{t'}(t_0, \varphi_0)\| \leq R$. Так как $x(t, t_0, \varphi_0) = x(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))$ при всех $t \geq t'$, то для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, имеем $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| = \|y(t, t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))\| < B$ при всех $t \geq t'$. Для того, чтобы найти нужное число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, сделаем оценку сверху числа $t' > t_0$. Из условия 2) доказываемой теоремы получаем, что для числа $\mu_1 = \min_{(R_1 \leq r \leq \beta)} c(r) > 0$, где $R_1 = R_1(t_0, \alpha) = \|y_{t'}(t_0, \varphi_0)\|$, справедливо неравенство $V(t, x_t(t_0, \varphi_0)) - V(t_0, \varphi_0) \leq -\mu_1(t - t_0)$ при всех $t \geq t_0$. Если последнее неравенство рассмотреть при $t = t'$, то получим неравенство $t' \leq t_0 + ((V(t_0, \varphi_0) - V(t', x_{t'}(t_0, \varphi_0)))/\mu_1)$. При помощи этого неравенства, а также неравенств $V(t_0, \varphi_0) \leq a(t_0, \alpha)$ и $b(R_1) = b(\|y_{t'}(t_0, \varphi_0)\|) \leq V(t', x_{t'}(t_0, \varphi_0))$, получаем неравенство $t' \leq t_0 + ((a(t_0, \alpha) - b(R_1))/\mu_1)$. Из этого неравенства следует, что для любого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) с предысторией φ_0 , удовлетворяющей условию $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, справедливо неравенство $\|y(t, t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T - h$, где $T = h + ((a(t_0, \alpha) - b(R_1))/\mu_1)$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что для y - h -траектории $y_t(t_0, \varphi_0)$ этого решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ выполнено условие $\|y_t(t_0, \varphi_0)\| < B$ при всех $t \geq t_0 + T$. Ясно, что число $T \geq 0$ зависит от α и t_0 , поскольку $\mu_1 = \mu_1(R_1(t_0, \alpha), \beta(t_0, \alpha))$ и $b(R_1) = b(R_1(t_0, \alpha))$. Таким образом, в случае 2), т. е. в случае, когда предыстория φ_0 решения $x(t, t_0, \varphi_0)$ удовлетворяет двойному неравенству $R < \|\varphi_0^{(k)}\| \leq \alpha$, в качестве искомых чисел $B > 0$ и $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$ можно взять, соответственно, выбранное ранее число $B > 0$ и число $T = h + ((a(t_0, \alpha) - b(R_1))/\mu_1)$. Суммируя результаты исследований случаев 1) и 2), получаем, что при выполнении условий доказываемой теоремы решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются y -эквиограниченными в пределе с $\varphi_0^{(k)}$ -контролем.

Если теорему 2 рассмотреть для случая, когда $k = n$, то эта теорема превращается в следующее достаточное условие эквиограниченности в пределе решений функционально-дифференциального уравнения (1) в терминах функционалов Ляпунова – Красовского.

Следствие 2. Пусть для уравнения (1) существуют непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ (функционал Ляпунова – Красовского), число $R_0 > 0$ и функции $b(r) \in \mathcal{K}$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$, $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$, для которых выполнены следующие условия: 1) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо двойное неравенство

$$b(\|\varphi(0)\|) \leq V(t, \varphi) \leq a(t, \|\varphi\|);$$

2) для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C(R_0)$ справедливо неравенство

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -c(\|\varphi(0)\|);$$

3) существуют числа $R > R_0$ и $\gamma > 0$, для которых справедливо неравенство $a(t, R) \leq \gamma$ при всех $t \geq 0$. Тогда решения функционально-дифференциального уравнения (1) являются эквиограниченными в пределе.

В заключение работы рассмотрим пример на применение теоремы 2. Пусть задана дифференциальная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + x_1(t-h) + x_1(t) \sin^2(x_2(t-h)) - e^t x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_1^2(t-h) + x_2(t) + x_2^2(t-h) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

с постоянным запаздыванием $h > 0$. Покажем при помощи теоремы 2, что решения этой системы (x_1) -эквиограничены в пределе с $\varphi_0^{(1)}$ -контролем. Определим для данной дифференциальной системы функционал Ляпунова – Красовского $V : \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$V(t, \varphi) = \varphi_1^2(0) + e^{-t} + \int_{-h}^0 \varphi_1^2(\vartheta) d\vartheta, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C([-h; 0], \mathbb{R}^2).$$

Очевидно, что для любых $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^2)$ справедливы неравенства $\|\varphi^{(1)}(0)\|^2 \leq V(t, \varphi) \leq (1+h)\|\varphi^{(1)}\|^2 + e^{-t}$, поскольку $\varphi_1(0)^2 = \|\varphi^{(1)}(0)\|^2 \leq \|\varphi^{(1)}\|^2$ и $\max_{(-h \leq \vartheta \leq 0)} \varphi_1^2(\vartheta) = \max_{(-h \leq \vartheta \leq 0)} \|\varphi^{(1)}(\vartheta)\|^2 = \|\varphi^{(1)}\|^2$. Поэтому, если в качестве функций $b(r)$, $a(t, r) \in \mathcal{K}$ взять функции $b(r) = r^2$ и $a(t, r) = (1+h)r^2 + e^{-t}$, то условие 1) теоремы 2 выполнено при любом $R_0 > 0$. Рассмотрим теперь производную $\dot{V}(t, \varphi) = v'(\tau)|_{\tau=t} = v'(\tau)$ в силу заданной системы, где

$$v(\tau) = V(\tau, x_\tau) = x_1^2(\tau) + e^{-\tau} + \int_{-h}^0 x_1^2(\tau + \vartheta) d\vartheta = x_1(\tau)^2 + e^{-\tau} + \int_{\tau-h}^{\tau} x_1^2(s) ds$$

и $x(\tau, t, \varphi) = (x_1(\tau), x_2(\tau))$ – решение заданной системы с начальными условиями (t, φ) . Для производной $v'(\tau)$ имеем

$$\begin{aligned} v'(\tau) &= 2x_1(\tau)\dot{x}_1(\tau) + x_1^2(\tau) - x_1^2(\tau-h) = \\ &= 2x_1(\tau)(-3x_1(\tau) + x_1(\tau-h) + x_1(\tau) \sin^2(x_2(\tau-h)) - e^\tau x_1(\tau)) - e^{-\tau} + x_1^2(\tau) - x_1^2(\tau-h) = \\ &= -6x_1^2(\tau) + 2x_1(\tau)x_1(\tau-h) + 2x_1^2(\tau) \sin^2(x_2(\tau-h)) - 2e^\tau x_1^2(\tau) - e^{-\tau} + x_1^2(\tau) - x_1^2(\tau-h). \end{aligned}$$

Так как $2x_1(\tau)x_1(\tau-h) \leq x_1^2(\tau) + x_1^2(\tau-h)$ и $x_1^2(\tau) \sin^2(x_2(\tau-h)) \leq x_1^2(\tau)$ для любых $t \in \mathbb{R}^+$, то получаем

$$v'(\tau) \leq -2x_1^2(\tau) - 2e^\tau x_1^2(\tau) - e^{-\tau} \leq -4x_1^2(\tau) = -4\varphi_1(0)^2 = -4\|\varphi^{(1)}(0)\|^2, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Из этого следует, что для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C([-h; 0], \mathbb{R}^2)$ справедливо неравенство $\dot{V}(t, \varphi) \leq -4\|\varphi^{(1)}(0)\|^2$. Поэтому, если в качестве функции $c(r) \in \mathcal{K}(R_0)$ взять функцию $c(r) = 4r^2$, то получим, что условие 2) теоремы 2 выполнено при любом $R_0 > 0$. Ясно, что условие 3) теоремы 2 также выполнено, поскольку для любого числа $R > R_0$ справедливо неравенство $a(t, R) = (1+h)R^2 + e^{-t} \leq \gamma$ при всех $t \geq 0$, где $\gamma = (1+h)R^2 + 1$. Таким образом, для заданной дифференциальной системы с постоянным запаздыванием все условия теоремы 2 выполнены и, следовательно, решения этой системы (x_1) -эквиограничены в пределе с $\varphi_0^{(1)}$ -контролем.

Список литературы

1. Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *Publications of the Mathematical Society of Japan* 9. Tokyo: Math. Soc. of Japan; 1966. 223 p.
2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат; 1959. 211 с.
3. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений. *Математика*. 1965;5:95-127.
4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир; 1984. 421 с.
5. Лапин К.С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2013; 49(10):1281-1286. DOI: 10.1134/S0374064113100051.
6. Лапин К.С. Частичная равномерная ограниченность решений систем дифференциальных уравнений с частично контролируемыми начальными условиями. *Дифференциальные уравнения*. 2014;50(3):309-316. DOI: 10.1134/S0374064114030042.
7. Лапин К.С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. Саранск: РИЦ МГПУ; 2022. 163 с.
8. Лапин К.С. Высшие производные функций Ляпунова и частичная ограниченность решений с частично контролируемыми начальными условиями. *Математические заметки*. 2017;101(6):883-893. DOI: 10.4213/mzm11156

9. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир; 1980. 300 с.

References

1. Yoshizawa T. Stability Theory by Liapunov's Second Method. *Publications of the Mathematical Society of Japan* 9. Tokyo: Math. Soc. of Japan; 1966. 223 p.
2. Krasovskii NN. Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya [Some problems of the theory of stability of motion]. Moscow: Gostekhizdat; 1959. 211 p.
3. Yoshizawa T. Liapunov's function and boundedness of solutions. *Funkcialaj Ekvacioj*. 1959;2:95–142. (In Russ.)
4. Hale JK. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag; 1977. 365 p. (In Russ.)
5. Lapin KS. Ultimate Boundedness with Respect to Part of the Variables of Solutions of Systems of Differential Equations with Partly Controlled Initial Conditions. *Differential Equations*. 2013;49(10):1246–1251. DOI: 10.1134/S0012266113100054. (In Russ.)
6. Lapin KS. Partial Uniform Boundedness of Solutions of Systems of Differential Equations with Partly Controlled Initial Conditions. *Differential Equations*. 2014;50(3):305–311. DOI: 10.1134/S0012266114030045. (In Russ.)
7. Lapin KS. Ogranichennost' po Puassonu resheniy sistem differentsial'nykh uravnenii [Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations.] Saransk: RITS MGPU; 2022. 163 p.
8. Lapin KS. Higher-Order Derivatives of Lyapunov Functions and Partial Boundedness of Solutions with Partially Controllable Initial Conditions. *Mathematical Notes*. 2017;101(6):1000–1008. DOI:10.1134/S0001434617050273 (In Russ.)
9. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. New York: Springer-Verlag; 1977. 396 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 05.02.2026

Received February 5, 2026

Поступила после рецензирования 20.03.2026

Revised March 20, 2026

Принята к публикации 24.03.2026

Accepted March 24, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Лалин Кирилл Сергеевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

Кистенев Кирилл Дмитриевич – аспирант кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, г. Саранск, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kirill S. Lapin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia

Kirill D. Kistenev – Graduate Student of the Department of Mathematics, Economics and Educational Methods, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, Russia

К содержанию

О достаточных условиях слабого экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильтеса

Казакевич К. И.^{ID}, Шабров С. А.^{ID}

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
klimchik26@gmail.com, shaspoteha@mail.ru

Аннотация. В работе изучается квадратичный функционал, содержащий вторые производные, который равен потенциальной энергии системы, состоящей из цепочки шарнирно соединённых стержней, и помещённый в неоднородную среду с локализованными особенностями. Возникающая краевая задача, как необходимое условие экстремума, имеет негладкие решения. Трудности, связанные с потерей гладкости у решений возникающих граничных задач, мы преодолеваем, используя концепцию поточечной трактовки дифференциального уравнения, которая показала свою эффективность при анализе решений дифференциальных уравнений с негладкими решениями не только второго порядка, но и более высокого. Получены достаточные условия слабого экстремума квадратичного функционала с производными Радона – Никодима.

Ключевые слова: функционал, производная по мере, слабый экстремум

Для цитирования: Казакевич К.И., Шабров С.А. О достаточных условиях слабого экстремума квадратичного функционала с интегралом Стильтеса. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):226–231.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-226-231 EDN NHYWLB

Original Research

On Sufficient Conditions for the Weak Extremum of a Quadratic Functional with the Stieltjes Integral

Klimentiy I. Kazakevich^{ID}, Sergey A. Shabrov^{ID}

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
klimchik26@gmail.com, shaspoteha@mail.ru

Abstract. The paper studies a quadratic functional containing second derivatives, which is equal to the potential energy of a system consisting of a chain of pivotally connected rods, and placed in an inhomogeneous medium with localized features. The resulting boundary value problem, as a necessary condition for the extremum, has non-smooth solutions. We overcome the difficulties associated with the loss of smoothness in solutions of emerging boundary value problems using the concept of a point-by-point interpretation of a differential equation, which has shown its effectiveness in analyzing solutions of differential equations with non-smooth solutions not only of the second order, but also of a higher one. The latter circumstance has a simple explanation: at each point, the equations are regarded as a relationship between the value of the solution and its derivatives up to a certain order, in contrast to the theory of generalized functions, where it is understood as the equality of two functionals over the basic space. Sufficient conditions for the weak extremum of a quadratic functional with Radon-Nicodemus derivatives are obtained.

Keywords: Functional, Measure Derivative, Weak Extremum

For citation: Kazakevich KI, Shabrov SA. On Sufficient Conditions for the Weak Extremum of a Quadratic Functional with the Stieltjes Integral. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):226–231. (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-226-231 EDN NHYWLB

1. Введение. Интенсивное применение производных по мере началось после выхода работы Ю. В. Покорного [1] в 1999 году. В дальнейшем Покорным и его учениками была построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вплоть до осциллирующих теорем [2, 3, 4, 5]; и в дальнейшем результаты были перенесены на уравнение с разрывными решениями [6] и на краевые задачи более высокого порядка [7, 8, 9]. Эффективность этого подхода была обусловлена тем фактором, что уравнение рассматривалось как связь между значениями его решения и производными до определенного порядка, то есть как обыкновенное, в отличие от теории обобщенных функций, где уравнение расценивается как равенство двух функционалов над некоторым основным пространством. В этом случае приходится говорить лишь о слабом решении, что для приложений,

в большинстве случаев, недостаточно. Более того, существует ряд нерешенных проблем, например, умножение обобщенной функции на разрывную (см., напр., [10]). В то же время теория обобщенных функций показала свою эффективность в спектральных вопросах (см. работы [11, 12, 13, 14] и многие другие).

2. О необходимом условии экстремума функционала. Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu_{x\mu}''^2}{2} d\mu + \int_0^\ell \frac{ru_x'^2}{2} dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2} dQ + \int_0^\ell u dF, \quad (1)$$

который может быть рассмотрен как функционал полной энергии системы, состоящей из растянутых стержней, соединенных шарнирно. Мы считаем его заданным на множестве E — абсолютно непрерывных на $[0; \ell]$ функций, первая производная которых μ -абсолютно непрерывна на $[0; \ell]$, вторая квазипроизводная $pu_{x\mu}''(x)$ — имеет конечное на $[0; \ell]$ изменение. При этом $u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$.

В работах [7, 15] было получено необходимое условие экстремума функционала (1) на множестве E , а именно, если $u_0(x)$ дает минимум $\Phi(u)$ на E , то существует строго возрастающая на $[0; \ell]$ функция $\sigma(x)$, которая порождает на $[0; \ell]$ меру, такую, что $u_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (pu_{x\mu}'')'_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В [8, 7] задача (2) достаточно подробно изучена, в частности получены достаточные условия её однозначной разрешимости, доказано существование функции Грина, изучен спектр (когда в правой части уравнения из (2) вместо $F'_\sigma(x)$ ставится $\lambda M'_\sigma(x)u$).

Однако достаточные условия минимума функционала $\Phi(u)$ на E в указанных работах не рассматривались.

3. Основные результаты. Нам удобно считать, что производная первого порядка (как квазипроизводная третьего порядка) задана на специальном расширении отрезка $[0; \ell]$, которое мы в дальнейшем будем обозначать $\overline{[0; \ell]}_S$. Строится оно следующим образом. Пусть $\mu(x)$ — строго возрастающая и ограниченная на $[0; \ell]$ функция; через $S(\mu)$ обозначим множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $[0; \ell] \setminus S(\mu)$ введем метрику $\rho_\mu(x; y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Если $S(\mu) \neq \emptyset$, что мы и будем далее предполагать, то метрическое пространство $([0; \ell] \setminus S(\mu); \rho_\mu)$ неполное. Стандартное пополнение с точностью до изоморфизма и дает нам $\overline{[0; \ell]}_S$. Отметим, что в этом множестве вместо точки $\xi \in S(\mu)$ появляются два собственных элемента ξ_-, ξ_+ , которые ранее были символами предельных переходов (см. рисунок 1).

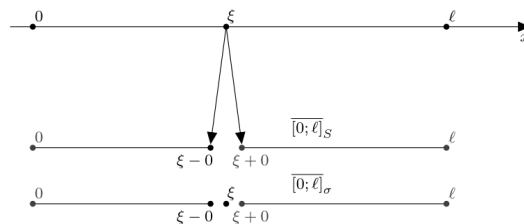


Рис. 1. Структура множеств $\overline{[0; \ell]}_S$ и $\overline{[0; \ell]}_\sigma$

Fig. 1. Structure of the set $\overline{[0; \ell]}_S$ и $\overline{[0; \ell]}_\sigma$

Сохраняя естественную упорядоченность, мы будем иметь $x < \xi_- < \xi_+ < y$ для всех x и y , для которых ранее было $x < \xi < y$. Само уравнение из (2) мы считаем заданным на множестве $\overline{[0; \ell]}_\sigma = \overline{[0; \ell]}_S \cup S(\sigma)$, в котором точки $\xi \in S(\sigma)$ «вставлены» на свои прежние места (см. рисунок 1), причем в этих точках понимается как равенство

$$\Delta p(u_{x\mu}'')'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ .

Мы будем предполагать выполненными следующие условия:

- 1) $x, \mu(x), p(x), r(x), Q(x), F(x)$ — σ -абсолютно непрерывны на $[0; \ell]$;
- 2) $\inf_{x \in [0; \ell]} p(x) > 0$;

При этих условиях, как нетрудно увидеть, вторая вариация $\delta^2\Phi(u_0)h$ имеет вид:

$$\delta^2\Phi(u_0)h = \int_0^\ell p h_{x\mu}''^2 d\mu + \int_0^\ell r h_x'^2 dx + \int_0^\ell h^2 dQ, \quad (3)$$

где $u_0(x)$ является решением (2).

Для того, чтобы функция $u_0(x)$ давала слабый минимум на E , достаточно, чтобы вторая итерация (3) была неотрицательна на E , т. е.

$$\delta^2\Phi(u_0)h \geq 0$$

для всех $h \in E$.

Заметим, что если помимо условий 1)–2) дополнительно потребовать, чтобы $r(x) \geq 0$ и $Q'_\sigma(x) \geq 0$, то вторая вариация $\delta^2\Phi(u_0)h$ будет неотрицательна.

Однако, если одно или оба этих требования убрать, то гарантировать неотрицательность второй вариации мы не можем.

Предположим, что при некоторой $h_0(x)$, принадлежащей множеству E , вторая вариация (3) отрицательна. Без ограничения общности мы можем считать, что $\int_0^\ell h_0^2(x) d\sigma(x) = 1$, другими словами мы можем считать $h_0(x)$ нормированной функцией.

Лемма 3.1. Пусть $Q(x)$ и $r(x)$ – функции ограниченной на $[0; \ell]$ вариации. Тогда существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что неравенства

$$\int_0^\ell r h_x'^2 dx \leq c_1 \int_0^\ell h_{x\mu}''^2(x) d\mu \quad (4)$$

и

$$\int_0^\ell h^2 dQ \leq c_2 \int_0^\ell h_{x\mu}''^2(x) d\mu \quad (5)$$

справедливы для всех функций h , принадлежащих множеству E .

Доказательство. Из представления $h'_x(x) = \int_0^x h_{x\mu}''(t) d\mu(t)$, справедливого для всех $x \in \overline{[0; \ell]}_\mu$, и так как $h \in E$, т. е. $h'(0) = 0$, мы находим

$$|h'_x(x)| \leq \int_0^\ell |h_{x\mu}''(t)| d\mu(t). \quad (6)$$

Применим к интегралу, стоящему в правой части неравенства (6), неравенство Коши, будем иметь

$$|h'_x(x)|^2 \leq (\mu(\ell) - \mu(0)) \int_0^\ell |h_{x\mu}''(t)|^2 d\mu(t). \quad (7)$$

Представим функцию $r(x)$ в виде разности двух неотрицательных функций: $r(x) = r_+(x) - r_-(x)$.

Умножив обе части неравенства (7) на $r_+(x)$, проинтегрировав его по мере x по всему отрезку $[0; \ell]$, придем к неравенству

$$\begin{aligned} \int_0^\ell r_+(x) |h'_x(x)|^2 dx &\leq (\mu(\ell) - \mu(0)) \cdot \int_0^\ell r_+(x) dx \int_0^\ell |h_{x\mu}''(x)|^2 d\mu(x) < \\ &< (\mu(\ell) - \mu(0)) \left(\int_0^\ell r_+(x) dx + 1 \right) \int_0^\ell |h_{x\mu}''(x)|^2 d\mu(x), \end{aligned}$$

а так как $\int_0^\ell r(x) |h'_x(x)|^2 dx \leq \int_0^\ell r_+(x) |h'_x(x)|^2 dx$, то неравенство (4) будет справедливо при $c_1 = (\mu(\ell) - \mu(0)) \left(\int_0^\ell r_+(x) dx + 1 \right)$.

Докажем теперь неравенство (5).

Аналогично последовательно получаем

$$|h(x)| \leq \int_0^x |h'_x(s)| ds \leq \int_0^\ell |h'_x(s)| ds \leq \left(\int_0^\ell |h'_x(s)|^2 ds \int_0^\ell 1^2 ds \right)^{1/2}.$$

Отсюда находим

$$|h(x)|^2 \leq \ell \cdot \int_0^\ell |h'_x(s)|^2 ds.$$

Из результатов работы [16] следует, что существует такая строго возрастающая и ограниченная на $[0; \ell]$ функция $\sigma(x)$, порождающая на этом множестве меру, что $Q(x)$ является σ -абсолютно непрерывной на $[0; \ell]$ функцией; причем σ -производная функции $Q(x)$ является σ -суммируемой функцией.

Тогда $Q'_\sigma(x)$ также можно представить в виде разности двух неотрицательных функций, причем можно даже добиться, чтобы обе они были положительны: $Q'_\sigma(x) = q_+(x) - q_-(x)$.

Нетрудно видеть, что обе они являются σ -суммируемыми функциями.

На основании неравенства последовательно получаем

$$\int_0^\ell h^2 dQ = \int_0^\ell h^2 Q'_\sigma d\sigma \leq \int_0^\ell q_+(x) h^2 d\sigma \leq \ell \cdot \int_0^\ell q_+(x) d\sigma \cdot \int_0^\ell h_x'^2(s) ds. \quad (8)$$

Но, на основании неравенства (7), цепочку неравенств (8) мы можем продолжить

$$\int_0^\ell h^2 dQ \leq \ell^2 \cdot \int_0^\ell q_+(x) h^2 d\sigma \cdot (\mu(\ell) - \mu(0)) \cdot \int_0^\ell |h''_{x\mu}(t)|^2 d\mu(t),$$

и неравенство (5) справедливо при

$$c_2 = \ell^2 \cdot \int_0^\ell q_+(x) d\sigma \cdot (\mu(\ell) - \mu(0)).$$

Лемма доказана.

На основании леммы, из равенства (3) мы получаем оценку для второй вариации

$$\delta^2 \Phi(u_0)h = \int_0^\ell (p(x) - c_1 - c_2) h_{x\mu}''^2 d\mu.$$

Теорема 3.1. Пусть помимо условий 1–2), выполнено

$$p(x) \geq (\mu(\ell) - \mu(0)) \left[\int_0^\ell r_+(x) dx + 1 \right] + \ell^2 (\mu(\ell) - \mu(0)) \cdot (Q_+(\ell) - Q_+(0)) + \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число и $Q_+(x)$ — возрастающая составляющая из жорданова разложения функции ограниченной вариации на сумму возрастающей и убывающей функций.

Тогда функция $u_0(x)$, удовлетворяющая задаче (2), дает слабый минимум функционалу $\Phi(u)$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\Delta \Phi(u_0) = \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0),$$

где h — произвольная функция, принадлежащая пространству E допустимых функций. Как нетрудно видеть, разность можно представить в следующем виде

$$\Delta \Phi(u_0) = \delta \Phi(u_0)h + \delta^2 \Phi(u_0)h,$$

или, с учетом того, что u_0 — допустимая экстремаль,

$$\Delta \Phi(u_0) = \delta^2 \Phi(u_0)h. \quad (9)$$

Но в силу условий теоремы, на основании леммы 3.1, правая часть (9) принимает положительные значения для всех $h(x) \neq 0$, принадлежащих пространству E .

Теорема доказана.

4. Заключение. В работе доказана теорема, позволяющая давать ответ: действительно ли является минималью функционала $\Phi(u)$ функция, удовлетворяющая уравнению Эйлера – Пуассона для $\Phi(u)$; речь идет о слабом экстремуме.

Благодарность. Авторы выражают благодарность доценту кафедры математического анализа Зверевой Маргарите Борисовне за ряд ценных рекомендаций, способствовавших улучшению рукописи.

Список литературы

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стильеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Доклады Академии наук, 1999;364(2):167–169.
2. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач. Успехи математических наук, 2008;63(1(379)):111–154.

3. Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А. Шабров К теории Штурма—Лиувилля для уравнения с обобщенными коэффициентами. *Журнал математических наук*, 2004;(6(119)):769–787.
4. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. *Физматлит*, 2004;272.
5. Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач. *Физматлит*, 2009;192.
6. Зверева М.Б. О некоторых вопросах качественной теории дифференциальных уравнений с производными Стильтьеса. *Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю.В. Покорный*, 15.11.2005;120.
7. Шабров С.А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика*, 2013;1:232–250.
8. Шабров С.А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с производными по мере. *Воронеж. гос. ун-т ; науч. консультант А. Д. Баев*, 20.12.2017;412.
9. Бородин Е.А. Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач с негладкими решениями. *Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. С. А. Шабров*, 2018;133.
10. Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М. Динамические обобщенные функции и проблема умножения. *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2007;(5(540)):33–45.
11. Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А. Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений. *Матем. Заметки*, 2023;(2(113)):217–235.
12. Гранильщикова Я.А., Шкаликов А.А. Спектральные свойства дифференциального оператора с инволюцией. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика*, 2022;(4):67–71.
13. Шкаликов А.А. Регулярные спектральные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. *Успехи математических наук*, 2021;(4(76)):203–204.
14. Шейпак И.А., Владимиров А.А. Асимптотика собственных значений задачи высшего четного порядка с дискретным самоподобным весом. *Успехи математических наук*, 2012;(2(24)):104–119.
15. Шабров С.А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стильтьеса. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, 2012;(1):52–55.
16. Шабров С.А. О μ -регуляризации функции с конечным изменением. *Сборник статей аспирантов и студентов математического факультета ВГУ*, 1999:166–169.

References

1. Pokorny YuV. Stieltjes integral and derivatives with respect to measure in ordinary differential equations. *DAN*, 1999;364(2):167–169. (In Russ.)
2. Pokorny YuV., Zvereva MB., Shabrov SA. Oscillation theory of Sturm-Liouville for impulse problems. *Russian Mathematical Surveys*, 2008, 63(1(379)):111–154. (In Russ.)
3. Pokornyi YuV., Shabrov SA. Toward A Sturm-Liouville Theory For An Equation With Generalized Coefficients. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004;(6(119)):769–787.
4. Pokornyi YuV., Penkin OM., Pryadiev VL., Borovskikh AV., Lazarev KP., Shabrov SA. Differential Equations on Geometric Graphs. *Fizmatlit*, 2004;272.
5. Pokornyi YuV., Bakhtina ZhI., Zvereva MB., Shabrov SA. Sturm's Oscillation Method in Spectral Problems. *Fizmatlit*, 2009;192.
6. Zvereva MB. On some questions of the qualitative theory of differential equations with Stieltjes derivatives. *Voronezh. state. univ. ; scientific. hands. Yu.V. Pokorny*, 15.11.2005;120.
7. Shabrov SA. On a Mathematical Model of Small Deformations of a Rod System with Internal Features. *Vestn. Voronezh. gos. un-ta. Ser. Fizika, matematika*, 2013;1:232–250.
8. Shabrov SA. Mathematical modeling and qualitative methods of analysis of boundary value problems with derivatives in the measure. *Voronezh. state. univ. ; scientific consultant A. D. Baev*, 20.12.2017;412.
9. Borodina EA. Mathematical modeling and qualitative methods for the analysis of boundary value problems with non-smooth solutions. *Voronezh State University ; scientific supervisor S. A. Shabrov*, 2018;133.
10. Der VYa., Kinzebulatov DM. Dynamic Generalized Functions and the Multiplication Problem. *News of Higher Education Institutions. Mathematics*, 2007;(5(540)):33–45. (In Russ.)
11. Konechnaya NN., Mirzoev KA., Shkalikov AA. On the Asymptotics of Solutions of Biproduct Differential Equations. *Mathem. Notes*, 2023;(2(113)):217–235.
12. Granilshchikova YaA., Shkalikov AA. Spectral properties of a differential operator with involution. *Vestn. Mosk. univ. Ser. 1. Matem.*, 2022;(4):67–71.
13. Shkalikov AA. Regular spectral problems for systems of ordinary differential equations of the first order. *UMN*, 2021;(4(76)):203–204.

14. Sheypak I.A., Vladimirov A.A. Asymptotics of Eigenvalues of a Higher Even-Order Problem with a Discrete Self-Similar Weight. *Advances in Mathematical Sciences*, 2012;(2(24)):104–119.
15. Shabrov S.A. On the necessary condition for the minimum of one quadratic functional with an integral Stiltjes. *Proceedings of the Saratov University. A new series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2012;(1):52–55.
16. Shabrov S.A. On μ -regularization of a function with a finite change. *Collection of articles by postgraduate students and students of the Faculty of Mathematics at VSU*, 1999:166–169.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 27.02.2026

Received February 27, 2026

Поступила после рецензирования 22.03.2026

Revised March 22, 2026

Принята к публикации 25.03.2026

Accepted March 25, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Казакевич Климентий Игоревич – аспирант кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Шабров Сергей Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Klimentiy I. Kazakevich – Graduate Student of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sergey A. Shabrov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

К содержанию

Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с двойным вырождением

Архипов В. П.¹ , Глушак А. В.² 

¹ Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95
varhipov@inbox.ru

² Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
Glushak@bsuedu.ru

Аннотация. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих вырождение двух старших коэффициентов, находятся непрерывные вплоть до точки вырождения решения. Вид решения зависит не только от знака в точке вырождения коэффициента перед первой производной, но и от знака коэффициента свободного члена. Определены первые асимптотики этих решений. Приводятся примеры.

Ключевые слова: вырождающиеся дифференциальные уравнения, двойное вырождение, первые асимптотики решений, задача Коши

Для цитирования: Архипов В.П., Глушак А.В. Асимптотика решений дифференциальных уравнений второго порядка с двойным вырождением. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):232–247.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-232-247 EDN ARVBVS

Original Research

Asymptotics of Solutions of Second-order Differential Equations with Double Degeneracy

Viktor P. Arkhipov¹ , Alexander V. Glushak² 

¹ Orel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia
varhipov@inbox.ru

² Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
Glushak@bsuedu.ru

Abstract. For ordinary linear differential equations of the second order, allowing degeneration of two leading coefficients, continuous up to the degeneration point solutions are found. The type of solution depends not only on the sign of the coefficient in front of the first derivative at the degeneracy point, but also on the sign of the coefficient of the free term. The first asymptotics of these solutions are determined. Examples are given.

Keywords: Degenerate Differential Equations, Double Degeneracy, First Asymptotics of Solutions, Cauchy Problem

For citation: Arkhipov VP., Glushak AV. Asymptotics of Solutions of Second-order Differential Equations with Double Degeneracy. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):232–247. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-232-247 EDN ARVBVS

1. Введение. Для линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами особенности решений могут возникать лишь в точках обращения старшего коэффициента в ноль. Такие особенности для уравнений второго порядка были довольно полно исследованы в работах [1, 2, 3, 4]. К такому виду также относятся классические уравнения Эйлера, предполагающие согласование порядка дифференцирования и скорости вырождения, кроме того, вырождающиеся дифференциальные уравнения, сводящиеся к уравнению Эйлера – Пуассона – Дарбу [5] и др. В отличие от [1, 2, 3, 4] настоящая статья посвящена рассмотрению вырождающихся дифференциальных уравнений, допускающих одновременное вырождение двух старших коэффициентов с произвольной скоростью. Частные случаи вырождающихся дифференциальных уравнений были исследованы в [6] для уравнений, допускающих факторизацию, т. е. представление в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка. Методы, разработанные в [6], применяются нами к вырождающимся дифференциальным уравнениям второго порядка, допускающим одновременное вырождение двух старших коэффициентов с произвольной скоростью. С помощью этих методов найдены явные формулы для решений, установлены их асимптотики вблизи точки вырождения, а также исследована разрешимость задачи Коши.

2. Вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка. На промежутке $[0, d]$, $d > 0$ рассмотрим вырождающееся дифференциальное уравнение первого порядка

$$Mu(t) \equiv p(t)u'(t) + q(t)u(t) = g(t), \quad (1)$$

где коэффициенты и правая часть $g(t)$ уравнения (1) — действительные функции, причём $p(t), q(t) \in C^\infty[0, d]$, $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ для $t > 0$, $q(0) \neq 0$, $g(t) \in C^k[0, d]$ при $k \in \mathbb{N}_0$.

При $t > 0$ и $g(t) = 0$ решение однородного уравнения (1) имеет вид

$$u_0(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) \in C^\infty(0, d]. \quad (2)$$

На функциях из $C[0, d]$ при $q(0) > 0$ определим интегральный оператор

$$M_+^{-1}g(t) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau, \quad (3)$$

а при $q(0) < 0$ определим интегральный оператор другого вида

$$M_-^{-1}g(t) = -\int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau. \quad (4)$$

Вводимые равенствами (3) и (4) операторы M_+^{-1} и M_-^{-1} являются обращающими для уравнения (1), при этом интеграл в (3) является несобственным. В дальнейшем для установления асимптотик решений весьма полезными являются приводимые в лемме 1 асимптотические соотношения.

Лемма 1. Пусть для некоторого $t_0 > 0$ функция $a(t) \in C^2[0, t_0]$, $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ при $t > 0$, функция $h(t) \in C^1[0, t_0]$, $h(t) > 0$ при $t \geq 0$, $a f(t) \neq 0$ при $t > 0$ и

$$f(t) \in C^1[0, t_0], \quad \frac{tf'(t)}{f(t)} = O(1) \text{ при } t \rightarrow 0+. \quad (5)$$

Если $a'(0) = 0$, то при $t \rightarrow 0+$ справедливы следующие асимптотические представления:

$$\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = f(t) \frac{a(t)}{h(t)} (1 + o(1)), \quad (6)$$

$$\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = f(t) \frac{a(t)}{h(t)} (1 + o(1)). \quad (7)$$

Если же $a(t) = a_1 t(1 + o(1)) \in C^2[0, t_0]$, $a_1 > 0$, $h(t) = h_0(1 + o(1)) \in C^2[0, t_0]$, $h_0 > 0$ и $f(t) \in C[0, t_0]$, то при $t \rightarrow 0+$

$$\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = \begin{cases} tO(1), & \text{если } \frac{h_0}{a_1} > 1, \\ t \ln t O(1) \rightarrow 0, & \text{если } \frac{h_0}{a_1} = 1, \\ t^{h_0/a_1} O(1), & \text{если } 0 < \frac{h_0}{a_1} < 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = tO(1). \quad (9)$$

Доказательство. Если выполнено условие (5), то справедливость представлений (6), (7) вытекает соответственно из предельных соотношений

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds}{a(t)f(t)/h(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_t^{t_0} f(s) \exp\left(\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds}{a(t)f(t)/h(t) \exp\left(\int_t^{t_0} \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right)} =$$

$$\begin{aligned}
& -f(t) \exp\left(\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) \\
& = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{((a(t)f(t)/h(t))' - f(t)) \exp\left(\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)}{\left(\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) ds\right)} = 1, \\
& \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) ds}{a(t)f(t)/h(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right) ds}{a(t)f(t)/h(t) \exp\left(-\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)} = \\
& = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t) \exp\left(-\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)}{((a(t)f(t)/h(t))' + f(t)) \exp\left(-\int_t^{t_0} h(\xi)/a(\xi) d\xi\right)} = 1.
\end{aligned}$$

А если $a(t) = a_1 t(1 + o(1)) \in C^2[0, t_0]$, $a_1 > 0$, то справедливость представлений (8), (9) следует соответственно из предельных соотношений

$$\begin{aligned}
& \int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = \int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\int_t^s \frac{(h_0 + h_1 \xi + o(1)) d\xi}{a_1 \xi(1 + o(1))}\right) ds = \\
& = \int_t^{t_0} f(s) \exp\left(-\frac{h_0}{a_1} \int_t^s \left(\frac{1}{\xi} + O(1)\right) d\xi\right) ds = \int_t^{t_0} f(s) \left(\frac{s}{t}\right)^{-h_0/a_1} \exp(O(1)) ds = \\
& = \begin{cases} tO(1), & \text{если } \frac{h_0}{a_1} > 1, \\ t \ln t O(1) \rightarrow 0, & \text{если } \frac{h_0}{a_1} = 1, \\ t^{h_0/a_1} O(1), & \text{если } 0 < \frac{h_0}{a_1} < 1, \end{cases} \\
& \int_0^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h(\xi) d\xi}{a(\xi)}\right) ds = \int_s^t f(s) \exp\left(-\int_s^t \frac{h_0(1 + o(1)) d\xi}{a_1 \xi(1 + o(1))}\right) ds = \\
& = \int_0^t f(s) \exp\left(-\frac{h_0}{a_1} \int_s^t \left(\frac{1}{\xi} + O(1)\right) d\xi\right) ds = \int_0^t f(s) \left(\frac{s}{t}\right)^{h_0/a_1} \exp(O(1)) ds = tO(1).
\end{aligned}$$

Для решений уравнения (1) в [6] были построены асимптотики при $t \rightarrow 0+$. Приведем эти результаты в удобной для нас форме.

Условие 1. Коэффициенты и правая часть $g(t)$ уравнения (1) — действительные функции, причём $p(t), q(t) \in C^\infty[0, d]$, $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ при $t > 0$, $q(0) \neq 0$, $g(t) \in C^k[0, d]$ при некотором $k \in \mathbb{N}_0$.

Лемма 2. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) > 0$. Тогда при любой допустимой функции $g(t)$ существует единственное ограниченное на $[0, d]$ решение $u_+(t; g)$ этого уравнения, определённое равенством

$$u_+(t; g) = M_+^{-1} g(t) = \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau \in C^k[0, d] \cap C^{k+1}(0, d]. \quad (10)$$

Для $t > 0$ общее решение $u(t)$ уравнения (1) имеет вид

$$u(t) = C u_0(t) + u_+(t; g) = C \exp\left(\int_t^d \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) + \int_0^t \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{q(\xi) d\xi}{p(\xi)}\right) d\tau, \quad (11)$$

где функция $u_0(t)$ определена равенством (2), C — произвольная постоянная. При этом для любого $j \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(j)}(t) = \infty, \quad u_0(t) \in C^\infty(0, d], \quad u_0(t) \notin C[0, d], \quad u_+(t; g) = \frac{g(0)}{q(0)}(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+.$$

Лемма 3. Пусть для коэффициентов и правой части уравнения (1) выполнено условие 1 и $q(0) < 0$. Тогда решением уравнения (1) является функция $u_-(t; g)$, которая определяется равенством

$$u_-(t; g) = M^{-1}g(t) = - \int_t^d \frac{g(\tau)}{p(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right) d\tau, \quad (12)$$

и при этом справедливы утверждения.

1°. В случае сильного вырождения, когда $p(0) = p'(0) = 0$,

$$u_-(t; g) \in C^k[0, d] \cap C^{k+1}(0, d], \quad u_0(t) \in C^\infty[0, d], \quad u_0(t) = o(t^j) \text{ при } t \rightarrow 0+ \text{ для } j \in \mathbb{N}.$$

2°. В случае слабого вырождения, если $p(0) = 0$, $p(t) = p_1 t + t^2 O(1)$, $p_1 > 0$, $q(t) = q_0 + t O(1)$, $q_0 > 0$ и $g(t) = g_0 + \sum_{j=1}^k g_j t^j + t^k o(1)$ при $t \rightarrow 0+$, то справедливы включения

$$u_-(t; g) \in \begin{cases} C^k[0, d], & \text{если } k < -\frac{q_0}{p_1}, \\ C^{[-q_0/p_1]}[0, d], & \text{если } k \geq -\frac{q_0}{p_1}, -\frac{q_0}{p_1} \notin \mathbb{N}, \\ C^{k_0-1}[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, k_0 \leq k, g^{(k_0)}(0) \neq 0, \\ C^k[0, d], & \text{если } k_0 = -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, k_0 \geq k, g^{(k_0)}(0) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$u_0(t) \in C^{[-q_0/p_1]}[0, d] \cap C^\infty(0, d], \quad \lim_{t \rightarrow 0+} u_0^{(j)}(t) = 0 \text{ при } j < \left\lfloor -\frac{q_0}{p_1} \right\rfloor,$$

$$u_0(t) \in C^\infty[0, d] \text{ при } -\frac{q_0}{p_1} \in \mathbb{N}, \quad u_-(t; g) = \frac{g(0)}{q(0)}(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+.$$

Установленные в леммах 1–3 асимптотические соотношения (10)–(13) будут использованы в дальнейшем при доказательстве теорем 1–4.

3. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка с двойным вырождением. При $t > 0$ рассмотрим дифференциальное уравнение с двойным вырождением

$$Lv(t) \equiv (a(t)v'(t))' + t^m b(t)v'(t) + c(t)v(t) = f(t), \quad (14)$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующему условию.

Условие 2. Коэффициенты уравнения (14) действительные бесконечно дифференцируемые на отрезке $[0, d]$ при некотором $d > 0$ функции,

$$a(t) = a_0 t^{n+m}(1 + o(1)), \quad a_0 = \text{const} > 0, \quad b(0) \neq 0, \quad c(0) \neq 0, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad n > m.$$

Если выполнено условие 2, то в дальнейшем будет доказано, что существует двухпараметрическое семейство решений уравнения (14), гладкость которых при $t = 0$ определяется знаками коэффициентов $b(0)$, $c(0)$. Отметим, что однородные уравнения вида (14) при $n = 1$ в банаховом пространстве рассматривались ранее в [5].

Чтобы исследовать поведение этих решений при $t \rightarrow 0+$, представим входящий в уравнение оператор L в виде выражения, содержащего произведения двух дифференциальных операторов L_i первого порядка с подлежащими определению функциями $a_i(t)$, $b_i(t)$, где

$$L_i u(t) = a_i(t)u'(t) + b_i(t)u(t), \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим произведение операторов $L_1 L_2$, которое, как легко видеть, имеет вид

$$L_1 L_2 v(t) = (a_1(t)a_2(t)v'(t))' + (-a_1'(t)a_2(t) + a_1(t)b_2(t) + a_2(t)b_1(t))v'(t) + (a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t))v(t), \quad (15)$$

и выберем $a_i(t)$, $b_i(t)$ так, чтобы

$$\begin{aligned} a_1(t) &= t^m, \quad a_2(t) = a_0 t^n(1 + o(1)), \quad a(t) = a_1(t)a_2(t), \quad b_2(t) = b(t), \quad b_1(t) = \frac{c(t) - a_1(t)b_2'(t)}{b_2(t)}, \\ c(t) &= t^m b'(t) + b_1(t)b_2(t), \quad \omega(t) = a_2(t)(b_1(t) - a_1'(t)) = t^n O(1) \text{ при } t \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом все выбранные функции бесконечно дифференцируемы на $[0, d]$ и

$$b_2(0) = b(0) \neq 0, \quad b_1(0) = \frac{c(0)}{b_2(0)} \neq 0, \quad b_1(0)b_2(0) = c(0).$$

Тогда из равенств (15), (16) следует представление

$$\begin{aligned} Lv(t) &= (a_0 t^{n+m}(1+o(1))v'(t))' + t^m b(t)v'(t) + c(t)v(t) = (a_1(t)a_2(t)v'(t))' + \\ &+ (a_1(t)b_2(t) - a_1'(t)a_2(t) + a_2(t)b_1(t))v'(t) + (a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t))v(t) - a_2(t)(b_1(t) - a_1'(t))v'(t) = \\ &= L_1 L_2 v(t) - \omega(t)v'(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Далее будем находить решения уравнения (14), или, эквивалентного ему в силу равенства (17), уравнения

$$L_1 L_2 v(t) - \omega(t)v'(t) = f(t), \quad (18)$$

используя обратимость операторов L_1 , L_2 в некоторой окрестности точки $t = 0$. Отметим, что в отличие от работ [1–4], вид обратных операторов зависит не только от знака в точке вырождения коэффициента перед первой производной, но и от знака коэффициента свободного члена, т. е. в рассматриваемом нами случае от знаков коэффициентов $b_1(0)$ и $b_2(0)$. Поэтому мы разобьём поиск решения на четыре случая, при этом всегда $b_1(0)b_2(0) = c(0)$.

Случай 1. $b(0) > 0$, $c(0) > 0 \Leftrightarrow b_1(0) > 0$, $b_2(0) = b(0) > 0$.

Случай 2. $b(0) < 0$, $c(0) < 0 \Leftrightarrow b_1(0) > 0$, $b_2(0) = b(0) < 0$.

Случай 3. $b(0) > 0$, $c(0) < 0 \Leftrightarrow b_1(0) < 0$, $b_2(0) = b(0) > 0$.

Случай 4. $b(0) < 0$, $c(0) > 0 \Leftrightarrow b_1(0) < 0$, $b_2(0) = b(0) < 0$.

В соответствии с определяемыми равенствами (3) и (4) операторами M_+^{-1} , M_-^{-1} введём интегральные операторы, обращающие L_1 и L_2

$$L_i^{-1}u(t) = \int_0^t \frac{u(\tau)}{a_i(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_i(\xi)}{a_i(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad \text{если } b_i(0) > 0, \quad i = 1, 2, \quad (19)$$

$$\Lambda_i^{-1}u(t) = -\int_t^d \frac{u(\tau)}{a_i(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_i(\xi)}{a_i(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad \text{если } b_i(0) < 0, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Используя представление (2), определим также функции $v_{0i}(t)$, $i = 1, 2$, которые будут использованы при построении решений однородного уравнения (18). Они имеют вид

$$v_{0i}(t) = \exp\left(\int_t^d \frac{b_i(\xi)}{a_i(\xi)} d\xi\right), \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

4. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 1.

Теорема 1. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) > 0$, $c(0) > 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует единственное ограниченное решение $v_1(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_1(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_1)^k V_1(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (22)$$

$$V_1(t; f) = \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \times \left(\int_0^\tau \exp\left(-\int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} d\eta\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} Q_1 v(t) &= \\ &= \int_0^t \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} - \int_0^\tau \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_\eta^\tau \frac{-b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right)\right) v(\eta) d\eta\right) \exp\left(\int_\tau^t \frac{-b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $m > 1$ справедлива асимптотика

$$v_1(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)}(1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (25)$$

а все решения однородного уравнения (14), кроме тривиального, неограничены при $t \rightarrow 0+$.

Доказательство. Пусть функция $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$ является решением уравнения (14), тогда в силу равенств (15), (16), она будет удовлетворять и уравнению (18). Отметим, что в условиях теоремы 1 выполнено условие $b_1(0) > 0$, $b_2(0) > 0$.

Уравнение (18) положим в основу дальнейших преобразований. Перенесём свободный член этого уравнения направо и поочерёдно обратим операторы в произведении $L_1 L_2 v(t)$. После применения определяемого равенством (19) оператора L_1^{-1} получим интегро-дифференциальное уравнение

$$L_2 v(t) = C_1 v_{01}(t) + \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau + \int_0^t \frac{\omega(\tau)v'(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad (26)$$

где $v_{01}(t)$ определена равенством (21), C_1 — произвольная постоянная.

Предполагая, что интеграл в (26) сходится, используя равенство, проинтегрируем по частям последнее слагаемое в (26) и получим уравнение

$$L_2 v(t) = C_1 v_{01}(t) + u_1(t; f) + w_1(t; v), \quad \text{где} \quad (27)$$

$$u_1(t; f) = \int_0^t \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau,$$

$$w_1(t; v) = \frac{\omega(t)v(t)}{a_1(t)} - \int_0^t \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(-\int_\eta^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) v(\eta) d\eta.$$

Применяя теперь к уравнению (27) оператор L_2^{-1} из равенства (19), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + C_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + V_1(t; f) + Q_1 v(t), \quad (28)$$

где $V_1(t; f)$ и оператор Q_1 определены в (23), (24), а C_1 , C_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, при $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (28), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (28) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_1 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя лемму 1, будем иметь

$$|Q_1 v(t)| \leq \left| \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi)) d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{w_1(\tau; v) d\tau}{a_2(\tau)} \right| = \frac{|w_1(t; v)|}{b_2(t)}(1 + o(1)),$$

$$|w_1(t; v)| \leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_0^t \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(-\int_\eta^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \quad (29)$$

Таким образом, из (29) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_1 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_1\|_C < 1$, а решение уравнения (28) при $C_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{1,0}(t; f) = V_1(t; f), \quad v_{1,k}(t; f) = Q_1 v_{1,k-1}(t; f) = (Q_1)^k V_1(t; f), \quad v_1(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{1,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (22).

Чтобы получить первые асимптотики построенного решения $v_1(t; f)$ при $m > 1$ и $t \rightarrow 0+$, используя равенство $v_1(t; f) = V_1(t; f) + Q_1 v_1(t; f)$ и лемму 1, оценим вначале $V_1(t; f)$. Учитывая условие 2, получим

$$V_1(t; f) = \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \times \left(\int_0^\tau \exp\left(-\int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} =$$

$$= \frac{1}{b_2(t)} \int_0^t \exp \left(- \int_{\eta}^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)),$$

и из (29) следует, что $Q_1 v_1(t; f) = o(1)$ при $t \rightarrow 0+$. Нетрудно также проверить, что при этом интеграл в (26) сходится.

Функция $v_1(t; f)$ удовлетворяет интегральному уравнению (28),

$$v_1(t; f) = V_1(t; f) + Q_1 v_1(t; f),$$

и $c(t) = a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t) = t^m b_2'(t) + b_1(t)b_2(t)$, поэтому при $t \rightarrow 0+$

$$v_1(t; f) = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)),$$

что и доказывает (25).

Далее исследуем поведение решений $v_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (28). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$v_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + C_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + Q_1 v_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (30) при $i = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} L_2^{-1} v_{01}(t) &= \int_0^t \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(- \int_{\tau}^t \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) d\tau = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \int_0^t \exp \left(\int_{\tau}^t \left(\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} - \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} \right) d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{1 + o(t)}{b_2(t)} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и, как следует из уравнения (30), решение $v_1(t; 0)$ неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (30) при $i = 2$, $C_1 = 0$. Поскольку функция $v_{02}(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow 0+$, то $v_2(t; 0)$ также неограничено при $t \rightarrow 0+$. Теорема доказана.

Замечание 1. При нахождении асимптотики функции $v_1(t; f)$ используется лемма 1, которая не позволяет выписать точную асимптотику решения $v_1(t; f)$ при $m = 1$, однако, она может быть вычислена непосредственно с помощью аналогичного алгоритма (см. далее примеры в п. 9).

5. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 2.

Теорема 2. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) < 0$, $c(0) < 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует ограниченное решение $v_2(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_2(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_2)^k V_2(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (31)$$

$$V_2(t; f) = - \int_t^d \exp \left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \times \left(\int_0^{\tau} \exp \left(\int_{\eta}^{\tau} \frac{-b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} Q_2 v(t) &= \\ &= - \int_t^d \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} - \int_0^{\tau} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_{\eta}^{\tau} \frac{-b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp \left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (33)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $m > 1$ справедлива асимптотика

$$v_2(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (34)$$

и для однородного уравнения (14) существует стремящееся к нулю при $t \rightarrow 0$ решение

$$\hat{v}_2(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_2)^k v_{02}(t) \in C[0, d], \quad \hat{v}_2(t; 0) = v_{02}(t)(1 + o(1)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0, \quad (35)$$

где $v_{02}(t)$ определена в (21), причём любое линейно независимое с ним решение неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Доказательство. Пусть функция $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$ является решением уравнения (14), тогда в силу равенств (15), (16) она будет удовлетворять и уравнению (18). Отметим, что в условиях теоремы 2 выполнено условие $b_1(0) > 0$, $b_2(0) < 0$.

Перенесём свободный член уравнения (18) направо и поочерёдно обратим операторы в произведении $L_1 L_2 v(t)$. Как и в теореме 1, после применения определяемого равенством (19) оператора L_1^{-1} получим интегро-дифференциальное уравнение (26), которое принимает вид (27).

Поскольку теперь $b_2(0) < 0$, то применяя к уравнению (27) оператор Λ_2^{-1} из равенства (20), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + C_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + V_2(t; f) + Q_2 v(t), \quad (36)$$

где $V_2(t; f)$ и оператор Q_2 определены в (32), (33), а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (36), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (36) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_2 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя леммы 1 и 2, будем иметь

$$\begin{aligned} |Q_2 v(t)| &\leq \left| \int_t^d \exp \left(- \int_t^\tau \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi)) d\xi}{a_2(\xi)} \right) \frac{w_1(\tau; v) d\tau}{a_2(\tau)} \right| \leq \frac{|w_1(t; v)|}{|b_2(t)|} (1 + o(1)), \\ |w_1(t; v)| &\leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_0^t \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(- \int_\eta^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, из (37) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_2 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_2\|_C < 1$, а решение уравнения (36) при $C_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{2,0}(t; f) = V_2(t; f), \quad v_{2,k}(t; f) = Q_2 v_{2,k-1}(t; f) = (Q_2)^k V_2(t; f), \quad v_2(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (31).

Чтобы получить первые асимптотики построенного решения $v_2(t; f)$ при $m > 1$ и $t \rightarrow 0+$, используя равенство $v_2(t; f) = V_2(t; f) + Q_2 v_1(t; f)$ и леммы 1 и 2, оценим вначале $V_2(t; f)$. Учитывая условие 2, получим

$$\begin{aligned} V_2(t; f) &= - \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \times \left(\int_0^\tau \exp \left(- \int_\eta^\tau \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \frac{1}{b_2(t)} \int_0^t \exp \left(- \int_\eta^t \frac{b_1(\xi) d\xi}{a_1(\xi)} \right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)} = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

и из (37) следует, что $Q_2 v_2(t; f) = o(1)$ при $t \rightarrow 0+$.

Функция $v_2(t; f)$ удовлетворяет интегральному уравнению (36) при $C_1 = C_2 = 0$

$$v_2(t; f) = V_2(t; f) + Q_2 v_2(t; f),$$

и $c(t) = a_1(t)b_2'(t) + b_1(t)b_2(t) = t^m b_2'(t) + b_1(t)b_2(t)$, поэтому при $t \rightarrow 0+$

$$v_2(t; f) = \frac{f(t)}{b_1(t)b_2(t)} (1 + o(1)) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)),$$

что и доказывает (34).

Далее исследуем поведение решений $\hat{v}_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (36). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\hat{v}_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + C_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + Q_2 \hat{v}_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (38)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (38) при $i = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) &= - \int_t^d \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) d\tau = \\ &= - \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \left(\frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} - \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} \right) d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \exp \left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{1 + o(1)}{b_2(t)} \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и, как следует из уравнения (38), решение $\hat{v}_1(t; 0)$ неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение (38) при $i = 2$, $C_1 = 0$. Решение $\hat{v}_2(t; 0)$ этого однородного уравнения находится аналогично нахождению решения $v_2(t; f)$ и для него справедливо представление (35). Теорема доказана.

6. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 3.

Теорема 3. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) > 0$, $c(0) < 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует ограниченное решение $v_3(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_3(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_3)^k V_3(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (39)$$

$$V_3(t; f) = - \int_0^t \exp \left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \times \left(\int_\tau^d \exp \left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \frac{f(\eta)}{a_1(\eta)} d\eta \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} Q_3 v(t) &= \\ &= \int_0^t \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} + \int_\tau^d \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp \left(\int_\tau^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp \left(\int_\tau^t \frac{-b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (41)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $t > 1$ справедлива асимптотика

$$v_3(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)) \quad \text{при } t \rightarrow 0+, \quad (42)$$

и для однородного уравнения (14) существует стремящееся к нулю при $t \rightarrow 0+$ решение

$$\tilde{v}_1(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_3)^k L_2^{-1} v_{01}(t) \in C[0, d], \quad \tilde{v}_1(t; 0) = \frac{v_{01}(t)}{b(t)} (1 + o(1)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0+, \quad (43)$$

где L_2^{-1} , $v_{01}(t)$ определены в (19), (21), причём любое линейно независимое с ним решение неограничено при $t \rightarrow 0+$.

Доказательство. Пусть функция $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$ является решением уравнения (14), тогда в силу равенств (15), (16), она будет удовлетворять и уравнению (18). Отметим, что в условиях теоремы 3 выполнено условие $b_1(0) < 0$, $b_2(0) > 0$.

Перенесём свободный член уравнения (18) направо и поочерёдно обратим операторы в произведении $L_1 L_2 v(t)$. После применения определяемого равенством (20) оператора Λ_1^{-1} получим интегродифференциальное уравнение

$$L_2 v(t) = C_1 v_{01}(t) - \int_t^d \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) d\tau - \int_t^d \frac{\omega(\tau)v'(\tau)}{a_1(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) d\tau, \quad (44)$$

где $v_{01}(t)$ определена равенством (21), C_1 — произвольная постоянная.

Проинтегрируем по частям последнее слагаемое в (44) и получим уравнение

$$L_2 v(t) = \tilde{C}_1 v_{01}(t) + \tilde{u}_1(t; f) + \tilde{w}_1(t; v), \quad \text{где} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(t; f) &= - \int_t^d \frac{f(\tau)}{a_1(\tau)} \exp\left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) d\tau, \quad \tilde{C}_1 = C_1 - \frac{\omega(d)v(d)}{a_1(d)}, \\ \tilde{w}_1(t; v) &= \frac{\omega(t)v(t)}{a_1(t)} + \int_t^d \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_t^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) v(\eta) d\eta \right). \end{aligned}$$

Применяя теперь к уравнению (45) оператор L_2^{-1} из равенства (19), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + \tilde{C}_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + V_3(t; f) + Q_3 v(t), \quad (46)$$

где $V_3(t; f)$ и оператор Q_3 определены в (40), (41), а $\tilde{C}_1$, C_2 — произвольные постоянные.

Следовательно, при $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (46), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (46) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_3 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя лемму 1, будем иметь

$$\begin{aligned} |Q_3 v(t)| &\leq \left| \int_t^d \exp\left(- \int_t^\tau \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi))d\xi}{a_2(\xi)}\right) \frac{\tilde{w}_1(\tau; v)d\tau}{a_2(\tau)} \right| = \frac{|\tilde{w}_1(t; v)|}{b_2(t)} (1 + o(1)), \\ |\tilde{w}_1(t; v)| &\leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_t^d \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_t^\eta \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, из (47) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_3 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_3\|_C < 1$, а решение уравнения (46) при $\tilde{C}_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{3,0}(t; f) = V_3(t; f), \quad v_{3,k}(t; f) = Q_3 v_{3,k-1}(t; f) = (Q_3)^k V_3(t; f), \quad v_3(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{3,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (39). Используя лемму 1, как и при доказательстве теорем 1 и 2, получим его асимптотику в виде (42).

Далее исследуем поведение решений $\tilde{v}_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (46). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\tilde{v}_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + C_1 L_2^{-1} v_{01}(t) + Q_3 \tilde{v}_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (48)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (48) при $i = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} L_2^{-1} v_{01}(t) &= \int_0^t \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) d\tau = \\ &= \exp\left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \int_0^t \exp\left(\int_\tau^t \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \exp\left(- \int_\tau^t \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \\ &= \exp\left(\int_t^d \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{1 + o(1)}{b_2(t)} \in C[0, d], \end{aligned}$$

поэтому ограниченное решение $\tilde{v}_1(t; 0)$ может быть найдено итерациями, которые аналогичны итерациям для нахождения $v_3(t; f)$, при этом $\tilde{v}_1(t; 0) = L_2^{-1} v_{01}(t) + Q_3 \tilde{v}_1(t; 0)$. Откуда, учитывая соотношение (47), получим (43).

Предположение о существовании ограниченного на $[0, d]$ решения уравнения (48) при $i = 2$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ приводит к противоречию. Теорема доказана.

7. Вырождающееся дифференциальное уравнение второго порядка. Случай 4.

Теорема 4. Пусть для коэффициентов уравнения (14) выполнено условие 2 и $b(0) < 0$, $c(0) > 0$. Тогда для любой функции $f(t) \in C[0, d]$ существует ограниченное решение $v_4(t; f) \in C[0, d]$ этого уравнения, определяемое равенством

$$v_4(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_4)^k V_4(t; f) \in C[0, d], \quad \text{где} \quad (49)$$

$$V_4(t; f) = \int_t^d \exp\left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \times \left(\int_{\tau}^d \exp\left(\int_{\tau}^{\eta} \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \frac{f(\eta) d\eta}{a_1(\eta)}\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} Q_4 v(t; f) = \\ = - \int_t^d \left(\frac{\omega(\tau)v(\tau)}{a_1(\tau)} + \int_{\tau}^d \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_{\tau}^{\eta} \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) v(\eta) d\eta \right) \exp\left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)}, \end{aligned} \quad (51)$$

$a_i(t)$, $b_i(t)$, $\omega(t)$ определены в (16). При этом для $t > 1$ справедлива асимптотика

$$v_4(t; f) = \frac{f(t)}{c(t)} (1 + o(1)) \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (52)$$

и для однородного уравнения (14) существуют стремящиеся к нулю при $t \rightarrow 0+$ линейно независимые решения

$$\check{v}_1(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_4)^k \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) \in C[0, d], \quad \check{v}_1(t; 0) = \frac{v_{01}(t)}{b(t)} (1 + o(1)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (53)$$

$$\check{v}_2(t; 0) = \sum_{k=0}^{\infty} (Q_4)^k v_{02}(t) \in C[0, d], \quad \check{v}_2(t; 0) = v_{02}(t) (1 + o(1)) = o(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0+, \quad (54)$$

где Λ_2^{-1} , $v_{01}(t)$, $v_{02}(t)$ определены в (20), (21).

Доказательство. Начало доказательства теоремы 4 идентично теореме 3, отметим также, что в условиях теоремы 4 выполнено условие $b_1(0) < 0$, $b_2(0) < 0$.

Перенесём свободный член уравнения (18) направо. После применения определяемого равенством (20) оператора Λ_1^{-1} и интегрирования по частям в последнем слагаемом (44), получим уравнение (45).

Применяя теперь к уравнению (45) оператор Λ_2^{-1} из равенства (20), получим интегральное уравнение

$$v(t) = C_2 v_{02}(t) + \tilde{C}_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + V_4(t; f) + Q_4 v(t), \quad (55)$$

где $V_4(t; f)$ и оператор Q_4 определены в (50), (51), а $\tilde{C}_1$, C_2 — произвольные постоянные.

При $t > 0$ каждое решение дифференциального уравнения (14) удовлетворяет интегральному уравнению (55), и наоборот.

Обратимся теперь к интегральному уравнению (55) и при малых $d > 0$ оценим модуль функции $Q_4 v(t)$, если $v(t) \in C[0, d]$. При $t \rightarrow 0+$, используя лемму 3, будем иметь

$$\begin{aligned} |Q_4 v(t)| &\leq \left| \int_t^d \exp\left(\int_t^{\tau} \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi\right) \frac{\tilde{w}_1(\tau; v) d\tau}{a_2(\tau)} \right| = \frac{|\tilde{w}_1(t; v)|}{|b_2(t)|} (1 + o(1)), \\ |\tilde{w}_1(t; v)| &\leq \left(\left| \frac{\omega(t)}{a_1(t)} \right| + \int_t^d \left| \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\omega(\eta)}{a_1(\eta)} \exp\left(\int_{\tau}^{\eta} \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi\right) \right) \right| d\eta \right) \max_{[0, d]} |v(t)| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Таким образом, из (56) следует, что при малом $d > 0$ оператор Q_4 ограничен в $C[0, d]$, $\|Q_4\|_C < 1$, а решение уравнения (55) при $\tilde{C}_1 = C_2 = 0$ находится с помощью итераций:

$$v_{4,0}(t; f) = V_4(t; f), \quad v_{4,k}(t; f) = Q_4 v_{4,k-1}(t; f) = (Q_4)^k V_4(t; f), \quad v_4(t; f) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{4,k}(t; f) \in C[0, d],$$

и поэтому для произвольной функции $f(t) \in C[0, d]$ существует непрерывное на $[0, d]$ решение уравнения (14), которое имеет вид (49). Используя лемму 1, как и при доказательстве теорем 1–3, получим его асимптотику в виде (52).

Далее исследуем поведение решений $\check{v}_i(t; 0)$, $i = 1, 2$ однородного дифференциального уравнения (14) или, что то же самое, однородного интегрального уравнения (55). Эти решения удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\check{v}_i(t; 0) = C_2 v_{02}(t) + \tilde{C}_1 \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + Q_4 \check{v}_i(t; 0), \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Рассмотрим вначале интегральное уравнение (57) при $i = 1$, $\tilde{C}_1 = 1$, $C_2 = 0$. Учитывая лемму 1, при $t \rightarrow 0+$ получим

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) &= - \int_t^d \frac{v_{01}(\tau)}{a_2(\tau)} \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_2(\xi)}{a_2(\xi)} d\xi \right) d\tau = \\ &= - \int_t^d \exp \left(\int_t^\tau \frac{b_1(\xi)}{a_1(\xi)} d\xi \right) \exp \left(\int_t^\tau \frac{(b_2(\xi) - a_2'(\xi))}{a_2(\xi)} d\xi \right) \frac{d\tau}{a_2(\tau)} = \frac{v_{01}(t)(1 + o(1))}{|b_2(t)|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

поэтому ограниченное решение $\check{v}_1(t; 0)$ может быть найдено итерациями, которые аналогичны итерациям для нахождения $v_4(t; f)$, при этом $\check{v}_1(t; 0) = \Lambda_2^{-1} v_{01}(t) + Q_4 \check{v}_1(t; 0)$. Откуда, учитывая соотношение (56), получим (54).

Для интегрального уравнения (57) при $i = 2$, $\tilde{C}_1 = 0$, $C_2 = 1$ решение $\check{v}_2(t; 0)$ может быть найдено аналогичными итерациями, при этом $\check{v}_2(t; 0) = v_{02}(t) + Q_4 \check{v}_2(t; 0)$, и справедливо (53). Теорема доказана.

8. Начальная задача с условием в точке вырождения. Классическая постановка задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка предполагает нахождение решения, удовлетворяющего в определённой точке двум заданным условиям. Как известно, см. [3, 4, 5, 6], для вырождающихся уравнений второго порядка невозможно задание двух классических условий в точке вырождения, чтобы определить ограниченное решение, а одновременное вырождение старших коэффициентов в уравнении (14) добавляет к задаче Коши свои особенности.

Задачей Коши для уравнения (14) в точке вырождения коэффициентов этого уравнения будем называть задачу нахождения функции $v(t) \in C[0, d] \cap C^2(0, d]$, удовлетворяющей при $t > 0$ уравнению (14) и в точке вырождения $t = 0$ условию

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(t) = v_0. \quad (58)$$

Задача (14), (58) ранее была исследована в [6] для уравнения вида (14), допускающего факторизацию в виде произведения дифференциальных операторов первого порядка. Установленные нами теоремы 1–4 позволяют решить эту задачу и для уравнений более общего вида, которые и рассмотрены в настоящей статье.

Теорема 5. Пусть выполнено условие 2. Тогда лишь при единственном начальном значении $v_0 = \frac{f(0)}{c(0)}$

задача (14), (58) имеет решение $v(t)$ и для него справедливы следующие утверждения.

1°. Если $b(0) > 0$, $c(0) > 0$, то существует единственное решение $v(t) = v_1(t; f)$ задачи (14), (58), которое определяется формулами (22)–(24), и для этого решения справедлива асимптотика (25).

2°. Если $b(0) < 0$, $c(0) < 0$, то существует однопараметрическое семейство функций $v(t, C_2) = v_2(t; f) + C_2 \check{v}_2(t; 0)$, где C_2 — произвольная постоянная, $v_2(t; f)$, $\check{v}_2(t; 0)$ определены соответственно в (31)–(33), (35), каждая функция которого является решением задачи (14), (58). При этом для $v_2(t; f)$, $\check{v}_2(t; 0)$ справедливы асимптотики (34) и (35).

3°. Если $b(0) > 0$, $c(0) < 0$, то существует однопараметрическое семейство функций $v(t, C_1) = v_3(t; f) + C_1 \check{v}_1(t; 0)$, где C_1 — произвольная постоянная, $v_3(t; f)$, $\check{v}_1(t; 0)$ определены соответственно в (39)–(41), (43), каждая функция которого является решением задачи (14), (58). При этом для $v_3(t; f)$, $\check{v}_3(t; 0)$ справедливы асимптотики (42) и (43).

4°. Если $b(0) < 0$, $c(0) > 0$, то существует двухпараметрическое семейство функций $v(t, C_1, C_2) = v_4(t; f) + C_1 \check{v}_1(t; 0) + C_2 \check{v}_2(t; 0)$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $v_4(t; f)$, $\check{v}_1(t; 0)$, $\check{v}_2(t; 0)$ определены соответственно в (49)–(51), (53), (54), каждая функция которого является решением задачи (14), (58). При этом для $v_4(t; f)$, $\check{v}_1(t; 0)$, $\check{v}_2(t; 0)$ справедлива асимптотика (52)–(54).

Доказательство. Справедливость теоремы 5 вытекает из утверждений теорем 1–4. Приведем, например, рассуждения, доказывающие п. 4°.

В силу теоремы 4 общее решение уравнения (16) имеет вид

$$v(t, C_1, C_2) = v_4(t; f) + C_1 \check{v}_1(t; 0) + C_2 \check{v}_2(t; 0),$$

и, учитывая асимптотические формулы (52)–(54), получаем требуемое нам утверждение пункта 4° теоремы 5. Пункты 1°–3° теоремы 5 устанавливаются аналогично.

9. Примеры. Если выполнено условие 2, то для произвольных коэффициентов уравнения (14) элементарных выражений для решений, как правило, не существует. Но фундаментальную систему

решений и ограниченное решение неоднородного уравнения в ряде случаев удаётся определить искусственными методами. Приведём соответствующие примеры.

Далее будем рассматривать частный случай уравнения (14), а именно:

$$(t^{n+m}v'(t))' + bt^mv'(t) + cv(t) = f(t). \quad (59)$$

Пример 1. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n \geq 2, m = 1, b = \text{const} > 0, c = nb, \omega(t) = (n-1)t^n, f(t) = 1,$$

а начальное значение в условии (58) $v_0 = \frac{1}{nb}$.

По формулам (16) определим входящие в равенство (23) коэффициенты

$$a_1(t) = t, a_2(t) = t^n, b_2(t) = b, b_1(t) = n, f(t) = 1,$$

и после многочисленных, но несложных вычислений, из (22)–(24) получим

$$V_1(t; f) = \frac{1}{nb}, Q_1 V_1(t; f) = 0, v_1(t; f) = \frac{1}{nb}.$$

Таким образом, на основании п. 1° теоремы 5, единственным решением задачи (58), (59), при сделанных предположениях, является функция $v_1(t; f) = \frac{1}{nb}$.

Отметим, что в рассматриваемом конкретном примере, а также и в дальнейших примерах, фундаментальную систему решений и частное решение неоднородного уравнения удобнее найти, не используя приведённые в теореме 5 формулы для решения.

Действительно, если подобрать частное решение уравнения (59), удовлетворяющее начальному условию (58), то это и будет определяемое равенством (22) решение $v_1(t; f)$, поскольку при $t \rightarrow 0+$ решения однородного уравнения либо стремятся к нулю, либо неограничены. В рассматриваемом примере очевидно, что функция $v_1(t; f) = \frac{1}{nb}$ является требуемым частным решением неоднородного уравнения.

После замены $w(t) = t^{n+1}v'(t)$ в уравнении (59) получим уравнение

$$w'(t) + \frac{bw(t)}{t^n} + nbv(t) = 1,$$

которое после дифференцирования примет вид

$$w''(t) + \frac{bw'(t)}{t^n} = 0.$$

Поскольку $w'(t) = C_2 \exp\left(\frac{b}{(n-1)t^{n-1}}\right)$, то единственным ограниченным решением будет функция $w(t) = \text{const}$, а единственное решение $v(t)$ уравнения (59), удовлетворяющее условию (58), имеет вид $v_1(t; f) = \frac{1}{nb}$.

Пример 1 является иллюстрацией к пункту 1° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Пример 2. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n \geq 2, m = 1, b = \text{const} < 0, c = nb, f(t) = 1,$$

а начальное значение в условии (58) $v_0 = \frac{1}{nb}$.

После замены $w(t) = t^n v'(t)$ и последующего дифференцирования получим уравнение

$$w''(t) + \frac{bw'(t)}{t^n} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$w(t) = C_1 + C_2 \int_0^t \exp\left(\frac{b}{(n-1)s^{n-1}}\right) ds,$$

откуда находим требуемое решение $v(t)$ уравнения (59), удовлетворяющее условию (58),

$$v(t) = \frac{1}{nb} + C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{n+1}} \int_0^\tau \exp\left(\frac{b}{(n-1)s^{n-1}}\right) ds = \frac{1}{nb} + \frac{C_2}{n} \int_0^t \exp\left(\frac{b}{(n-1)s^{n-1}}\right) \frac{t^n - s^n}{t^n s^n} ds.$$

Использование приведённых в теореме 5 формул (32), (33), (36) для нахождения решения более громоздко и мы проиллюстрируем их применение для частного случая, когда $n = 2$, $b = -1$, $c = -2$, при этом $a_1(t) = t$, $a_2(t) = t^2$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$, $\omega(t) = t^2$.

В результате получим

$$V_2(t; 1) = \frac{1}{2} \left(\exp\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{t}\right) - 1 \right),$$

$$Q_2 v(t) = -\exp\left(-\frac{1}{t}\right) \int_t^d \left(\tau v(\tau) - \frac{3}{\tau^2} \int_0^\tau \eta^2 v(\eta) d\eta \right) \exp\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau^2}.$$

Интегральное уравнение (36) при $C_1 = C_2 = 0$ примет вид

$$v_2(t; 1) = V_2(t; 1) + Q_2(v_2(t; 1)),$$

а его решением, удовлетворяющим требуемому начальному условию, будет функция

$$v(t) = -\frac{1}{2} + \frac{C_2}{2} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s}\right) \frac{t^2 - s^2}{t^2 s^2} ds = -\frac{1}{2} + \frac{C_2}{2} \left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2} \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s}\right) ds \right).$$

Пример 2 является иллюстрацией к пункту 2° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Пример 3. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n = 2, m = 1, b = 1, c = -2, f = 1,$$

а начальное значение в условии (58) $v_0 = -1/2$.

Использование приведённых в теореме 5 формул (39), (40), (46) для нахождения решения весьма громоздко, поэтому мы применим искусственный способ.

Очевидно, функция $v_3(t; f) = -1/2$ является частным решением неоднородного уравнения (59), удовлетворяющим начальному условию (58).

Найдём общее решение однородного уравнения. После замены $x = 1/t$, $v(t) = u(x)$ получим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$xu''(x) + (-1 - x)u'(x) - 2u(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид (см. [7, §§ 9.9–9.12])

$$u(x) = C_2 x^2 {}_1F_1(4, 3; x) + C_1 x^2 \Psi(4, 3; x),$$

где ${}_1F_1(4, 3; x)$, $\Psi(4, 3; x)$ — вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми, причём при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотики

$$x^2 {}_1F_1(4, 3; x) = \frac{x^2}{3}(x+3)e^x \sim \frac{1}{3}xe^x, \quad x^2 \Psi(4, 3; x) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Поэтому, при сделанных предположениях, общее решение уравнения (59) имеет вид

$$v(t) = \frac{C_2}{t^2} {}_1F_1\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) + \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2}, \quad \text{причём} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) = 0,$$

а решением $v(t)$ уравнения (59), удовлетворяющим условию (58), будет функция

$$v(t) = \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{2},$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Пример 3 является иллюстрацией к пункту 3° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Пример 4. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n = 2, m = 1, b = -1, c = 2, f = 1.$$

Как и в примерах 1–3, использование приведённых в теореме 5 формул (49), (50), (55) для нахождения решения весьма громоздко, и мы опять применим искусственный способ.

Очевидно, функция $v_4(t; f) = 1/2$ является частным решением неоднородного уравнения (59), удовлетворяющим начальному условию (58).

Найдём общее решение однородного уравнения. Как и в примере 3, после замены $x = -1/t, v(t) = u(x)$ получим вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$xu''(x) + (-1 - x)u'(x) - 2u(x) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$u(x) = C_1 x^2 {}_1F_1(4, 3; x) + C_2 x^2 \Psi(4, 3; x),$$

причём при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотики

$$x^2 {}_1F_1(4, 3; x) = \frac{1}{3}(x+3)e^x \sim \frac{1}{3}xe^x, \quad \Psi(4, 3; x) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной $x = -1/t$ и учитывая указанную асимптотику вырожденных гипергеометрических функций Куммера и Трикоми, найдём общее решение уравнения (59), которое удовлетворяет условию (58). Оно имеет вид

$$v(t) = \frac{C_2}{t^2} {}_1F_1\left(4, 3; -\frac{1}{t}\right) + \frac{C_1}{t^2} \Psi\left(4, 3; -\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 4 является иллюстрацией к пункту 4° теоремы 5. Он подтверждает постановку начального условия, структуру указанного в этом пункте решения и его асимптотику.

Как указано в замечании 1, при нахождении асимптотики функции $v_1(t; f)$ в теореме 1 остался не исследованным случай $n = m = 1$, который мы рассмотрим в следующем примере.

Пример 5. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (59) имеют вид

$$n = 1, m = 1, b = b_1 b_2, b_1 = b_2 = c = f = 1, \omega(t) = 0.$$

Общее решение уравнения (59), полученного после подстановки указанных коэффициентов, имеет вид $v(t) = \frac{1}{t}(C_1 \ln t + C_2) + 1, v_1(t; f) = 1$.

Вычисления по формулам (22)–(24) также приводят к указанному результату для $v_1(t; f)$, поскольку $V_1(t; f) = 1, Q_1 V_1(t; f) = 0, v_1(t; f) = 1$.

Список литературы

1. Архипов В.П. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с вырождающимся коэффициентом при старшей производной. *Дифференциальные уравнения*. 2011;47(10):1383–1393.
2. Архипов В.П., Глушак А.В. Первые асимптотики решений вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2023;55(3):197–206.
3. Архипов В.П., Глушак А.В. Задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(2):87–96.
4. Архипов В.П., Глушак А.В. Двусторонняя задача Коши для вырождающихся дифференциальных уравнений второго порядка с условиями в точке вырождения. *Прикладная математика & Физика*. 2024;56(4):245–260.
5. Глушак А.В. О разрешимости вырождающихся гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. *Дифференциальные уравнения*. 2021;57(1):61–75.
6. Архипов В.П., Глушак А.В. О разрешимости начальной задачи для факторизованного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(3):193–207.
7. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. Физматлит. 1963. 358.

References

1. Arkhipov VP. Linear second-order differential equations with degenerating coefficient of the second derivative. *Differential Equations*. 2011;47(10):1383–1393. (In Russ.)

2. Arkhipov VP., Glushak AV. First asymptotics of solutions of degenerate differential equations of the second order. *Applied Mathematics & Physics*. 2023;55(3):197–206. (In Russ.)
3. Arkhipov VP., Glushak AV. Cauchy Problem for Degenerate Second Order Differential Equations. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(2):87–96. (In Russ.)
4. Arkhipov VP., Glushak AV. Two-sided Cauchy problem for degenerate second-order differential equations with conditions at the degeneracy point. *Applied Mathematics & Physics*. 2024;56(4): 245 — 260. (In Russ.)
5. Glushak AV. Solvability of degenerating hyperbolic differential equations with unbounded operator coefficients. *Differential Equations*. 2021;57:1:60–74. (In Russ.)
6. Arkhipov VP., Glushak AV. On the solvability of the initial value problem for a factorized degenerate second-order differential equation. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(3):193–207. (In Russ.)
7. Lebedev N.N. 1963. Special functions and their applications. Fizmatlit. 358. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 20.02.2026

Received February 20, 2026

Поступила после рецензирования 06.04.2026

Revised April 06, 2026

Принята к публикации 08.04.2026

Accepted April 8, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Архипов Виктор Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

Глушак Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Viktor P. Arkhipov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Orel State University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia

Alexander V. Glushak – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

[К содержанию](#)

Условия существования слабых решений эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником

Кожевникова Л. М. , Малышева В. А. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Васильевым В. Б.)

Уфимский университет науки и технологий,
Россия, 450077, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12
kosul@mail.ru, viktoria21135@yandex.ru

Аннотация. В статье исследуется существование слабых решений нелинейного эллиптического уравнения с p -лапласианом и степенным источником с показателем q в ограниченной области Ω . Для случая $p - 1 \leq q < p^* - 1$ найдены условия малости на меру области и коэффициенты уравнения, достаточные для существования решения задачи Дирихле. Проведены численные эксперименты методом простой итерации: для задачи в круге при $p - 1 < q < p^* - 1$ исследованы критические значения радиуса и свободного члена (m), начиная с которых решение отсутствует, в зависимости от показателя p . Для случая $0 < q < p - 1$ подтверждено существование решения без ограничений малости, а при $q = p - 1$ установлено отсутствие зависимости от параметра m . Также проанализировано влияние геометрии области (круг и квадрат) на порог существования решения.

Ключевые слова: p -лапласиан, нелинейное эллиптическое уравнение, слабое решение, нелинейный источник, существование решения, условия малости, метод простой итерации

Для цитирования: Кожевникова Л.М., Малышева В.А. Условия существования слабых решений эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):248–261. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-248-261 EDN DBQQDO

Original Research

Conditions for the Existence of Weak Solutions of an Elliptic Equation with the p -Laplacian and a Nonlinear Source

Larisa M. Kozhevnikova , Viktoria A. Malysheva 

(Article submitted by a member of the editorial board Vasiliev V. B.)

Ufa University of Science and Technology,
12 Karl Marx St., Ufa 450077, Russia
kosul@mail.ru, viktoria21135@yandex.ru

Abstract. This paper studies the existence of weak solutions for a nonlinear elliptic equation with the p -Laplacian and a power-law source with exponent q in a bounded domain Ω . For the case $p - 1 \leq q < p^* - 1$, smallness conditions on the domain measure and the coefficients of the equation, sufficient for the existence of a solution to the Dirichlet problem, are obtained. Numerical experiments using the simple iteration method are carried out: for the problem in a circle with $p - 1 < q < p^* - 1$, critical values of the radius and the free term (m) beyond which no solution exists are studied depending on the exponent p . For the case $0 < q < p - 1$, the existence of a solution without smallness restrictions is confirmed, and for $q = p - 1$, the absence of dependence on the parameter m is established. The influence of the domain geometry (circle and square) on the existence threshold is also analyzed.

Keywords: p -Laplacian, Nonlinear Elliptic Equation, Weak Solution, Nonlinear Source, Existence of a Solution, Smallness Conditions, Simple Iteration Method

For citation: Kozhevnikova LM., Malysheva VA. Conditions for the Existence of Weak Solutions of an Elliptic Equation with the p -Laplacian and a Nonlinear Source. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):248–261. (In Russ.) DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-248-261 EDN DBQQDO

1. Введение. В последние десятилетия значительное внимание уделяется изучению краевых задач для эллиптических уравнений с оператором p -лапласиана $-\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. Такие уравнения возникают в различных прикладных областях: при моделировании течений неньютоновских жидкостей, в теории фильтрации, в гляциологии, а также в задачах нелинейной диффузии и теории упругости [1, 2]. Особый интерес представляют случаи, когда правая часть содержит нелинейный источник, что приводит к конкуренции между вырожденным оператором и младшим членом.

Для пояснения роли показателя нелинейности рассмотрим модельную задачу

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{q-1} u + mg \quad \text{в } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

где $\lambda \geq 0$ и $g \in L^{p'}(\Omega)$. Если $m = 0$, то однородная задача всегда имеет тривиальное решение $u = 0$; поэтому сама по себе она не может служить примером отсутствия решения. При наличии ненулевого внешнего источника априорные оценки обнаруживают качественное различие между диапазонами показателя q : при $0 < q < p - 1$ инвариантный шар для оператора неподвижной точки можно построить без условия малости данных, тогда как при $q \geq p - 1$ для такого построения требуется согласованное условие малости коэффициента нелинейного источника, внешнего воздействия и констант вложения, зависящих от области.

Для уравнений с p -лапласианом и правой частью вида $f(x)|u|^q + \mu$, где μ — мера Радона, важные результаты получены Н. Гренон [3, 4]. В этих работах доказано существование ренормализованных решений при условии малости данных, причём мера области $|\Omega|$ влияет на это условие через константы, зависящие от $|\Omega|$. Однако в явном виде зависимость от $|\Omega|$ в работах Н. Гренон не выписана. Кроме того, в указанных работах рассматривается более слабое понятие решения (ренормализованное), тогда как во многих прикладных задачах требуется классическое слабое решение из пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$. Настоящая работа посвящена восполнению указанных пробелов.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 приведены основные предположения, определение слабого решения и сформулирована теорема 1 о существовании решения. В разделе 2 изложено доказательство данной теоремы. Раздел 3 содержит описание численных экспериментов и их результаты. В заключении подведены итоги и сформулированы выводы.

1. Формулировка результата. Рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = h(x, u) + mg & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, — ограниченная область.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- (A1) $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ — функция Каратеодори, и существуют константы $\alpha > 0$, $d > 0$ и неотрицательная функция $b \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^N$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} a(x, \xi) \cdot \xi &\geq \alpha |\xi|^p, \\ |a(x, \xi)| &\leq d(b(x) + |\xi|)^{p-1}, \\ (a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') &> 0 \quad \text{при } \xi \neq \xi'; \end{aligned}$$

- (A2) $h : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Каратеодори, и существуют неотрицательная функция $f \in L^r(\Omega)$ и число $q > 0$, удовлетворяющие одному из следующих условий:

$$\begin{aligned} 1 < p < N : \quad & 0 < q < p^* - 1, \quad r \in \left[\frac{(q+1)p^*}{p^* - q - 1}, \infty \right], \quad p^* = \frac{Np}{N-p}, \\ p = N : \quad & r \in (q+1, \infty], \\ p > N : \quad & r \in [q+1, \infty], \end{aligned}$$

такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и всех $t \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство:

$$|h(x, t)| \leq f(x)|t|^q;$$

- (A3) $g \in L^{p'}(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и $m \in \mathbb{R}$.

Положим

$$\sigma = \begin{cases} p^*, & 1 < p < N, \\ \frac{r(q+1)}{r-q-1}, & p = N, r < \infty, \\ q+1, & p = N, r = \infty, \\ \infty, & p > N, \end{cases} \quad \delta = 1 - \left(\frac{1}{r} + \frac{q}{q+1} + \frac{1}{\sigma} \right) \geq 0, \quad (2)$$

где принято $1/\infty = 0$. Через C_s обозначим постоянную непрерывного вложения

$$\|w\|_s \leq C_s \|\nabla w\|_p, \quad W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega). \quad (3)$$

В частности, далее используются C_σ и C_{q+1} . Вложение в $L^{q+1}(\Omega)$ при указанных ограничениях на q является компактным. Постоянную в неравенстве Фридрихса обозначим через C_F :

$$\|w\|_p \leq C_F \|\nabla w\|_p. \quad (4)$$

Определение 1. Функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ называется слабым решением задачи (1), если для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ выполняется:

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} (h(x, u) + tg) \varphi \, dx. \quad (5)$$

Теорема 1. При выполнении условий (A1)–(A3) справедливы следующие утверждения:

- 1) если $0 < q < p - 1$, то существует слабое решение задачи (1) без дополнительных условий на параметры;
- 2) если $q = p - 1$, то слабое решение существует при условии

$$\|f\|_r |\Omega|^{\delta} C_{\sigma} C_p^{p-1} < \alpha; \quad (6)$$

- 3) если $q > p - 1$ (и дополнительно $q < p^* - 1$ при $p < N$), то слабое решение существует при условии

$$\|f\|_r |\Omega|^{\delta} C_{\sigma} C_{q+1}^q (\|m\| \|g\|_{p'})^{\frac{q-p+1}{p-1}} \leq C_*(\alpha, p, q), \quad (7)$$

где

$$C_*(\alpha, p, q) = \alpha^{\frac{q}{p-1}} \frac{p-1}{q} \left(\frac{q-p+1}{q} \right)^{\frac{q-p+1}{p-1}},$$

а постоянные вложений определены в (3) и (4).

Замечание 1. Поясним отдельно критический по размерности случай $p = N$. Условие $r > q + 1$ позволяет выбрать конечное σ из (2) и применить вложение $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\sigma}(\Omega)$ (см. [5, гл. II, §2, теорема 2.1]). Предельное значение $r = q + 1$ здесь не включается: оно потребовало бы вложения $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$, которое в общем случае неверно. При $p > N$ такое вложение справедливо, поэтому допускается $r = q + 1$.

Замечание 2. Пусть $1 < p < N$. Оценим константы C_F , $C_{\sigma} = C_{p^*}$ и C_{q+1} через $|\Omega|$.

Для любой $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ справедливо неравенство Фридрихса (4). Известно, что

$$C_F \leq C_1(N, p) |\Omega|^{1/N}. \quad (8)$$

Для вложения Соболева $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ имеем:

$$\|v\|_{p^*} \leq C_{p^*}(N, p) \|\nabla v\|_p. \quad (9)$$

Кроме того, для $q + 1 < p^*$ неравенство с показателем $s = q + 1$ содержится в (3). Используя вложение между $L^{q+1}(\Omega)$ и $L^{p^*}(\Omega)$, можно показать, что

$$C_{q+1} \leq C_2(N, p, q) |\Omega|^{\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*}}. \quad (10)$$

Если $q > p - 1$, то, подставляя оценки (8), (10) в (7), получаем достаточное условие

$$\|f\|_r |\Omega|^{\Delta} (\|m\| \|g\|_{p'})^{\frac{q-p+1}{p-1}} \leq C(\alpha, p, q, N), \quad \Delta = \delta + \frac{q-p+1}{N(p-1)} + q \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p^*} \right) > 0, \quad (11)$$

которое заведомо выполнено для областей с малой мерой. Для $q = p - 1$ из (6) аналогично получается строгое условие малости

$$\|f\|_r |\Omega|^{\delta+(p-1)/N} < C(\alpha, p, N).$$

2. Доказательство теоремы 1. Идея доказательства основана на методе неподвижной точки и априорных оценках, которые Н. Гренон использовала при доказательстве существования ренормализованных решений в работах [3, 4]. Теорема 1 является адаптацией этих результатов к случаю слабых решений при $q \in L^{p'}(\Omega)$.

Лемма 1 (Шаудера о неподвижной точке). Пусть выполнены условия:

1. E – непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество банахова пространства V ;
2. $T : E \rightarrow E$ – непрерывный оператор;
3. образ $T(E)$ предкомпактен в V .

Тогда существует хотя бы одна неподвижная точка $x \in E$ оператора T , т. е. $T(x) = x$ (см. [6, гл. VIII, §35.3]).

Лемма 2. Пусть V – рефлексивное сепарабельное банахово пространство, и пусть оператор $A : V \rightarrow V'$ обладает следующими свойствами: оператор A ограничен, семинепрерывен, монотонен и коэрцитивен. Тогда

отображение $A : V \rightarrow V'$ сюръективно, т. е. для всякого $F \in V'$ существует $x \in V$ такой, что $A(x) = F$ (см. [1, гл. II, теорема 2.1]).

Доказательство теоремы 1. Шаг 1. Определение оператора T . Для заданного $v \in L^{q+1}(\Omega)$ рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, \nabla u)) = h(x, v) + mg & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (12)$$

Функция $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ называется слабым решением задачи (12), если для любой пробной функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ выполняется тождество:

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} (h(x, v) + mg) \varphi \, dx. \quad (13)$$

Покажем, что $h(x, v) + mg$ принадлежит пространству $W^{-1,p'}(\Omega)$. Для любого $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ в силу (A2) и обобщённого неравенства Гёльдера имеем:

$$\left| \int_{\Omega} h(x, v) \varphi \, dx \right| \leq \int_{\Omega} f(x) |v|^q |\varphi| \, dx \leq \|f\|_r \|v\|_{q+1}^q \|\varphi\|_{\sigma} |\Omega|^{\delta}. \quad (14)$$

Применяя вложение (3) с $s = \sigma$, из (14) выводим:

$$\left| \int_{\Omega} h(x, v) \varphi \, dx \right| \leq \|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q \|\nabla \varphi\|_p. \quad (15)$$

Далее, применяя неравенство Гельдера и Фридрихса (4), получаем:

$$\left| m \int_{\Omega} g \varphi \, dx \right| \leq |m| \|g\|_{p'} \|\varphi\|_p \leq |m| \|g\|_{p'} C_F \|\nabla \varphi\|_p. \quad (16)$$

Из оценок (15) и (16) следует, что функционал $F_v(\varphi) = \int_{\Omega} (h(x, v) + mg) \varphi \, dx$ непрерывен на $W_0^{1,p}(\Omega)$, т. е. $F_v \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

В силу условий (A1) оператор $A(u) = -\operatorname{div}(a(x, \nabla u))$ строго монотонен, семинепрерывен, коэрцитивен и ограничен. Согласно лемме 2 для каждого v существует единственное слабое решение $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи (12). Определим оператор $T : L^{q+1}(\Omega) \rightarrow L^{q+1}(\Omega)$, $T(v) = u$, где $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — слабое решение задачи (12). Вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ (см. (3)) гарантирует, что T действует в $L^{q+1}(\Omega)$.

Шаг 2. Априорные оценки. Пусть $v \in L^{q+1}(\Omega)$ и $u = T(v)$. Подставим $\varphi = u$ в (13):

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} h(x, v) u \, dx + m \int_{\Omega} g u \, dx.$$

Используя условие коэрцитивности из (A1) и оценки (15) и (16) с $\varphi = u$, получим:

$$\alpha \|\nabla u\|_p^p \leq (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \|\nabla u\|_p.$$

Сокращая на $\|\nabla u\|_p$ (случай $u = 0$ тривиален), получаем:

$$\|\nabla u\|_p \leq \left(\frac{1}{\alpha} (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (17)$$

Теперь оценим норму u в $L^{q+1}(\Omega)$. Применяя (3) с $s = q + 1$, из (17) выводим оценку:

$$\|u\|_{q+1} \leq C_{q+1} \left(\frac{1}{\alpha} (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} \|v\|_{q+1}^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (18)$$

Шаг 3. Существование инвариантного шара. Найдём $R > 0$ такое, что из $\|v\|_{q+1} \leq R$ следует $\|T(v)\|_{q+1} \leq R$. В силу (18) достаточно выполнения неравенства:

$$C_{q+1} \left(\frac{1}{\alpha} (\|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta} R^q + |m| \|g\|_{p'} C_F) \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq R. \quad (19)$$

Введём обозначения:

$$A := \|f\|_r C_{\sigma} |\Omega|^{\delta}, \quad B := |m| \|g\|_{p'} C_F, \quad K := \frac{C_{q+1}^{p-1}}{\alpha}.$$

Возводя (19) в степень $p - 1$, получим эквивалентное неравенство:

$$AR^q + B \leq \frac{1}{K}R^{p-1}. \quad (20)$$

Рассмотрим три случая.

Случай 1: $0 < q < p - 1$. Левая часть (20) растёт как R^q , правая – как R^{p-1} . Поскольку $q < p - 1$, при достаточно больших R неравенство выполняется. Таким образом, оператор T отображает шар $B_R \subset L^{q+1}(\Omega)$ в себя.

Случай 2: $q = p - 1$. Тогда (20) принимает вид

$$AR^{p-1} + B \leq \frac{1}{K}R^{p-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{K} - A\right)R^{p-1} \geq B.$$

Если $A < 1/K$, то можно выбрать R достаточно большим, чтобы неравенство выполнялось. Условие $A < 1/K$ записывается как

$$\|f\|_{rC_\sigma|\Omega|^\delta} < \frac{\alpha}{C_p^{p-1}},$$

что соответствует условию (6).

Случай 3: $q > p - 1$ (и $q < p^* - 1$ при $p < N$). Функция $\psi(R) = \frac{1}{K}R^{p-1} - AR^q$ достигает максимума в точке

$$R_0 = \left(\frac{p-1}{AqK}\right)^{\frac{1}{q-p+1}}.$$

Максимальное значение равно

$$\psi(R_0) = \frac{1}{K}R_0^{p-1} \cdot \frac{q-p+1}{q}.$$

Условие существования $R > 0$, удовлетворяющего (20), есть $B \leq \psi(R_0)$. Подставляя выражение для R_0^{p-1} , получим

$$B \leq \frac{q-p+1}{qK} \left(\frac{p-1}{AqK}\right)^{\frac{p-1}{q-p+1}}.$$

Возвращаясь к обозначениям A, B, K и возводя обе части последнего неравенства в степень $(q-p+1)/(p-1)$, после алгебраических преобразований получаем

$$AB^{\frac{q-p+1}{p-1}} C_{q+1}^q \leq \alpha^{\frac{q}{p-1}} \frac{p-1}{q} \left(\frac{q-p+1}{q}\right)^{\frac{q-p+1}{p-1}}.$$

Это и есть условие (7).

Шаг 4. Компактность оператора T . Пусть $\{v_n\} \subset L^{q+1}(\Omega)$ – ограниченная последовательность, $\|v_n\|_{q+1} \leq M$. Положим $u_n = T(v_n)$. Из оценки (17) следует, что $\{u_n\}$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поскольку вложение $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$ компактно, из $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $L^{q+1}(\Omega)$. Значит, оператор T компактен.

Шаг 5. Сходимость h . Пусть $v_n \rightarrow v$ в $L^{q+1}(\Omega)$. Обозначим через σ' показатель, сопряжённый к σ , и введём $t \geq 1$ равенством

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{q}{q+1}.$$

Из определения δ следует $t \geq \sigma'$. Докажем, что

$$h(\cdot, v_n) \rightarrow h(\cdot, v) \quad \text{в } L^{\sigma'}(\Omega). \quad (21)$$

Рассмотрим произвольную подпоследовательность $\{v_{n_{j_k}}\}$. Из сильной сходимости в $L^{q+1}(\Omega)$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_{j_k}}\}$ и найти $w \in L^{q+1}(\Omega)$ такие, что $v_{n_{j_k}} \rightarrow v$ почти всюду и $|v_{n_{j_k}}| \leq w$ почти всюду. Существование такой функции w следует из выбора подпоследовательности, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_{n_{j_k}} - v\|_{q+1} < \infty.$$

Свойство Каратеодори даёт поточечную сходимость $h(x, v_{n_{j_k}}) \rightarrow h(x, v)$, а условие (A2) – оценку

$$|h(x, v_{n_{j_k}}) - h(x, v)| \leq f(x)(w^q + |v|^q).$$

Правая часть принадлежит $L^t(\Omega)$ по неравенству Гёльдера. Поэтому по теореме Лебега $h(\cdot, v_{n_{j_k}}) \rightarrow h(\cdot, v)$ в $L^t(\Omega)$, а в силу $t \geq \sigma'$ и $|\Omega| < \infty$ – также в $L^{\sigma'}(\Omega)$. Так как это рассуждение применимо к любой подпоследовательности, справедлива сходимость всей последовательности в (21). Следовательно,

$$\|F_{v_n} - F_v\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq C_\sigma \|h(\cdot, v_n) - h(\cdot, v)\|_{\sigma'} \rightarrow 0. \quad (22)$$

Шаг 6. Непрерывность оператора T . Пусть $v_n \rightarrow v$ в $L^{q+1}(\Omega)$ и $u_n = T(v_n)$. Из оценки (17) следует ограниченность $\{u_n\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Выделим подпоследовательность, для которой

$$u_{n_k} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ в } W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_{n_k} \rightarrow \tilde{u} \text{ в } L^{q+1}(\Omega).$$

Для любого $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ монотонность оператора A даёт

$$\langle Au_{n_k} - Az, u_{n_k} - z \rangle \geq 0.$$

Учитывая $Au_{n_k} = F_{v_{n_k}}$, сходимость (22) и слабую сходимость u_{n_k} , переходим к пределу и получаем

$$\langle F_v - Az, \tilde{u} - z \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } z \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Полагая в последнем неравенстве $z = \tilde{u} - \lambda w$, где $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и $\lambda > 0$, а затем устремляя λ к нулю, из семинепрерывности A получаем $A\tilde{u} = F_v$ (аргумент Минти). Вспомогательная задача имеет единственное решение, поэтому $\tilde{u} = T(v)$. Таким образом, из любой подпоследовательности $\{u_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $T(v)$ в $L^{q+1}(\Omega)$. Критерий сходимости по подпоследовательностям даёт $u_n \rightarrow T(v)$ в $L^{q+1}(\Omega)$, то есть оператор T непрерывен.

Шаг 7. Применение теоремы Шаудера. В случае $0 < q < p - 1$ оператор T отображает некоторый шар $\bar{B}_R \subset L^{q+1}(\Omega)$ в себя без дополнительного условия. При $q = p - 1$ существование инвариантного шара гарантирует (6), а при $q > p - 1$ – условие (7). Оператор T непрерывен и компактен. По теореме Шаудера существует неподвижная точка $u \in \bar{B}_R$, $T(u) = u$, которая является слабым решением задачи (1).

3. Численные эксперименты. Проведены вычислительные эксперименты для исследования: зависимости критических значений R_{crit} и m_{crit} от p , докритического случая, случая $q = p - 1$ и влияния геометрии на критические значения.

Численный метод. Программы реализованы на языке Python с использованием библиотек NumPy, SciPy (функция `spsolve` для решения разреженных линейных систем) и Matplotlib (для визуализации)¹. Решается уравнение:

$$-\text{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x)|u|^{q-1}u + m,$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; в экспериментах 1–3 область Ω представляет собой круг радиуса R , а в эксперименте 4 дополнительно рассматривается квадрат той же площади. Это уравнение является частным случаем задачи (1) при

$$a(x, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi, \quad h(x, s) = f(x)|s|^{q-1}s, \quad g \equiv 1.$$

В частности, при $f(x) \equiv \lambda$ оно совпадает с модельной задачей, рассмотренной во введении. Таким образом, показатели p, q и параметры f, m в численных экспериментах имеют тот же смысл, что и в теоретической части. Уравнение дискретизировано на равномерной прямоугольной сетке методом конечных разностей [7]. Нелинейная задача решалась методом простой итерации (методом замороженных коэффициентов) [8, 9]. Линейные системы решались методом `spsolve` из библиотеки SciPy.

Эксперимент 1 (исследование пороговых значений в зависимости от p). Фиксированы параметры: $q = 1.9$, $f(x) = 20.0$, $m = 2.1$. Параметр p последовательно принимает значения: 1.3; 1.4; 1.5; 1.6; 1.7; 1.8. Для каждого p область Ω – круг радиуса R , который последовательно увеличивается, и определяется критический радиус R_{crit} , начиная с которого решение отсутствует. Полученные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Table 1

Зависимость критического радиуса R_{crit} от показателя p
Dependence of the critical radius R_{crit} on the exponent p

p	R_{crit}
1.3	1.3150
1.4	1.0400
1.5	0.8560
1.6	0.7650
1.7	0.7020
1.8	0.6600

¹Программный код доступен в открытом репозитории: <https://doi.org/10.5281/zenodo.22059908>

На примере $p = 1.8$ показано, как определялся критический радиус (рис. 1).

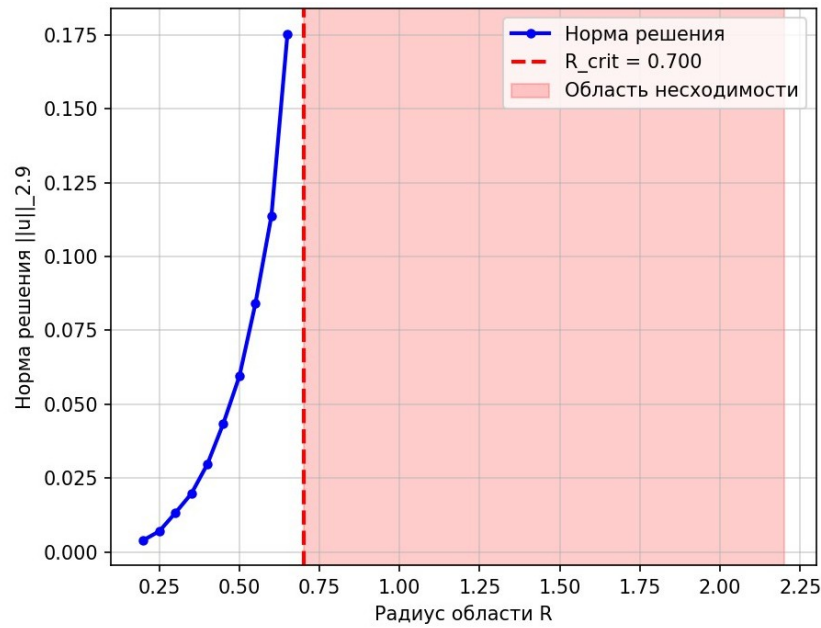


Рис. 1. Зависимость нормы решения от радиуса (для $p = 1.8$)

Fig. 1. Dependence of the solution norm on the radius (for $p = 1.8$)

На рис. 2 показана эволюция 3D-поверхностей решения с ростом радиуса области.

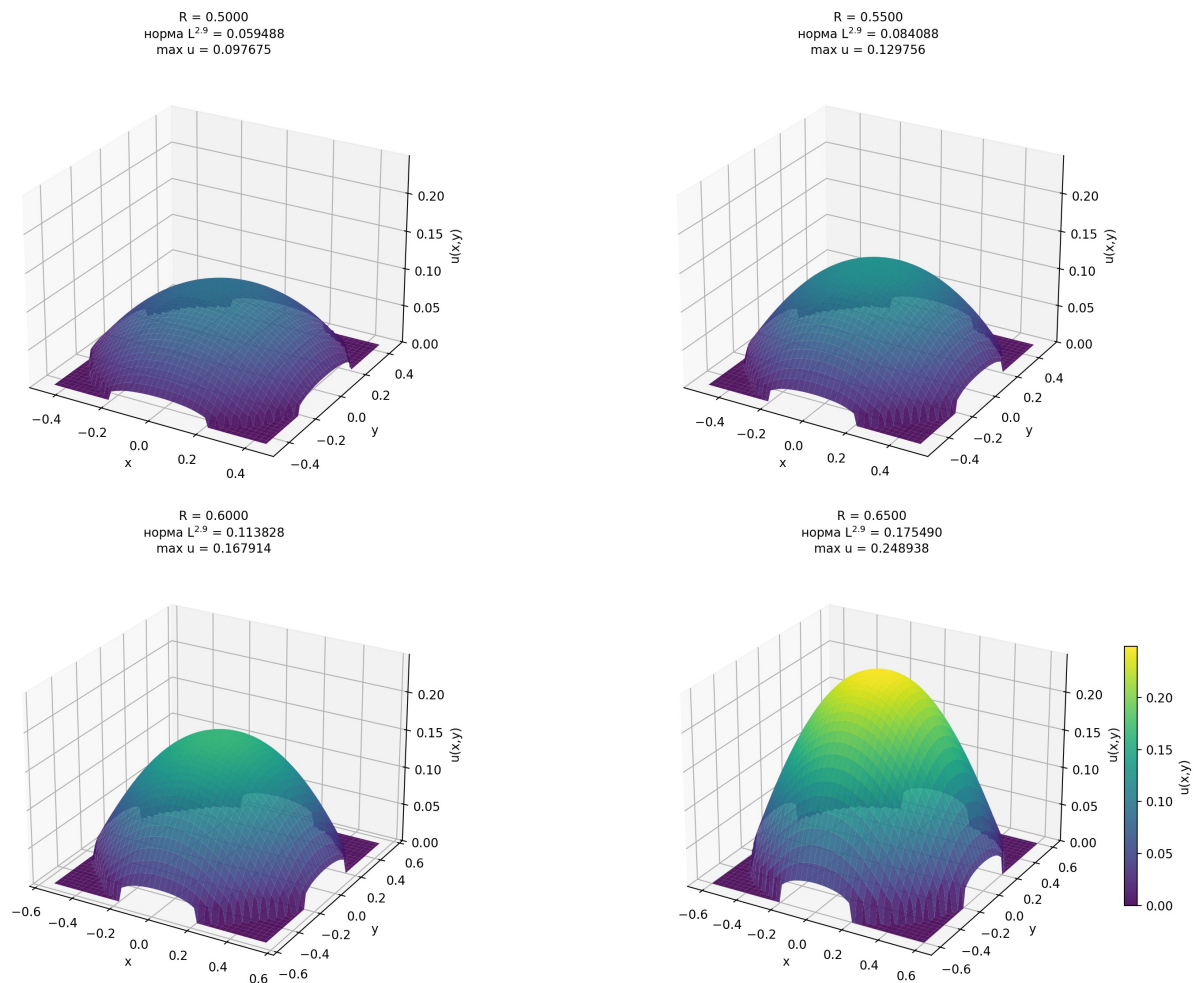


Рис. 2. 3D-визуализация решения для различных радиусов области (для $p = 1.8$)

Fig. 2. 3D visualization of the solution for different domain radii (for $p = 1.8$)

Для уточнения критического радиуса область бифуркации исследована с меньшим шагом. Уточнённое значение составило $R_{\text{crit}} = 0.6600$ (рис. 3).

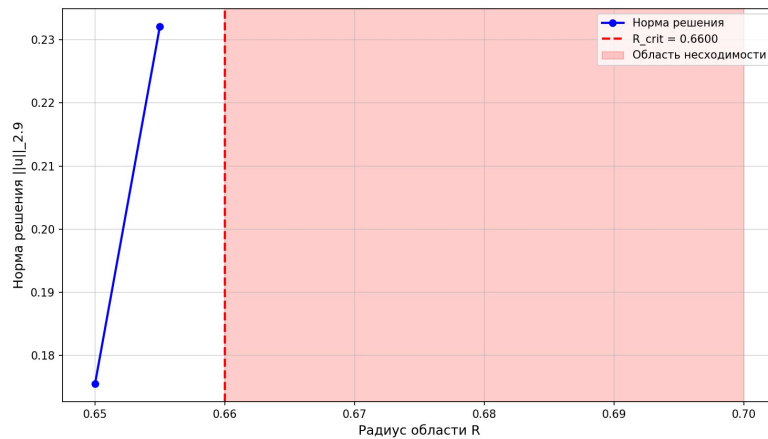


Рис. 3. Поведение нормы решения вблизи критического радиуса (для $p = 1.8$)

Fig. 3. Behavior of the solution norm near the critical radius (for $p = 1.8$)

Для $p = 1.6$ рассмотрена зависимость нормы решения от номера итерации для $R = 0.75$ и $R = 0.80$ ($R_{\text{crit}} = 0.7650$). При $R = 0.75$ (до критического значения) норма решения стабилизируется после нескольких итераций, выходя на постоянное плато, что свидетельствует о существовании решения (рис. 4).

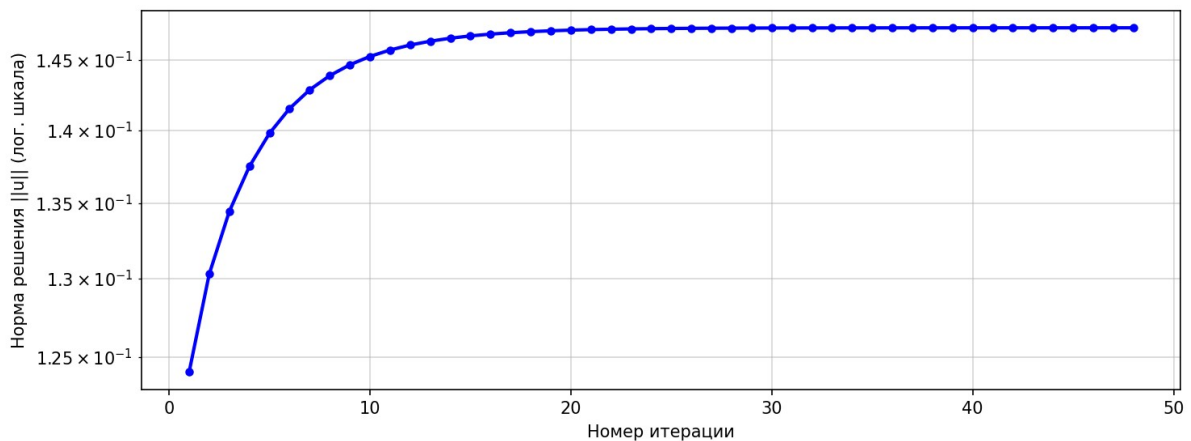


Рис. 4. Сходимость метода при $R = 0.75$ (решение существует)

Fig. 4. Convergence of the method for $R = 0.75$ (solution exists)

При $R = 0.80$ (после критического значения) норма решения неограниченно растет, итерационный процесс расходится, что указывает на отсутствие решения (рис. 5).

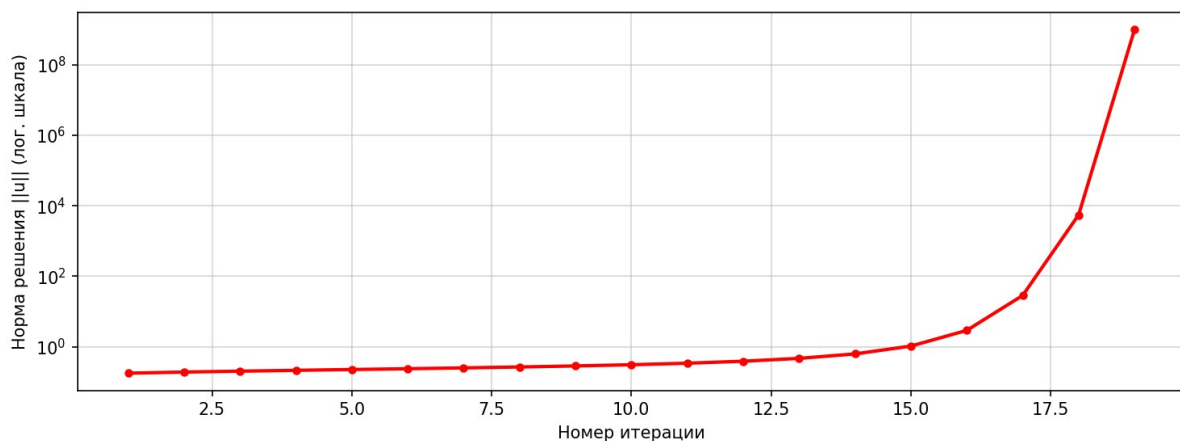


Рис. 5. Расходимость метода при $R = 0.80$ (решения нет)

Fig. 5. Divergence of the method for $R = 0.80$ (no solution exists)

Результаты, представленные на рис. 4 и рис. 5, подтверждают существование бифуркации.

Далее рассматривается зависимость критического значения параметра m от p . Фиксированы параметры: $q = 1.9$, $f(x) = 50.0$, $R = 1.5$. Для каждого p параметр m последовательно увеличивается, и определяется критическое значение m_{crit} , начиная с которого решение отсутствует. Полученные результаты представлены в таблице 2.

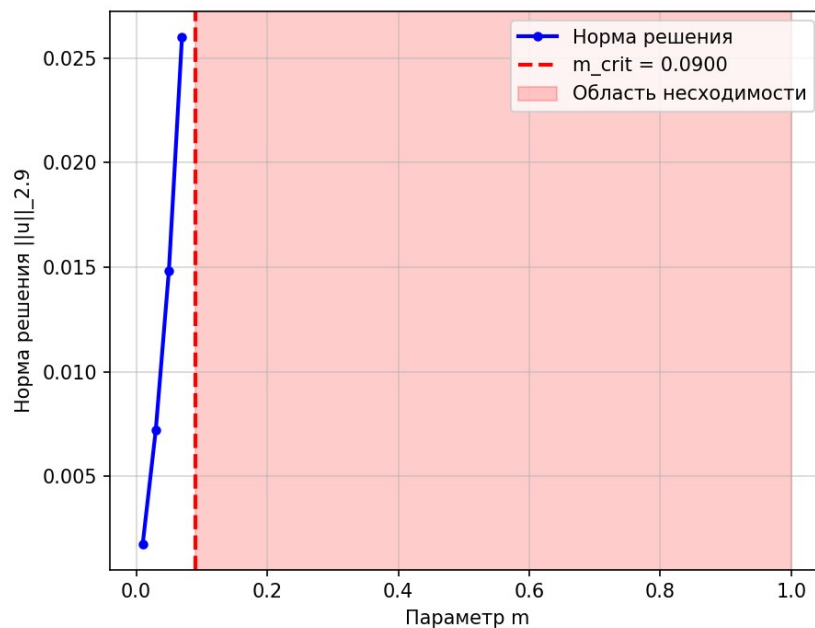
Таблица 2

Table 2

Зависимость критического значения m_{crit} от показателя p
Dependence of the critical value m_{crit} on the exponent p

p	m_{crit}
1.3	1.4050
1.4	0.8400
1.5	0.4988
1.6	0.2931
1.7	0.1620
1.8	0.0860

На примере $p = 1.8$ показано, как определялось критическое значение параметра m (рис. 6).

Рис. 6. Зависимость нормы решения от m (для $p = 1.8$)Fig. 6. Dependence of the solution norm on m (for $p = 1.8$)

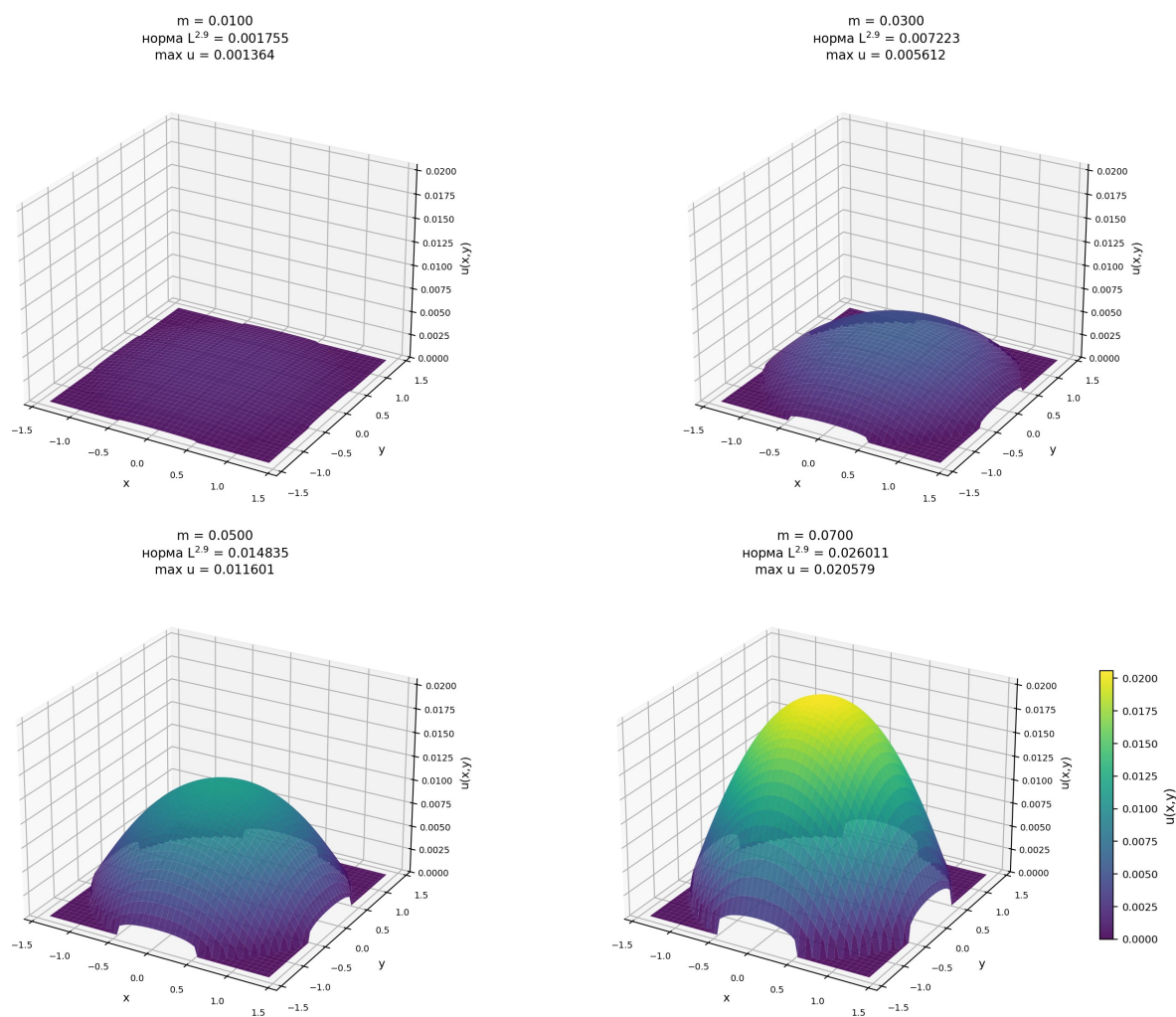
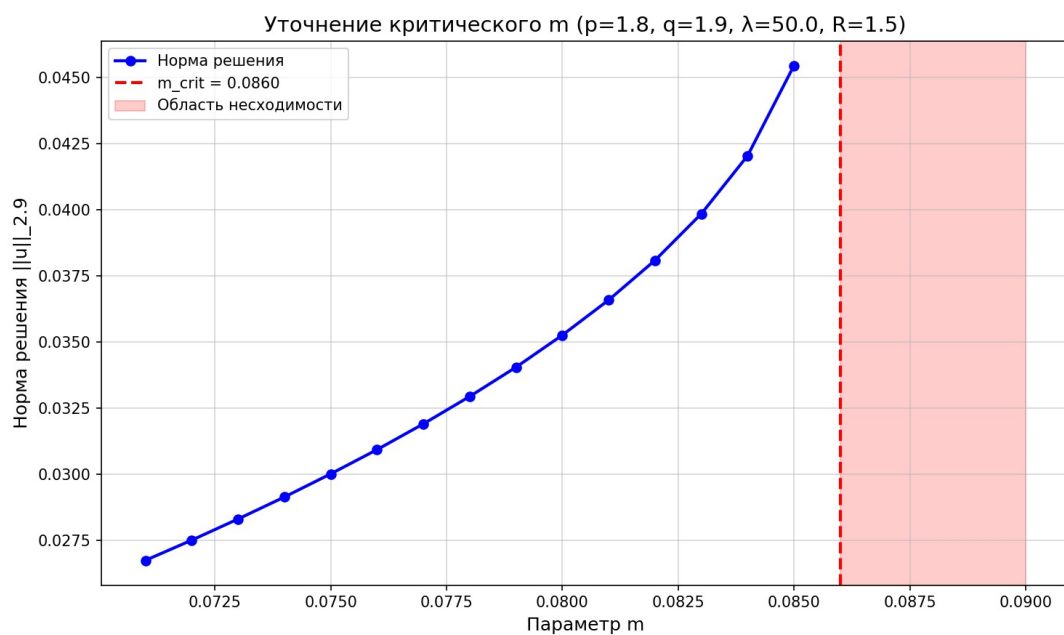
Эволюция 3D-поверхностей решения с ростом m показана на рис. 7.

Для поиска уточненного критического значения параметра m область бифуркации была исследована с меньшим шагом. Уточненное значение составило $m_{\text{crit}} = 0.0860$ (рис. 8).

Таким образом, из табл. 1 и табл. 2 видно, что с ростом показателя p наблюдается монотонное убывание значений R_{crit} и m_{crit} .

Эксперимент 2 (докритический случай). Фиксированы параметры: $p = 1.8$, $q = 0.5$, $f(x) = 0.1$. Согласно теореме 1, при $q < p - 1$ (так как $0.5 < 0.8$) решение существует при любых значениях радиуса области R и параметра m . Численные эксперименты подтверждают сходимость метода во всех исследованных случаях. Сначала при $m = 0.1$ последовательно увеличивали радиус. Во всех случаях итерационный процесс сошелся (рис. 9).

Затем при фиксированном $R = 1.5$ увеличивали параметр m ; сходимость также наблюдалась при всех исследуемых значениях (рис. 10).

Рис. 7. 3D-визуализация решения для различных параметров m (для $p = 1.8$)Fig. 7. 3D visualization of the solution for different m parameters (for $p = 1.8$)Рис. 8. Поведение нормы решения вблизи m_{crit} (для $p = 1.8$)Fig. 8. Behavior of the solution norm near m_{crit} (for $p = 1.8$)

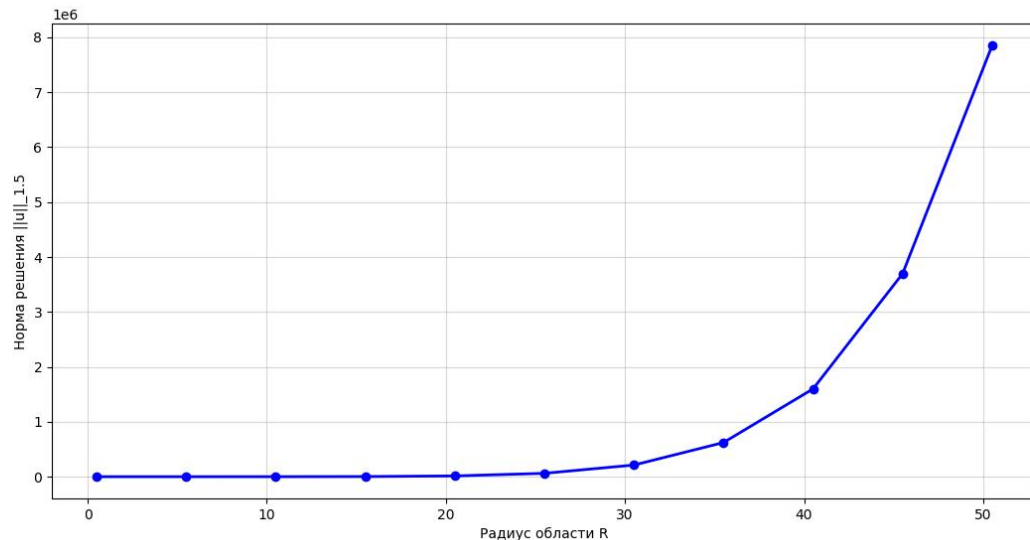
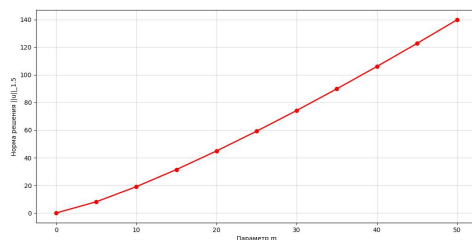
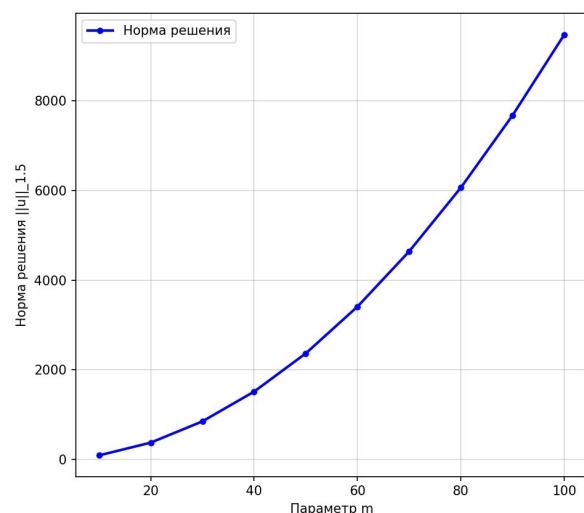


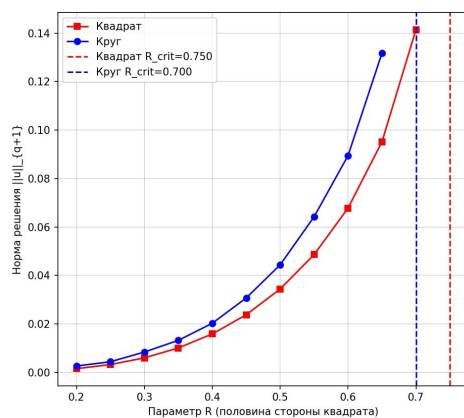
Рис. 9. Зависимость нормы решения от радиуса для докритического случая

Fig. 9. Dependence of the solution norm on the radius for the subcritical case

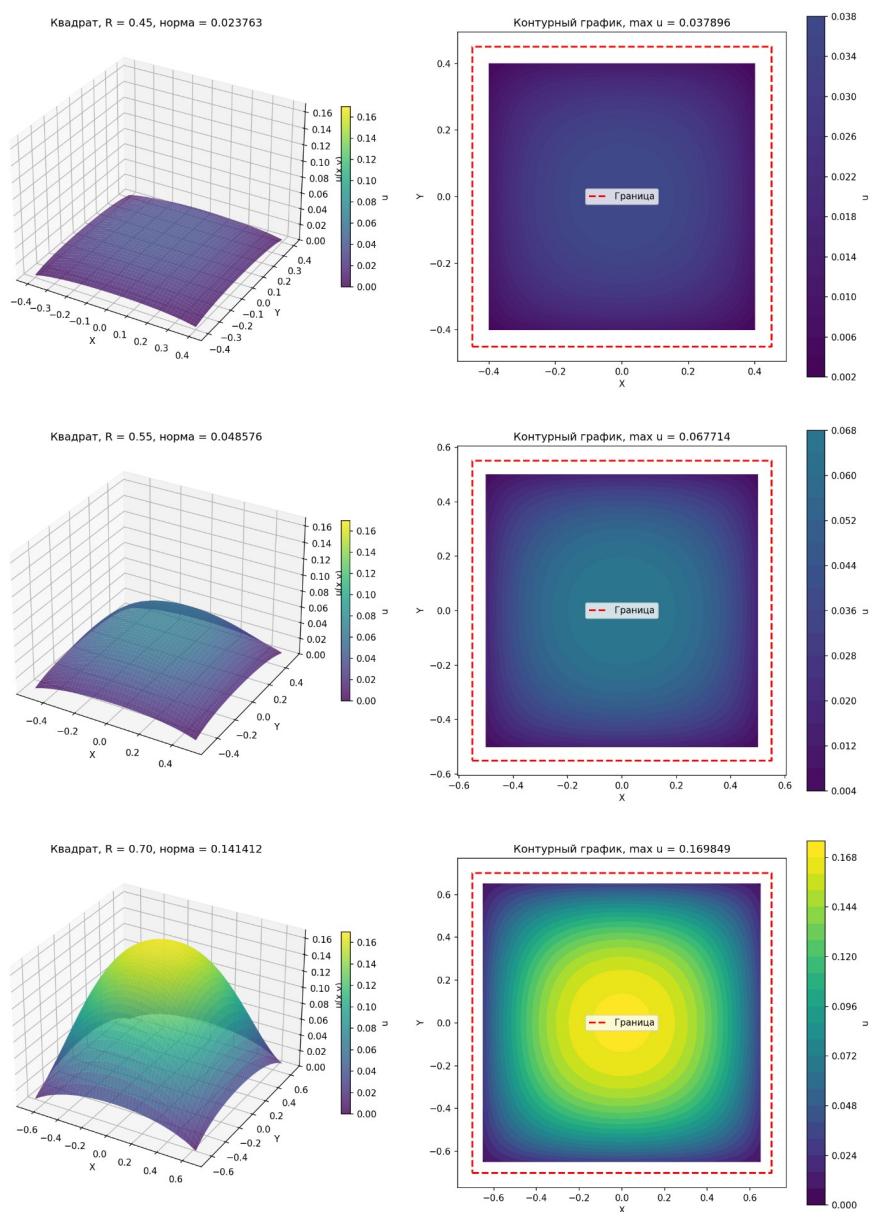
Эксперимент 3 (исследование критического случая $q = p - 1$). Фиксированы параметры: $p = 1.5$, $q = 0.5$, $f(x) = 15.0$, $R = 0.5$. Из оценки (3) видно, что при $q = p - 1$ нет зависимости от m . Это подтверждают численные эксперименты, из результатов которых видно, что метод сходится при любых m (рис. 11).

Рис. 10. Зависимость нормы решения от m для докритического случаяFig. 10. Dependence of the solution norm on m for the subcritical caseРис. 11. Зависимость нормы решения от m для случая $q = p - 1$ Fig. 11. Dependence of the solution norm on m for the case $q = p - 1$

Эксперимент 4 (сравнение критических размеров круга и квадрата при равной площади). Фиксированы параметры: $p = 1.6$, $q = 1.9$, $f(x) = 20.0$, $m = 2.1$. Исследуется влияние формы области на порог существования решения. Для этого сравниваются две области одинаковой площади: квадрат со стороной $2R$ (площадь $4R^2$) и круг, радиус которого подобран так, чтобы его площадь также равнялась $4R^2$. Из равенства площадей получено, что радиус круга $R_{\text{круга}} = 2R/\sqrt{\pi}$. Параметр R служит общей переменной, определяющей размер обеих фигур. На рис. 12 показана зависимость нормы решения от R (половины стороны квадрата).

Рис. 12. Зависимость нормы решения от R для круга и квадрата при равных площадяхFig. 12. Dependence of the solution norm on R for a circle and a square with equal areas

На рис. 13 показана эволюция 3D-поверхностей и контурных графиков решения для квадрата с ростом R .

Рис. 13. 3D-визуализация и контурный график решения для квадрата при различных R Fig. 13. 3D visualization and contour plot of the solution for the square for various R

На рис. 14 показана эволюция 3D-поверхностей и контурных графиков решения для круга с ростом R . Таким образом, получено, что для круга $R_{\text{crit}} = 0.700$, а для квадрата $R_{\text{crit}} = 0.750$, то есть для круга критическое значение радиуса меньше, чем для квадрата при равных площадях.

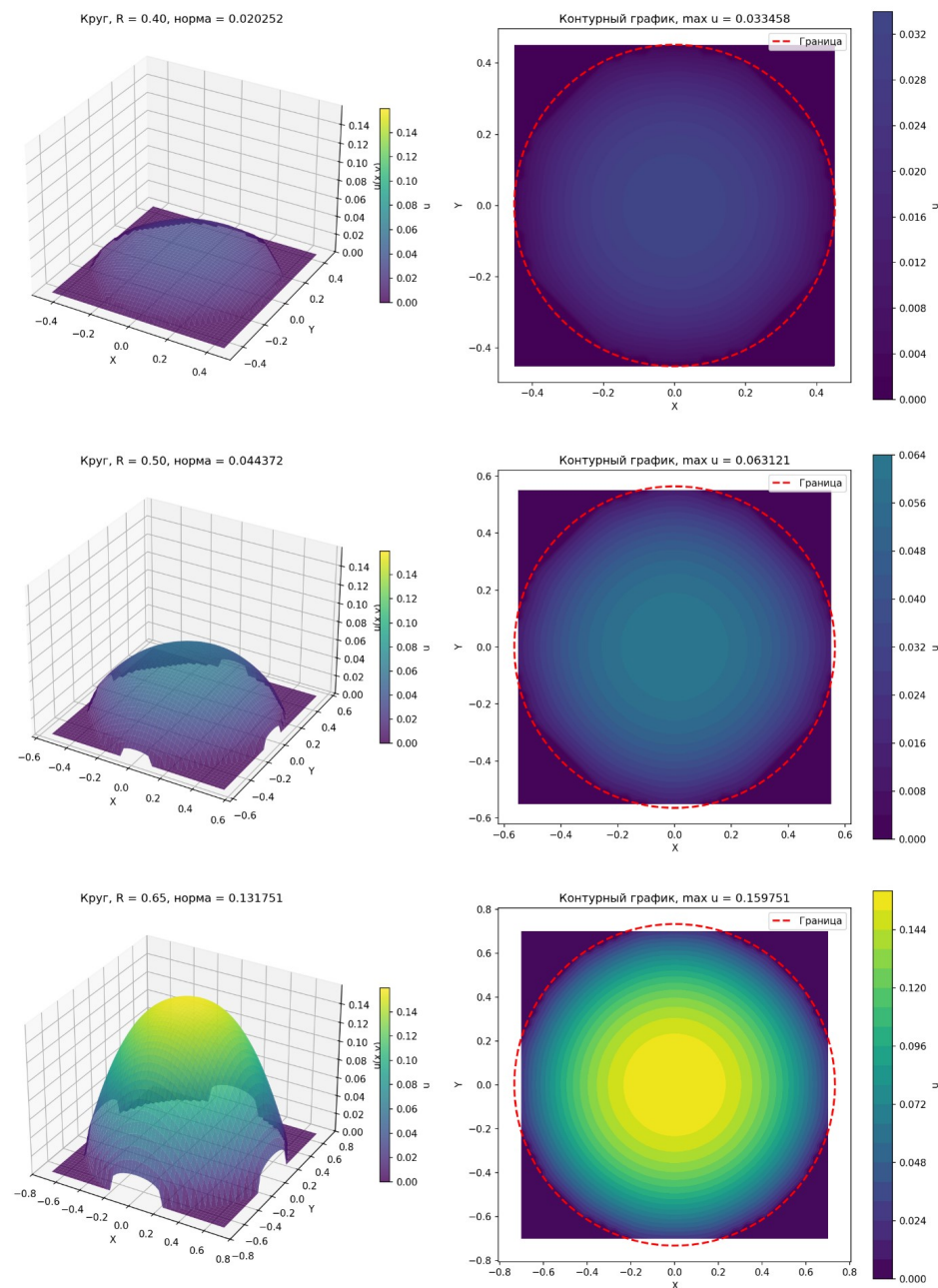


Рис. 14. 3D-визуализация и контурный график решения для круга при различных R

Fig. 14. 3D visualization and contour plot of the solution for the circle for various R

Полученные численные результаты позволяют дать следующую физическую интерпретацию. В задачах с нелинейным источником и p -лапласианом ключевую роль играет концентрация источника. У круга при той же площади периметр меньше, следовательно, меньше утечка энергии через границу. Это облегчает накопление энергии внутри области, и разрушение (бифуркация) наступает быстрее – при меньшем характерном размере. У квадрата периметр больше, утечка больше, поэтому требуется дополнительная «подкачка» энергией, то есть больший размер области, чтобы запустить нелинейный рост. Данное явление аналогично реактору с отражающими стенками: чем лучше изоляция (меньше утечка), тем меньше критический размер. Круг является более эффективным «реактором», поэтому он взрывается при меньших размерах. Таким образом, численное сравнение R_{crit} для круга (0.700) и квадрата (0.750) подтверждает, что более компактные области теряют устойчивость при меньших размерах.

Закключение. В работе исследовано существование слабых решений краевой задачи для эллиптического уравнения с p -лапласианом и нелинейным источником. Для случая $q \geq p - 1$ (при $1 < p < N$ дополнительно $q < p^* - 1$) найдены достаточные условия малости на меру области и коэффициенты

уравнения, обеспечивающие существование решения. Для случая $0 < q < p - 1$ (докритический случай) существование решения доказано без каких-либо ограничений. Численные эксперименты подтверждают теоретические результаты: в докритическом случае решение существует всегда; в случае $p - 1 < q < p^* - 1$ наблюдается порог существования по радиусу области R и интенсивности постоянного источника m , причем с ростом p происходит монотонное убывание пороговых значений; а при $q = p - 1$ получено отсутствие зависимости от m . Сравнение круга и квадрата одинаковой площади показало, что для более компактной области (круг) критические значения меньше, что объясняется меньшей утечкой энергии через границу.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
2. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*. New York: Springer, 1993. 387 p.
3. Grenon N. Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data. *Ann. Inst. H. Poincaré C, Anal. Non Linéaire*, 2002,19(1):1–11.
4. Grenon N. L^r estimates for degenerate elliptic problems. *Potential Analysis*, 2002,16:387–392.
5. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука; 1973. 576 с.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука; 1980. 496 с.
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука; 1977. 440 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука; 1989. 432 с.
9. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука; 1978. 512 с.

References

1. Lions J.-L. *Some methods for solving nonlinear boundary value problems*. Paris: Dunod, 1969. 554 p. (In Russ.)
2. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*. New York: Springer, 1993. 387 p.
3. Grenon N. Existence results for semilinear elliptic equations with small measure data. *Ann. Inst. H. Poincaré C, Anal. Non Linéaire*, 2002,19(1):1–11.
4. Grenon N. L^r estimates for degenerate elliptic problems. *Potential Analysis*, 2002,16:387–392.
5. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. New York: Academic Press; 1968. 495 p. (In Russ.)
6. Trenogin V.A. *Functional Analysis*. Moscow: Nauka; 1980. 496 p. (In Russ.)
7. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. *Difference Schemes*. Moscow: Nauka; 1977. 440 p. (In Russ.)
8. Samarsky A.A., Gulina A.V. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka; 1989. 432 p. (In Russ.)
9. Kalitkin N.N. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka; 1978. 512 p. (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.05.2026

Received May 18, 2026

Поступила после рецензирования 06.07.2026

Revised July 6, 2026

Принята к публикации 11.07.2026

Accepted July 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Кожевникова Лариса Михайловна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

Малышева Виктория Андреевна – студент бакалавриата кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Larisa M. Kozhevnikova – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Viktoria A. Malysheva – Bachelor's Student of the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

К содержанию

Применение метода негладких интегральных направляющих функций для исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью

Корнев С. В.^{ID}, Обуховский В. В.^{ID}, Гетманова Е. Н.^{ID}, Афонина С. Н.^{ID}

(Статья представлена членом редакционной коллегии Шишкиной Э. Л.)

Воронежский государственный педагогический университет,

Россия, 394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru, ekaterina_getmanova@bk.ru, AfoninaSvN@gmail.com

Аннотация. В настоящей работе на основе теории случайных неподвижных точек и случайной топологической степени случайных мультиотображений приводятся новые топологические и геометрические методы исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью, представленной в виде суммы случайного полунепрерывного сверху мультиотображения и случайного непрерывного по совокупности переменных отображения, где одна из переменных представлена в виде функции. Для приведенной задачи построен расширенный мультиоператор суперпозиции. Для исследования поставленной задачи применен метод случайных негладких интегральных направляющих функций. Сформулирована и доказана теорема о существовании случайного периодического решения поставленной задачи.

Ключевые слова: случайное мультиотображение, случайная интегральная направляющая функция, случайное функционально-дифференциальное включение с возмущенной правой частью, расширенный мультиоператор суперпозиции

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

Для цитирования: Корнев С.В., Обуховский В.В., Гетманова Е.Н., Афонина С.Н. Применение метода негладких интегральных направляющих функций для исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):262–269. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-262-269 EDN EZPBVE

Original Research

Application of the Nonsmooth Integral Guiding Functions Method for Studying of the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions with a Perturbed Right-Hand Side

Sergey V. Kornev^{ID}, Valeri V. Obukhovskii^{ID}, Ekaterina N. Getmanova^{ID}, Svetlana N. Afonina^{ID}

(Article submitted by a member of the editorial board Shishkina E. L.)

Voronezh State Pedagogical University,

86 Lenin St., Voronezh 394043, Russia

kornev_vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru, ekaterina_getmanova@bk.ru, AfoninaSvN@gmail.com

Abstract. In this work, based on the theory of random fixed points and random topological degree theory for random multivalued mappings, new topological and geometrical methods are presented for investigating of the periodic problem for a random functional differential inclusion with a perturbed right-hand side, represented as the sum of a random upper semicontinuous multivalued map and a random continuous map with respect to the collection of variables, where one of the variables is represented as a function. An extended multivalued superposition operator is constructed for the given problem. The method of random nonsmooth integral guiding functions is applied to study the posed problem. The existence theory of a random periodic solution of the posed problem is formulated and proved.

Keywords: Random Multivalued Map, Random Integral Guiding Function, Random Functional Differential Inclusion with a Perturbed Right-Hand Side Extended Multivalued Superposition Multimap

Funding: The study was carried out with financial support from the Russian Science Foundation within the framework of scientific project No. 22-71-10008.

For citation: Kornev SV., Obukhovskii VV., Getmanova EN., Afonina SN. Application of the Nonsmooth Integral Guiding Functions Method for Studying of the Periodic Problem for Random Functional Differential Inclusions with a Perturbed Right-Hand Side. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):262–269. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-262-269 EDN EZPBVE

1. Введение. В настоящей работе классический метод направляющих функций Красносельского М. А. и Перова А. И. (см. [1], [2]) обобщается на случай негладких интегральных направляющих потенциалов для случайных функционально-дифференциальных включений. На основе теории случайных неподвижных точек и случайной топологической степени случайных мультиотображений предлагаются новые топологические и геометрические методы исследования периодической задачи для случайных функционально-дифференциальных включений с возмущенной правой частью, представленной в виде суммы случайного полунепрерывного сверху мультиотображения и случайного непрерывного по совокупности переменных отображения, где одна из переменных представлена в виде функции.

2. Предварительные сведения. Напомним некоторые понятия теории многозначных отображений (см., например, [3], [4], [5], [6], [7]) и теории степени совпадения (см., например, [8], [9], [10]).

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) являются метрическими пространствами и $I = [0, T]$. Символами $P(Y)$, $C(Y)$, $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y . Если Y – нормированное пространство, то символами $Cv(Y)$, $Kv(Y)$ обозначаются совокупности всех непустых выпуклых, соответственно, замкнутых или компактных подмножеств пространства Y .

Определение 2.1. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется компактным, если область значений $F(X)$ относительно компактна в Y , т. е. $\overline{F(X)}$ компактно в Y .

Определение 2.2. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из того, что $d_X(x_0, x) < \delta$ следует, что $F(x) \subset U_\varepsilon(F(x_0))$, где символ U_ε обозначает ε -окрестность множества. Мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ называется полунепрерывным сверху (пн. св.), если оно пн. св. в каждой точке $x \in X$.

В дальнейшем пн. св. и компактное мультиотображение $F : X \rightarrow P(Y)$ будем называть просто компактным. Мультиотображение будем называть мультифункцией, если оно определено на подмножестве числовой прямой.

Пусть I – замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, снабженное мерой Лебега.

Определение 2.3. Мультифункция $F : I \rightarrow K(Y)$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $W \subset Y$ его прообраз $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ – измеримое подмножество I .

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства.

Определение 2.4. Пусть $F : X \rightarrow P(Y)$ – мультиотображение. Множество Γ_F в декартовом произведении $X \times Y$, $\Gamma_F = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}$ называется графиком мультиотображения F .

Определение 2.5. Мультиотображение F называется замкнутым, если его график Γ_F является замкнутым множеством в пространстве $X \times Y$.

Определение 2.6. Однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ называется сечением мультиотображения F , если $f(x) \in F(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Определение 2.7. $l : \text{Dom } l \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ – линейный (необязательно непрерывный) оператор, где символом Dom обозначается область определения l .

Теорема 2.1. Пусть $p : E_1 \rightarrow E_1$ – линейный оператор проектирования такой, что $\text{Im } p = \text{Ker } l$. Тогда:
1) оператор $l_p : \text{Dom } l \cap \text{Ker } p \rightarrow \text{Im } l$, заданный как $l_p(x) = l(x)$ для всех $x \in \text{Dom } l \cap \text{Ker } p$, является линейным изоморфизмом;

2) оператор $k_p : \text{Im } l \rightarrow \text{Dom } l \cap \text{Ker } p$, заданный как $k_p = l_p^{-1}$, удовлетворяет соотношению $k_p \circ l(x) = x - p(x)$ для всех $x \in \text{Dom } l$.

Определение 2.8. Линейный оператор $l : \text{Dom } l \subseteq E_1 \rightarrow E_2$ называется линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса, если $\text{ker } l$ и $\text{Coker } l = E_2 / \text{Im } l$ конечномерны и $\text{Dim } \text{Ker } l = \text{Dim } \text{Coker } l$.

Теорема 2.2. Пусть $l : \text{Dom } l \rightarrow E_2$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса такой, что $\text{Im } l \subset E_2$ – замкнутое множество. Тогда

i) существуют линейные непрерывные операторы проектирования $p : E_1 \rightarrow E_2, q : E_2 \rightarrow E_2$ такие, что $\text{Im } p = \text{Ker } l$ и $\text{Im } l = \text{Ker } q$;

ii) канонический оператор проектирования $\pi : E_2 \rightarrow E_2 / \text{Im } l$, заданный как $\pi(y) = y + \text{Im } l$, является непрерывным линейным оператором;

iii) существует непрерывный линейный изоморфизм $\phi : \text{Coker } l \rightarrow \text{Ker } l$;

iv) уравнение $l(x) = y, y \in E_2$, является эквивалентным уравнению $(i - p)x = (\phi \circ \pi + k_{p,q})(y)$, где i – тождественный оператор в E_1 , а оператор $k_{p,q} : E_2 \rightarrow E_1$ задан соотношением $k_{p,q}(y) = k_p(y - q(y))$.

Пусть U – открытое ограниченное подмножество E_1 .

Определение 2.9. Пн. св. мультиотображение $F : \bar{U} \rightarrow K(E_1)$ называется l -компактным, если композиция $(\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ F : \bar{U} \rightarrow K(E_1)$ является компактным мультиотображением.

Замечание 2.1. Приведенное выше определение l -компактного мультиотображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p : E_1 \rightarrow E_2$ и $q : E_2 \rightarrow E_1$, а также изоморфизма $\phi : \text{Coker } l \rightarrow \text{Ker } l$.

Приведем некоторые сведения из теории случайных многозначных отображений и случайной топологической степени (см., например, [11]).

Пусть (Ω, Σ) – измеримое пространство, X, Y – сепарабельные метрические пространства. Пусть $\mathbb{B}(X)$ – σ -алгебра всех борелевских подмножеств пространства X и $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$ – наименьшая σ -алгебра, содержащая множества вида $A \times B$, где $A \in \Sigma, B \in \mathbb{B}(X)$.

Определение 2.10. *Отображение $f: \Omega \times X \rightarrow Y$ называется случайным оператором, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$. Если, кроме того, $f(\omega, \cdot): X \rightarrow Y$ непрерывно для всех $\omega \in \Omega$, то f называется случайным s -оператором.*

Определение 2.11. *Мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ называется случайным мультиоператором, если оно измеримо относительно $\Sigma \otimes \mathbb{B}(X)$. Если, кроме того, $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow C(Y)$ полунепрерывно сверху для всех $\omega \in \Omega$, то $\mathcal{F}$ называется случайным u -мультиоператором.*

Определение 2.12. Пусть $A \subset Y$ – замкнутое подмножество и $\mathcal{F}: \Omega \times A \rightarrow P(Y)$ – случайный мультиоператор. Случайной неподвижной точкой ξ мультиоператора $\mathcal{F}$ называется измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow A$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.

Теорема 2.3. Пусть Y – сепарабельное банахово пространство, $\mathcal{F}: \Omega \times Y \rightarrow C(Y)$ – случайный u -мультиоператор. Если для каждого $\omega \in \Omega$ множество $\text{Fix} \mathcal{F}_\omega := \{x \in Y: x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$ неподвижных точек мультиоператора $\mathcal{F}_\omega = \mathcal{F}(\omega, \cdot)$ непусто и замкнуто, то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Определение 2.13. Мультиоператор $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ называется случайным компактным u -мультиоператором, если он является случайным u -мультиоператором и для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow K(Y)$ является компактным.

Пусть Y – сепарабельное банахово пространство, $U \subset Y$ – открытое ограниченное подмножество и $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Kv(Y)$ – случайный компактный u -мультиоператор такой, что $x \notin \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in \partial U$ и для всех $\omega \in \Omega$, где ∂U обозначает границу множества U . Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень соответствующего многозначного векторного поля $\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U})$ корректно определена (см., например, [4], [5]). Случайная топологическая степень многозначного векторного поля $i - \mathcal{F}$ на $\bar{U}$ определяется следующим образом:

$$D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) := \left\{ \deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \mid \omega \in \Omega \right\}.$$

Если топологическая степень $\deg(i - \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \neq 0$ для каждого $\omega \in \Omega$, то полагаем по определению, что случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$.

Из свойств топологической степени многозначных отображений и Теоремы 2.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Если случайная топологическая степень $D(i - \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$, то мультиоператор $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку в U , т. е., существует измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow U$ такая, что $\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Пусть X, Y – сепарабельные банаховы пространства, $U \subset Y$ – открытое ограниченное подмножество, $l: \text{Dom} l \subseteq X \rightarrow Y$ – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и случайный мультиоператор $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Cv(Y)$ удовлетворяет условиям:

- i) для каждого $\omega \in \Omega$ мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ является l -компактным мультиотображением;
- ii) для всех $x \in \partial U \cap \text{Dom} l$ и $\omega \in \Omega$ имеем $lx \notin \mathcal{F}(\omega, x)$.

Тогда для каждого $\omega \in \Omega$ топологическая степень совпадения пары $(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot))$ определяется как

$$\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) := \deg(\Phi(\omega, \cdot), \bar{U}), \text{ где}$$

$$\Phi(\omega, x) = p(x) + (\phi \circ \pi + k_{p,q}) \circ \mathcal{F}(\omega, x).$$

Случайная топологическая степень совпадения пары $(l, \mathcal{F})$ определяется следующим образом:

$$\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \bar{U}) := \{ \deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \mid \omega \in \Omega \}.$$

Говорят, что случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \bar{U})$ пары $(l, \mathcal{F})$ отлична от нуля, если топологическая степень совпадения $\deg(l, \mathcal{F}(\omega, \cdot), \bar{U}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Определенная таким образом случайная топологическая степень совпадения обладает всеми основными свойствами степени совпадения. В частности, справедлив следующий общий принцип.

Теорема 2.5. *Если случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, \bar{U}) \neq 0$, то существует случайная точка совпадения для данной пары $(l, \mathcal{F})$, т. е. измеримая функция $\xi: \Omega \rightarrow U$ такая, что $l\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Приведем пример реализации общего принципа.

Теорема 2.6. Пусть $\mathcal{F}: \Omega \times \bar{U} \rightarrow Kv(E_2)$ – случайный u -мультиоператор. Предположим, что мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot)$ – l -компактно при каждом $\omega \in \Omega$ и выполнены следующие условия:

- i) $lx \notin \lambda \mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $\lambda \in (0, 1), x \in \text{Dom} l \cap \partial U, \omega \in \Omega$;

ii) $0 \notin \pi\mathcal{F}(\omega, x)$ для всех $x \in \text{Ker}l \cap \partial U$, $\omega \in \Omega$;

iii) $\deg_{\text{Ker}l}(\phi\pi\mathcal{F}(\omega, \cdot)|_{\overline{U_{\text{Ker}l}}, \overline{U_{\text{Ker}l}}}) \neq 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

Тогда случайная топологическая степень совпадения $\text{Deg}(l, \mathcal{F}, U) \neq 0$, и, следовательно, существует случайная точка совпадения пары $(l, \mathcal{F})$.

Приведем некоторые сведения из негладкого анализа (см. ([12])).

Определение 2.14. Пусть $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – локально липшицева функция. Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$ обобщенная производная Кларка $V^0(x_0; v)$ функции V в точке x_0 по направлению v определяется как

$$V^0(x_0; v) = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0} \frac{V(x + tv) - V(x)}{t}, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Тогда обобщенный градиент Кларка $\partial V(x)$ функции V в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом: $\partial V(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v \rangle \leq V^0(x_0; v) \text{ для всех } v \in \mathbb{R}^n\}$.

Определение 2.15. Локально липшицева функция $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется регулярной, если для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ и $v \in \mathbb{R}^n$ существует производная по направлению $V'(x_0, v)$, равная обобщенной производной Кларка $V^0(x_0, v)$.

Известно, что выпуклые функции являются регулярными.

Лемма 2.1. (см., например, [13]) Пусть $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – регулярная функция, $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная функция. Тогда функция $V(x(t))$ также является абсолютно непрерывной и справедливо следующее равенство:

$$V(x(t)) - V(x(a)) = \int_a^t V^0(x(s), x'(s)) ds, \quad t \in [a, b].$$

Определение 2.16. Отображение $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайным негладким потенциалом, если справедливы следующие условия:

(i) для любого $\omega \in \Omega$ $V(\omega, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – регулярная функция;

(ii) $V(\cdot, x): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измеримо для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем следующее утверждение, являющееся развитием понятия, введенного в [5], [14].

Определение 2.17. Случайный негладкий потенциал $V: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайным негладким невырожденным потенциалом, если существует $R_0 > 0$ такое, что $0 \notin \partial V(\omega, x)$ для всех $(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n: |x| \geq R_0$.

Из определения следует, что для фиксированного $\omega \in \Omega$ топологическая степень $\deg(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$ корректно определена для всех $R \geq R_0$ и совпадает с $\deg(\partial V(\omega, \cdot), B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

Под случайным топологическим индексом $\text{Ind}V$ случайного негладкого невырожденного потенциала V понимается случайная топологическая степень $\text{Deg}(\partial V, B_{\mathbb{R}^n}(0, R_0))$.

3. Основной результат. Для $\tau > 0$ обозначим символом C пространство $C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^n)$ непрерывных функций $x: [- \tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in [- \tau, 0]} \|x(t)\|$ и пусть $I = [0, T]$, $T > 0$. Для функции

$x(\cdot) \in C([- \tau, T]; \mathbb{R}^n)$ и $t \in [0, T]$ символом $x_t \in C$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [- \tau, 0]$.

Обозначим C_T пространство непрерывных T -периодических функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$. Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2 , $\|x\|_2 = \left(\int_0^T \|x(s)\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

Будем рассматривать следующую периодическую задачу:

$$x'(\omega, t) \in \varphi(\omega, t, x_t) + \mathcal{F}(\omega, t, x_t), \quad (2)$$

$$x(\omega, 0) = x(\omega, T), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (3)$$

где отображение $\varphi: \Omega \times \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ и мультиотображение $\mathcal{F}: \Omega \times \mathbb{R} \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ T -периодичны по второму аргументу:

$$\varphi(\omega, t, \phi) = \varphi(\omega, t + T, \phi) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \phi \in C;$$

$$\mathcal{F}(\omega, t, \phi) = \mathcal{F}(\omega, t + T, \phi) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}, \phi \in C.$$

Это условие означает, что отображение φ и мультиотображение $\mathcal{F}$ можно рассматривать на $\Omega \times I \times C$, где $I := [0, T]$ снабжено мерой Лебега.

Полагаем также, что выполнены следующие условия:

$\varphi 1)$ $\varphi: \Omega \times I \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ – случайное s -отображение;

$\mathcal{F} 1)$ $\mathcal{F}: \Omega \times I \times C \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ – случайный u -мультиоператор;

$\mathcal{F}2)$ существует функция $k : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $k(\omega, \cdot)$ является L^2 -интегрируемой функцией для любого $\omega \in \Omega$, отображение $k(\cdot, t)$ измеримо для п. в. $t \in I$, и

$$\|\mathcal{F}(\omega, t, \phi)\| := \sup\{|z| : z \in \mathcal{F}(\omega, t, \phi)\} \leq k(\omega, t)(1 + \|\phi\|) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega, \quad t \in I \quad \text{и} \quad \phi \in C.$$

Из условий $(\mathcal{F}1)$ и $(\mathcal{F}2)$ следует, что мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}} : \Omega \times C_T \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x) = \{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(s) \in F(\omega, s, x_s) \quad \text{п. в. } s \in I\}$$

корректно определен. Обозначим $\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2 := \sup\{\|f\|_2 : f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\}$. Кроме того, для каждого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [4]).

Согласно $(\varphi 1)$ можно определить мультиоператор суперпозиции $\mathfrak{P} : \Omega \times C_T \rightarrow \mathcal{P}(L^2(I, \mathbb{R}^n))$, соответствующий включению (2), следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(\omega, x) &= \{h \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : \\ h(s) &= \varphi(\omega, s, x_s) + f(s) \quad \text{п. в. } s \in I \text{ для некоторого } f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\}. \end{aligned}$$

Из свойств мультиотображений (см, например, [4], [5], [6] и Предложения 2.57 [7]), следует, что правая часть включения (2) – случайное u -мультиотображение. Тогда мультиотображение $\mathfrak{P}$ измеримо (см. [15]). Более того, для любого $\omega \in \Omega$ мультиоператор $\mathfrak{P}(\omega, \cdot)$ замкнут (см., например, [4], [5], [6]).

Определение 3.1. Случайный негладкий потенциал $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2), если найдется $N > 0$ такое, что для всех $\omega \in \Omega$ и для всех абсолютно непрерывных $x \in C_T$ с $\|x\|_2 \geq N$ имеем

$$\int_0^T \langle g_\omega(s), h_\omega(s) \rangle ds > 0$$

для всех суммируемых сечений $h_\omega \in \mathfrak{P}(\omega, x)$ и $g_\omega \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x)$, где $\mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x) = \{v \in L_T^2 : v(t) \in \partial G(\omega, x(t)) \text{ п. в. } t \in [0, T]\}$.

Справедлив следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – случайный негладкий невырожденный потенциал с ненулевым случайным топологическим индексом и выполнены условия:

1) существуют константы $\varepsilon > 0, K > 0$ и $\beta \geq 1$ такие, что:

$$\|\tilde{g}_\omega\| \geq \varepsilon \|\tilde{x}\|^\beta - K \quad \text{и} \quad \langle \varphi(\omega, s, \tilde{x}_s), \tilde{g}_\omega \rangle \geq \varepsilon \|\tilde{g}_\omega\|^2,$$

для всех $\omega \in \Omega, s \in I, \tilde{x} \in C_T$ и $\tilde{g}_\omega \in \partial \mathcal{G}(\omega, \tilde{x}(s))$;

2) для всех $\omega \in \Omega$ и абсолютно непрерывных функций $x \in C_T$ имеем

$$\limsup_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x)\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon^2 T^{(1-\beta)/2}.$$

Тогда задача (2), (3) имеет случайное решение.

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{G}$ – случайная негладкая строгой интегральной направляющая функция для включения (2).

Для любой абсолютно непрерывной функции $x_\omega = x(\omega, \cdot) \in C_T$ и $g_\omega(\cdot) \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x_\omega)$ первое предположение гарантирует выполнение оценки

$$\varepsilon \|x_\omega(t)\|^\beta \leq \|g_\omega(t)\| + K, \quad \forall t \in T.$$

Следовательно,

$$\varepsilon \left\| \|x_\omega(\cdot)\|^\beta \right\|_2 \leq \left\| \|g_\omega(\cdot)\| + K \right\|_2 \leq \|g_\omega(\cdot)\|_2 + \|K\|_2 = \|g_\omega(\cdot)\|_2 + K\sqrt{T}.$$

Отношение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает следующую оценку:

$$\|g_\omega\|_2 \geq \varepsilon \|x_\omega\|_{2\beta}^\beta - K\sqrt{T} \geq \varepsilon T^{(1-\beta)/2} \|x_\omega\|_2^\beta - K\sqrt{T}.$$

Зафиксируем произвольное $\omega \in \Omega$. Тогда для любых $f_\omega \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\omega, x_\omega)$ и $g_\omega \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x_\omega)$ имеем

$$\int_0^T \langle g_\omega(s), \varphi(\omega, s, x_{\omega s}) \rangle + f_\omega(s) \rangle ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^T \langle \varphi(\omega, s, x_{\omega s}), g_{\omega}(s) \rangle ds + \int_0^T \langle g_{\omega}(s), f_{\omega}(s) \rangle ds \geq \\
&\geq \|g_{\omega}\|_2 (\varepsilon \|g_{\omega}\|_2 - \|f_{\omega}\|_2) \geq \|g_{\omega}\|_2 (\varepsilon \|g_{\omega}\|_2 - \|\mathcal{P}_F(\omega, x_{\omega})\|_2) \geq \\
&\geq \|g_{\omega}\|_2 \left(\varepsilon^2 T^{(1-\beta)/2} - \varepsilon \frac{K\sqrt{T}}{\|x_{\omega}\|_2^{\beta}} - \frac{\|\mathcal{P}_F(\omega, x_{\omega})\|_2}{\|x_{\omega}\|_2^{\beta}} \right) \|x_{\omega}\|_2^{\beta} > 0,
\end{aligned}$$

если $\|x_{\omega}\|_2 \geq N$ для достаточно большого N . Следовательно, $\mathcal{G}$ является случайной негладкой строгой интегральной направляющей функцией для включения (2).

Теперь рассмотрим линейный оператор

$$l(x) = x'$$

$l: \text{Dom } l = \{x \in C_T : x \text{ - абсолютно непрерывно} \} \subset C_T \rightarrow L_T^1$ и мультиоператор суперпозиции

$$\mathfrak{P}: \Omega \times C_T \rightarrow \mathcal{P}(L_T^1).$$

Очевидно, что l – линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\text{Ker } l = \mathbb{R}^n$. Канонический проекционный оператор $\Pi: L_T^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\Pi f = \frac{1}{T} \int_0^T f(s) ds.$$

Заметим, что для произвольного фиксированного $\omega \in \Omega$ решение $x_{\omega} \in \text{Dom } l$ включения $l(x) \in \lambda \mathfrak{P}(\omega, x)$, $\lambda \in (0, 1)$, удовлетворяют отношению

$$x'_{\omega}(s) = \lambda h_{\omega}(s) \quad \text{п.в. } s \in [0, T], \quad (4)$$

$$x_{\omega}(0) = x_{\omega}(T), \quad (5)$$

где $h_{\omega} \in \mathfrak{P}(\omega, x)$.

Применяя Лемму 2.1 и определение обобщенного градиента Кларка, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle g_{\omega}(s), h_{\omega}(s) \rangle ds = \frac{1}{\lambda} \int_0^T \langle g_{\omega}(s), x'_{\omega}(s) \rangle ds \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \int_0^T \mathcal{G}^0(\omega, x'_{\omega}(s)) ds = \frac{1}{\lambda} (\mathcal{G}(\omega, x_{\omega}(T)) - \mathcal{G}(\omega, x_{\omega}(0))) = 0,
\end{aligned}$$

для каждого суммируемого сечения $g_{\omega} \in \mathcal{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, x_{\omega})$. Отсюда получаем

$$\|x_{\omega}\|_2 < N.$$

Из условий (φ1) и (F2) следует, что $\|x'_{\omega}\|_2 < M$, где $M > 0$. Но тогда существует $M' > 0$ такое, что

$$\|x_{\omega}\|_{\infty} < M'.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ с центром в 0 и радиусом $r = \max\{N, M', NT^{-1/2}\}$. Тогда для любого фиксированного $\omega \in \Omega$ имеем

$$l(x_{\omega}) \notin \lambda \mathfrak{P}(\omega, x_{\omega}), \quad \forall x_{\omega} \in \partial U, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \text{ker } l$ произвольно. Поскольку u почти везде постоянно и $\|u\|_{\infty} \geq NT^{-1/2}$, имеем $\|u\|_2 \geq N$. Из определения случайной негладкой строгой интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int_0^T \langle g_{\omega}(s), h_{\omega}(s) \rangle ds > 0$$

для всех измеримых сечений $g_{\omega} \in \mathfrak{P}_{\partial \mathcal{G}}(\omega, u)$ и $h_{\omega} \in \mathfrak{P}(\omega, u)$, для всех $\omega \in \Omega$.

Но для каждого $\omega \in \Omega$, выбирая постоянный набор $g_\omega(s) \equiv \tilde{g}_\omega \in \partial\mathcal{G}(\omega, u)$, получим

$$0 < \int_0^T \langle \tilde{g}_\omega, h_\omega(s) \rangle ds = \langle \tilde{g}_\omega, \int_0^T h_\omega(s) ds \rangle = T \langle \tilde{g}_\omega, Ph_\omega \rangle,$$

и поэтому

$$\langle \tilde{g}_\omega, y_\omega \rangle > 0$$

для всех $\tilde{g}_\omega \in \partial\mathcal{G}(\omega, u)$, $y_\omega \in \Pi\mathfrak{P}(\omega, u)$ и $\omega \in \Omega$. Это означает, что мультиотображения $\partial\mathcal{G}(\omega, u)$ и $\Pi\mathfrak{P}(\omega, u)$ гомотопны на $\partial U \cap \ker l$ для любого $\omega \in \Omega$ и, следовательно,

$$\deg_{\ker l}(\Pi\mathfrak{P}(\omega, \cdot)|_{\overline{U}_{\ker l}}, \overline{U}_{\ker l}) = \deg(\partial\mathcal{G}(\omega, \cdot), \overline{U}_{\ker l}) \neq 0 \text{ для всех } \omega \in \Omega,$$

где $\overline{U}_{\ker l} = \overline{U} \cap \ker l$. Теперь легко видеть, что все условия Теоремы 2.6 выполнены и задача (2), (3) имеет случайное решение.

4. Заключение. В данной работе метод случайных негладких интегральных направляющих функций применен для исследования периодической задачи для случайного функционально-дифференциального включения с возмущенной правой частью, представленной в виде суммы случайного полунепрерывного сверху мультиотображения и случайного непрерывного по совокупности переменных отображения. Сформулирована и доказана теорема о существовании случайных периодических решений такого типа функционально-дифференциальных включений.

Список литературы

1. Красносельский А.М., Перов А.И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН СССР; 1958;123(2):235-238.
2. Красносельский А.М. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966;332.
3. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 1985;169:194-252.
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Либроком; 2011. 226 с.
5. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006.
6. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
7. Obukhovskii V., Gel'man B. Multivalued Maps and Differential Inclusions: Elements of Theory and Applications *Elements of Theory and Applications*. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ. 2020. DOI:10.1007/978-3-642-37070-0_1
8. Корнев С.В., Обуховский В.В. О некоторых вариантах теории топологической степени для невыпуклозначных мультиотображений. *Труды математического факультета*. 2004;56-74.
9. Prusko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.* 1981;5(9):959-970.
10. Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979;40:122.
11. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337-358.
12. Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA; 1990.
13. Корнев С.В., Обуховский В.В., Дзекка П. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений функционально-дифференциальных включений. *Дифференциальные уравнения*. 2016;52(10):1335-1335.
14. Корнев С.В. Негладкие интегральные направляющие функции в задачах о вынужденных колебаниях *Автоматика и телемеханика*. 2015;(9):31-43.
15. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory. Dordrecht: Springer; 1997. 968 p.

References

1. Krasnosel'skii AM., Perov AI. On a Principle of the Existence of Bounded, Periodic, and Almost-Periodic Solutions to Systems of Ordinary Differential Equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR; 1958; 123(2): 235–238. (In Russ.)
2. Krasnosel'skii AM. The Shift Operator along the Trajectories of Differential Equations. Moscow: Nauka, 1966;332. (In Russ.)

3. Blagodatskikh VI., Filippov AF. Differential inclusions and optimal control *Tr. Steklov Mathematical Institute of the USSR*. 1985;169:194–252. (In Russ.)
4. Borisovich YuG., Gelman BD., Myshkis AD., Obukhovskii VV. Introduction to the theory of multivalued mappings and differential inclusions. M.: Librokom; 2011;224. (In Russ.)
5. Górniewicz, L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Berlin: Springer; 2006.
6. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
7. Obukhovskii V. Gel'man B. Multivalued Maps and Differential Inclusions: Elements of Theory and Applications *Elements of Theory and Applications*. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ. 2020. DOI: 10.1007/978-3-642-37070-0_1
8. Kornev SV., Obukhovskii VV. On some variants of the theory of topological degree for convex-valued multimap *Transactions of the Faculty of Mathematics. Ser. "New series". Voronezh State University*. 2004;56–74. (In Russ.)
9. Pruszko T. Topological degree methods in multi-valued boundary value problems. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl.* 1981;5(9):959-970.
10. Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1979;40:122.
11. Andres J., Gorniewicz L. Random topological degree and random differential inclusions *Topol. Meth. Nonl. Anal.* 2012;40:337-358.
12. Clarke F.H. Optimization and Nonsmooth Analysis. Classics in Applied Mathematics, 5. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). Philadelphia: PA; 1990.
13. Kornev SV., Obukhovskii VV., Zecca P. The method of generalized integral guiding function in the problem of the existence of periodic solutions of functional-differential inclusions *Differential Equations*. 2016;52(10):1335-1335. (In Russ.)
14. Kornev SV. Nonsmooth integral guiding functions in problems of forced oscillations *Automation and Telemekhanics*. 2015;(9):31-43. (In Russ.)
15. Hu S., Papageorgiou NS. Handbook of Multivalued Analysis. Vol. I. Theory. Dordrecht: Springer; 1997. 968 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 15.05.2026

Поступила после рецензирования 07.07.2026

Принята к публикации 11.07.2026

Received May 15, 2026

Revised July 7, 2026

Accepted July 11, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Корнев Сергей Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Обуховский Валерий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Гетманова Екатерина Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

Афонина Светлана Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sergey V. Kornev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Valeri V. Obukhovskii – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Ekaterina N. Getmanova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

Svetlana N. Afonina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

К содержанию

Однозначная разрешимость задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка наиболее общего вида

Алхутов Ю. А.¹ , Чечкин Г. А.² 

¹ Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых,
Россия, 600024, г. Владимир, пр. Строителей, 11
yurij-alkhutov@yandex.ru

² Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1
chekchin@mech.math.msu.su

Аннотация. В работе рассмотрена однородная задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка общего вида с предельными показателями суммируемости младших коэффициентов в ограниченной области из $\mathbb{R}^n$. Для этой задачи доказаны теоремы существования и единственности в случае $n > 2$.

Ключевые слова: строго липшицева область, линейное эллиптическое уравнение, однозначная разрешимость, предельный показатель Соболева

Финансирование: работа выполнена при поддержке РФФ (проект 25-11-00133).

Для цитирования: Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Однозначная разрешимость задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка наиболее общего вида. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):270–276. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-270-276 EDN GNUGNJ

Original Research

Unique Solvability of the Dirichlet Problem for a Second Order Linear Elliptic Equation of the Most General Form

Yurij A. Alkhutov , Gregory A. Chechkin 

¹ A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University,
11 Stroitelej Ave., Vladimir, 600024, Russia
yurij-alkhutov@yandex.ru

² Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
yurij-alkhutov@yandex.ru

Abstract. In this paper, we consider the homogeneous Dirichlet problem for a general second-order linear elliptic equation with limit integrability exponents of the lower-order coefficients in a bounded domain in $\mathbb{R}^n$. The existence and uniqueness theorems are proved for this problem in the case $n > 2$.

Keywords: Strictly Lipschitz Domain, Linear Elliptic Equation, Unique Solvability, Sobolev Limit Exponent

Financing: This work was supported by the Russian Science Foundation (project 25-11-00133).

For citation: Alkhutov YuA., Chechkin GA. Unique Solvability of the Dirichlet Problem for a Second Order Linear Elliptic Equation of the Most General Form. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):270–276. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-270-276 EDN GNUGNJ

1. Введение. В данной работе обсуждаются вопросы однозначной разрешимости эллиптических уравнений второго порядка общего вида в случае, когда коэффициенты младших членов уравнения удовлетворяют предельным показателям интегрируемости по Соболеву.

Эта работа предворяет исследования по повышенной суммируемости градиентов решений краевых задач различного типа для таких уравнений. О повышенной суммируемости см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

В настоящей работе мы рассматриваем линейный эллиптический оператор второго порядка общего вида

$$\mathcal{L}u := \operatorname{div} (A(x)\nabla u) + \operatorname{div} (a(x)u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u,$$

рассматриваемый в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 2$. Здесь $A(x) = \{A_{ij}(x)\}$ – измеримая симметричная матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha^{-1}|\xi|^2 \quad \text{для почти всех } x \in D \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = \operatorname{const} > 0. \quad (1)$$

Вектор-функции $a(x) = (a^1(x), \dots, a^n(x))$, $b(x) = (b^1(x), \dots, b^n(x))$ и коэффициент $c(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_j(x) \in L_n(D), \quad b_j(x) \in L_n(D), \quad j = 1, \dots, n, \quad c(x) \in L_{\frac{n}{2}}(D). \quad (2)$$

Введем соболевское пространство функций $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$, как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в ограниченной области D функций по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} = \left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса. В настоящей работе изучается задача Дирихле

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div} f, \quad f = (f_1, \dots, f_n), f_j \in L_2(D), \quad u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D), \quad (3)$$

в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 2$.

Под решением задачи (3) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D (A(x) \nabla u \cdot \nabla \varphi) dx + \int_D (a(x) \cdot \nabla \varphi) u dx - \int_D (b(x) \cdot \nabla u) \varphi dx - \int_D c(x) u \varphi dx = \int_D (f \cdot \nabla \varphi) dx \quad (4)$$

для всех пробных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. При рассмотрении вопроса об однозначной разрешимости задачи Дирихле (3) нам потребуется дополнительное условие вида

$$\int_D (c(x) \varphi - (a(x) \cdot \nabla \varphi)) dx \leq 0, \quad (5)$$

выполненное на неотрицательных функциях $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$. В доказательстве единственности решений задачи (3) при выполнении условий (1), (2) и (5) мы опираемся на оценку из теоремы 1 (см. [17]) вида

$$\left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C(\alpha, n, \|a\|_{L_n(D)}, \|b\|_{L_n(D)}, D) \left(\int_D |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

в которой постоянная $C(\alpha, n, \|a\|_{L_n(D)}, \|b\|_{L_n(D)}, D)$ из (6) представлена явно.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если выполнены условия (1), (2), (5) и $f \in (L_2(D))^n$, то задача Дирихле (3) однозначно разрешима и для решения справедлива оценка (6).

Будем пользоваться следующим представлением младших коэффициентов $a, b \in (L_n(D))^n$ и $c \in (L_{\frac{n}{2}}(D))^n$ рассматриваемого уравнения

$$\begin{aligned} a &= \check{a} + \widehat{a}, \quad \check{a} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{a} \in (L_n(D))^n, \quad \|\widehat{a}\|_{L_n(D)} \leq \theta_1, \\ b &= \check{b} + \widehat{b}, \quad \check{b} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{b} \in (L_n(D))^n, \quad \|\widehat{b}\|_{L_n(D)} \leq \theta_1, \\ c &= \check{c} + \widehat{c}, \quad \check{c} \in (L_\infty(D))^n, \quad \widehat{c} \in (L_{\frac{n}{2}}(D))^n, \quad \|\widehat{c}\|_{L_{\frac{n}{2}}(D)} \leq \theta_2 \end{aligned} \quad (7)$$

с достаточно малыми постоянными $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, которые определяются в дальнейших рассуждениях.

2. Однозначная разрешимость поставленной задачи. В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле (3) доказывается в произвольной ограниченной области D .

Доказательство существования решения задачи Дирихле (3) основано на вспомогательных утверждениях, которые устанавливаются ниже. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором $\mathcal{L}$ из (3), имеющую вид

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) dx + \int_D (a \cdot \nabla v) u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v dx - \int_D c u v dx \quad (8)$$

и определенную на функциях $u, v \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$.

Лемма 1. Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (3) удовлетворяют условиям (1) и (2), то

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \frac{\alpha}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - C \int_D u^2 dx, \quad (9)$$

где $C = C(\alpha, a, b, c, n)$.

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1) имеем

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \alpha \int_D |\nabla u|^2 dx - \left| \int_D (a \cdot \nabla u) u dx \right| - \left| \int_D (b \cdot \nabla u) u dx \right| - \left| \int_D cu^2 dx \right|. \quad (10)$$

Сначала оценим второе и третье слагаемые в правой части тождества (8). Оба слагаемых оцениваются одинаково и мы приведем только оценку первого из них. Из (7) имеем

$$\int_D (a \cdot \nabla u) u dx = \int_D (\check{a} \cdot \nabla u) u dx + \int_D (\widehat{a} \cdot \nabla u) u dx. \quad (11)$$

Для первого интеграла из правой части в (11) имеем

$$\left| \int_D (\check{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq C \|\check{a}\|_{L_\infty(D)} \int_D |\nabla u| |u| dx$$

и из неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ найдем

$$\left| \int_D (\check{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{a}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 dx. \quad (12)$$

Второй интеграл в правой части (11) оценим с помощью неравенства Гёльдера, в силу которого

$$\left| \int_D (\widehat{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \|\widehat{a}\|_{L_n(D)} \left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (13)$$

По неравенству Соболева

$$\left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \leq C(n) \left(\int_D |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (14)$$

Отсюда и из (13) с учетом (7) получим

$$\left| \int_D (\widehat{a} \cdot \nabla u) u dx \right| \leq C(n) \theta_1 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (15)$$

Из (12) и (15) найдем

$$\left| \int_D (a \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{a}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 dx + C(n) \theta_1 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (16)$$

Аналогично для третьего слагаемого

$$\left| \int_D (b \cdot \nabla u) u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 dx + C(\varepsilon) \|\check{b}\|_{L_\infty(D)}^2 \int_D u^2 dx + C(n) \theta_1 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (17)$$

Теперь перейдем к оценке последнего слагаемого в (10). В силу (7) имеем

$$\int_D cu^2 dx = \int_D \check{c}u^2 dx + \int_D \widehat{c}u^2 dx. \quad (18)$$

Ясно, что

$$\left| \int_D \check{c}u^2 dx \right| \leq \|\check{c}\|_{L_\infty(D)} \int_D u^2 dx. \quad (19)$$

Второй интеграл в правой части (18) оценим с помощью неравенства Гёльдера и Соболева (14), в силу которых

$$\left| \int_D \widehat{c} u^2 dx \right| \leq \|\widehat{c}\|_{L_{\frac{n}{2}}(D)} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C(n) \theta_2 \int_D |\nabla u|^2 dx. \quad (20)$$

В итоге, после соответствующего выбора ε , θ_1 и θ_2 из (10), (16), (17), (19) и (20) приходим к оценке (9). Лемма доказана.

Лемма 2. Если коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ из (3) удовлетворяют условиям (1) и (2), то для фиксированного $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(D)$ отображение $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$, где форма $\mathcal{L}(u, v)$ определена в (8), является ограниченным линейным функционалом на $\overset{\circ}{W}_2^1(D)$ и справедлива оценка

$$|\mathcal{L}(u, v)| \leq C \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)}, \quad (21)$$

где $C = C(\alpha, a, b, c, n)$.

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1) имеем

$$\left| \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) dx \right| \leq \alpha^{-1} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)}. \quad (22)$$

Исходя из условий (2) и (5), второе и третье слагаемые формы (8) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_D (a \cdot \nabla v) u dx \right| &\leq \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \int_D |a|^2 u^2 dx \leq \\ &\leq \|v\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \left(\int_D |a|^n dx \right)^{2/n} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \end{aligned} \quad (23)$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_D (b \cdot \nabla u) v dx \right| &\leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \int_D |b|^2 v^2 dx \leq \\ &\leq \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(D)} \left(\int_D |b|^n dx \right)^{2/n} \left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поступая аналогично с четвёртым слагаемым, получаем

$$\left| \int_D c u v dx \right| \leq \left(\int_D |c|^{\frac{n}{2}} dx \right)^{2/n} \left(\int_D |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_D |v|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}}. \quad (25)$$

По теореме вложения Соболева (14) из (22), (23), (24) и (25) приходим к (21). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Определим для $\sigma > \sigma_0 > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (9) леммы 1 следует, что соответствующая оператору $\mathcal{L}_\sigma$ форма

$$\mathcal{L}_\sigma(u, u) = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla u) dx + \int_D (a \cdot \nabla u) u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) u dx - \int_D c u^2 dx + \sigma \int_D u^2 dx$$

при достаточно большом σ будет коэрцитивной, то есть

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u, u) \geq \alpha/2 \int_D |\nabla u|^2 dx.$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_0(\alpha, a, b, c, n)$.

Отметим, что при таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u, v) = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) dx + \int_D (a \cdot \nabla v) u dx - \int_D (b \cdot \nabla u) v dx - \int_D c u v dx + \sigma_0 \int_D u v dx \quad (26)$$

является ограниченной. Это следует из оценки (21) и оценки

$$\int_D uv \, dx \leq \|u\|_{L_2(D)} \|v\|_{L_2(D)} \leq C(n, D) \|u\|_{W_2^1(D)} \|v\|_{W_2^1(D)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = W_2^1(D)$.

Пусть H^{-1} — сопряженное пространство к H . Определим оператор $\mathfrak{Z}_u : H \rightarrow H^{-1}$ равенством

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_u v = \int_D uv \, dx, \quad v \in H. \quad (27)$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{Z}_u$ является компактным. Для этого заметим, что отображение $\mathfrak{Z}_u$ можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{Z}_u = \mathfrak{Z}_1 \circ \mathfrak{Z}_2. \quad (28)$$

Здесь $\mathfrak{Z}_2 : H \rightarrow L_2(D)$ — естественное вложение. По теореме о компактности вложения Кондрашова–Соболева [18, Теорема 7.22] оператор $\mathfrak{Z}_2$ является компактным, а отображение $\mathfrak{Z}_1 : L_2(D) \rightarrow H^{-1}$ определено формулами (27) и (28). Из того, что оператор $\mathfrak{Z}_1$ непрерывен и оператор $\mathfrak{Z}_2$ компактен, следует компактность оператора $\mathfrak{Z}$.

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l -функционал в пространстве H^{-1} , сопряженном к $H = W_2^1(D)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0} u + \sigma_0 \mathfrak{Z}_u u = l$. По лемме Лакса – Мильграма (см. [19]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^{-1} на H . Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{Z}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \quad (29)$$

Отображение $T = -\sigma_0 \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} \mathfrak{Z}_u$ в силу компактности $\mathfrak{Z}$ также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, теорема 5.3 [18, §5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (29), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$.

Однозначная разрешимость задачи Дирихле (3) вытекает из априорной оценки (6), в силу которой решение единственно. Теорема доказана.

Список литературы

1. Боярский Б.В. Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. *Математический сборник*. 1957;43(85,4):451–503.
2. Meyers N.G. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie*. 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov V.V. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics*. 1997;5(1):105–116.
4. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. Increased Integrability of the Gradient of the Solution to the Zaremba Problem for the Poisson Equation. *Russian Academy of Sciences. Doklady Mathematics*, 2021;103(2): 69–71.
5. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Meyer's Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *C R Mécanique*. 2021;349(2):299–304.
6. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A., Maz'ya V.G. On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem, *Arch Rational Mech Anal*. 2022;245(2):1197–1211.
7. Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Оценка Боярского–Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера. *Проблемы математического анализа*. 2022;119:107–116.
8. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. On Higher Integrability of the Gradient of a Solution to the Zaremba Problem for $p(\cdot)$ -Laplace Equation in a Plane Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(8):3197–3206.
9. Чечкина А.Г. О задаче Зарембы для p -эллиптического уравнения. *Математический сборник*. 2023;214(9):144–160.
10. Chechkin G.A. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):#3015.
11. Chechkin G.A., Chechkina T.P. On Higher Integrability of Solutions to Poisson Equation with Drift in Domains Perforated Along the Boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2024;31(3):407–417.
12. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. On the Bojarski–Meyers Estimate for the Solution of the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024;286(1):1–13.
13. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. Bojarski–Meyers estimate for a solution to the Zaremba problem for Poisson's equations with drift. *Sbornik: Mathematics*. 2025;216(8):1021–1036.

14. Alkhutov Yu.A., Surnachev M.D., Chechkin A.G. On the Zaremba Problem for Inhomogeneous p -Laplace Equation with Drift. *Doklady Mathematics*. 2025;111(1):1–5.
15. Alkhutov Yu.A., Chechkin G.A. The Boyarsky–Meyers Inequality for Solutions to p -Elliptic Equation with Lower Order Terms and Dirichlet Boundary Condition. *Journal of Mathematical Sciences*. 2025;291(4):433–440.
16. Алиев М.Д., Алхутов Ю.А., Чечкин Г.А. Об оценке Боярского–Мейерса решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с дивергентным сносом. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2026;66(6):1278–1284.
17. Chicco M. An a priori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type. *Matematiche (Catania)*. 1971;26(1):173–182.
18. Гилбарт Д., Трудингер Н.С. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука; 1989.
19. Lax P.D., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. *Ann. Math. Studies*. Princeton University Press: Princeton, 33. 1954:167–190.

References

1. Boyarskii BV. Generalized solutions of a system of differential equations of first order and of elliptic type with discontinuous coefficients (Russian) *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*. 1957;43(85,4):451–503. MR0106324 (In Russ.)
2. Meyers NG. An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3-e serie*. 1963;17(3):189–206.
3. Zhikov VV. On some Variational Problems. *Russian Journal of Mathematical physics*. 1997;5(1):105–116.
4. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. Increased Integrability of the Gradient of the Solution to the Zaremba Problem for the Poisson Equation. *Russian Academy of Sciences. Doklady Mathematics*, 2021;103(2): 69–71.
5. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. The Meyer’s Estimate of Solutions to Zaremba Problem for Second-order Elliptic Equations in Divergent Form. *C R Mécanique*. 2021;349(2):299–304.
6. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA., Maz’ya VG. On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2022;245(2):1197–1211.
7. Chechkin GA., Chechkin TP. The Boyarsky–Meyers Estimate for Divergent Elliptic Operators of the Second Order. Two Spacial Examples. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022;268(4):523–534 (Translated from *Problemy Mat. Analiza*. 2022;119:107–116). (In Russ.)
8. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. On Higher Integrability of the Gradient of a Solution to the Zaremba Problem for $p(\cdot)$ -Laplace Equation in a Plane Domain. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(8):3197–3206.
9. Chechkin AG. On the Zaremba problem for the p -elliptic equation. *Sbornik: Mathematics*. 2023;214(9):1321–1336. (In Russ.)
10. Chechkin GA. The Meyers Estimates for Domains Perforated along the Boundary. *Mathematics*. 2021;9(23):#3015.
11. Chechkin GA., Chechkin TP. On Higher Integrability of Solutions to Poisson Equation with Drift in Domains Perforated Along the Boundary. *Russian Journal of Mathematical Physics*. 2024;31(3):407–417.
12. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. On the Boyarsky–Meyers Estimate for the Solution of the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Drift. *Journal of Math Sci*. 2024;286(1):1–13.
13. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. Bojarski–Meyers estimate for a solution to the Zaremba problem for Poisson’s equations with drift. *Sb. Math*. 2025;216(8):1021–1036.
14. Alkhutov Yu.A., Surnachev MD., Chechkin AG. On the Zaremba Problem for Inhomogeneous p -Laplace Equation with Drift. *Dokl. Math*. 2025;111(1):1–5.
15. Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. The Boyarsky–Meyers Inequality for Solutions to p -Elliptic Equation with Lower Order Terms and Dirichlet Boundary Condition. *J Math Sci*. 2025;291(4):433–440.
16. Aliyev MJ., Alkhutov Yu.A., Chechkin GA. Boyarsky–Meyers Estimate of the Solution to the Dirichlet Problem for a Second-Order Linear Elliptic Equation with Divergent Drift. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2026;66(8):1445–1451. (In Russ.)
17. Chicco M. An a priori inequality concerning elliptic second order partial differential equations of variational type. *Matematiche (Catania)*. 1971;26(1):173–182.
18. Gilbarg D., Trudinger NS. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order Second Edition. New York (NY)–Berlin–Heidelberg–London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barcelona–Budapest: Springer-Verlag; 1983. (In Russ.)
19. Lax PD., Milgram A. Parabolic equations, in Contributions to the Theory of Partial Differential Equations. *Ann. Math. Studies*. Princeton University Press: Princeton, 33. 1954:167–190.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.06.2026

Поступила после рецензирования 10.07.2026

Принята к публикации 14.07.2026

Received June 1, 2026

Revised July 10, 2026

Accepted July 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Алхутов Юрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физико-математического образования и информационных технологий (ФМОиИТ), Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Россия

Чечкин Григорий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Yurij A. Alkhutov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Physics and Mathematics Education and Information Technologies (FMOiIT), A. G. and N. G. Stoletov Vladimir State University, Vladimir, Russia

Gregory A. Chechkin – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[К содержанию](#)

Аналог теоремы Штейнгауза для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе

Григорьева Е. И. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Пенкиным О. М.)

Воронежский государственный университет,
Россия, 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1
elenabiryukova2010@yandex.ru

Аннотация. В работе установлена равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ — ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка с инволюцией, заданного на простейшем графе из двух ребер с циклом.

Ключевые слова: функционально-дифференциальный оператор, инволюция, краевая задача, резольвента

Для цитирования: Григорьева Е.И. Аналог теоремы Штейнгауза для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):277–290.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-277-290EDN

Original Research

An Analogue of the Steinhaus Theorem for a Functional-Differential Operator with Involution on a Graph

Elena I. Grigorieva 

(Article submitted by a member of the editorial board Penkin O. M.)

Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russia
elenabiryukova2010@yandex.ru

Abstract. The paper establishes the equiconvergence of the series $S(af)$ and $a(x)S(f)$, where $S(f)$ is the Fourier series in terms of eigenfunctions and associated functions of a first-order functional-differential operator with involution defined on a simple graph consisting of two edges with a cycle.

Keywords: Functional Differential Operator, Involution, Boundary Value Problem, Resolvent

For citation: Grigorieva EI. An Analogue of the Steinhaus Theorem for a Functional-Differential Operator with Involution on a Graph. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):277–290. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-277-290 EDN

1. Введение. В исследовании тригонометрических рядов широко применяется теорема равносходимости Штейнгауза, устанавливающая асимптотическую близость в равномерной метрике ряда от произведения двух функций и ряда от одной из них, умноженного на вторую [1]. Представляет интерес перенос этого классического результата на ряды, полученные при разложении по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов. Развитие данного направления в трудах В. А. Ильина, А. П. Хромова и их последователей показало, что стремление к нулю разности вида $S_n(af) - aS_n(f)$ для частичных сумм таких разложений справедливо в случае различных операторов, в том числе несамосопряженных [2, 3, 4, 5].

В работе [4] получен аналог теоремы Штейнгауза в случае функционально-дифференциального оператора (ФДО) первого порядка с инволюцией, определяемого дифференциальным выражением вида

$$l[y](x) = \alpha y'(x) + \beta y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x).$$

Наличие нелокальных возмущений (типа «отражения») существенно усложняет асимптотическое поведение спектра и меняет базисные свойства систем собственных и присоединенных функций (с. п. ф.). Исследования спектральных свойств таких операторов проводились в работах [6, 7, 8, 9].

В данной работе устанавливается равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ — ряд Фурье по с. п. ф. ФДО с инволюцией, заданного на графе из двух ребер, одно из которых представляет собой цикл. При обобщении задач на случай геометрического графа исследование различных вопросов сталкивается с трудностями, связанными с наличием внутренних узлов (вершин сопряжения ребер) графа, что приводит к определенной неоднородности («ветвлению») среды. Граф рассматриваемого вида является простейшим

графом, для которого можно сформулировать краевую задачу первого порядка с регулярными краевыми условиями [10].

Равносходимость рядов доказывается методом контурного интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам λ -плоскости, который широко используется при исследовании спектральных свойств ФДО [6, 11]. Для этого осуществляется переход к оператору Дирака, связанному с рассматриваемым ФДО.

Результаты данной работы существенно усиливают теоремы равносходимости из [12], снимая требование равенства нулю средних значений потенциалов. Приведенная техника и оценки резольвенты могут быть использованы для обобщения результатов из [10] на случай более сложного асимптотического поведения спектра.

2. Определение функционально-дифференциального оператора и связанных с ним краевых задач. В работе используются обозначения для рассматриваемых операторов и краевых задач из [10]. В данном пункте приводятся необходимые результаты из [10], а также вспомогательные результаты, получаемые аналогичным образом. Также в пункте 3 приводятся леммы 3.1 и 3.2, полученные соответственно в [10] и [12].

Рассматривается ФДО L в пространстве вектор-функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ (T — знак транспонирования), заданный на графе $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. Ребро γ_1 представляет собой цикл, ребро γ_2 примыкает к γ_1 . Оператор L имеет вид

$$Ly = \begin{pmatrix} \alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) + p_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) + p_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \quad (2)$$

Здесь предполагается, что $x \in [0, 1]$, α_k, β_k — комплексные числа, $k = \overline{1, 2}$, $\beta_k^2 - \alpha_k^2 \neq 0$, $\beta_k \neq 0$, $p_{i,j} \in C^1[0, 1]$.

Обозначим через $\tilde{L}$ следующий оператор в пространстве вектор-функций размерности 4:

$$\tilde{L}z = Qz'(x) + P(x)z(x), \quad (3)$$

$$M_0z(0) + M_1z(1) = 0, \quad (4)$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $Q = \text{diag}(Q_1, Q_2)$, $P(x) = \text{diag}(P_1(x), P_2(x))$, $Q_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\beta_k \\ \beta_k & -\alpha_k \end{pmatrix}$, $P_k(x) = \begin{pmatrix} p_{k1}(x) & p_{k2}(x) \\ p_{k2}(1-x) & p_{k1}(1-x) \end{pmatrix}$, $k = \overline{1, 2}$; M_0, M_1 — квадратные матрицы размерности 4, причем $(M_0)_{11} = (M_0)_{31} = -(M_0)_{12} = -(M_0)_{33} = 1$, $(M_1)_{21} = (M_1)_{42} = -(M_1)_{22} = -(M_1)_{44} = 1$, остальные элементы этих матриц $(M_k)_{ij} = 0$.

Теорема 2.1 [10]. Если комплексное число λ таково, что резольвента R_λ оператора L существует и $y(x) = R_\lambda f$, то вектор-функция $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, где $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_1(1-x)$, $z_3(x) = y_2(x)$, $z_4(x) = y_2(1-x)$, является решением (3)–(4). Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (3)–(4), и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то R_λ существует и $(R_\lambda f)(x) = (z_1(x), z_3(x))^T$.

Пусть $z(x) = z(x, \lambda) = \tilde{R}_\lambda F$ (в дальнейшем для краткости аргумент λ в обозначении решений различных задач будем опускать). Тогда $z(x)$ удовлетворяет задаче:

$$Qz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x) + F(x), \quad (5)$$

$$M_0z(0) + M_1z(1) = 0, \quad (6)$$

где λ — спектральный параметр.

Лемма 2.1 [10]. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $z(x) = BH(x, \lambda)v(x)$ приводит краевую задачу (5)–(6) к виду

$$v'(x) + P_\lambda(x)v(x) = \lambda Dv(x) + m(x, \lambda), \quad (7)$$

$$U_1(v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \quad (8)$$

где $B = \text{diag}(B_1, B_2)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$, $b_k = \beta_k^{-1}[i\sqrt{d_k} + \alpha_k]$ ($k = 1, 2$), $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$, $D = \text{diag}(D_1, D_2)$, $D_k = \text{diag}(i/\sqrt{d_k}, -i/\sqrt{d_k})$, $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, $H_0(x) = \text{diag}(H_{01}(x), H_{02}(x))$, $H_{01} = \text{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02} = \text{diag}(h_3(x), h_4(x))$, $h_i(x) = \exp\left\{-\int_0^x \tilde{p}_{ii}(t) dt\right\}$, $\tilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\tilde{P}(x)$ ($i = \overline{1, 4}$), $\tilde{P}(x) = \text{diag}(\tilde{P}_1(x), \tilde{P}_2(x))$, $\tilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$, $H_1(x) = \text{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x))$, H_{1k} — кодиагональные матрицы, представляющие собой единственные решения матричных уравнений $H'_{0k}(x) + \tilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_kH_{1k}(x)) = 0$,

$$P_\lambda(x) = \lambda^{-1} H^{-1}(x, \lambda) [H'_1(x) + \tilde{P}(x) H_1(x)], \quad m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda) D B^{-1} F(x), \\ M_{0\lambda} = M_0 B H(0, \lambda), \quad M_{1\lambda} = M_1 B H(1, \lambda).$$

3. Исследование вспомогательных краевых задач. Исследуем решение вспомогательной задачи

$$w'(x) - \mu \tilde{D} w(x) = m(x), \quad (9)$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda} w(0) + M_{1\lambda} w(1) = 0, \quad (10)$$

где $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$),
 $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1, d, -d)$, $d = \sqrt{d_1/d_2}$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, то есть $\lambda D = \mu \tilde{D}$.

Лемма 3.1 [10]. Если комплексное число μ таково, что матрица $\Delta_1(\mu) = U_1(V(x, \mu))$, где $V(x, \mu) = \text{diag}(e^{-\mu(1-x)}, e^{-\mu x}, e^{-\mu d(1-x)}, e^{-\mu d x})$ обратима, то краевая задача (9)–(10) однозначно разрешима при любой вектор-функции $m(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$, и ее решение имеет вид

$$w(x) = R_{1\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_1^{-1}(\mu) U_1(g_\mu m) + g_\mu m(x),$$

$$\text{где } g_\mu m(x) = \int_0^1 g(x, t, \mu) m(t) dt, \quad U_1(g_\mu m) = \int_0^1 U_{1x}(g(x, t, \mu)) m(t) dt,$$

(U_{1x} означает, что U_1 применяется к g по переменной x),

$$g(x, t, \mu) = \text{diag}(g_1(x, t, \mu), g_2(x, t, \mu), g_3(x, t, \mu), g_4(x, t, \mu)),$$

$$g_k(x, t, \mu) = \varepsilon(x, t) e^{\mu \omega_k(x-t)}, \text{ если } \text{Re}(\mu \omega_k) \leq 0,$$

$$g_k(x, t, \mu) = -\varepsilon(x, t) e^{\mu \omega_k(x-t)}, \text{ если } \text{Re}(\mu \omega_k) \geq 0, \quad (k = \overline{1, 4}),$$

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = -1, \omega_3 = d, \omega_4 = -d, \varepsilon(x, t) = 1 \text{ при } x \geq t, \varepsilon(x, t) = 0 \text{ при } x < t.$$

Рассмотрим также краевую задачу

$$w'(x) - \mu \tilde{D} w(x) = m(x), \quad (11)$$

$$U_0(w) = M_0 B H_0(0) w(0) + M_1 B H_0(1) w(1) = 0. \quad (12)$$

Лемма 3.2 [12]. Если комплексное число μ таково, что матрица $\Delta_0(\mu) = U_0(V(x, \mu))$ обратима, то краевая задача (11)–(12) однозначно разрешима при любой вектор-функции $m(x)$ с компонентами из пространства $L[0, 1]$, и ее решение имеет вид

$$w(x) = R_{0\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m) + g_\mu m(x), \quad (13)$$

где $U_0(g_\mu m) = \int_0^1 U_{0x}(g(x, t, \mu)) m(t) dt$, (U_{0x} означает, что U_0 применяется к g по переменной x), $g_\mu m(x)$ и $V(x, \mu)$ имеют вид как в лемме 3.1.

Непосредственно вычисляя элементы матрицы $\Delta_0(\mu)$, получим корни определителя $\det \Delta_0(\mu)$:

$$\mu_k = k\pi i + \frac{i}{\sqrt{d_1}} \int_0^1 p_{11}(t) dt$$

и

$$\mu_k = -\frac{\ln b_2}{d} + \frac{i\pi k}{d} + \frac{i}{\sqrt{d_1}} \int_0^1 p_{21}(t) dt,$$

где k — целые числа. Удалив из комплексной μ -плоскости эти корни с круговыми окрестностями достаточно малого радиуса δ , получим область, которую назовем S_δ .

Исходя из лемм 3.1, 3.2 можно получить, что в области S_δ справедливы следующие оценки для решений задач (9)–(10) и (11)–(12):

$$\|R_{0\mu} m\|_\infty = O(\|m\|_1), \quad \|R_{0\mu} \varphi\|_\infty = O(\mu^{-1}), \quad (14)$$

$$\|R_{1\mu} m - R_{0\mu} m\|_\infty = O(\mu^{-1} \|m\|_1), \quad \|R_{1\mu} \varphi - R_{0\mu} \varphi\|_\infty = O(\mu^{-2}), \quad (15)$$

где $\varphi(x)$ — вектор-функция, компоненты которой — функции ограниченной вариации, $m(x)$ — вектор-функция с компонентами из $L[0, 1]$, $\|\cdot\|_\infty$ ($\|\cdot\|_1$) — норма в пространстве вектор-функций размерности 4 с компонентами из $L_\infty[0, 1]$ ($L[0, 1]$).

В [10] получено, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} H(x, \lambda) [v(x, \lambda, H^{-1}F_1) - R_{1\mu}(H_0^{-1}F_1)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0, \quad (16)$$

где $F_1(x) = DB^{-1}F(x)$, $v(x, \lambda, H^{-1}F_1)$ — решение задачи (7)–(8) при $m(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)F_1(x)$.

Используя оценки (14) – (15), по теореме Банаха – Штейнгауза получим, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)R_{1\mu}(H_0^{-1}F_1) - H_0R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, из (16) и (17) следует

Лемма 3.3. Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, компоненты которой $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$), имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}(x, \lambda)m) - H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}m)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \quad (18)$$

Для решения (13) краевой задачи (11)–(12) докажем соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0,$$

где $Q(x) = \text{diag}(q_1(x), q_1(1-x), q_2(x), q_2(1-x))$, функции $q_1(x), q_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1 и $q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1) = 1$, $m(x)$ — вектор-функция размерности 4, компоненты которой принадлежат пространству $L[0, 1]$.

Лемма 3.4. Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, компоненты которой $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$), имеет место оценка:

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)] d\lambda \right\|_{\infty} = O(\|m\|_1). \quad (19)$$

Доказательство. Для первой компоненты вектора в условии леммы, учитывая, что $\mu = \lambda i / \sqrt{d_1}$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1 d\lambda \right| &\leq |\sqrt{d_1}| \int_{|\mu|=r_1} |[Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1| |d\mu| = \\ &= |\sqrt{d_1}| \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right\} |[Q(x)g_{\mu}m - g_{\mu}(Qm)]_1| r_1 d\varphi, \end{aligned} \quad (20)$$

где $r_1 = r/|\sqrt{d_1}|$, $[]_1$ обозначает первую компоненту вектора.

Пусть $\text{Re } \mu \geq 0$. В этом случае

$$[g_{\mu}m]_1 = - \int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t) dt,$$

и первый интеграл в (20) имеет следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_1 d\varphi \left| \int_x^1 e^{\mu(x-t)} (q_1(t) - q_1(x)) m_1(t) dt \right| &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-\text{Re } \mu(t-x)} |q_1(t) - q_1(x)| d\varphi \right) = \\ &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-r_1 \cos \varphi(t-x)} |t-x| d\varphi \right) = O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-r_1 \sin \tau(t-x)} (t-x) d\tau \right) = \\ &= O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} r_1 e^{-r_1 c_1 \tau(t-x)} (t-x) d\tau \right) = O \left(\int_x^1 |m_1(t)| dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-c_1 \xi} d\xi \right) = \\ &= O \left(\int_0^1 |m_1(t)| dt \right) = O(\|m\|_1). \end{aligned}$$

Здесь использовано, что $|q_1(t) - q_1(x)| \leq L|t - x|$, где $L > 0$ — некоторое число, $|e^\mu| = e^{\operatorname{Re} \mu}$, $\operatorname{Re} \mu = r_1 \cos \varphi$, $t \geq x$ в заданных пределах интегрирования, функция $e^{-r_1 \cos \varphi(t-x)}$ четная по переменной φ , $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in (0, \pi/2)$, где c_1 — некоторая константа ($0 < c_1 < 2/\pi$). Произведены замены: $\varphi = \pi/2 - \tau$ и $\xi = r_1(t - x)\tau$.

Аналогично выполняется оценка второго интеграла в (20) при $\operatorname{Re} \mu \leq 0$ и остальных компонент вектора из условия леммы. При этом при оценке третьей и четвертой компонент вектора производится замена $\eta = \mu d$, и интеграл вычисляется по круговому контуру $|\eta| = r_1|d|$. $\square$

Непосредственно вычисляя элементы матриц в (13), получим

Лемма 3.5. Для любой вектор-функции $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$, $m_k(x) \in L[0, 1]$ ($k = \overline{1, 4}$), для компонент вектора

$$\Omega(x, \mu) = Q(x)V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu m) - V(x, \mu)\Delta_0^{-1}(\mu)U_0(g_\mu(Qm))$$

имеет место представление

$$\Omega_k(x, \mu) = \sum_{l=1}^4 J_{kl}(x, \mu),$$

где $k = \overline{1, 4}$, $l = \overline{1, 4}$ и

$$\left| \int_{|\mu|=r_1} J_{kl}(x, \mu) d\mu \right| = O(\|m\|_1). \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} \mu \geq 0$, $\operatorname{Re}(\mu d) \geq 0$, тогда

$$\begin{aligned} J_{11}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{11}e^{\mu(x-1)} \int_0^1 e^{-\mu t}(q_1(x) - q_1(t))m_1(t)dt, \\ J_{12}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{12}e^{\mu(x-1)}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_1(x) - q_1(1-t))m_2(t)dt, \\ J_{21}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{21}e^{-\mu x} \int_0^1 e^{-\mu t}m_1(t)(q_1(1-x) - q_1(t))dt, \\ J_{22}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{22}e^{-\mu x}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_1(1-x) - q_1(1-t))m_2(t)dt, \\ J_{31}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{31}e^{\mu d(x-1)} \int_0^1 e^{-\mu t}(q_2(x) - q_1(t))m_1(t)dt, \\ J_{32}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{32}e^{\mu d(x-1)}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(x) - q_1(1-t))m_2(t)dt, \\ J_{33}(x, \mu) &= x_{33}e^{\mu d(x-1)} \left(\int_0^1 e^{-\mu dt}(q_2(x) - q_2(t))m_3(t)dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 e^{-\mu t}(q_1(t) - q_2(x))m_1(t)dt \right), \\ J_{34}(x, \mu) &= x_{34}e^{\mu d(x-1)} \left(h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(x) - q_1(1-t))m_2(t)dt - \right. \\ &\quad \left. - h_4(1) \int_0^1 e^{-\mu d(1-t)}(q_2(x) - q_2(1-t))m_4(t)dt \right), \\ J_{41}(x, \mu) &= (b_1 - 1)x_{41}e^{-\mu dx} \int_0^1 e^{-\mu t}(q_2(1-x) - q_1(t))m_1(t)dt, \end{aligned}$$

$$J_{42}(x, \mu) = (b_1 - 1)x_{42}e^{-\mu dx}h_2(1) \int_0^1 e^{-\mu(1-t)}(q_2(1-x) - q_1(1-t))m_2(t)dt,$$

$$J_{43}(x, \mu) = x_{43}e^{-\mu dx} \left(\int_0^1 e^{-\mu t} (q_2(1-x) - q_2(t))m_3(t)dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 e^{-\mu t} (q_1(t) - q_2(1-x))m_1(t)dt \right),$$

$$J_{44}(x, \mu) = x_{44}e^{-\mu dx} \left(h_2(1) \int_0^1 e^{\mu(t-1)}(q_2(1-x) - q_1(1-t))m_2(t)dt - \right. \\ \left. - h_4(1) \int_0^1 e^{\mu d(t-1)}(q_2(1-x) - q_2(1-t))m_4(t)dt \right),$$

$$J_{13}(x, \mu) = J_{14}(x, \mu) = J_{23}(x, \mu) = J_{24}(x, \mu) = 0,$$

где x_{ij} — элементы матрицы $\Delta_0^{-1}(\mu)$ (их оценки, полученные непосредственным вычислением, приведены в [12]), $h_k(1)$ — диагональные элементы матрицы $H_0(1)$.

Продолжим функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ периодически с периодом 1 на всю действительную ось. Так как $q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1)$, полученные периодические функции непрерывны и удовлетворяют условию Липшица первого порядка.

1. Докажем (21) для $J_{11}(x, \mu)$. Имеем

$$\left| \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} J_{11}(x, \mu) d\mu \right| \leq |b_1 - 1| \int_0^1 |m_1(t)| dt \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{11}| |q_1(x) - q_1(t)| |e^{-\mu(t+1-x)}| |d\mu|.$$

Так как $q_1(x)$ — периодическая функция с периодом 1, то $q_1(t) = q_1(2+t)$. Отсюда и из того, что $q_1(x)$ удовлетворяет условию Липшица первого порядка, получим

$$|q_1(x) - q_1(t)| = |q_1(x) - q_1(2+t)| \leq L|x - 2 - t| = L(2+t-x),$$

так как $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq x \leq 1$. $L > 0$ — константа. Тогда, используя оценки для компонент матрицы $\Delta_0^{-1}(\mu)$, где $x_{11} = O(e^{-\mu})$, замену $\varphi = \pi/2 - \tau$, неравенство $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in [0, \pi/2]$ (c_1 — константа, $0 < c_1 < 2/\pi$) и замену $\xi = r_1(2+t-x)\tau$, получим

$$\int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{11}| |q_1(x) - q_1(t)| |e^{-\mu(t+1-x)}| |d\mu| = O \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\operatorname{Re} \mu(2+t-x)} (2+t-x)r_1 d\varphi \right) = \\ = O \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi(2+t-x)} (2+t-x)r_1 d\varphi \right) = O \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 c_1 \tau(2+t-x)} (2+t-x)r_1 d\tau \right) = \\ = O \left(\int_0^{r_1(2+t-x)\pi/2} e^{-c_1 \xi} d\xi \right) = O(1).$$

Откуда следует (21) для $k = 1, l = 1$.

2. Докажем (21) для $J_{31}(x, \mu)$. Имеем

$$\left| \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} J_{31}(x, \mu) d\mu \right| \leq |b_1 - 1| \int_0^1 |m_1(t)| dt \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{31}| |q_2(x) - q_1(t)| |e^{-\mu(d(1-x)+t)}| |d\mu|.$$

Так как $q_1(x)$ и $q_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица первого порядка, периодичны с периодом 1, и $q_2(1) = q_1(0)$,

$$|q_2(x) - q_1(t)| = |q_2(x) - q_2(2) + q_1(0) - q_1(t)| \leq |q_2(x) - q_2(2)| + |q_1(0) - q_1(t)| \leq \\ \leq L_1|x - 2| + L_2| - t| \leq L(2 - x + t),$$

где $L_1, L_2, L = \max\{L_1, L_2\}$ – положительные константы.

Пусть $\operatorname{Re} \mu \leq \operatorname{Re}(\mu d)$, тогда $x_{31} = O(e^{-\mu})$ и

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{31}| |q_2(x) - q_1(t)| |e^{-\mu d(1-x) - \mu t}| |d\mu| &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re}(\mu d)(1-x) - \operatorname{Re} \mu(t+1)} |q_2(x) - q_1(t)| |d\mu| \leq \\ &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re} \mu(2+t-x)} (2+t-x) |d\mu|, \end{aligned}$$

где $M > 0$ – некоторые константы, в разных неравенствах разные. Полученный интеграл оценивается так же, как интеграл в пункте 1 данного доказательства.

Пусть $\operatorname{Re} \mu \geq \operatorname{Re}(\mu d)$, тогда $x_{31} = O(e^{-\mu d})$ и

$$\begin{aligned} \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} |x_{31}| |q_2(x) - q_1(t)| |e^{-\mu d(1-x) - \mu t}| |d\mu| &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re}(\mu d)(2-x) - \operatorname{Re} \mu t} |q_2(x) - q_1(t)| |d\mu| \leq \\ &\leq M \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\operatorname{Re}(\mu d)(2+t-x)} (2+t-x) |d\mu|, \end{aligned}$$

где $M > 0$ – некоторые константы, в разных неравенствах разные. Полученный интеграл после замены $\eta = \mu d$ оценивается так же, как интеграл в пункте 1 данного доказательства. Откуда следует справедливость (21) для $k = 3, l = 1$.

Аналогично доказывается (21) для остальных подынтегральных выражений $J_{kl}(x, \mu)$, а также для случаев, когда или одна, или обе действительные части $\operatorname{Re}(\mu)$ и $\operatorname{Re}(\mu d)$ меньше нуля. $\square$

С учетом лемм 3.4 и 3.5 так же как в [13] доказывается

Теорема 3.1. Если матрица $Q(x) = \operatorname{diag}(q_1(x), q_1(1-x), q_2(x), q_2(1-x))$ такова, что функции $q_1(x), q_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1 и $q_1(0) = q_1(1) = q_2(0) = q_2(1) = 1, b_1 \neq 1, b_2 \neq 0$, то для любой вектор-функции $t(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [Q(x)R_{0\mu}m - R_{0\mu}(Qm)] d\lambda \right\|_{\infty} = 0. \quad (22)$$

4. Основные результаты.

Теорема 4.1. Пусть $A(x) = \operatorname{diag}(a_1(x), a_1(1-x), a_2(x), a_2(1-x))$, $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1)$, $a_1(x), a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $G(x) = BA(x)B^{-1}$, $\beta_k^2 \neq \alpha_k^2, \beta_k \neq 0$ ($k = \overline{1, 2}$). Тогда для любой вектор-функции $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x), f_2(1-x))^T$ с компонентами из $L[0, 1]$ выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|G(x)\tilde{S}_r(F, x) - \tilde{S}_r(GF, x)\|_{\infty} = 0, \quad (23)$$

где $\tilde{S}_r(F, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_{\lambda} F d\lambda$ – частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $F(x)$ по собственным и

присоединенным функциям оператора $\tilde{L}$, включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$.

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\int_0^1 p_{11}(t)dt = \int_0^1 p_{21}(t)dt = 0$. Тогда для компонент матрицы $H_0(x) = \operatorname{diag}(h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x))$ выполнены условия $h_k(0) = h_k(1) = 1$ ($k = \overline{1, 4}$). Функции $h_k(x) \in C^1[0, 1]$ и удовлетворяют условию Липшица порядка 1. Поэтому в (22) в качестве $Q(x)$ можно взять $H_0(x)$. Тогда, используя леммы 2.1, 3.3 и теорему 3.1, получим

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_{\lambda} F d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} BH(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}(x, \lambda)F_1) d\lambda = \int_{|\lambda|=r} BH_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} BR_{0\mu}(H_0H_0^{-1}F_1) d\lambda + o(1), \end{aligned}$$

где $\|o(1)\|_\infty \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $F_1(x) = DB^{-1}F(x)$. Таким образом, имеем

$$\int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} BR_{0\mu}(F_1) d\lambda + o(1). \quad (24)$$

Пусть $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1) = c$, где c — константа, и $A(x) = cA_1(x)$. Тогда $A_1(x)$ — диагональная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы 3.1, и в силу перестановочности диагональных матриц $A(x)$ и D получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{|\lambda|=r} A(x)R_{0\mu}(F_1) d\lambda &= \int_{|\lambda|=r} cR_{0\mu}(A_1F_1) d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(ADB^{-1}F) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DAB^{-1}F) d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}BAB^{-1}F) d\lambda + o(1). \end{aligned}$$

То есть при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{|\lambda|=r} A(x)R_{0\mu}(F_1) d\lambda = \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}GF) d\lambda + o(1). \quad (25)$$

Из (24) и (25) получим

$$G(x) \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F d\lambda = BA(x) \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(F_1) d\lambda + o(1) = B \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}GF) d\lambda + o(1). \quad (26)$$

Положим $\Phi(x) = G(x)F(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x))^T$. Нетрудно проверить инвариантность свойства симметрии компонент для функции $\Phi(x)$: $\varphi_2(x) = \varphi_1(1-x)$ и $\varphi_4(x) = \varphi_3(1-x)$. Поэтому из (26), используя предыдущие рассуждения в обратном порядке, получим

$$\begin{aligned} G(x) \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda F d\lambda &= B \int_{|\lambda|=r} R_{0\mu}(DB^{-1}\Phi) d\lambda + o(1) = \\ &= B \int_{|\lambda|=r} H_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}DB^{-1}\Phi) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} BH(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}(x, \lambda)DB^{-1}\Phi) d\lambda + o(1) = \\ &= \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda \Phi d\lambda + o(1) = \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda (GF) d\lambda + o(1) \end{aligned}$$

при $r \rightarrow \infty$. Откуда следует (23).

2. Пусть теперь $\int_0^1 p_{11}(t)dt = a_1 \neq 0$, $\int_0^1 p_{21}(t)dt = a_2 \neq 0$. Контуры интегрирования в (23) лежат в области $\widetilde{S}_{\delta_0}$,

образованной из комплексной λ -плоскости удалением чисел $\lambda_k = k\pi\sqrt{a_1} + a_1$ и

$\lambda_k = k\pi\sqrt{a_2} + i\sqrt{a_2} \ln b_2 + a_2$ (k — целое число) вместе с их окрестностями достаточно малого радиуса δ_0 .

Рассмотрим оператор

$$L_1 y = \begin{pmatrix} \alpha_1 y'_1(x) + \beta_1 y'_1(1-x) + \widetilde{p}_{11}(x)y_1(x) + p_{12}(x)y_1(1-x) \\ \alpha_2 y'_2(x) + \beta_2 y'_2(1-x) + \widetilde{p}_{21}(x)y_2(x) + p_{22}(x)y_2(1-x) \end{pmatrix},$$

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0),$$

где $\widetilde{p}_{11}(x) = p_{11}(x) - a_1$, $\widetilde{p}_{21}(x) = p_{21}(x) - a_2$, который порождает оператор

$$\widetilde{L}_1 z = Qz'(x) + \widetilde{P}_1(x)z(x), \quad M_0 z(0) + M_1 z(1) = 0.$$

В $\widetilde{L}_1$ матрица $\widetilde{P}_1(x)$ определяется через $\widetilde{p}_{11}(x)$, $p_{12}(x)$, $\widetilde{p}_{21}(x)$, $p_{22}(x)$ так же, как $P(x)$ в (3), матрица Q такая же, как в операторе $\widetilde{L}$.

Пусть $\widetilde{R}_\lambda^1$ — резольвента оператора $\widetilde{L}_1$. Тогда $\int_0^1 \widetilde{p}_{11}(x)dx = \int_0^1 \widetilde{p}_{21}(x)dx = 0$, и по уже доказанному

$$G(x) \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda^1 F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \widetilde{R}_\lambda^1 (GF) d\lambda + o(1). \quad (27)$$

В (27) интегрирование ведется по круговым контурам, целиком лежащим в области S_{δ_1} , образованной удалением из комплексной плоскости точек $\lambda_k = k\pi\sqrt{d_1}$ и $\lambda_k = k\pi\sqrt{d_2} + i \ln b_2\sqrt{d_2}$ (k – целое число) вместе с их окрестностями достаточно малого радиуса δ_1 .

В области $\tilde{S}_\delta = \tilde{S}_{\delta_0} \cap S_{\delta_1}$ справедлива формула:

$$(\tilde{R}_\lambda - \tilde{R}_\lambda^1)F = \tilde{R}_\lambda^1(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda F.$$

Из (18) следует, что

$$\tilde{R}_\lambda F = BH(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}DB^{-1}F) = BH_0(x)R_{0\mu}(H_0^{-1}DB^{-1}F) + o(1).$$

Отсюда, учитывая оценки (14)–(15), для резольвенты оператора $\tilde{L}$ и аналогично для резольвенты оператора $\tilde{L}_1$ получаем

$$\|\tilde{R}_\lambda F\|_\infty = O(\|F\|_1), \quad \|\tilde{R}_\lambda^1 F\|_\infty = O(\|F\|_1).$$

Оператор $(\tilde{L}_1 - \tilde{L})$ представляет собой покомпонентное умножение функции $z(x)$ на скалярные величины, следовательно, для любой вектор-функции $F(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\begin{aligned} \|\tilde{R}_\lambda F - \tilde{R}_\lambda^1 F\|_\infty &= \|\tilde{R}_\lambda^1(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda F\|_\infty = O(\|(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda F\|_\infty) = \\ &= O(\|\tilde{R}_\lambda F\|_\infty) = O(\|F\|_1). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi(x)$ – вектор-функция, компоненты которой являются функциями ограниченной вариации. Учитывая оценки (14)–(15), для резольвент операторов $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_1$ доказываются формулы:

$$\|\tilde{R}_\lambda \varphi\|_\infty = O(\lambda^{-1}), \quad \|\tilde{R}_\lambda^1 \varphi\|_\infty = O(\lambda^{-1}).$$

Следовательно,

$$\|\tilde{R}_\lambda \varphi - \tilde{R}_\lambda^1 \varphi\|_\infty = \|\tilde{R}_\lambda^1(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda \varphi\|_\infty = O(\lambda^{-1}\|(\tilde{L}_1 - \tilde{L})\tilde{R}_\lambda \varphi\|_\infty) = O(\lambda^{-2}).$$

Тогда

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda \varphi - \tilde{R}_\lambda^1 \varphi] d\lambda \right\|_\infty \leq M_1 \int_{|\lambda|=r} \left| \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right| \leq \frac{M_2}{r},$$

где $M_1 > 0, M_2 > 0$ – некоторые числа. Следовательно,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda \varphi - \tilde{R}_\lambda^1 \varphi] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

Так как множество функций ограниченной вариации всюду плотно в $L[0, 1]$, по теореме Банаха – Штейнгауза для любой вектор-функции $F(x)$ с компонентами из $L[0, 1]$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} [\tilde{R}_\lambda F - \tilde{R}_\lambda^1 F] d\lambda \right\|_\infty = 0. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует соотношение (23) для $\tilde{R}_\lambda F$. $\square$

Теорема 4.2. Пусть $a(x) = \text{diag}(a_1(x), a_2(x))$, где $a_1(x), a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $a_1(x) = a_1(1-x)$, $a_2(x) = a_2(1-x)$, $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1)$, $\beta_k^2 \neq \alpha_k^2$, $\beta_k \neq 0$ ($k = \overline{1, 2}$), $p_{ij} \in C^1[0, 1]$ ($i, j = \overline{1, 2}$). Тогда для любой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x)S_r(f, x) - S_r(af, x)\|_\infty = 0, \quad (29)$$

где $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ – частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$.

Доказательство. Имеем $[R_\lambda f]_1 = [\tilde{R}_\lambda F]_1$, $[R_\lambda f]_2 = [\tilde{R}_\lambda F]_3$, где $F(x) = (f_1(x), f_1(1-x), f_2(x), f_2(1-x))^T$. Положим $A(x) = \text{diag}(a_1(x), a_1(1-x), a_2(x), a_2(1-x))$, тогда, перемножив матрицы в теореме 4.1, получим $G(x) = BA(x)B^{-1} = A(x) = \tilde{A}(x)$, где $\tilde{A}(x) = \text{diag}(a_1(x), a_1(x), a_2(x), a_2(x))$ (так как $a_1(x) = a_1(1-x)$, $a_2(x) = a_2(1-x)$), и соотношение (23) принимает вид

$$\tilde{A}(x) \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F d\lambda = \int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda (\tilde{A}F) d\lambda + o(1). \quad (30)$$

Из (30), рассматривая первую и третью компоненты, получим соотношения:

$$a_1(x) \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda f]_1 d\lambda = \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda(af)]_1 d\lambda + o(1),$$

$$a_2(x) \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda f]_2 d\lambda = \int_{|\lambda|=r} [R_\lambda(af)]_2 d\lambda + o(1),$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Если потребовать от $a(x)$ только лишь условий классической теоремы Штейнгауза, то удастся доказать теорему о покомпонентной равносходимости на внутренних компактах ребер графа. Тем самым на внутренних участках ребер сохраняется классический характер сходимости, а влияние структуры узлов локализуется в их окрестностях. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$w'(x) = \mu \tilde{D} w(x) + m(x), \quad (31)$$

$$U^0(w) = w(0) - w(1) = 0, \quad (32)$$

где $\tilde{D} = \text{diag}(1, -1, d, -d)$, $m(x) = (m_1(x), m_2(x), m_3(x), m_4(x))^T$ — вектор-функция с компонентами из $L[0, 1]$.

Удалим из области S_δ вместе с круговыми окрестностями радиуса δ_0 собственные значения $\mu_k = \frac{2\pi i k}{\omega_j}$ (k — целые числа) краевых задач:

$$w'(x) = \mu \omega_j w(x), \quad w(0) - w(1) = 0 \quad (j = \overline{1, 4}),$$

где $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, и получившуюся область обозначим S_{δ_0} . Тогда в S_{δ_0} краевая задача (31)–(32) однозначно разрешима и ее решение имеет вид:

$$w(x, \mu) = R_{2\mu} m(x) = -V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) U^0(g_\mu m(x)) + g_\mu m(x), \quad (33)$$

где $\Delta_{00}^{-1}(\mu) = U^0(V(x, \mu))$, а $V(x, \mu)$ и $g_\mu m(x)$ те же, что и в лемме 3.1.

Лемма 4.1. *Имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0, \quad (34)$$

где $J(x, \mu) = R_{0\mu} m(x) - R_{2\mu} m(x)$, $r_{1,k} = \lambda i / \sqrt{d_k}$, $r_1 = \min |r_{1,k}|$, $\delta \in (0, 1/2)$, $\|\cdot\|_{C[\delta, 1-\delta]}$ — норма в пространстве вектор-функций, непрерывных на отрезке $[\delta, 1-\delta]$.

Доказательство. Из (13) и (33) известно, что

$$J(x, \mu) = V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) U^0(g_\mu m(x)) - V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m(x)) = J_1(x, \mu) + J_2(x, \mu),$$

где $J_1(x, \mu) = V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) U^0(g_\mu m(x))$, $J_2(x, \mu) = -V(x, \mu) \Delta_0^{-1}(\mu) U_0(g_\mu m(x))$.

1. Пусть $\text{Re } \mu \geq 0$, $d > 0$. Рассмотрим $J_1(x, \mu)$. Обозначим элементы матрицы $V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) = \{\gamma_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 4}$). Для элемента γ_{11} получим оценку $\gamma_{11} = O(e^{\mu(x-1)}) = O(e^{-\mu\delta}) = O(e^{-\mu\delta_1})$ ($\delta_1 = \min\{\delta, d\delta\}$). Аналогично можно показать, что все остальные компоненты этой матрицы имеют такую же оценку. Таким образом, получаем, что

$$V(x, \mu) \Delta_{00}^{-1}(\mu) = O(e^{-\mu\delta_1}). \quad (35)$$

Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} \|U^0(g_\mu m(x))\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left(\max_{1 \leq k \leq 4} \left| \int_0^1 g_k(0, t, \mu) m_k(t) dt - \int_0^1 g_k(1, t, \mu) m_k(t) dt \right| \right) = \\ &= O \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^4 |m_k(t)| dt \right) = O(\|m\|_1). \end{aligned}$$

Отсюда и из (35) получаем, что $\|J_1(x, \mu)\|_\infty = O(e^{-\mu\delta_1} \|m\|_1)$. Аналогично можно получить такую же оценку для $J_2(x, \mu)$. Таким образом, доказано, что при $\text{Re } \mu \geq 0$, $d > 0$

$$\|J(x, \mu)\|_\infty = O(e^{-\mu\delta_1} \|m\|_1). \quad (36)$$

Аналогичным образом можно показать, что при $\operatorname{Re} \mu \leq 0, d > 0$ будет выполняться оценка

$$\|J(x, \mu)\|_{\infty} = O(e^{\mu\delta_1} \|m\|_1). \quad (37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \int_{|\mu|=r_1} J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} &= O \left(\int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \geq 0}} e^{-\mu\delta_1} \|m\|_1 |d\mu| + \int_{\substack{|\mu|=r_1 \\ \operatorname{Re} \mu \leq 0}} e^{\mu\delta_1} \|m\|_1 |d\mu| \right) = \\ &= O \left(\|m\|_1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi \right) \right) = \\ &= O \left(\|m\|_1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi \right) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \cos \varphi \delta_1} r_1 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 \sin \tau \delta_1} r_1 d\tau \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r_1 c_1 \tau \delta_1} r_1 d\tau = O(1).$$

Здесь использованы: замена $\varphi = \pi/2 - \tau$, оценка $\sin \tau \geq c_1 \tau$ при $\tau \in (0, \pi/2)$, где c_1 — некоторая константа ($0 < c_1 < 2/\pi$). Такую же оценку можно получить и для второго интеграла. Таким образом, получаем, что

$$\left\| \int_{|\mu|=r_1} J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O(\|m\|_1). \quad (38)$$

В силу ограниченности $H_0(x)$ и (38) получаем, что

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 J(x, \mu) d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = O(\|m\|_1). \quad (39)$$

2. Пусть теперь компоненты $m_k(x) = \varphi_k(x)$ есть функции ограниченной вариации. Используя представление для $g_\mu m(x)$ из леммы 3.1 и интегрирование по частям, получим, что $\|U^0(g_\mu \varphi)\|_{\infty} = O(\mu^{-1})$. Аналогично выполняется и то, что $\|U_0(g_\mu \varphi)\|_{\infty} = O(\mu^{-1})$. Тогда отсюда и из (36), (37) получаем при $\operatorname{Re} \mu \geq 0, d > 0$

$$\|J(x, \mu)\|_{\infty} = O\left(\frac{e^{-\mu\delta_1}}{\mu}\right).$$

Аналогично, при $\operatorname{Re} \mu \leq 0, d > 0$

$$\|J(x, \mu)\|_{\infty} = O\left(\frac{e^{\mu\delta_1}}{\mu}\right).$$

Тогда, интегрируя по контуру $|\mu| = r_1$, получаем, что

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0 [R_{0\mu} \varphi(x) - R_{2\mu} \varphi(x)] d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0.$$

Отсюда и из (39) по теореме Банаха – Штейнгауза получаем утверждение леммы. $\square$

Теорема 4.3. Если $a(x) = \operatorname{diag}(a_1(x), a_2(x))$, $a_1(x), a_2(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, то для любой вектор-функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ с компонентами из $L[0, 1]$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|a(x) S_r(f, x) - S_r(af, x)\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0, \quad (40)$$

где $\delta \in (0; 1/2)$, $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda$ — частичная сумма ряда Фурье вектор-функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L , включающая слагаемые, соответствующие собственным значениям λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$.

Доказательство. С помощью лемм 3.3 и 4.1 нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}F_1) - H_0R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1)]d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \leq \\ & \leq \left\| \int_{|\lambda|=r} [H(x, \lambda)v(x, \lambda, H^{-1}F_1) - H_0R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1)]d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} + \\ & + \left\| \int_{|\lambda|=r} H_0R_{0\mu}(H_0^{-1}F_1) - H_0R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1)]d\lambda \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

так как $\left\| \int_{|\mu|=r_1} H_0J(x, \mu)d\mu \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Откуда следует, что

$$\int_{|\lambda|=r} \tilde{R}_\lambda F_1 d\lambda = \int_{|\lambda|=r} z(x) d\lambda = \int_{|\lambda|=r} BH_0R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1) d\lambda + o(1),$$

где $\|o(1)\|_{C[\delta, 1-\delta]} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $F_1(x) = B^{-1}Q^{-1}F(x)$, $\tilde{R}_\lambda$ — резольвента оператора $\tilde{L}$.

Согласно теореме 2.1 $R_\lambda f = (z_1(x), z_3(x))^T$, где $z_1(x)$ и $z_3(x)$ — компоненты вектора $z(x, \lambda)$ — решения задачи (5)–(6). Поэтому для первой компоненты $S_r(f, x)$, как в теореме 5 из [14], имеем:

$$(S_r(f, x))_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} z_1(x) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} [BH_0R_{2\mu}(H_0^{-1}F_1)]_1 d\lambda = \sigma_{r_1}(f_1, x) + o(1),$$

где $\sigma_{r_1}(f_1, x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f_1(x)$ по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, включающая слагаемые, для которых $|2\pi k| < r_1$, $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in [\delta, 1-\delta]$. Отсюда имеем для первой компоненты:

$$(S_r(f, x))_1 = \sigma_{r_1}(f_1, x) + o(1). \quad (41)$$

По теореме Штейнгауза [1] известно, что

$$a_1(x)\sigma_{r_1}(f_1, x) = \sigma_{r_1}(a_1f_1, x) + o(1).$$

Отсюда и из (41) имеем:

$$a_1(x)(S_r(f, x))_1 = a_1(x)\sigma_{r_1}(f_1, x) + o(1) = \sigma_{r_1}(a_1f_1, x) + o(1) = (S_r(af, x))_1 + o(1).$$

Аналогично можно показать, что $a_2(x)(S_r(f_2, x))_2 = (S_r(af, x))_2 + o(1)$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$

5. Заключение. В работе установлена равносходимость рядов $\tilde{S}(G(x)F)$ и $G(x)\tilde{S}(GF)$, где $\tilde{S}(F)$ — ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям функционально-дифференциального оператора $\tilde{L}$, заданного в пространстве вектор-функций размерности 4 и связанного с рассматриваемым ФДО L . Также установлена равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $S(f)$ — ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям ФДО L , а элементы $a_1(x)$ и $a_2(x)$ диагональной матрицы $a(x)$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1, $a_1(x) = a_1(1-x)$, $a_2(x) = a_2(1-x)$ и $a_1(0) = a_1(1) = a_2(0) = a_2(1)$. Наконец, доказан аналог теоремы Штейнгауза, а именно: равносходимость рядов $S(af)$ и $a(x)S(f)$, где $a(x)$ — диагональная матрица порядка 2, компоненты которой удовлетворяют условию Липшица порядка 1.

Список литературы

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз; 1961. 936 с.
2. Ильин В.А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора. *Математические заметки*. 1977;22(5):679–698.
3. Ломов И.С. Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2015;15(4):405–418. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418>
4. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Теорема Штейнгауза о равносходимости для функционально-дифференциальных операторов. *Математические заметки*. 2011;90(1):22–33. <https://doi.org/10.4213/mzm8628>
5. Рыхлов В.С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза. *Таврический вестник информатики и математики*. 2015;3(28):62–81. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26153987>
6. Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Луконина А.С., Хромов А.П. Функционально-дифференциальный оператор с инволюцией. *Доклады РАН*. 2007;414(4):443–446.

7. Baskakov A.G., Krishtal I.A., Romanova E.Yu. Spectral analysis of a differential operator with an involution. *Journal of Evolution Equations*. 2017;17:669–684. <https://doi.org/10.1007/s00028-016-0332-8>
8. Владыкина В.Е., Шкаликов А.А. Регулярные обыкновенные дифференциальные операторы с инволюцией. *Математические заметки*. 2019;106(5):643–659. <https://doi.org/10.4213/mzm12557>
9. Крицков Л.В., Сарсенби А.М. Спектральные свойства одной нелокальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией. *Дифференциальные уравнения*. 2015;51(7):990–996. <https://doi.org/10.1134/S0374064115080026>
10. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям функционально-дифференциального оператора первого порядка на графе из двух ребер, содержащем цикл. *Дифференциальные уравнения*. 2007;43(12):1597–1605. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-1-9-14>
11. Бурлуцкая М.Ш. Теорема Жордана – Дирихле для функционально-дифференциального оператора с инволюцией. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2013;13(3):9–14. DOI: 10.18500/1816-9791-2013-13-3-9-14
12. Григорьева Е.И. Теорема равносходимости для функционально-дифференциального оператора с инволюцией на графе. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2026;1:27–39.
13. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2009;9(4):3–10. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-3-10>
14. Бурлуцкая М.Ш. Теорема равносходимости для интегрального оператора на простейшем графе с циклом. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2008;8(4):8–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-4-8-13>

References

1. Bari NK. A treatise on trigonometric series. Oxford, New York: Pergamon Press; 1964. 553 p. (In Russ.)
2. Il'in VA. Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1977; 22: 870–882. <https://doi.org/10.1007/BF01098352> (In Russ.)
3. Lomov IS. Estimates of speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2015; 15(4): 405–418. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418> (In Russ.)
4. Burlutskaya MSh, Khromov AP. The Steinhaus theorem on equiconvergence for functional-differential operators. *Mathematical Notes*. 2011;90(1):22–33. <https://doi.org/10.1134/S0001434611070030> (In Russ.)
5. Rykhlov VS. On the rate of equiconvergence in an analogue of the Steinhaus theorem. *Tavricheskii vestnik informatiki i matematiki [Taurida journal of computer science theory and mathematics]*. 2015; 3(28): 62–81. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26153987>
6. Burlutskaya MSh, Kurdyumov VP, Lukonina AS, Khromov AP. Functional-differential operator with involution. *Dokl. Math.*. 2007;75(4):399–402. <https://doi.org/10.1134/S1064562407030180> (In Russ.)
7. Baskakov AG, Krishtal IA, Romanova EYu. Spectral analysis of a differential operator with an involution. *Journal of Evolution Equations*. 2017;17:669–684. <https://doi.org/10.1007/s00028-016-0332-8>
8. Vladykina VE, Shkalikov AA. Regular ordinary differential operators with involution. *Mathematical Notes*. 2019;106(5):674–687. <https://doi.org/10.1134/S0001434619110026> (In Russ.)
9. Kritskov LV, Sarsenbi AM. Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution. *Differential Equations*. 2015;51(7):984–990. <https://doi.org/10.1134/S0012266115080029> (In Russ.)
10. Burlutskaya MSh, Khromov AP. On the equiconvergence of eigenfunction expansions for a first-order functional-differential operator on a cycle-containing graph with two edges. *Differential Equations*. 2007;43(12): 1597–1605. <https://doi.org/10.1134/S0012266107120038> (In Russ.)
11. Burlutskaya MSh. Jordan–Dirichlet theorem for a functional-differential operator with involution. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2013;13(3):9–14. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2013-13-3-9-14> (In Russ.)
12. Grigoryeva EI. Equiconvergence theorem for a functional-differential operator with involution on a graph. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics.*. 2026;1:27–39. (In Russ.)
13. Burlutskaya MSh, Khromov AP. On the same theorem on a equiconvergence at the whole segment for the functional-differential operators. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2009;9(4):3–10. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-1-3-10> (In Russ.)
14. Burlutskaya MSh. Equiconvergence theorem for an integral operator on the simplest graph with a cycle. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*. 2008;8(4):8–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-4-8-13> (In Russ.)

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 18.05.2026

Поступила после рецензирования 08.07.2026

Принята к публикации 14.07.2026

Received May 18, 2026

Revised July 8, 2026

Accepted July 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Григорьева Елена Игоревна – преподаватель кафедры математического моделирования математического факультета, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Elena I. Grigorieva – Lecturer of the Department of Mathematical Modeling, Faculty of Mathematics Voronezh State University, Voronezh, Russia

[К содержанию](#)

ФИЗИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ PHYSICS. MATHEMATICAL MODELING

УДК 620.174
MSC 74E30, 74R10
Краткое сообщение

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-291-298
EDN JBTKDA

Моделирование и прочностные свойства при изгибе эпоксидных композитов с вискерами сульфата кальция

Никулин И. С. , Милостной Д. Н. , Кунгурцев М. С. , Воропаев В. С. , Никуличева Т. Б. , Ядута А. З. 
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
nikulicheva@bsuedu.ru

Аннотация. Работа посвящена комплексному теоретико-экспериментальному исследованию влияния дискретного армирования нитевидными кристаллами сульфата кальция (CaSO_4) на механические свойства двухкомпонентной эпоксидной смолы при статическом изгибе. Методами оптической микроскопии и статистического логнормального анализа определены геометрические параметры вискеров в объеме полимера: средний диаметр составил $d \approx 1.86$ мкм, средневзвешенная $\langle l \rangle = 44.8$ мкм, что соответствует аспектному отношению $\langle l/d \rangle \approx 24.1$. Установлен немонотонный характер зависимости прочностных свойств композита от степени наполнения с экстремумом при 10% масс., обеспечивающим трехкратный прирост модуля упругости (до 180 МПа) и увеличение предела прочности в 2.8 раза (до 6.2 МПа). Для количественного описания упругого поведения привлечена микромеханическая модель Хальпина – Цая, модифицированная функцией эффективного объема $V_{eff} = V_f \cdot \exp(-k \cdot V_f)$. Извлеченный коэффициент интенсивности агломерации $k = 15.6$ строго обосновывает падение жесткости при 20% наполнении скручиванием нитевидных кристаллов в изолированные конгломераты. С использованием модели Келли – Тайсона рассчитано соотношение критической и геометрической длины кристаллов $l_c/l \sim 1.63$, доказывающее субкритический характер армирования системы. Установлено, что диссипация механической энергии и упрочнение матрицы при изгибе протекают по механизму вязкого выдергивания (*pull-out*) микрокристаллов из полимерной матрицы. Полученные результаты открывают перспективы использования вискеров сульфата кальция для направленного конструирования высокопрочных конструкционных композитов.

Ключевые слова: эпоксидная смола, нитевидные кристаллы, сульфат кальция, прочность при изгибе, модель Хальпина – Цая, теория Келли – Тайсона, агломерация, вязкое выдергивание

Финансирование: статья подготовлена в рамках выполнения государственного задания на создание в 2021 году новых лабораторий, в том числе под руководством молодых перспективных исследователей национального проекта «Наука и университеты», по научной теме: «Разработка и развитие научно-технологических основ создания комплексной технологии переработки гипсосодержащих отходов различных промышленных предприятий и поиск новых способов применения продуктов переработки» (FZWG-2024-0001). Все исследования выполнены с использованием научного оборудования научного центра «Технологии и материалы» НИУ «БелГУ».

Для цитирования: Никулин И.С., Милостной Д.Н., Кунгурцев М.С., Воропаев В.С., Никуличева Т.Б., Ядута А.З. Моделирование и прочностные свойства при изгибе эпоксидных композитов с вискерами сульфата кальция. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):291–298. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-291-298 EDN JBTKDA

Short Communication

Modeling and Flexural Strength Properties of Calcium Sulfate Whisker / Epoxy Resin Composites

Ivan S. Nikulin , Daniil N. Milostnoy , Maksim S. Kungurtsev , Valery S. Voropaev ,
Tatiana B. Nikulicheva , Anna Z. Yaduta 
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia
nikulicheva@bsuedu.ru

Abstract. This work is devoted to a comprehensive theoretical and experimental study of the effect of discrete reinforcement with calcium sulfate (CaSO_4) whiskers on the mechanical properties of a two-component epoxy resin under static flexural loading. Using optical microscopy and statistical log-normal analysis, the geometric parameters of the whiskers within the polymer bulk were determined: the average diameter was $d \approx 1.86 \mu\text{m}$, and the weight-average length was $\langle l \rangle = 44.8 \mu\text{m}$, corresponding to an aspect ratio of $\langle l/d \rangle \approx 24.1$. A non-monotonic dependence of the composite's strength characteristics on the filler content was established, exhibiting an extremum at 10 wt.%, which provided a threefold increase in the elastic modulus (up to 180 MPa) and a 2.8-fold enhancement in the flexural strength (up to 6.2 MPa). To quantitatively describe the elastic behavior, the micromechanical Halpin-Tsai model was applied, modified by an effective volume function $V_{eff} = V_f \cdot \exp(-k \cdot V_f)$.

The extracted agglomeration intensity coefficient $k = 15.6$ strictly justifies the degradation of stiffness at 20 wt.% filling by the avalanche-like clustering of the whiskers into isolated conglomerates. Using the Kelly-Tyson model, the ratio of critical to geometric crystal length was calculated $l_c/l \sim 1.63$, proving the subcritical nature of the system's reinforcement. It was established that mechanical energy dissipation and matrix toughening during bending proceed via the viscous pull-out mechanism of the microcrystals from the polymer matrix. The results obtained open up clear prospects for using calcium sulfate whiskers in the targeted design of high-strength structural compounds.

Keywords: Epoxy Resin, Whiskers, Calcium Sulfate, Flexural Strength, Halpin-Tsai Model, Kelly-Tyson Theory, Agglomeration, Viscous Pullout

Funding: This article was prepared as part of the state assignment to establish new laboratories in 2021, including those under the supervision of promising young researchers, under the national project «Science and Universities», on the research topic: «Development and advancement of scientific and technological foundations for the creation of an integrated technology for processing gypsum-containing waste from various industrial enterprises and the search for new ways to use processed products» (FZWG-2024-0001). All studies were conducted using the scientific equipment of the «Technologies and Materials» research center of the National Research University «BelSU».

For citation: Nikulin IS., Milostnoy DN., Kungurtsev MS., Voropaev VS., Nikulicheva TB., Yaduta AZ. Modeling and Flexural Strength Properties of Calcium Sulfate Whisker / Epoxy Resin Composites. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):291–298. (In Russ.). DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-291-298EDN JBTKDA

1. Введение. Эпоксидные полимеры представляют собой термореактивные соединения, функциональная активность которых определяется наличием реакционноспособных эпоксидных (оксирановых) групп, имеющих форму напряженного трехчленного гетероцикла. Формирование густосетчатой трехмерной макромолекулярной структуры – процесс отверждения – протекает по механизму полиприсоединения при взаимодействии олигомеров с соединениями, содержащими лабильный (подвижный) атом водорода (алифатическими и ароматическими аминами, спиртами, фенолами). В зависимости от химической природы и кинетических особенностей применяемого отверждающего агента данный процесс может протекать как при комнатной температуре (сопровождаясь выраженным экзотермическим эффектом), так и требовать термической активации. Наиболее широкое коммерческое и лабораторное применение для полимеризации эпоксидных матриц находят аминосоединения различной функциональности [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Несмотря на комплекс ценных эксплуатационных характеристик (высокая адгезия к различным подложкам, малая усадка при отверждении, химическая стойкость), немодифицированные эпоксидные полиматрицы обладают рядом недостатков, ограничивающих их применение в конструкционных материалах, в частности – повышенной хрупкостью и низким сопротивлением к изгибающим нагрузкам. Для направленного регулирования и усиления физико-механических параметров эпоксидных компаундов традиционно используются различные модифицирующие добавки. Одним из наиболее эффективных и технологически обоснованных способов повышения жесткости и прочности полимерных материалов является их наполнение дискретными армирующими элементами.

Введение наполнителей игольчатой или волокнистой морфологии приводит к качественной перестройке напряженно-деформированного состояния полимерной матрицы, обеспечивая существенный прирост прочностных характеристик получаемых эпоксидных композитов при различных типах механических испытаний [8, 9].

По геометрическим признакам применяемые в материаловедении минеральные наполнители классифицируют на дисперсно-партнерские (изометрические частицы) и дискретно-армирующие (волокна и нитевидные кристаллы). Эффективность их воздействия на полимерную матрицу во многом определяется топологией и анизотропией формы: так, частицы мела имеют зернистую структуру, каолин и тальк представлены в виде чешуек и гексагональных пластинок, диоксид титана – тетрагональных полиэдров, а фракции мрамора имеют форму, близкую к сферической. В то время как изометрические и обтекаемые мелкодисперсные частицы в основном способствуют снижению себестоимости компаунда и регулированию его плотности (зачастую приводя к некоторому снижению предела прочности), наполнители с высоким аспектным отношением ($l/d \gg 1$) способны эффективно перераспределять внутренние механические напряжения. Твердость и монокристаллическое совершенство структуры внедряемых фаз имеют определяющее значение: вовлечение высокомодульных анизотропных микрокристаллов позволяет кардинально повысить жесткость и сопротивление композита к разрушению при статических и динамических нагрузках.

Перспективным и экологически доступным представителем дискретно-армирующих наполнителей являются нитевидные микрокристаллы (вискеры) сульфата кальция (CaSO_4), сочетающие высокую теоретическую прочность с развитой удельной площадью поверхности.

Целью настоящей работы являлось установление взаимосвязи между концентрацией введения нитевидных микрокристаллов сульфата кальция и комплексом механических свойств получаемых эпоксидных композитов при испытаниях на статический изгиб, а также верификация экспериментальных

данных с привлечением классических микромеханических моделей Хальпина – Цая и Келли – Тайсона.

2. Получение и характеристика образцов. Для получения композиционного материала на основе эпоксидной смолы и дисперсного наполнителя были выбраны двухкомпонентная эпоксидная смола, в качестве матрицы материала, и наполнитель – нитевидные кристаллы сульфата кальция, представляющие собой порошок белого цвета с формой частиц в виде вытянутых в нить кристаллов, получаемый из цитрогипса. Остаточная влажность армирующего наполнителя влияет на свойства итогового эпоксидного композита, т. к. при смешивании двухкомпонентной эпоксидной смолы и кристаллов сульфата кальция, не прошедших осушение, имеется неоднородность в структуре и воздушные полости вокруг частиц наполнителя, что приводит к ухудшению механических свойств материала. Поэтому все эксперименты проводились с предварительной просушкой нитевидных кристаллов сульфата кальция при температуре $(200 \pm 10)^\circ\text{C}$ в течение 2–3 ч в муфельной печи «Nabertherm P 1200».

Также важным параметром является равномерность распределения наполнителя в матрице. Любые неоднородности композиционного материала снижают его прочность, т. к. она определяется самой слабой его частью, в которой начинается разрушение. Таким образом, композит должен быть однородным. Для равномерности распределения частиц наполнителя в объеме эпоксидной смолы была использована ультразвуковая ванна. Во время смешения слипшиеся кристаллы дробятся на отдельные частицы и равномерно распределяются по всей массе, за счет перемешивания и диспергирования, образуя однородную смесь эпоксидной смолы и нитевидных кристаллов сульфата кальция.

Полимерный композит, наполненный дискретными кристаллами, рассматривается как двухфазная гетерогенная система. Комплекс его механических свойств базируется на характеристиках непрерывной эпоксидной среды, тогда как дисперсная фаза выполняет роль армирующего каркаса, влияние которого транслируется через объем вмещающей полимерной матрицы.

Равномерность распределения кристаллов сульфата кальция в эпоксидной смоле была подтверждена при помощи оптического микроскопа Olympus GX41 (рис. 1).



Рис. 1. Распределение кристаллов сульфата кальция в объеме эпоксидной смолы

Fig. 1. Distribution of calcium sulfate crystals in the volume of epoxy resin

Готовый раствор эпоксидной смолы, наполненный нитевидными кристаллами сульфата кальция, заливали в промаркированные силиконовые формы, формы с залитыми образцами выдерживаются при температуре $25\text{--}30^\circ\text{C}$ в течение 72 часов. После отверждения все полученные образцы (рис. 2) подвергались механической шлифовке с последовательной сменой шлифовальной бумаги следующей зернистости: P220 $\rightarrow$ P320 $\rightarrow$ P500 $\rightarrow$ P800 для снятия неровного слоя, возникшего в результате изготовления. Для статистики подготавливалась партия образцов по каждому содержанию наполнителя из 5 штук.

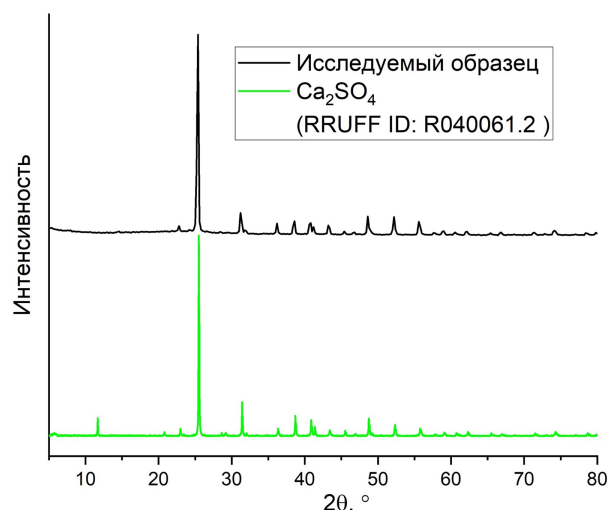


Рис. 2. Фотография образцов для проведения механических испытаний на трехточечный изгиб

Fig. 2. Photograph of samples for mechanical testing under three-point bending

3. Испытание на изгиб. Испытания на трехточечный изгиб проводили по ГОСТ 4648 – 2014 «Пластмассы. Метод испытания на статический изгиб». Сущность метода заключается в изгибе плоского образца постоянного прямоугольного сечения, свободно лежащего на двух опорах, с постоянной скоростью нагружения до момента разрушения образца или до того момента, когда деформация растяжения на внешней поверхности образца достигнет предварительно заданного значения. Образец помещают на опоры широкой стороной. Расстояние между опорами испытательной машины устанавливают $64 \pm 0,5$ мм. Нагружение образца производят плавно, без толчков, посередине между опорами со скоростью 1 мм/мин. Предел прочности при изгибе рассчитывают по формуле

$$R_b = \frac{3Pl}{2bh^2} [0,1 \text{ МПа}],$$

где P – разрушающая нагрузка, кгс; l – расстояние между опорами, см; b – ширина образца, см; h – толщина образца, см.

Возникающее при изгибе напряженно-деформируемое состояние является неоднородным, регистрируемые показатели интегрально содержат информацию о растяжении, сжатии и межслоевом сдвиге.

Из рис. 3 следует, что отвержденные образцы эпоксидной смолы, наполненные кристаллами сульфата кальция, обладают более высокой прочностью на изгиб по сравнению с образцами из ненаполненной эпоксидной смолы.

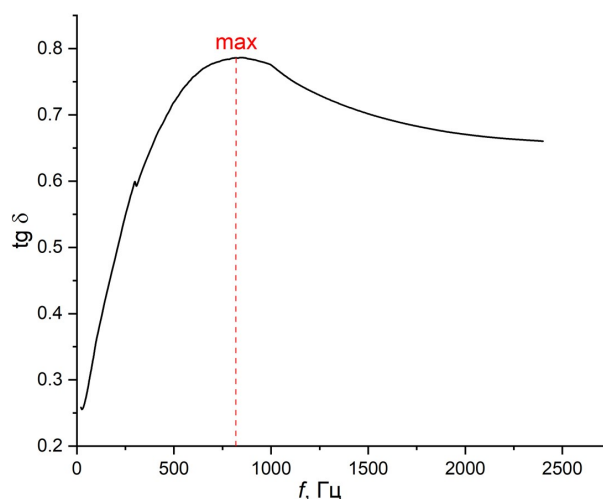


Рис. 3. Диаграмма изгиба образцов из эпоксидной смолы с добавлением кристаллов сульфата кальция (1 – чистая эпоксидная смола; 2 – эпоксидная смола + 20% наполнителя; 3 – эпоксидная смола + 10% наполнителя)

Fig. 3. Bending diagram of samples made of epoxy resin with the addition of calcium sulfate crystals (1 – pure epoxy resin; 2 – epoxy resin + 20% filler; 3 – epoxy resin + 10% filler)

Однако при превышении содержания наполнителя 10% наблюдается снижение прочности. Наилучшие характеристики с точки зрения прочности при изгибе у эпоксидной смолы с содержанием 10% кристаллов сульфата кальция, и они имеют умеренную деформацию прогиба.

Приведенные выше закономерности упрочнения эпоксидной смолы справедливы до определенной степени наполнения. При приближении концентрации кристаллов сульфата кальция в эпоксидном полимере к некоторой критической точке наблюдается снижение прочностных свойств композита независимо от размера диспергированных частиц. Такое поведение в литературе называют «обратимостью» упрочняющего действия наполнителей. Вероятнее всего это происходит из-за того, что деформирование эпоксидного композита сопряжено с перемещением частиц наполнителя. Плотная упаковка частиц наполнителя препятствует их перемещению. В результате при деформировании высоконаполненного композита в его матрице возникают большие внутренние перенапряжения, что и вызывает снижение прочности композита.

4. Микромеханическое моделирование модуля упругости композитов. Для количественной оценки эффективности армирования полимерной матрицы нитевидными кристаллами сульфата кальция и объяснения немоного характера изменения упругих свойств был проведен численный расчет в рамках микромеханической модели Хальпина – Цая [10, 11, 12, 13].

Экспериментальные значения модулей упругости при изгибе, определенные как тангенс угла наклона начальных прямолинейных участков диаграммы деформирования (рис. 3), составили $E_m = 60$ МПа для чистой эпоксидной смолы, $E_{c10} = 180$ МПа и $E_{c20} = 140$ МПа для композитов с массовой долей наполнителя 10% и 20% соответственно. Массовые доли наполнителя (ω) были пересчитаны в истинные объемные доли (V_f) по стандартной методике с учетом плотности матрицы ($\rho_m = 1.2$ г/см³) и монокристаллических вискероов ангидрита ($\rho_f = 2.96$ г/см³):

$$V_f = \frac{\frac{\omega}{\rho_f}}{\frac{\omega}{\rho_f} + \frac{1 - \omega}{\rho_m}}.$$

Полученные значения составили $V_{f10} = 0.043$ и $V_{f20} = 0.092$. Базовое уравнение Хальпина – Цая для прогнозирования эффективного модуля упругости коротковолокнистых композитов имеет вид:

$$E_c = E_m \left(\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right), \quad (1)$$

где $\xi = 2(l/d)$ – фактор формы, отражающий аспектальное отношение длины кристалла к его диаметру.

Для определения геометрических параметров наполнителя было исследовано дисперсное распределение нитевидных кристаллов сульфата кальция в объеме отвержденной эпоксидной матрицы методом оптической микроскопии (рис. 1). Прямые замеры геометрических характеристик отдельных изолированных вискероов CaSO₄ показали, что их средняя толщина (диаметр) составляет $d \approx 1.86$ мкм, а характерная длина лежит в диапазоне от 20 до 90 мкм.

На основании статистической обработки массива экспериментальных данных ($N = 50$) была построена гистограмма дифференциального распределения кристаллов по длинам (рис. 4). Аппроксимация гистограммы логнормальной функцией позволила определить средневзвешенную длину вискероов, составившую $\langle l \rangle = 44.8$ мкм. Таким образом, среднее аспектальное (форм-факторное) отношение исследуемого наполнителя составляет $\langle l/d \rangle \approx 24.1$, $\xi = 48.2$.

Коэффициент эффективности передачи механического напряжения η рассчитывался через соотношение модулей упругости фаз ($E_f = 178$ ГПа):

$$\eta = \frac{(E_f/E_m) - 1}{(E_f/E_m) + \xi} \approx 0.980.$$

Классический расчет по формуле (1) показал, что при идеальном хаотическом распределении наполнителя модули упругости систем должны составлять 221 МПа и 422 МПа при массовой доле наполнителя 10% и 20% соответственно. Существенное экспериментальное падение модуля упругости при 20% наполнении (до 140 МПа) указывает на крах классической модели из-за структурной неоднородности.

Для математического описания реальной структуры в модель была введена поправка на пространственную агломерацию нитевидных кристаллов [14, 15]. Истинная объемная доля V_f была заменена на функцию эффективного объема наполнителя V_{eff} , учитывающую исключение части вискероов из работы при их слипании в плотные конгломераты:

$$V_{eff} = V_f \cdot \exp(-k \cdot V_f). \quad (2)$$

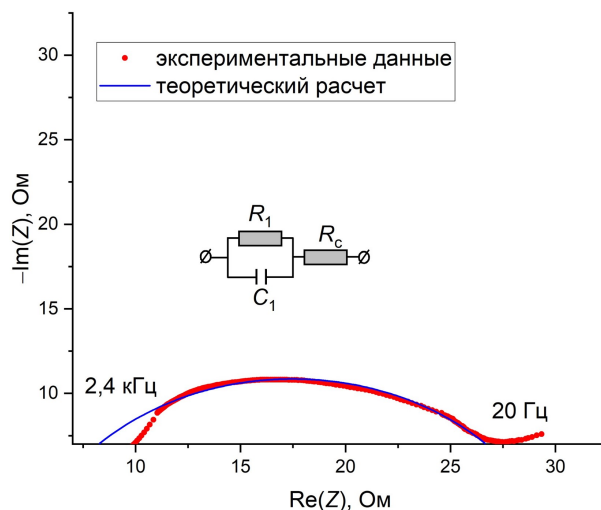


Рис. 4. Гистограмма дифференциального распределения кристаллов по длинам

Fig. 4. Histogram of differential distribution of crystals by length

Численное решение системы уравнений относительно экспериментальной точки $E_{c20} = 140$ МПа позволило извлечь полуэмпирический коэффициент интенсивности агломерации, который составил $k = 15.6$. Это указывает на то, что при избыточном наполнении ($V_{f20} = 0.092$) эффективный объем изолированных, воспринимающих нагрузку вискероов падает до $V_{eff} \approx 0.022$. Разработанная модифицированная модель (1)–(2) обеспечивает высокую степень сходимости с экспериментом и строго доказывает, что лимитирующим фактором жесткости композита выше 10% наполнения выступает лавинообразное структурирование наполнителя в объеме эпоксидной смолы.

5. Микромеханическое моделирование предела прочности при изгибе. Для глубокого понимания механизмов разрушения и оценки адгезионного взаимодействия на межфазной границе «эпоксидная матрица / наполнитель» экспериментальные данные предела прочности при изгибе были проанализированы с использованием модифицированной модели Келли – Тайсона для дискретно армированных сред [16, 17, 18].

Согласно экспериментальным диаграммам изгиба (рис. 3), введение 10% масс. нитевидных кристаллов сульфата кальция ($V_f = 0.043$) обеспечивает экстремальный подъем прочности композита от базовых $\sigma_m = 2.2$ МПа до максимальных $\sigma_{fc} = 6.2$ МПа. Прогнозирование предела прочности при изгибе коротковолокнистых систем осуществлялось по уравнению:

$$\sigma_{fc} = \eta_0 \cdot \sigma_{ff} \cdot V_f \cdot \left(1 - \frac{l_c}{2l}\right) + (1 - V_f) \cdot \sigma_m,$$

где $\sigma_{ff} = 2600$ МПа – теоретическая прочность бездефектных вискероов CaSO_4 [19, 20], а $\eta_0 = 0.2$ – коэффициент ориентации, соответствующий их трехмерному хаотичному распределению.

Численная подстановка экспериментальных параметров для точки экстремума (10% наполнителя) позволила извлечь коэффициент эффективности длины, составивший $(1 - l_c/(2l)) \approx 0.183$, откуда было определено соотношение критической и реальной длины кристаллов: $l_c/l \approx 1.63$. То, что критическая длина превышает геометрическую длину вискероов ($l < l_c$), строго доказывает субкритический характер армирования системы. При деформировании композита изгибающим моментом разрушение происходит не за счет перелома самих кристаллов CaSO_4 , а по механизму их вязкого выдергивания (*pull-out*) из полимерной матрицы [21, 22]. Высокая удельная поверхность игольчатого наполнителя обеспечивает эффективное рассеяние энергии трения при выдергивании, что обуславливает почти трехкратный рост прочности композита.

Снижение предела прочности при переходе к 20% наполнению (до 3.35 МПа) связано с нарушением сплошности межфазного контакта. Образование плотных пространственных конгломератов иголок сульфата кальция приводит к дефициту связующего на границах раздела. Это выключает внутренние области агломератов из процессов восприятия сдвиговых напряжений, превращая сегрегированный наполнитель в макродефекты структуры, инициирующие преждевременное хрупкое разрушение полимера.

6. Заключение. На основании проведенных теоретико-экспериментальных исследований механических свойств эпоксидных композитов, армированных нитевидными кристаллами сульфата кальция, можно сформулировать следующие основные выводы:

- установлен выраженный немонотонный характер зависимости прочностных и деформационных свойств разработанных композитов от концентрации игольчатого наполнителя. Оптимальным

является введение 10% масс. микрокристаллов CaSO_4 , обеспечивающее экстремальный подъем предела прочности при изгибе в 2.8 раза (с 2.2 до 6.2 МПа) и рост модуля упругости в 3 раза (с 60 до 180 МПа) относительно немодифицированной эпоксидной матрицы;

- с привлечением статистической обработки массива экспериментальных данных ($N = 50$) и логнормальной аппроксимации верифицированы геометрические параметры наполнителя в объеме полимера: средняя толщина составила $d \approx 1.86$ мкм, длина – $\langle l \rangle = 44.8$ мкм, что определяет аспектное отношение $\langle l/d \rangle \approx 24.1$;
- адекватность упругого поведения композита успешно описана в рамках микромеханической модели Хальпина – Цая. Математически доказано, что падение модуля упругости при 20% наполнении (до 140 МПа) обусловлено пространственной сегрегацией иголок с падением их эффективного рабочего объема до $V_{eff} \approx 0.022$ из-за лавинообразной агломерации (полуэмпирический коэффициент интенсивности агломерации составил $k = 15.6$);
- на основе извлеченного из модели Келли – Тайсона коэффициента эффективности длины ~ 0.183 определено соотношение критической и реальной длины кристаллов ($l_c/l \approx 1.63$). Установлено, что армирование носит субкритический характер ($l < l_c$), а разрушение композита при изгибе протекает по механизму вязкого выдергивания (*pull-out*) вискозиса из смолы, обеспечивающего эффективное рассеяние механической энергии.

Полученные результаты доказывают высокую технологическую эффективность использования нитевидных кристаллов сульфата кальция в качестве дискретных армирующих элементов для создания высокопрочных конструкционных полимерных компаундов.

References

1. Haeri Z., Ramezanzadeh B., Ramezanzadeh M. Recent progress on the metal-organic frameworks decorated graphene oxide (MOFs-GO) nano-building application for epoxy coating mechanical-thermal/flame-retardant and anti-corrosion features improvement. *Progress in Organic Coatings*. 2020;163:106645.
2. Kollu P., Veeramalai C.P., Manickam S. Thermal properties of nanoscale polymer-based coatings. *Polymer-Based Nanoscale Materials for Surface Coatings*. 2023:275–289.
3. Hamerton I., Howlin B.J., Jepson P. Metals and coordination compounds as modifiers for epoxy resins. *Coordination Chemistry Reviews*. 2002;224:67–85.
4. Pham HQ., Marks MJ. Epoxy resins. *Ullmann's encyclopedia of industrial chemistry*. 2000.
5. Wang S., Liang Z., Liu T., Wang B., Zhang C. Effective amino-functionalization of carbon nanotubes for reinforcing epoxy polymer composites. *Nanotechnology*. 2006;17(6):1551–1557.
6. Zhu J., Peng H., Rodriguez-Macias F., Margrave J.L., Khabashesku V.N., Imam A.M., Lozano K., Barrera E.V. Reinforcing epoxy polymer composites through covalent integration of functionalized nanotubes. *Advanced functional materials*. 2004;14(7):643–648.
7. Aziz T., Haq F., Farid A., Cheng L., Chuah L.F., Bokhari A., Mubashir M., Tang D.Y., Show P.L. The epoxy resin system: function and role of curing agents. *Carbon Letters*. 2024;34(1):477–494.
8. Papageorgiou D.G., Li Z., Liu M., Kinloch I.A., Young R.J. Mechanisms of mechanical reinforcement by graphene and carbon nanotubes in polymer nanocomposites. *Nanoscale*. 2020;12(4):2228–2267.
9. Dorozhkin S.V. Calcium orthophosphate (CaPO_4) containing composites for biomedical applications: formulations, properties, and applications. *Journal of Composites Science*. 2024;8:218.
10. Halpin J.C., Kardos J.L. The Halpin-Tsai equations: a review. *Polymer Engineering & Science*. 1976;16(5):344–352.
11. Shokrieh M.M., Moshrefzadeh-Sani H. On the constant parameters of Halpin-Tsai equation. *Polymer*. 2016;106:14–20.
12. Fuchs C., Bhattacharyya D., Friedrich K., Fakirov S. Application of Halpin-Tsai equation to microfibril reinforced polypropylene/poly (ethylene terephthalate) composites. *Composite Interfaces*. 2006;13:331–344.
13. Ghafaar M.A., Mazen A.A., El-Mahallawy N.A. Application of the rule of mixtures and Halpin-Tsai equations to woven fabric reinforced epoxy composites. *Journal of Engineering Sciences*. 2006;34:227–236.
14. Wang J., Gong L., Xi S., Li C., Su Y., Yang L. Synergistic effect of interface and agglomeration on Young's modulus of graphene-polymer nanocomposites. *International Journal of Solids and Structures*. 2024;292:112716.
15. Pan J., Liu J., Gao M., Liu X., Zhang L. Ellipsoidal carbon nanotube agglomeration impact on composite elastic modulus. *Journal of Mechanics*. 2025;41:377–391.
16. Kelly A., Tyson W.R. Tensile properties of fibre-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1965;13(6):329–350.
17. Thodsaratpreeyakul W., Uawongsuwan P., Kataoka A., Negoro T., Hamada H. The determination of interfacial shear strength in short fiber reinforced poly ethylene terephthalate by Kelly-Tyson theory. *Open Journal of Composite Materials*. 2017;7(4):218–226.

18. Migneault S., Koubaa A., Erchiqui F., Chaala A., Englund K., Wolcott M.P. Application of micromechanical models to tensile properties of wood-plastic composites. *Wood Science and Technology*. 2011;45(3):521–532.
19. Qiao R., Zhong Z., Liu Q., Liu J., He W. Effects of Calcium Sulfate Whiskers on the Mechanical Properties and Light Transmittance of PE Greenhouse Films. *Journal of Physics: Conference Series*. 2022;2160:012004.
20. Nikulin I., Ivanov O., Nikulicheva T., Mishunin M., Vyugin A., Alfimova N., Vyazmin V., Saenko M. Mechanical strength measurement of needle-shaped CaSO_4 microcrystals by a three-point bend test. *Measurement Science and Technology*. 2024;35(5):055603.
21. Inal O., Katnam KB., Potluri P., Soutis C. Progress in interlaminar toughening of aerospace polymer composites using particles and non-woven veils. *The Aeronautical Journal*. 2022;126(1295):222–248.
22. Bilge K., Papila M. Interlayer toughening mechanisms of composite materials. *Toughening Mechanisms in Composite Materials*. 2015;263–294.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.06.2026

Received June 1, 2026

Поступила после рецензирования 10.07.2026

Revised July 10, 2026

Принята к публикации 14.07.2026

Accepted July 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Никулин Иван Сергеевич – заведующий лабораторией физико-химических методов исследования растений, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Милостной Даниил Николаевич – лаборант-исследователь лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Кунгурцев Максим Сергеевич – старший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Воропаев Валерий Сергеевич – младший научный сотрудник лаборатории перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Никulichева Татьяна Борисовна – заведующий лабораторией перспективных материалов и технологий, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

Ядута Анна Зауровна – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan S. Nikulin – Head of the Laboratory of Physical and Chemical Methods of Plant Research, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Daniil N. Milostnoy – Laboratory Research Assistant, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Maksim S. Kungurtsev – Senior Researcher, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Valery S. Voropaev – Junior Researcher, Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Tatiana B. Nikulicheva – Head of the Laboratory of Advanced Materials and Technologies, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

Anna Z. Yaduta – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Modeling, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

К содержанию

Численное исследование работы скважины с треугольным контуром питания в анизотропном однородном пласте

Лекомцев Д. Г. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Никуличевой Т. Б.)

Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева,
Россия, 302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

lekomtcevdg@yandex.ru

Аннотация. Реальные породы-коллекторы обладают анизотропными свойствами, это оказывает существенное влияние на фильтрационное течение флюидов (воды, нефти). В работе рассматривается двумерная задача о дебите скважины в анизотропном однородном грунте с треугольным контуром питания. Проницаемость среды описывается несимметричным тензором второго ранга. Сложность данной задачи обусловлена видом основного уравнения. Решение задачи упрощается переходом на вспомогательную плоскость. Задача решена с применением метода дискретных особенностей. В рамках вычислительного эксперимента исследовано влияние изменения анизотропии среды на дебит скважины. Согласно результатам моделирования рост отношения диагональных компонентов тензора проницаемости приводит к сильному изменению дебита. Проведено исследование «практической сходимости» полученного решения и её зависимости от параметров вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: теория фильтрации, интегральное уравнение, дебит скважины

Для цитирования: Лекомцев Д.Г. Численное исследование работы скважины с треугольным контуром питания в анизотропном однородном пласте. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):299–306.

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-299-306 EDN YMYFXJ

Original Research

Numerical Study of Work of the Well by a Triangular Boundary of Reservoir in an Anisotropic Homogeneous Layer

Denis G. Lekomtsev 

(Article submitted by a member of the editorial board Nikulicheva T. B.)

Orel State University named after I. S. Turgenev,
95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russia

lekomtcevdg@yandex.ru

Abstract. Real porous rock has anisotropic properties, which have a significant effect on the filtration flow of fluids (water, oil). The article discusses a two-dimensional problem about the operation of a well in an anisotropic homogeneous soil with a triangular boundary of reservoir. Soil permeability is described by the asymmetric second-rank tensor. The problem is of a rather complex kind of basic equation. The study is simplified if you make the transition from a physical plane to an auxiliary one. The primary equation of the problem is converted into the Laplace equation. The problem is solved using the discrete singularities method. The concept of relative well production rate is used to study the influence of a collector rock anisotropy on the production. The relative well production rate is defined as the ratio of the difference between well production rate in anisotropic and isotropic mediums to the well production rate of a well in isotropic media under other equal conditions. A numerical experiment has been carried out. Within its framework, the soil of changes in porous medium anisotropy on well production rate was investigated. The dependence of “practical similarity” on numerical experiment parameters is investigated.

Keywords: Filtration Theory, Integral Equation, Well Production Rate

For citation: Lekomtsev DG. Numerical Study of Work of the Well by a Triangular Boundary of Reservoir in an Anisotropic Homogeneous Layer. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):299–306. (In Russ.)

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-299-306 EDN YMYFXJ

1. Введение. Большой перечень научных работ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], выполненных разными научными коллективами, наглядно демонстрирует, что на данный момент наличие анизотропных свойств у реальных пород-коллекторов можно считать хорошо установленным фактом. Это требует учёта данных свойств при рассмотрении движения флюидов (воды, нефти) в подобных пористых средах. На данный момент активно изучается фильтрация в анизотропных средах. При изучении работы скважин часто вводят понятие контура питания как условной границы, от которой флюид начинает своё движение к скважине. В качестве условного контура питания можно выбрать определённую линию обобщённого

потенциала, то есть границу, на которой давление не изменяется. При построении моделей фильтрации контур питания можно моделировать линиями разной формы. Например, контур питания можно моделировать бесконечной прямой [8], эллипсом или прямоугольником [9]. В данной работе рассматривается двумерная задача о работе скважины с треугольным контуром питания. Контур питания похожей формы возможен в случае, если скважины располагаются по четырёхточечной схеме размещения скважин, когда треугольник из нагнетательных скважин окружает эксплуатационную скважину [10]. В этом случае в модели присутствует линия обобщённого потенциала, имеющая околотреугольную форму, эту линию можно использовать для моделирования контура питания. На рис. 1 показан пример подобного фильтрационного течения для случая однородной изотропной среды.

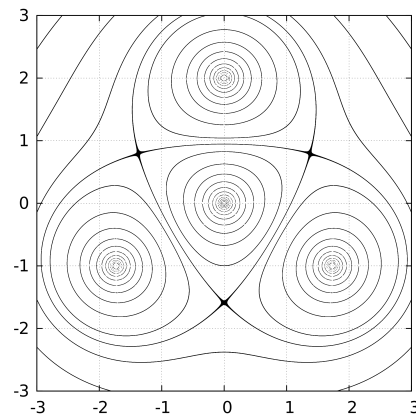


Рис. 1. Линии обобщённого потенциала при размещении эксплуатационной скважины в окружении трёх нагнетательных скважин

Fig. 1. Generalized capacity lines when siting the production well in the surroundings of three injection wells

2. Постановка задачи на физической плоскости. В работе рассматривается стационарная двумерная задача о работе эксплуатационной скважины, имеющей дебит Q . Анизотропия среды моделируется тензором проницаемости K , компоненты которого K_{ij} – постоянные. В общем случае тензор проницаемости является несимметричным. Предполагается, что среда в области фильтрации D является недеформируемой и однородной.

На физической плоскости $z = x + iy$ скважина располагается в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, движение флюида происходит в области фильтрации, ограниченной контуром скважины σ_C и контуром питания σ_Π . Контур σ_C и σ_Π не могут быть пересекающимися.

В соответствии с [11] всюду, за исключением изолированных особых точек, в области фильтрации D обобщённый потенциал φ будет удовлетворять уравнению, которое следует из обобщённого закона Дарси и уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot (K \cdot \nabla \varphi(z)) = 0, \quad z \in D. \quad (1)$$

Если на компоненты K_{ij} наложены следующие ограничения

$$K_{11} > 0 \quad (K_{22} > 0), \quad D(K_s) = K_{11}K_{22} - \left(\frac{K_{12} + K_{21}}{2} \right)^2 > 0, \quad (2)$$

то уравнение (1) будет относиться к эллиптическому типу ($D(K_s)$ – определитель симметричной части тензора K). На контурах σ_C и σ_Π известны давления, это означает, что для обобщённого потенциала φ заданы граничные условия

$$\varphi^+(z) = C_0, \quad z \in \sigma_\Pi, \quad (3)$$

$$\varphi(z) = C, \quad z \in \sigma_C, \quad (4)$$

здесь $C_0 \neq C$, знаком «+» отмечается предельное значение функции при приближении к контуру σ_Π из области фильтрации. Рассматриваемая задача представляет собой задачу Дирихле, когда при известных граничных условиях (3) и (4) требуется решить уравнения (1), что дает возможность определить искомый дебит Q . Для изучения воздействия различных компонентов тензора K на дебит Q , следуя [8], используем коэффициенты

$$\alpha = \frac{K_{22}}{K_{11}} > 0, \quad \beta = \frac{K_{12} + K_{21}}{2K_{11}}, \quad \gamma = \frac{K_{12} - K_{21}}{2K_{11}}. \quad (5)$$

Следствием условия (2) является наложенное на коэффициенты α и β условие $\alpha > \beta^2$.

3. Постановка задачи на вспомогательной плоскости. Из-за сложного вида уравнения (1) непосредственно решить задачу (1)–(4) достаточно сложно, но решение этой задачи можно упростить, если перейти с физической плоскости z на вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. Эта плоскость связана гомеоморфным (аффинным) преобразованием координат с физической плоскостью z [12]

$$\zeta = z + \mu_0 \bar{z}, \quad \mu_0 = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{12})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, \quad |\mu_0| < 1. \quad (6)$$

На вспомогательной плоскости ζ задача рассматривается для области D' , ограниченной контурами σ'_Π и σ'_C , которые являются соответственно образами контуров σ_Π и σ_C . Скважина будет располагаться в точке ζ_0 . Уравнение (1) на плоскости ζ перейдет в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi(\zeta) = 0, \quad \zeta \in D'. \quad (7)$$

Условия (3) и (4) на плоскости ζ будут иметь вид

$$\varphi^+(\zeta) = C_0, \quad \zeta \in \sigma'_\Pi, \quad (8)$$

$$\varphi(\zeta) = C, \quad \zeta \in \sigma'_C. \quad (9)$$

Фильтрационное движение флюида к скважине при условии отсутствия влияния от контура питания будет описываться обобщенным потенциалом вида [9]

$$\varphi_0(\zeta) = Q\Phi(\zeta, \zeta_0) = \frac{Q}{2\pi\sqrt{D(K_s)}} \ln \frac{1}{|\zeta - \zeta_0|}. \quad (10)$$

В (10) $\Phi(\zeta, \zeta_0)$ – фундаментальное решение уравнения (7), $|\zeta - \zeta_0| = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$.

Обобщенный потенциал рассматриваемого в данной модели фильтрационного течения ищем в следующем виде $\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_*(\zeta)$. Здесь $\varphi_*(\zeta)$ – обобщенный потенциал возмущений, которые возникают из-за контуров, ограничивающих область фильтрации. $\varphi_*(\zeta)$ представляет собой гармоническую функцию ζ . В этом случае условия (8) и (9) примут вид:

$$\varphi_*^+(\zeta) = C_0 - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_\Pi, \quad (11)$$

$$\varphi_*(\zeta) = C - \varphi_0(\zeta), \quad \zeta \in \sigma'_C, \quad (12)$$

Далее полагаем $C = 1$, $C_0 = 0$. Таким образом для решения задачи о поиске дебита Q на вспомогательной плоскости необходимо найти $\varphi_*(\zeta)$ при учёте условий (11) и (12). Для некоторых простых частных случаев рассматриваемая задача имеет аналитическое решение. Например, когда контур питания моделируется прямой [8] или эллипсом специального вида, который переходит в окружность на вспомогательной плоскости ζ [9]. В случае замкнутого контура произвольной формы возможно решить задачу, используя метод дискретных особенностей. Данный метод был предложен С. М. Белоцерковским [13] для задач аэро- и гидродинамики и развит в трудах его последователей [11, 14].

4. Применение численного метода дискретных особенностей к задаче исследования дебита скважины. Как показано в [11] для контура питания произвольной формы (при условии отсутствия самопересечений) задача о работе скважины в анизотропной среде приводит к системе, которая состоит из сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{f(M)}{2} + \int_{\sigma'_\Pi} f(N)\Omega(N, M)dN = C_0 - \varphi_0(M), \quad M \in \sigma'_\Pi, \quad (13)$$

и интегрального соотношения

$$\int_{\sigma'_\Pi} f(N)\Omega(N, M)dN = C - \varphi_0(M), \quad M = M_* \in \sigma'_C, \quad (14)$$

где $f(N)$ – функция класса Гёльдера. В (13) и (14) ядро интегралов в случае анизотропной однородной пористой среды имеет вид [8]:

$$\Omega(N, M) = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} - V_\eta \right) \vec{e}_\xi + \left(V_\eta \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} + V_\xi \right) \vec{e}_\eta \right] \cdot \vec{\tau}, \quad (15)$$

где $D(K_a) = K_{11}^2 \gamma^2$, $V_\xi = \frac{\xi_N - \xi_M}{(\xi_N - \xi_M)^2 + (\eta_N - \eta_M)^2}$, $V_\eta = \frac{\eta_N - \eta_M}{(\xi_N - \xi_M)^2 + (\eta_N - \eta_M)^2}$, $\vec{e}_\xi$, $\vec{e}_\eta$ – орты осей $O\xi$ и $O\eta$, $\vec{\tau}$ – орт касательной контура σ'_Π (прохождение контура σ'_Π выполняется против часовой стрелки). Выполним параметрическое задание кривой σ'_Π на вспомогательной плоскости ζ . Контур питания разобьём линейными сплайнами

$$\begin{aligned} AB: \quad x &= \frac{A}{2} - s, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}A, \quad s \in [0, A), \\ BC: \quad x &= -\frac{A}{2} + \frac{A}{2}s, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}A - \frac{\sqrt{3}}{2}As, \quad s \in [A, 2A), \\ CA: \quad x &= \frac{A}{2}s, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{4}A + \frac{\sqrt{3}}{2}As, \quad s \in [2A, 3A). \end{aligned} \quad (16)$$

На рис. 2 показана моделируемая область фитрации на физической плоскости z и её образ на вспомогательной плоскости ζ .

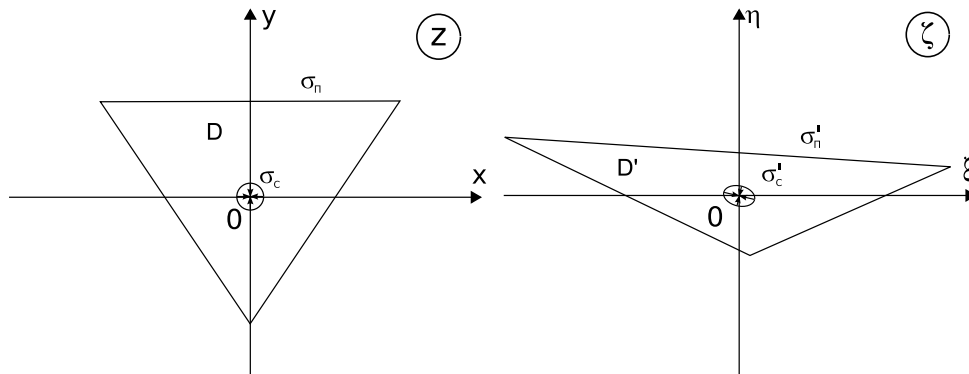


Рис. 2. Контур питания σ_Π на физической плоскости z и соответствующий ему контур σ'_Π на вспомогательной плоскости ζ при $\alpha = 10$, $\beta = 1$ и $\gamma = 0$

Fig. 2. Boundary of reservoir σ_Π on physical plane z and corresponding contour σ'_Π on auxiliary plane ζ at $\alpha = 10$, $\beta = 1$ and $\gamma = 0$

От системы (14)–(15) перейдём к системе $n + 1$ линейных неоднородных алгебраических уравнений (интегралы в системе (14)–(15) заменены суммами в соответствии с квадратурными формулами прямоугольника):

$$f_j + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j \Omega_{ji} \Delta l_j = 2(C_0 - \varphi_0(M)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$\text{где } \Omega_{ji} = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} - V_\eta \right) \xi'_j + \left(V_\eta \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} + V_\xi \right) \eta'_j \right], \quad V_\xi = \frac{\xi_i - \xi_j}{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2}, \quad V_\eta = \frac{\eta_i - \eta_j}{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2},$$

$$\sum_{j=1}^n f_j \Omega_{*j} \Delta l_j = C - \varphi_0(M), \quad (18)$$

$$\text{где } \Omega_{*j} = -\frac{1}{2\pi} \left[\left(V_\xi \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} - V_\eta \right) \xi'_j + \left(V_\eta \frac{\sqrt{D(K_a)}}{\sqrt{D(K_s)}} + V_\xi \right) \eta'_j \right], \quad V_\xi = \frac{\xi_0 - \xi_j}{(\xi_0 - \xi_j)^2 + (\eta_0 - \eta_j)^2}, \quad V_\eta = \frac{\eta_0 - \eta_j}{(\xi_0 - \xi_j)^2 + (\eta_0 - \eta_j)^2}.$$

Систему (17)–(18) можно решить хорошо известными методами решения систем линейных алгебраических уравнений (например, методом Гаусса – Жордана или методом Гаусса – Зейделя), найдём значения функций f_j , $j = 1, 2, \dots, n$ и дебит скважины с треугольным контуром питания Q .

Для оценки воздействия анизотропных свойств пористой среды на дебит Q по аналогии с [8] используем понятие относительного дебита

$$\varepsilon = \frac{Q}{Q_0} - 1. \quad (19)$$

В качестве Q_0 примем дебит скважины в изотропной однородной среде, определяемый по классической формуле Дюпюи [15], то есть для скважины с контуром питания в виде окружности радиусом R_Π . Примем $R_\Pi = 1$, а радиус скважины $R_c = 0.001 R_\Pi$.

На рис. 3 показаны зависимости между относительным дебитом ε и коэффициентами α и β , полученные по результатам моделирования. Количество точек разбиения $n = 200$. Сторона равностороннего треугольника A выбрана так, чтобы площадь, ограниченная треугольным контуром питания σ_Π , была равна площади, ограниченной круговым контуром питания единичного радиуса.

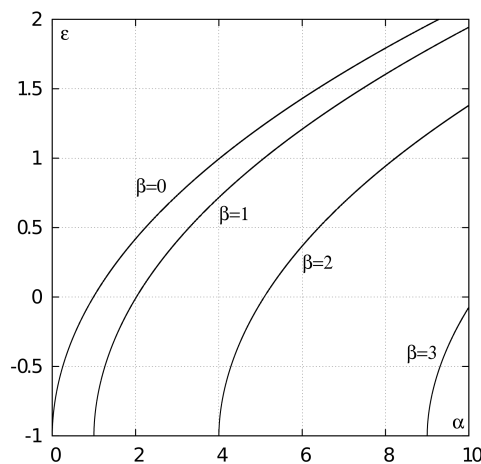


Рис. 3. Зависимости относительного дебита скважины с треугольным контуром питания от коэффициентов α и β

$$(A = 2\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}, \gamma = 0)$$

Fig. 3. Dependencies of the relative well production rate with a three-way boundary of reservoir on the coefficients α and β

$$(A = 2\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}, \gamma = 0)$$

Качественный вид кривых аналогичен случаю работы скважины с эллиптическим или прямоугольным контурами питания [9], это позволяет предположить, что при условии равенства площадей, ограниченных контурами питания, сама форма контура питания не оказывает значительного воздействия на вид графиков, отображающих изменение дебита скважины в анизотропном грунте.

5. Исследование «практической сходимости» решения. Одним из способов верификации результатов, полученных с использованием метода дискретных особенностей, является исследование «практической сходимости» решения. Данный приём восходит к работе [14]. Аналогичная методика проверки решения, полученного с применением метода дискретных особенностей, используется, например, в [16]. В рамках данной проверки выполнено исследование того, как изменение количества точек разбиения контура σ'_H влияет на полученное значение относительного дебита ε . Для определения «практической сходимости» используем формулу:

$$\kappa = \left| \frac{\varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2}}{\varepsilon_{n_1}} \right| \cdot 100\%,$$

где ε_{n_1} – относительный дебит при разбиении контура на n_1 точек, ε_{n_2} – относительный дебит при разбиении контура на n_2 точек ($n_2 > n_1$). Рост количества точек разбиения приводит к тому, что практическая сходимость полученного решения улучшается. В таблицах 1-3 представлены полученные значения «практической сходимости» при различных значениях компонентов тензора проницаемости. Видно, что с ростом количества точек разбиения сходимость улучшается. Появление вклада недиагональных компонент тензора проницаемости ($\beta \neq 0$) приводит к ухудшению практической сходимости. Сравнение данных из таблиц 2 и 3 позволяет предположить, что согласно результатам моделирования работы скважины коэффициент γ мало влияет на дебит и «практическую сходимость».

Таблица 1

Table 1

Зависимость изменения относительного дебита ε от изменения числа n точек разбиения при $\alpha = 10$,

$$\beta = 0, \gamma = 0$$

Dependence of the change in relative well production rate ε from the change in number of partition points

$$\text{at } \alpha = 10, \beta = 0, \gamma = 0$$

Количество точек разбиения n	Относительный дебит ε	Практическая сходимость κ
50	2.103953	-
100	2.102530	$6.761997 \cdot 10^{-4}$
200	2.103142	$2.912550 \cdot 10^{-4}$
300	2.102926	$1.030037 \cdot 10^{-4}$
400	2.102834	$4.355736 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Table 2

Зависимость изменения относительного дебита ε от изменения числа n точек разбиения при $\alpha = 10$,

$$\beta = 3, \gamma = 0$$

Dependence of the change in relative well production rate ε from the change in number of partition points

at $\alpha = 10, \beta = 3, \gamma = 0$

Количество точек разбиения n	Относительный дебит ε	Практическая сходимость κ
50	$-7.308823 \cdot 10^{-2}$	-
100	$-7.467415 \cdot 10^{-2}$	$2.169873 \cdot 10^{-2}$
200	$-7.415147 \cdot 10^{-2}$	$6.999591 \cdot 10^{-3}$
300	$-7.451069 \cdot 10^{-2}$	$4.844481 \cdot 10^{-3}$
400	$-7.454604 \cdot 10^{-2}$	$4.744118 \cdot 10^{-4}$

Таблица 3

Table 3

Зависимость изменения относительного дебита ε от изменения числа n точек разбиения при $\alpha = 10$,

$$\beta = 3, \gamma = 3$$

Dependence of the change in relative well production rate ε from the change in number of partition points

at $\alpha = 10, \beta = 3, \gamma = 3$

Количество точек разбиения n	Относительный дебит ε	Практическая сходимость κ
50	$-7.303486 \cdot 10^{-2}$	-
100	$-7.451751 \cdot 10^{-2}$	$2.030056 \cdot 10^{-2}$
200	$-7.404857 \cdot 10^{-2}$	$6.292951 \cdot 10^{-3}$
300	$-7.435767 \cdot 10^{-2}$	$4.174271 \cdot 10^{-3}$
400	$-7.439163 \cdot 10^{-2}$	$4.567171 \cdot 10^{-4}$

6. Заключение. В работе проведено исследование частного случая двумерной задачи о работе скважины в анизотропном однородном пласте грунта с применением численного метода дискретных особенностей. Задача сведена к системе сингулярного интегрального уравнения и интегрального соотношения. На основе этой системы была получена $n + 1$ линейных неоднородных алгебраических уравнений. В рамках проведения вычислительных экспериментов изучено влияние анизотропии на дебит скважины в случае треугольного контура питания. Используемая в работе математическая модель позволяет предположить, что в её рамках анизотропия грунта сильно влияет на дебит, увеличивая или уменьшая его по сравнению с дебитом скважины в изотропном слое. Причём основное влияние на дебит скважины оказывают компоненты тензора проницаемости, расположенные на главной диагонали. Общий характер зависимости дебита от компонентов тензора проницаемости в случае треугольного контура питания мало отличается от случая работы скважин с эллиптическим или прямоугольным контуром питания.

Список литературы

1. Абросимов А.А. Применение рентгеномографии для изучения фильтрационно-емкостных систем коллекторов нефти и газа. *Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина*. 2015;4(281):5–15
2. Дмитриев Н.М., Мамедов М.Т., Максимов В.М. Фильтрация с предельным градиентом в анизотропных средах. Теория и эксперимент. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011;4(3):749–750.
3. Adams A., Nordquist T., Germaine J., Flemings P. Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks. *Canadian Geotechnical Journal*. 2016;9(53):1474–1482. DOI:10.1139/cgj-2015-0596
4. Дмитриев Н.М., Мурадов А.А. К определению коэффициента гидравлического сопротивления для фильтрационных течений в модельных пористых средах. *Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина*. 2010;1(258):45–57.
5. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. Master Of Science In Civil And Environmental Engineering. Boston; 2015. 277 p.
6. Zhao X., Toksoz M., Cheng C. Stoneley wave propagation across borehole permeability heterogeneities. *Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report*. 1994;9:227–270. DOI:10.1190/1.1931957
7. Дашевский Ю.А. Изучение электрической анизотропии горных пород в скважинах методами стационарной геоэлектрики. Новосибирск; 2008. 101 с.

8. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Математическое моделирование работы совершенной скважины с прямолинейным контуром питания в анизотропном пласте грунта. *Ученые записки Орловского государственного университета*. 2012;3(47):69-74.
9. Пивень В.Ф., Лекомцев Д.Г. Аналитическое и численное моделирование работы совершенной скважины в анизотропном однородном пласте грунта. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016;4(9):389-399. DOI:10.7242/1999-6691/2016.9.4.32
10. Васильев В.А., Николайченко А.С., Гунькина Т.А., Галай Б.Ф., Левченко В.С., Федорчук М.Ю. Оценка влияния сетки скважин на начало обводнения скважинной продукции. *Деловой журнал NEFTEGAZ.RU*. 2017;5(65):86-88.
11. Пивень В.Ф. Математические модели фильтрации жидкости. Орёл; 2015. 408 с.
12. Пивень В.Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений жидкости в анизотропной пористой среде. *Дифференциальные уравнения*. 2009;9(45):1286-1297. DOI: 10.1134/S0012266112090078
13. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М; 1985. 256 с.
14. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). М.; 1995. 520 с.
15. Чарный И.А. Подземная гидродинамика. М.; 1963. 397 с.
16. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Дисс. канд. физ.-мат. наук. 05.13.18. Орёл; 2005. 191 с.

References

1. Abrosimov AA. X-Ray Tomography for Study of Oil and Gas Reservoir Systems. *Proceedings of Gubkin University*. 2015;4(281):5-15. (In Russ.)
2. Dmitriev NM., Mamedov MT., Maksimov VM. Flow with a limiting gradient in anisotropic porous media. Theory and experiment. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2011;4(3):749-750. (In Russ.)
3. Adams A., Nordquist T., Germaine J., Flemings P. Permeability anisotropy and resistivity anisotropy of mechanically compressed mudrocks. *Canadian Geotechnical Journal*. 2016;9(53):1474-1482. DOI:10.1139/cgj-2015-0596
4. Dmitriev NM., Muradov AA. To determination of coefficient of hydraulic resistance for fluid flows in modeling porous media. *Proceedings of Gubkin University*. 2010;1(258):45-57. (In Russ.)
5. Nordquist T. Permeability Anisotropy of Resedimented Mudrocks. Master Of Science In Civil And Environmental Engineering. Boston; 2015. 277 p.
6. Zhao X., Toksoz M., Cheng C. Stoneley wave propagation across borehole permeability heterogeneities. *Earth Resources Laboratory Industry Consortia Annual Report*. 1994;9:227-270. DOI:10.1190/1.1931957
7. Dashevskii YuA. Izuchenie elektricheskoi anizotropii gornyx porod v skvazhinakh metodami statsionarnoi geoelektriki [Study of the electrical anisotropy of rocks in wells using the methods of stationary geoelectrics]. Novosibirsk; 2008. 101 p.
8. Piven' VF., Lekomtsev DG. Mathematical modeling work of the drilled well with direct external boundary of reservoir in anisotropic bedlayer. *Scientific notes of Orel State University*. 2012;3(47):69-74. (In Russ.)
9. Piven' VF., Lekomtsev DG. Analytical and numerical modeling of the work of a perfect well in anisotropic homogeneous soil formation. *Computational Continuum Mechanics*. 2016;4(9):389-399. DOI:10.7242/1999-6691/2016.9.4.32 (In Russ.)
10. Vasil'ev VA., Nikolaichenko AS., Gun'kina TA., Galaj BF., Levchenko VS., Fedorchuk MYu. Otsenka vliyaniya setki skvazhin na nachalo obvodneniya skvazhinnoi produktsii [Assessment of the effect of a well net on the start of flow of well products]. *Delovoi zhurnal NEFTEGAZ.RU [Business magazine NEFTEGAZ.RU]*. 2017;5(65):86-88.
11. Piven' VF. Matematicheskiye modeli fil'tratsii zhidkosti [Mathematical models of fluid filtration]. Orel; 2015. 408 p.
12. Piven' VF. Investigation of boundary value problems for plane-parallel fluid flows in an anisotropic porous medium. *Differential Equations*, 2009;9(45):1313-1325. DOI: 10.1134/S0012266109090079
13. Belotserkovskii SM., Lifanov IK. Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh [Numerical methods in singular integral equations]. Moscow; 1985. 256 p.
14. Lifanov IK. Metod singulyarnykh integral'nykh uravnenii i chislennyy eksperiment (v matematicheskoi fizike, aerodinamike, teorii uprugosti i difraktsii voln) [The Method of Singular Integral Equations and Numerical Experiment (in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction)]. Moscow; 1995. 520 p.
15. Charnyi IA. Podzemnaya gidrogazodinamika [Underground Fluid Dynamics]. Moscow; 1963. 397 p.
16. Fedyaev IuS. Matematicheskoe modelirovanie evolyutsii dvumernoi granitsy razdela zhidkostei razlichnoi vyazkosti v kusochno-odnorodnykh i kusochno-neodnorodnykh sloyakh grunta [Mathematical modeling of two-dimensional evolution of the interface between fluids of different viscosity in the piecewise-homogeneous and piecewise inhomogeneous layers of soil]. PhD Dissertation. Orel; 2005. 191 p.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.06.2026

Received June 1, 2026

Поступила после рецензирования 10.07.2026

Revised July 10, 2026

Принята к публикации 14.07.2026

Accepted July 14, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Лекомцев Денис Геннадьевич – старший преподаватель кафедры экспериментальной и теоретической физики, Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, г. Орел, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Denis G. Lekomtsev – Senior Lecturer of the Department of Experimental and Theoretical Physics, Orel State University named after I. S. Turgenev, Orel, Russia

[К содержанию](#)

Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде

Бардакова И. Н. 

(Статья представлена членом редакционной коллегии Носковым А. В.)
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
bardakova@bsuedu.ru

Аннотация. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов, пересекающих мишень конечной толщины из периодической слоистой среды с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. Получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения. Показано, что изменение отношения значений действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов слоев и изменение отношения толщин слоев существенно влияет на спектрально-угловые характеристики когерентного рентгеновского излучения. Установлено, что при некоторых режимах ослабление фотопоглощения в составе второго слоя периода многослойной среды ведёт к заметному увеличению плотностей излучения, дифференцированных по частотам и направлениям распространения.

Ключевые слова: периодическая слоистая среда, динамическая дифракция, когерентное рентгеновское излучение

Для цитирования: Бардакова И.Н. Спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в периодической слоистой среде. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):307–317.
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-307-317 EDN UIFBQZ

Original Research

Spectral-angular Densities of Parametric X-ray Radiation and Diffraction Transition Radiation from Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium

Irina N. Bardakova 

(Article submitted by a member of the editorial board Noskov A. V.)
Belgorod National Research University,
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russia,
bardakova@bsuedu.ru

Abstract. A dynamic theory of coherent X-ray radiation from relativistic electrons traversing a finite-thickness target made of a periodic layered medium with three layers per period in Laue scattering geometry is developed. Expressions describing the spectral-angular densities of parametric X-ray radiation and diffracted transition radiation are derived. It is shown that changing the ratio of the real parts of the dielectric susceptibilities of the layer materials and changing the ratio of the layer thicknesses significantly affects the spectral-angular characteristics of the coherent X-ray emission. It is established that, under certain conditions, weakening of photoabsorption within the second layer of the multilayer medium period leads to a noticeable increase in the radiation densities differentiated by frequencies and propagation directions.

Keywords: Periodic Layered Medium, Dynamic Diffraction, Coherent X-ray Radiation

For citation: Bardakova IN. Spectral-angular Densities of Parametric X-ray Radiation and Diffraction Transition Radiation from Relativistic Electrons in a Periodic Layered Medium. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):307–317. (In Russ.)
DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-307-317 EDN UIFBQZ

1. Введение. В рамках динамической теории дифракции когерентное рентгеновское излучение (КРИ) релятивистских электронов, пересекающих мишень из периодической слоистой среды, впервые рассматривалось в работе [1]. В этой работе КРИ рассматривалось как суммарное параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ) и дифрагированное переходное излучение (ДПИ). ПРИ генерируется в направлении рассеяния Брэгга в результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистских электронов на слоях периодической среды, аналогично рассеянию в монокристалле на системе параллельных атомных плоскостей монокристалла [2, 3]. ДПИ возникает вследствие дифракции на слоях мишени переходного излучения, генерируемого вблизи передней поверхности мишени, аналогично генерации ДПИ в монокристалле [4, 5]. Как показывают сопоставительные расчёты, формулы, фигурирующие в работе [1], хорошо описывают данные эксперимента по излучению релятивистских электронов в периодической слоистой среде [6]. Когерентное рентгеновское излучение релятивистского электрона

в периодической слоистой среде для общего случая асимметричного отражения поля электрона относительно поверхности мишени в геометрии рассеяния Лауэ впервые рассматривалось в работе [7], а в геометрии рассеяния Брэгга – в работе [8]. В работах [7, 8] было показано, что в периодической слоистой среде интенсивность КРИ релятивистских электронов должна быть в несколько раз выше, чем КРИ релятивистского электрона в монокристалле в аналогичных условиях. Это связано с тем, что когерентное рентгеновское излучение в периодической слоистой среде имеет более широкий спектр, чем в монокристалле, так как в периодической слоистой среде электрон пересекает меньшее число границ неоднородностей, чем в монокристалле при одинаковом пути электрона в мишени. В работе [9] развита динамическая теория КРИ пучка релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду в геометрии рассеяния Брэгга с учетом многократного рассеяния электронов на атомах мишени, показана возможность проявления эффектов динамической дифракции. Необходимо отметить большой интерес, в последнее время, к теоретическому и экспериментальному исследованию рентгеновского излучения мягкого рентгеновского диапазона в периодических слоистых средах при небольших энергиях релятивистских электронов [10, 11, 12, 13, 14].

Во всех цитируемых работах излучение релятивистских электронов рассматривалось в периодической слоистой среде с двумя различными слоями на периоде. КРИ релятивистских электронов, пересекающих пластину конечной толщины из периодической слоистой среды в геометрии рассеяния Брэгга с тремя слоями на периоде, впервые рассматривалось в работе [15], а с учетом расходимости электронного пучка – в работе [16]. В работе [15] были получены выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ в такой структуре, было выявлено, что, меняя параметры слоев, можно влиять на параметры динамического рассеяния рентгеновского излучения. В работах [17, 18, 19] исследовалась возможность проявления эффектов динамической дифракции в ПРИ и ДПИ релятивистских электронов в трехслойной структуре.

В настоящей работе впервые рассматривается когерентное рентгеновское излучение релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую среду с тремя различными слоями на периоде в геометрии рассеяния Лауэ, когда ПРИ и ДПИ выходят через заднюю границу мишени. Получены и исследованы выражения, описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ.

2. Геометрия процесса излучения. Рассмотрим излучение релятивистского электрона в пластине из периодической слоистой среды с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ (рис. 1). В этом случае рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени и распространяется в направлении рассеяния Брэгга.

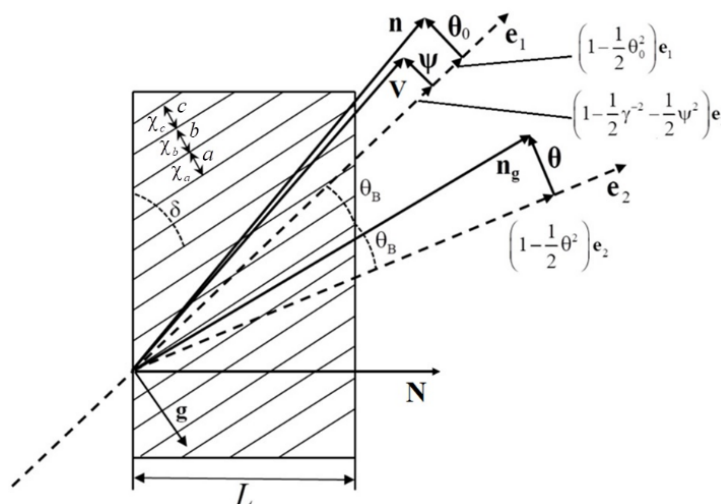


Рис. 1. Геометрия процесса излучения

Fig. 1. Geometry of the radiation process

Пластина образована тремя аморфными слоями различного типа, периодически расположенными, с толщинами, равными a , b и c . Период периодической слоистой среды составляет $T = a + b + c$, тогда как толщина самой пластины равна L . Диэлектрические восприимчивости атомов данных слоев заданы величинами χ_a , χ_b и χ_c . Рассматривается случай асимметричного отражения псевдофотонов, порождаемых кулоновским полем релятивистского электрона, относительно поверхности мишени, при условии, что отражающие слои ориентированы под некоторым углом δ к этой поверхности. В том случае, когда угол между поверхностью мишени и слоями принимает значение $\delta = \pi/2$, данная конфигурация отвечает симметричному отражению поля электрона.

Направление движения оси пучка релятивистских электронов задается единичным вектором $\mathbf{e}_1$, а отклонение скорости $\mathbf{V}$ произвольного электрона пучка относительно оси пучка $\mathbf{e}_1$ определяется

вектором $\psi(\psi_{\perp}, \psi_{\parallel})$. Направление псевдофотона кулоновского поля релятивистского электрона и фотона когерентного рентгеновского излучения вблизи направления оси пучка определяется углом $\theta_0(\theta_{0\perp}, \theta_{0\parallel})$, волновой вектор этих фотонов равен: $\mathbf{k} = \omega \mathbf{n}$. В результате рассеяния псевдофотонов кулоновского поля релятивистского электрона, а также фотонов переходного излучения на системе параллельных атомных плоскостей монокристалла вблизи направления рассеяния Брэгга $\mathbf{e}_2$ генерируются параметрическое рентгеновское излучение и дифрагированное переходное излучение, с волновым вектором $\mathbf{k}_g = \omega \mathbf{n}_g$. Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_g$ являются единичными векторами.

Угол когерентного излучения, отсчитываемый относительно оси детектора $\mathbf{e}_2$, определяется вектором $\theta(\theta_{\perp}, \theta_{\parallel})$. Для дальнейшего анализа представим рассматриваемые угловые векторы в виде составляющих:

$$\theta_0 = \theta_{0\perp} + \theta_{0\parallel}, \quad \theta = \theta_{\perp} + \theta_{\parallel}, \quad \psi = \psi_{\perp} + \psi_{\parallel}.$$

Векторы $\theta_{\perp}, \theta_{0\perp}$ и $\psi_{\perp}$ ортогональны плоскости, образованной векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_g$. Векторы $\theta_{\parallel}, \theta_{0\parallel}$ и $\psi_{\parallel}$ параллельны плоскости векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_g$. Для решения задачи рассматриваемые углы и вектора свяжем соотношениями:

$$\mathbf{V} = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^{-2} - \frac{1}{2}\psi^2\right) \mathbf{e}_1 + \psi, \quad \mathbf{n}_g = \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right) \mathbf{e}_2 + \theta, \quad \mathbf{n} = \left(1 - \frac{1}{2}\theta_0^2\right) \mathbf{e}_1 + \theta_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_1 \cdot \psi = 0, \mathbf{e}_1 \cdot \theta_0 = 0, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos 2\theta_B, \mathbf{e}_2 \cdot \theta = 0, |\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_g| = 1$.

Использование указанных соотношений допустимо вследствие выполнения условий: $\gamma^{-2} \ll 1, \psi \ll 1, \theta \ll 1, \theta_0 \ll 1$, из которых следуют приближенные равенства: $V^2 \approx 1, n_g^2 \approx 1$ и $n^2 \approx 1$. $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$ – Лоренц-фактор релятивистского электрона.

Вектор $\mathbf{g}$ (рис. 1) перпендикулярный слоям мишени, его длина равна $g = 2\pi/Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и он является аналогом вектора обратной решетки монокристалла. С другой стороны, модуль вектора обратной решетки определяется выражением: $g = \frac{2\omega_B \sin \theta_B}{V}$, где ω_B – частота Брэгга, θ_B – угол Брэгга. Тогда частота Брэгга может быть записана в виде: $\omega_B = \frac{\pi n}{T \sin \theta_B}$. В случае дифракции Брэгга волновые векторы падающей $\mathbf{k}$ и дифрагированной волны $\mathbf{k}_g$ связаны соотношением: $\mathbf{k}_g = \mathbf{k} + \mathbf{g}$.

3. Спектрально-угловая плотность излучения. В работе [20] исследовалась угловая плотность ПРИ в трехслойной структуре без учета ДПИ. Проведя вычисления, аналогичные вычислениям работы [20], в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции рентгеновского излучения в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде получены выражения, описывающие спектрально-угловую плотность ПРИ и ДПИ:

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ПРИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{\Omega^{(s)^2}}{(\Gamma - \chi'_0)^2} R_{\text{ПРИ}}^{(s)}, \quad (2)$$

$$R_{\text{ПРИ}}^{(s)} = \left(1 - \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}\right)^2 \frac{1 + \exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) - 2 \exp(-b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(s)}) \cos\left(b^{(s)} \left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)\right)}{\left(\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2 + \rho^{(s)^2} \Delta^{(s)^2}}, \quad (3)$$

$$\omega \frac{d^3 N_{\text{ДПИ}}^{(s)}}{d\omega d\theta_{\perp} d\theta_{\parallel}} = \frac{e^2}{4\pi^2} \Omega^{(s)^2} \left(\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma - \chi'_0}\right)^2 R_{\text{ДПИ}}^{(s)}, \quad (4)$$

$$R_{\text{ДПИ}}^{(s)} = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{(s)^2} + \varepsilon} \left[\exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(1)}) + \exp(-2b^{(s)} \rho^{(s)} \Delta^{(2)}) - 2 \exp\left(-b^{(s)} \rho^{(s)} \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{2b^{(s)} \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon}\right) \right], \quad (5)$$

где введены обозначения: $\Omega^{(1)} = \theta_{\perp} - \psi_{\perp}, \Omega^{(2)} = \theta_{\parallel} + \psi_{\parallel}, \Gamma = \gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2,$

$$\Delta^{(s)} = \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{\xi^{(s)}}{\sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}} - \frac{\kappa^{(s)}}{\sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}, b^{(s)} = \frac{1}{2 \sin(\delta - \theta_B)} \frac{L}{L_{\text{ext}}^{(s)}}, \sigma^{(s)} = \frac{1}{v^{(s)} |\chi'_0|} (\gamma^{-2} + (\theta_{\perp} - \psi_{\perp})^2 + (\theta_{\parallel} + \psi_{\parallel})^2 + |\chi'_0|),$$

$$\chi'_0 = \chi'_b \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right), \xi^{(s)}(\omega) = \eta^{(s)}(\omega) + \frac{1 - \varepsilon}{2v^{(s)}}, \varepsilon = \frac{\sin(\delta + \theta_B)}{\sin(\delta - \theta_B)},$$

$$\eta^{(s)}(\omega) = \frac{2\pi^2 n^2 L_{\text{ext}}^{(s)}}{T^2 \omega_B} \left(\frac{\omega}{\omega_B} \left(1 - \theta_{\parallel} \sqrt{\frac{T^2 \omega_B^2}{n^2 \pi^2} - 1} \right) - 1 \right), L_{\text{ext}}^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)} \omega |\chi'_b| I^*},$$

$$\begin{aligned}
I^* &= \sqrt{(1 - \delta'_{ab})\delta'_1 \sin^2(n\pi I_1) + (\delta'_{ab} - 1)\delta'_2 \sin^2(n\pi I_2) + \delta'_1 \delta'_2 \sin^2(n\pi I_3)}, \\
I_1 &= \left(1 + \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad I_2 = \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1}\right)^{-1}, \quad I_3 = \left(1 + \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\right)^{-1}, \\
\delta'_1 &= \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - \delta'_{ab}, \quad \delta'_2 = \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} - 1, \quad \delta'_{ab} = \frac{\chi'_a}{\chi'_b}, \quad \delta'_{ac} = \frac{\chi'_a}{\chi'_c}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Параметры динамического рассеяния:

$$v^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{I^*}{I_2 \left| \frac{a}{b} \delta'_{ab} + 1 + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} \right|}, \tag{7}$$

$$\rho^{(s)} = \frac{n\pi}{C^{(s)}} \frac{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} \rho_c \right|}{I^*}, \tag{8}$$

$$\kappa^{(s)} = \frac{C^{(s)}}{n\pi} \frac{\sqrt{\rho_1 \sin^2(n\pi I_1) + \rho_2 \sin^2(n\pi I_2) + \rho_3 \sin^2(n\pi I_3)}}{I_2 \left| \frac{a}{b} \rho_a + \rho_b + \frac{a}{b} \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} \rho_c \right|}, \tag{9}$$

где $\rho_1 = (\rho_a - \rho_b)(\rho_a - \rho_c)$, $\rho_2 = (\rho_b - \rho_a)(\rho_b - \rho_c)$, $\rho_3 = (\rho_c - \rho_a)(\rho_c - \rho_b)$, $\rho_a = \frac{\chi''_a}{|\chi'_b|}$, $\rho_b = \frac{\chi''_b}{|\chi'_b|}$, $\rho_c = \frac{\chi''_c}{|\chi'_b|}$.

Так как в рентгеновском диапазоне частот излучения выполняется неравенство: $\frac{2\pi^2 L_{\text{ext}}^{(s)} n^2}{T^2 \omega_B} \gg 1$, то величина $\eta^{(s)}(\omega)$ является быстро изменяющейся функцией с изменением частоты излучения ω в окрестности частоты Брэгга ω_B . $L_{\text{ext}}^{(s)}$ – длина экстинкции рентгеновских волн в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде.

Параметр $b^{(s)}$, характеризующий толщину мишени L , соответствует половине длины пути электрона внутри мишени $L_e = L/\sin(\delta - \theta_B)$, выраженной в длине экстинкции $L_{\text{ext}}^{(s)}$.

4. Численные расчеты и анализ. Используя полученные в настоящей работе выражения, проведем численные расчеты при определенных параметрах и проведем анализ результатов вычислений.

Рассмотрим излучение релятивистского электрона движущегося вдоль оси электронного пучка $\mathbf{e}_1$, когда: $\psi_{\perp} = 0$, $\psi_{\parallel} = 0$. Период периодической слоистой среды примем равным: $T = a + b + c = 0.002$ мкм, в этом случае отношения толщин слоев: a/b и a/c , определяют толщины всех слоев. Возьмем угол Брэгга равным: $\theta_B = 2.25^\circ$, который является углом между осью пучка релятивистских электронов и отражающими слоями. В этом случае частота Брэгга принимает значение: $\omega_B = 8$ кэВ. Действительную часть диэлектрической восприимчивости второго слоя, положим при рассматриваемой частоте излучения как у углерода: $\chi'_b = -2.25 \cdot 10^{-5}$, при этом отношения: $\delta'_{ab} = \chi'_a/\chi'_b$, $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$, будут определять реальные части диэлектрических восприимчивостей первого и третьего слоев. Расчеты выполним для σ -поляризованных волн, когда: $s = 1$.

Рассмотрим спектрально-угловую плотность ПРИ релятивистского электрона с Лоренц-фактором равным $\gamma = 500$. Большие энергии электрона рассматривать смысла нет, так как спектрально-угловая плотность ПРИ насыщается при этой энергии для рассматриваемых параметров. В расчетах будем полагать $\theta_{\parallel} = 0$, при этом угол максимума угловой плотности ПРИ меняется в зависимости от параметров слоев согласно выражению:

$$\theta_{\perp \max} = \sqrt{\gamma^{-2} - \chi'_0} = \sqrt{\gamma^{-2} + |\chi'_b| \left(\delta'_{ab} I_1 + I_2 + \frac{\delta'_{ab}}{\delta'_{ac}} I_3 \right)}.$$

Так как при вычислениях параметры слоев будут изменяться, то $\theta_{\perp \max}$ также будет изменяться. Расчеты выполним для значения угла наблюдения $\theta_{\perp} = 10$ mrad.

На рис. 2 представлены кривые, построенные по формуле (2), описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ для разных значений параметра δ'_{ac} , при фиксированных других параметрах.

Из рисунка следует, что при уменьшении параметра δ'_{ac} увеличивается спектрально-угловая плотность ПРИ, также как и значения параметра $v^{(1)}$, а также что частота излучения меняется, так как резонансное условие:

$$\sigma^{(s)} + \frac{\xi^{(s)} - \sqrt{(\xi^{(s)})^2 + \varepsilon}}{\varepsilon} \approx 0$$

зависит от интерференционного параметра $v^{(1)}$.

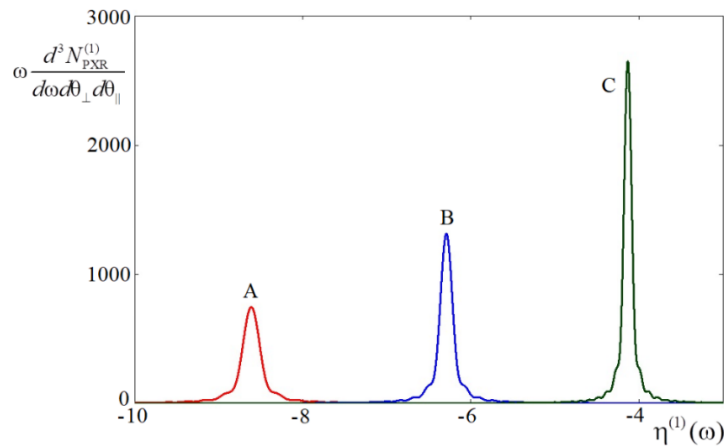


Рис. 2. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных значениях параметра $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$.

Обозначения: A ($\delta'_a = 0.4$), B ($\delta'_a = 0.3$), C ($\delta'_a = 0.2$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 2. Spectral-angular densities of PXR at different values of the parameter $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$.

Designations: A ($\delta'_a = 0.4$), B ($\delta'_a = 0.3$), C ($\delta'_a = 0.2$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

На рис. 3 представлены кривые, построенные по формуле (2), описывающие спектрально-угловые плотности ПРИ для разных значений отношений толщины первого и второго слоев: a/b , при фиксированных других параметрах.

Из рисунка следует, что при уменьшении отношения a/b увеличивается спектрально-угловая плотность ПРИ, так же, как и параметр $\nu^{(1)}$.

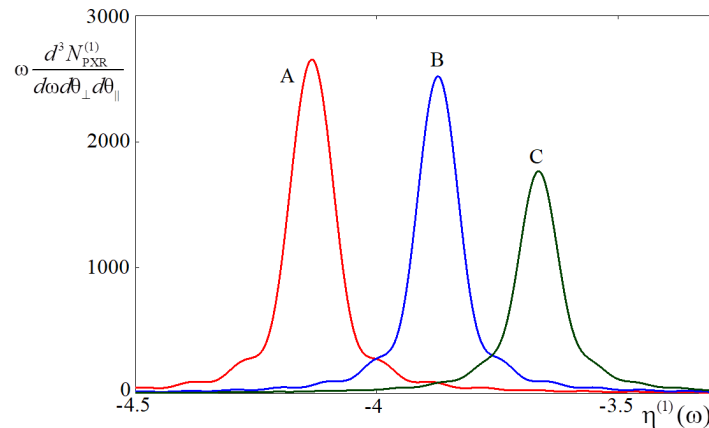


Рис. 3. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных отношениях слоев a/b .

Обозначения: A ($a/b = 0.5$), B ($a/b = 0.7$), C ($a/b = 2$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Fig. 3. Spectral-angular densities of PXR at different layer ratios a/b .

Designations: A ($a/b = 0.5$), B ($a/b = 0.7$), C ($a/b = 2$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$

Рассмотрим возможность проявления динамического эффекта аномально низкого фотопоглощения в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде. Этот эффект впервые наблюдался в монокристаллической пластине при рассеянии свободных рентгеновских лучей и получил названия эффекта Бормана [21]. Он заключается в том, что при динамической дифракции рентгеновского излучения падающая и дифрагированная волна образуют стоячую волну. Можно подобрать условия, чтобы пучности одной стоячей волны находились между атомными плоскостями, где электронная плотность, а следовательно, и фотопоглощение минимальны. При этом для другой стоячей волны пучности находятся на атомных плоскостях, где электронная плотность и фотопоглощение максимальны.

Для рассматриваемой в настоящей работе периодической слоистой среды с тремя слоями на периоде схема с двумя стоячими волнами показана на рис. 4. Положим, что слой с минимальным фотопоглощением будет второй на периоде, с диэлектрической восприимчивостью χ_b и толщиной b . В этом случае стоячая волна, которая поглощается аномально низко, на рис. 4 изображена сплошной линией, а стоячая волна, которая значительно поглощается, изображена пунктирной линией. Значение параметра $\kappa^{(s)}$

определяет расположение в слоистой среде стоячей волны относительно слоев мишени. Параметр $\kappa^{(s)}$ принимает значения из промежутка $0 < \kappa^{(s)} < 1$. Если максимумы пучностей стоячей волны лежат на слое с большей электронной плотностью, то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к нулю, если максимумы пучности лежат на слое с меньшей плотностью электронов, то значение параметра $\kappa^{(s)}$ ближе к единице.

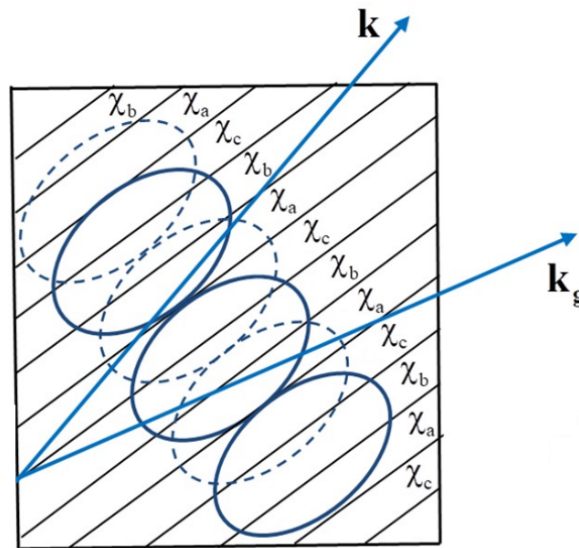


Рис. 4. Расположение двух стоячих волн в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде

Fig. 4. Arrangement of two standing waves in a periodic layered medium with three layers per period

На рис. 5 представлены кривые, построенные по формуле (9), описывающие значения параметра $\kappa^{(1)}$ в зависимости от отношения толщин первого и второго слоев a/b при фиксированном отношении a/c . Кривые построены для различных значений фотопоглощения второго слоя, которое определяется параметром: $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$, при этом фотопоглощение первого и третьего слоев фиксированы.

Из рис. 5 следует, что расположение пучности стоячей волны на слое с минимальным фотопоглощением будет определяться отношением a/b при фиксированном a/c . Также можно менять отношения a/b и a/c одновременно, в этом случае период слоистой структуры T должен сохраняться.

Также из рис. 5 следует, что при рассматриваемых параметрах максимальное значение параметра $\kappa^{(1)}$ будет при $a/b \approx 0.2$. Уменьшение фотопоглощения второго слоя ρ_b приводит к значительному увеличению параметра $\kappa^{(1)}$.

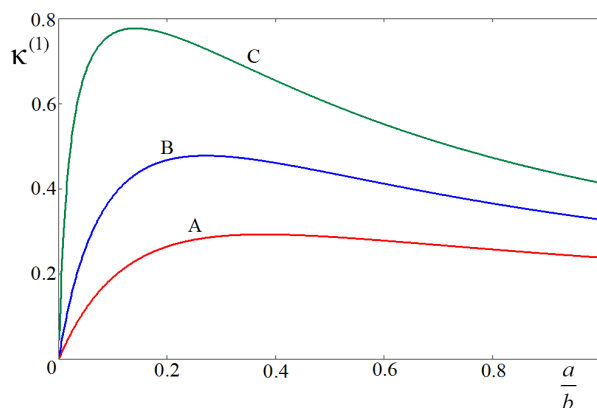


Рис. 5. Зависимость параметра, определяющего anomalously low фотопоглощение рентгеновского излучения в периодической среде, от соотношения слоев a/b при различных значениях фотопоглощения второго слоя

$\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.
Обозначения: A ($\rho_b = 0.1$), B ($\rho_b = 0.05$), C ($\rho_b = 0.01$).

Параметры: $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $a/c = 1$

Fig. 5. Dependence of the parameter determining anomalously low photoabsorption of X-ray radiation in a periodic medium on the layer ratio a/b at different values of photoabsorption of the second layer $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.

Designations: A ($\rho_b = 0.1$), B ($\rho_b = 0.05$), C ($\rho_b = 0.01$).

Parameters: $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $a/c = 1$

Рассмотрим влияние эффекта anomalously low фотопоглощения, аналогичного эффекту Бормана, на спектрально-угловую плотность ПРИ.

На рис. 6 представлены зависимости, полученные по формуле (2), характеризующие спектрально-угловые плотности параметрического рентгеновского излучения при различных значениях параметра фотопоглощения рентгеновского излучения $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$ в условиях асимметрии отражения, соответствующей параметру $\varepsilon = 3$.

Из рисунка следует значительный рост амплитуды спектра ПРИ в случае уменьшения фотопоглощения второго слоя, при этом общий параметр фотопоглощения $\rho^{(s)}$ всего слоя (8) изменяется незначительно: $\rho^{(1)} = 0.1$ ($\rho_b = 0.107$), $\rho^{(1)} = 0.080$ ($\rho_b = 0.05$) и $\rho^{(1)} = 0.059$ ($\rho_b = 0.01$).

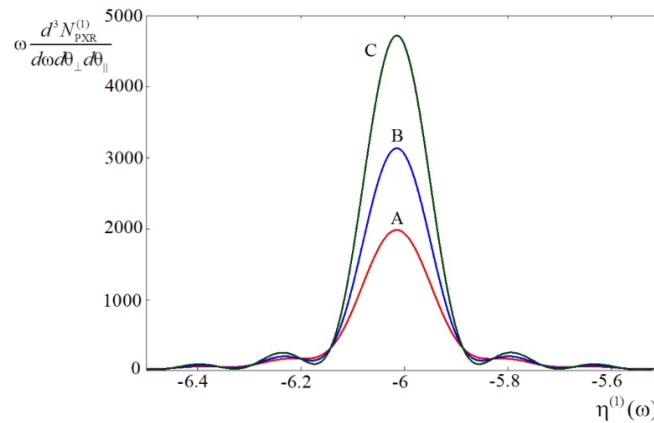


Рис. 6. Спектрально-угловые плотности ПРИ при различных значениях фотопоглощения второго слоя $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.
Обозначения: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/b = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Fig. 6. Spectral-angular densities of PXR at different values of photoabsorption of the second layer $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$.

Designations: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/b = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Таким образом, в случае, когда пучности стоячей волны находятся на слое с малой электронной плотностью, где фотопоглощение наименьшее, интенсивность ПРИ может значительно возрасти. Можно сделать вывод, что если периодическая слоистая среда с тремя слоями в периоде будет состоять из слоев, состоящих из тяжелых и легких элементов, то интенсивное ПРИ будет генерироваться из-за резкой неоднородности электронной плотности в периоде, а распространяться излучение может таким образом, чтобы поглощение было минимальным. Это будет происходить, когда пучности стоячей волны, которые переносят практически всю энергию излучения, находятся на слое с малой электронной плотностью. Разработка и оптимизация таких мишеней позволит существенно увеличить интенсивность ПРИ за счет уменьшения фотопоглощения излучения. Интенсивность ПРИ насыщается с увеличением энергии релятивистских электронов из-за эффекта плотности, когда поле электрона перестает расти в монокристалле из-за поляризации большого числа атомов. Поэтому уменьшение фотопоглощения рентгеновского излучения в мишени является не только важным, но и единственным способом для увеличения интенсивности ПРИ.

Исследуем спектрально-угловую плотность дифрагированного переходного излучения в рассматриваемой периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Так как ДПИ не насыщается с повышением энергии релятивистских электронов, то рассмотрим излучение релятивистского электрона с Лоренц-фактором $\gamma = 1000$. Расчеты выполним для угла наблюдения: $\theta_{\perp\text{max}} = 1\text{ mrad}$, $\theta_{\parallel} = 0$, который соответствует максимуму угловой плотности ДПИ.

На рис. 7 представлены результаты расчета спектрально-угловой плотности ДПИ для разных значений параметра $\delta'_{ac} = \chi'_a/\chi'_c$, при фиксированных остальных параметрах структуры. Расчеты выполнены на основе выражения (4).

На рис. 8 представлены кривые, построенные по формуле (4), описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ для разных значений отношений: a/b . Из рисунка следует, что при уменьшении a/b значительно увеличивается спектрально-угловая плотность ДПИ.

На рис. 9 представлены кривые, построенные по формуле (4), описывающие спектрально-угловые плотности ДПИ для различных значений параметра фотопоглощения рентгеновского излучения второго слоя: $\rho_b = \chi_b''/|\chi_b'|$, в случае асимметрии отражения соответствующей параметру: $\varepsilon = 3$. При этом максимальная длина пути фотона в мишени: $L_{ph} = 17\text{ мкм}$. Из рисунка следует значительный рост амплитуды спектрально-угловой плотности ДПИ в случае уменьшения фотопоглощения второго слоя. Рост связан с увеличением параметра $\kappa^{(1)}$, определяющего проявления эффекта, аналогичного эффекту Бормана: А ($\kappa^{(1)} \approx 0.29$), В ($\kappa^{(1)} \approx 0.44$), С ($\kappa^{(1)} \approx 0.6$).

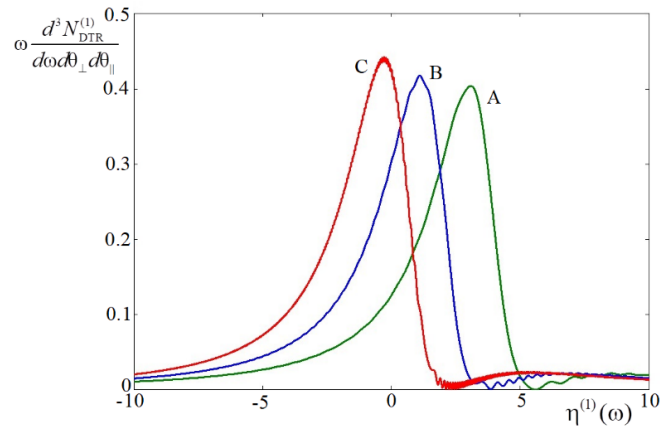


Рис. 7. Спектрально-угловые плотности ДПИ при различных значениях параметра $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$.
Обозначения: А ($\delta'_a = 1$), В ($\delta'_a = 0.5$), С ($\delta'_a = 0.1$). Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$,
 $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Fig. 7. Spectral-angular densities of DTR at different values of the parameter $\delta'_a = \chi'_a/\chi'$. Designations: А ($\delta'_a = 1$), В ($\delta'_a = 0.5$),
С ($\delta'_a = 0.1$). Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $a/b = 0.5$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

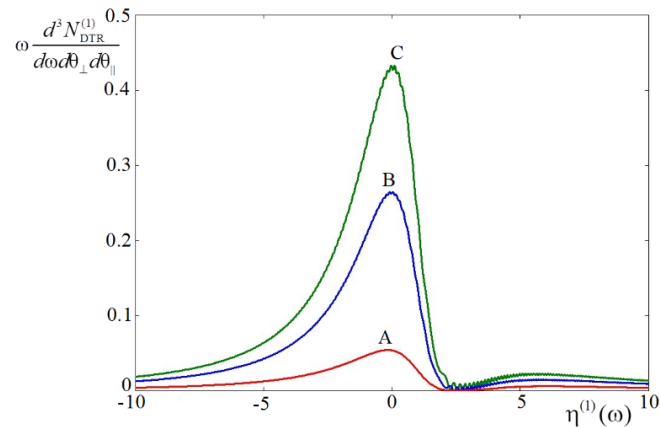


Рис. 8. Спектрально-угловые плотности ДПИ при различных отношениях слоев a/b .
Обозначения: А ($a/b = 2$), В ($a/b = 0.7$), С ($a/b = 0.5$).

Параметры: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

Fig. 8. Spectral-angular densities of DTR at different layer ratios a/b .

Designations: А ($a/b = 2$), В ($a/b = 0.7$), С ($a/b = 0.5$).

Parameters: $\delta'_{ab} = 2$, $\delta'_a = 0.2$, $a/c = 1$, $\rho_a = 0.3$, $\rho_b = 0.1$, $\rho_c = 0.2$, $L = 2\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$

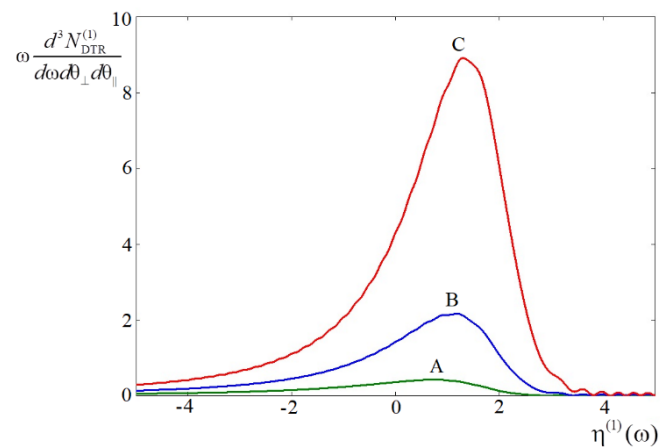


Рис. 9. Влияние эффекта аномально низкого фотопоглощения на спектрально-угловую плотность ДПИ.

Параметры: $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$.

Обозначения: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$)

Fig. 9. Influence of the anomalously low photoabsorption effect on the spectral-angular density of DTR.

Parameters: $L = 2\mu\text{m}$, $L_e = 50\mu\text{m}$, $L_{ph} = 17\mu\text{m}$, $\varepsilon = 3$, $\delta = \pi/40$.

Designations: А ($\rho_b = 0.1$), В ($\rho_b = 0.05$), С ($\rho_b = 0.01$)

Таким образом, динамический эффект anomalно низкого фотопоглощения фотонов ДПИ, аналогичный эффекту Бормана в монокристалле, может проявиться очень ярко в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Используя такие структуры в источниках квазимонохроматического, перестраиваемого по частоте рентгеновского излучения, можно в десятки раз увеличить интенсивность рентгеновского излучения.

5. Заключение. Развита динамическая теория когерентного рентгеновского излучения релятивистских электронов, пересекающих периодическую слоистую мишень с тремя слоями на периоде в геометрии рассеяния Лауэ, когда когерентное рентгеновское излучение выходит через заднюю границу мишени в направлении рассеяния Брэгга. Когерентное рентгеновское излучение рассматривается в геометрии рассеяния Лауэ в рамках двухволнового приближения динамической теории дифракции в виде суммы вкладов параметрического рентгеновского излучения и дифрагированного переходного излучения с учетом их интерференции. Получены выражения, спектрально-угловые плотности ПРИ и ДПИ.

На основе полученных выражений проведены численные расчеты спектрально-угловых плотностей параметрического рентгеновского и дифрагированного переходного излучений при фиксированном угле наблюдения. Установлено, что изменение отношения действительных частей диэлектрических восприимчивостей материалов, образующих слои периодической структуры, существенно влияет на спектрально-угловое распределение ПРИ. Показано также, что варьирование относительных толщин слоёв приводит к заметному изменению спектрально-угловых плотностей как параметрического рентгеновского, так и дифрагированного переходного излучений.

Исследовано влияние фотопоглощения в отдельных слоях периодической структуры на характеристики когерентного рентгеновского излучения. Установлено, что при определённых соотношениях параметров уменьшение фотопоглощения во втором слое периода сопровождается существенным увеличением спектрально-угловых плотностей ПРИ и ДПИ. Полученный результат аналогичен проявлению эффекта anomalно низкого фотопоглощения (эффекта Бормана) в монокристаллах и обусловлен преимущественной локализацией максимумов пучностей стоячей электромагнитной волны во втором слое трёхслойной периодической структуры.

Список литературы

1. Nasonov N.N., Kaplin V.V., Uglov S.R., Piestrup M.A. and Gary C.K. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68:036504. DOI:10.1103/PhysRevE.68.036504
2. Garibian G.M. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky V.G., Feranchuk I.D. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of X-rays. *Physical Review A*. 1989;40:4322. DOI:10.1103/PhysRevA.40.4322
5. Nasonov N.N. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148. DOI:10.1016/S0375-9601(98)00544-8
6. Kaplin V.V. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. *Appl. Phys. Lett.* 2000;76(24):3647-3649. DOI:10.1063/1.126735
7. Blazhevich S.V., Kolosova I.V. and Noskov A.V. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547-554. DOI:10.1134/S1063776112030187
8. Blazhevich S.V., Noskov A.V. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B*. 2013;309:70-75. DOI:10.1016/j.nimb.2013.01.074
9. Blazhevich S., Noskov A., Shevchuk O. Coherent X-ray radiation excited by a beam of relativistic electrons in a layered periodic structure. *Journal of Instrumentation*. 2020;15:C05075. DOI:10.1088/1748-0221/15/05/C05075
10. Uglov S.R., Kaplin V.V., Kubankin A.S. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in “water-window” spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017. DOI:10.1088/1742-6596/732/1/012017
11. Shevelev M.V., Uglov S.R., Vukolov A.V. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049. DOI:10.1088/1748-0221/19/04/C04049
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. & Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230. DOI:10.1038/s41566-022-01131-z
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401. DOI:10.1002/advs.202105401
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong L.J., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148. DOI:10.1038/s41377-023-01189-0

15. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19:P07007. DOI:10.1088/1748-0221/19/07/P07007
16. Noskov A.V., Blazhevich S.V., Pronina E.D. Influence of the divergence of relativistic electron beam on spectral-angular densities of PXR and DTR in a periodic layered medium with three layers on a period. *Journal of Instrumentation*. 2025;20:P06014. DOI:10.1088/1748-0221/20/06/P06014
17. Noskov A.V., Blazhevich S.V. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835. DOI:10.1016/j.physleta.2024.129835
18. Носков А.В., Блажевич С.В., Чуева А.И., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К. Влияние асимметрической дифракции на спектрально-угловую плотность КРИ релятивистского электрона в трехслойной структуре. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(1):59-67.
19. Носков А.В., Мачукаев Д.Д., Киперша В.К., Пугина П.Д., Пирматова М.Д. Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. *Прикладная математика & Физика*. 2025;57(4):279-289.
20. Носков А.В., Пирматова М.Д., Мачукаев Д.Д., Бардакова И.Н., Блажевич С.В. Угловая плотность ПРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями в периоде в геометрии рассеяния Лауэ. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(1):78-87. DOI:10.52575/2687-0959-2026-58-1-78-87
21. Borrmann G. Über Extinktionsdiagramme der Röntgenstrahlen von Quarz. *Zeitschrift für Physik*. 1941;42:157.

References

1. Nasonov NN., Kaplin VV., Uglov SR., Piestrup MA. and Gary CK. X rays from relativistic electrons in a multilayer structure. *Physical Review E*. 2023;68:036504.
2. Garibian GM. and Yang C. Quantum microscopic theory of radiation by a charged particle moving uniformly in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:495.
3. Baryshevsky VG., Feranchuk ID. Transition radiation of γ -rays in a crystal. *Soviet Physics JETP*. 1972;34:502.
4. Caticha A. Transition-diffracted radiation and the Čerenkov emission of X-rays. *Physical Review A*. 1989;40:4322.
5. Nasonov NN. Influence of the density effect upon the parametric x-rays of high energy particles. *Physics Letters A*. 1998;246:148.
6. Kaplin VV. et al. Observation of bright monochromatic x rays generated by relativistic electrons passing through a multilayer mirror. *Appl. Phys. Lett.* 2000;76(24):3647-3649.
7. Blazhevich SV., Kolosova IV. and Noskov AV. Coherent x-ray radiation generated by a relativistic electron in an artificial periodic structure. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2012;114:547-554.
8. Blazhevich SV., Noskov AV. Dynamic theory of coherent X-radiation of relativistic electron within a periodic layered medium in Bragg scattering geometry. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B*. 2013;309:70-75.
9. Blazhevich S., Noskov A., Shevchuk O. Coherent X-ray radiation excited by a beam of relativistic electrons in a layered periodic structure. *Journal of Instrumentation*. 2020;15:C05075.
10. Uglov SR., Kaplin VV., Kubankin AS. et.al. Cr/Sc multilayer radiator for parametric EUV radiation in "water-window"spectral range. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016;732(1):012017.
11. Shevelev MV., Uglov SR., Vukolov AV. Spectrum of coherent VUV radiation generated by 5.7 MeV electrons in a multilayer X-ray mirror. *Journal of Instrumentation*. 2024;19(4):C04049.
12. Huang S., Duan R., Pramanik N., Herrin J.S., Boothroyd C., Liu Z. and Wong L.J. Quantum recoil in free-electron interactions with atomic lattices. *Nature Photonics*. 2023;17(3):224-230.
13. Huang S., Duan R., Pramanik N., Boothroyd C., Liu Z., Wong L.J. Enhanced Versatility of Table-Top X-Rays from Van der Waals Structures. *Advanced Science*. 2022;9(16):2105401.
14. Shi X., Kurman Y., Shentcis M., Wong LJ., Javier Garcia de Abajo F. and Kaminer I. Free-electron interactions with van der Waals heterostructures: a source of focused X-ray radiation. *Light: Science & Applications*. 2023;12(1):148.
15. Noskov AV., Blazhevich SV. Coherent X-ray radiation excited by a relativistic electron in a periodic layered medium. *Journal of Instrumentation*. 2024;19:P07007.
16. Noskov AV., Blazhevich SV., Pronina ED. Influence of the divergence of relativistic electron beam on spectral-angular densities of PXR and DTR in a periodic layered medium with three layers on a period. *Journal of Instrumentation*. 2025;20:P06014.
17. Noskov AV., Blazhevich SV. Effects of dynamic diffraction in coherent X-ray radiation from a beam of relativistic electrons in a periodic layered medium with three layers in a period. *Physics Letters A*. 2024;525:129835.
18. Noskov AV., Blazhevich SV., Chueva AI., Machukaev DD., Kipersha VK. The influence of asymmetric diffraction on the spectral-angular density of the CRI of a relativistic electron in a three-layer structure. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(1):59-67. (In Russ.)

19. Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugina PD., Pirmatova MD. The Influence of Electron Beam Divergence on the CXR in a Periodic Layered Medium With Three Layers Per Period. *Applied Mathematics & Physics*. 2025;57(4):279–289. (In Russ.)
20. Noskov AV., Pirmatov MD., Machukaev DD., Bardakova IN., Blazhevich SV. Angular Density of the PXR in a Periodic Layered Medium with Three Layers in a Period in Laue Scattering Geometry. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(1):78–87. (In Russ.)
21. Borrmann G. Über Extinktionsdiagramme der Röntgenstrahlen von Quarz. *Zeitschrift für Physik*. 1941;42:157.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no potential conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 04.06.2026

Received June 4, 2026

Поступила после рецензирования 20.07.2026

Revised July 20, 2026

Принята к публикации 30.07.2026

Accepted July 30, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Бардакова Ирина Николаевна – аспирант кафедры теоретической и экспериментальной физики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Irina N. Bardakova – Graduate Student of the Department of Theoretical and Experimental Physics, Belgorod National Research University, Belgorod, Russia

К содержанию

Физико-механические эффекты при высокоскоростных ударных воздействиях на трехслойную панель микрометеоритной защиты

Сафронов И. С.^{}, Ушаков А. И.^{}, Кобзарь А. Н.^{}

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Россия, 125993, г. Москва, ул. Волоколамское шоссе, д. 4

Issafronov@yandex.ru, Ushakov_a_i@mail.ru, Antonina1303@gmail.com

Аннотация. Освоение ближнего и дальнего космоса требует создания специальных материалов и композиционных панелей на их основе, обеспечивающих защиту космических аппаратов как от радиоактивного космического излучения, так и от метеоритов. В случае околоземного пространства это также защита от милли- и микрочастиц космического мусора. Исходя из темпов освоения ближнего космоса и одновременного роста количества частиц космического мусора актуальность данной проблемы будет только возрастать.

Ключевые слова: моделирование, панель метеоритной защиты, композит, упругое деформирование, физико-механические процессы

Для цитирования: Сафронов И.С., Ушаков А.И., Кобзарь А.Н. Физико-механические эффекты при высокоскоростных ударных воздействиях на трехслойную панель микрометеоритной защиты. *Прикладная математика & Физика*. 2026;58(3):318–326. DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-318-326 EDN ODTNNJ

Original Research

Physical and Mechanical Effects During High-Speed Impacts on Three-Layer Micrometeorite Protection Panel

Ivan S. Safronov^{}, Alexander I. Ushakov^{}, Antonina N. Kobzar^{}

Moscow Aviation Institute (National Research University),

4 Volokolamskoye Shosse St., Moscow 125993, Russia,

Issafronov@yandex.ru, Ushakov_a_i@mail.ru, Antonina1303@gmail.com

Abstract. The development of near and far space requires the creation of special materials and composite panels based on them, which provide protection for spacecraft from both radioactive cosmic radiation and meteorites. In the case of near-Earth space, it is also protection against milli- and microparticles of space debris. Based on the pace of exploration of near space, and the simultaneous increase in the number of particles of space debris, the relevance of this problem will only increase. The work involved modeling the physical and mechanical processes initiated in a three-layer meteorite protection panel by high-speed impacts.

Keywords: Modelling, Meteorite Protection Panel, Composite, Elastic Deformation, Physical and Mechanical Processes

For citation: Safronov IS., Ushakov AI., Kobzar AN. Physical and Mechanical Effects During High-Speed Impacts on Three-Layer Micrometeorite Protection Panel. *Applied Mathematics & Physics*. 2026;58(3):318–326. (In Russ.)

DOI 10.52575/2687-0959-2026-58-3-318-326 EDN ODTNNJ

1. Введение. Освоение ближнего и дальнего космоса требует создания специальных экранов, обеспечивающих защиту космических аппаратов как от радиоактивного космического излучения, так и от метеоритов [1, 2, 3]. Проблема метеоритно-радиационной защиты становится всё более актуальной для «ближнего космоса» в связи с увеличением частиц космического мусора, проблемой нахождения космических аппаратов в радиационных поясах, программами освоения Луны и пр [4, 5, 3, 4].

Взаимодействие малых метеоритов с панелью метеоритной защиты может происходить по различным механизмам. Физические механизмы взаимодействия определяются массой метеорита, его формой, размером, плотностью вещества, а также модулем скорости и её ориентацией по отношению к поверхности панели метеоритной защиты [8]. В данной работе рассматривается воздействие на панель метеоритной защиты сравнительно небольших частиц космического мусора, летящих с относительной скоростью до 2000–4000 м/с. Таким образом, целью данной работы является моделирование физико-механических процессов при высокоскоростных ударных воздействиях на композиционную панель метеоритной защиты.

2. Методика исследования и постановка задачи. Панель метеоритно-радиационной защиты целесообразно рассмотреть в качестве упруго-пластичного элемента, размещенного перед основным корпусом космического аппарата. Такие конструкции при взаимодействии с метеоритом должны выдерживать значительные упругие и пластические деформации. Из-за проблемы вторичного космического

излучения на космических станциях [9, 10] значительное, а в ряде случаев ключевое внимание уделяется проблеме радиационной защиты космических аппаратов. При выборе материалов первоочередное внимание уделяется их возможности поглощать радиационное излучение, не давать значительного вторичного излучения, а также иметь низкую плотность. Требование по низкой плотности материалов обусловлено высокой стоимостью вывода грузов на Земную орбиту.

Податливость упругих элементов панели метеоритной защиты должна быть меньше податливости корпуса летательного аппарата. Полностью избавиться от неблагоприятных последствий взаимодействия панели метеоритной защиты и основного корпуса невозможно. Детали панели способны аккумулировать энергию, полученную от метеорита в результате упругой деформации. При этом примыкающие детали будут совершать колебания. Это неблагоприятное явление, так как оно вызывает вибрации корпуса летательного аппарата, усталостное разрушение частей корпуса и т. д. Для решения этой проблемы в панели планируется использовать слоистые упругие элементы, так как при их деформации происходит трение между слоями и диссипации энергии.

В случае сплошной компоновки материала механические напряжения сконцентрированы в малом объёме вблизи места соударения. Остальной материал панели не работает. В панелях метеоритной защиты можно использовать упругие элементы различных видов, что распределяет нагрузку по всей панели.

В случае неудачного соударения (например, с метеоритом достаточно высокой энергии) упругий элемент выйдет из строя. Рессоры могут работать не только с вертикальными, но и с горизонтальными ударами. Это, например, позволяет им эффективно работать при соударении метеорита с панелью под острым углом.

В этих условиях целесообразно использовать специальные высокомолекулярные материалы, способные эффективно поглощать радиационное излучение [11]. Такие материалы могут быть использованы для решения проблемы механической защиты благодаря их демпфирующим свойствам. Их рациональнее всего использовать для напряжённого состояния сдвига. Таким образом, рессоры для радиационно-метеоритной защиты рационально изготавливать из высокомолекулярных материалов. Для экономии материала геометрия рессоры должна приближаться к балке равного сопротивления. Этому условию наиболее полно отвечают листы с оттянутыми или трапецеидальными концами. Форма концов листов может быть скорректирована для обеспечения крепления рессоры к другим деталям [12, 13, 14]. Желательно, чтобы у всех листов рессоры было равное требуемое сопротивление изгибу. Это возможно обеспечить за счёт использования рессор разной толщины, длины, профиля поперечного сечения.

В классических рессорах короткие листы располагаются под длинными. Это позволяет минимизировать количество креплений и, следовательно, упростить сборку. Недостаток этого подхода – увеличение габаритной высоты рессоры. Поэтому для метеоритной защиты рационально маленькие листы располагать поверх больших.

Рационально короткие листы выполнить с меньшей начальной кривизной, чем длинные. Во время сборки следует обеспечить прижатие листов друг к другу. Таким образом будет обеспечен плотный контакт между листами. Отсюда высокое трение между листами и хорошее демпфирование. Если листы изготовить с профилем поперечного сечения двояковогнутом, то прижатие будет более равномерным. Ещё один способ увеличения демпфирующей способности – собрать конструкцию из более тонких листов.

Предотвратить боковое смещение листов можно за счёт выполнения их с таким профилем поперечного сечения, когда листы входят друг в друга. Таким образом возрастает площадь контактирующих поверхностей, что благоприятно для демпфирования. Профиль рессоры нужно проектировать так, чтобы центральный слой листов был смещён в сторону растягивающих напряжений, которые опаснее таких же по модулю сжимающих напряжений.

3. Результаты моделирования и обсуждение. Композит имеет строение, показанное на рисунке 1. Нижняя пластина предназначена для крепления панелей метеоритно-радиационной защиты к корпусу летательного аппарата. К ней также крепятся рессоры. Верхняя пластина снижает давление на рессоры за счёт увеличения рабочей площади.

Таким образом материал пластин должен обладать высокой прочностью и высокими значениями модуля Юнга. Так как транспортировка материала на Земную орбиту дорогостоящая, то материал также должен обладать высокой удельной прочностью. На основании этого был выбран сплав ВТ9, поверхность которого упрочнена методом селективной лазерной обработки [15, 16].

Толщина пластин выбрана минимально возможной исходя из концепции панелей радиационно-метеоритной защиты. В ходе моделирования процесса деформации оптимальная толщина элементов панели уточняется.

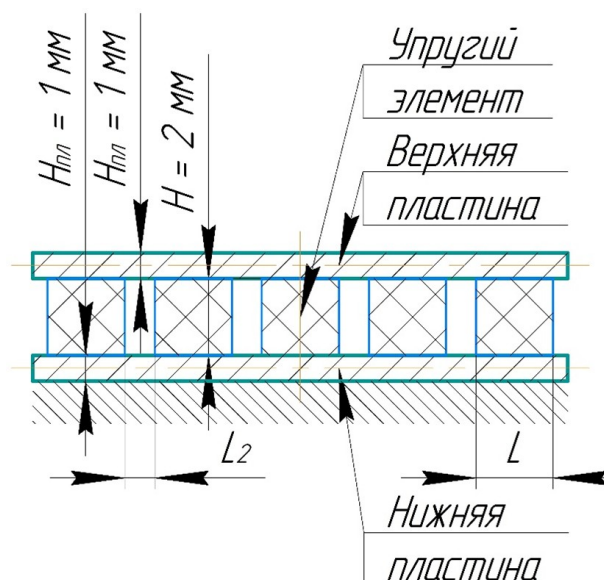


Рис. 1. Принципиальная схема построения композиционной панели метеоритно-радиационной защиты. L – длина упругого элемента, L_2 – расстояние между упругими элементами, $H_{пл}$ – толщина пластины, H – толщина слоя панели, соответствующего упругим элементам

Fig. 1. Schematic diagram of a composite panel for meteorite and radiation protection. L is the length of the elastic element, L_2 is the distance between the elastic elements, $H_{пл}$ is the thickness of the plate, and H is the thickness of the panel layer corresponding to the elastic elements

Таблица 1

Table 1

Физические свойства материалов, использованные при моделировании
Physical properties of the materials used in the simulation

Название физического свойства	ВТ9 (ГОСТ 19807-91), упрочненный селективной лазерной обработкой	Полимер
Плотность ρ , кг/м ³	4500	1100 – 1300
Модуль Юнга E , Па	$44 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^6$ – $80 \cdot 10^6$
Коэффициент Пуассона μ	0,33	0,49 – 0,50

Толщина слоя панели, соответствующего упругим элементам, равна 2 мм. Расчёт процессов деформации панели метеоритной защиты проводился методом конечных элементов (МКЭ) для системы уравнений линейной теории упругости. Так как рабочие нагрузки панели метеоритной защиты приходятся на упругие деформации, то для связи механических напряжений и деформаций использовался закон Гука. Для деформации, происходящей по осям O_x , O_y и O_z декартовой системы координат, необходим обобщенный закон Гука. Его запись упрощается для изотропных тел, моделируемых в данной работе. При компьютерном моделировании в методе конечных элементов этот закон описывается матричной записью:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где σ [Па] – нормальное механическое напряжение, τ [Па] – касательное механическое напряжение, ε – деформация Генки, x , y , z – координатные оси в Декартовой системе координат, K [Па] – модуль объёмной упругости, G [Па] – модуль сдвига.

В данных моделях мерой деформации является деформация Генки, так как это наиболее точный способ записи больших деформаций. Модуль объёмной упругости и модуль сдвига характеризуют упругие свойства материала при 3D деформации. У изотропных тел их можно определить через упругие свойства материала при одноосном растяжении/сжатии следующим образом:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}, \quad (2)$$

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\mu)}, \quad (3)$$

где E [Па] – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Коэффициент Пуассона определяет изменение объёма материала в зависимости от упругой деформации. Для описания процесса перемещения точек панели метеоритной защиты в процессе деформации необходимо использовать уравнение движения. Это уравнение использует поле механических напряжений и поле начальных скоростей каждой точки. В панели метеоритной защиты механические напряжения возникают из-за действия упругих сил. Уравнение движения принимает форму:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = 0, \quad (4)$$

где ρ [кг/м³] – плотность, v [м/с] – скорость, t [с] – время.

В процессе деформации изменяется форма тел, что приводит к изменению характера восприятия нагрузки. В данных моделях происходит соударение метеорита с высокой начальной скоростью с неподвижным телом. В процессе деформации будет уменьшаться скорость метеорита, что существенно изменяет параметры деформации. Расчёт модели будет корректным при исследовании деформации за короткий промежуток времени, когда форма панели и скорость метеорита существенно не меняется. Для исследования деформации при существенном изменении геометрии или существенном снижении скорости метеорита необходимо разделить расчёт на итерации, каждая из которых рассчитывает малое приращение по времени. При этом каждая последующая итерация рассчитывается на основании геометрии и физических полей, полученных на предыдущей итерации. В уравнении (1) две искомые величины: механическое напряжение и деформация, а в уравнении (4) также добавляется скорость. Чтобы система уравнений имела решение, она должна быть замкнута. Таким образом необходимо дополнить математическую постановку задачи уравнением, которое связывает скорость и деформацию. Матричная запись уравнения связи между полем скоростей деформаций и полем скоростей материальных точек:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Также необходимо задать краевые условия, которые включают начальные условия и граничные условия. Начальные условия – положения тел, деформации и скорости в начальный момент времени. Граничные условия задаются для отдельных поверхностей или участков поверхностей. Они описывают условия закрепления, контакты или приложенные нагрузки. А также то, как они меняются со временем или с изменением других характеристик процесса. Данная математическая постановка задачи позволяет полностью определить напряженно-деформированное состояние и процесс деформации упругих тел.

В программе FreeCAD v. 1.0.1 была создана модель геометрии образца (рис. 2). Форма и размеры модели соответствуют прототипу, что позволит по результатам модельного и натурного экспериментов усовершенствовать модель.

Геометрия также включает метеорит в форме шара. Диаметр метеорита меньше длины рессоры L . Соударение будет происходить в наиболее слабую область верхней пластины (область, наиболее удалённую от закреплённых рессорами участков). Это необходимо, чтобы смоделировать наиболее неблагоприятный случай соударения, а также выявить эффекты, вызванные неоднородностью панели при соударении.

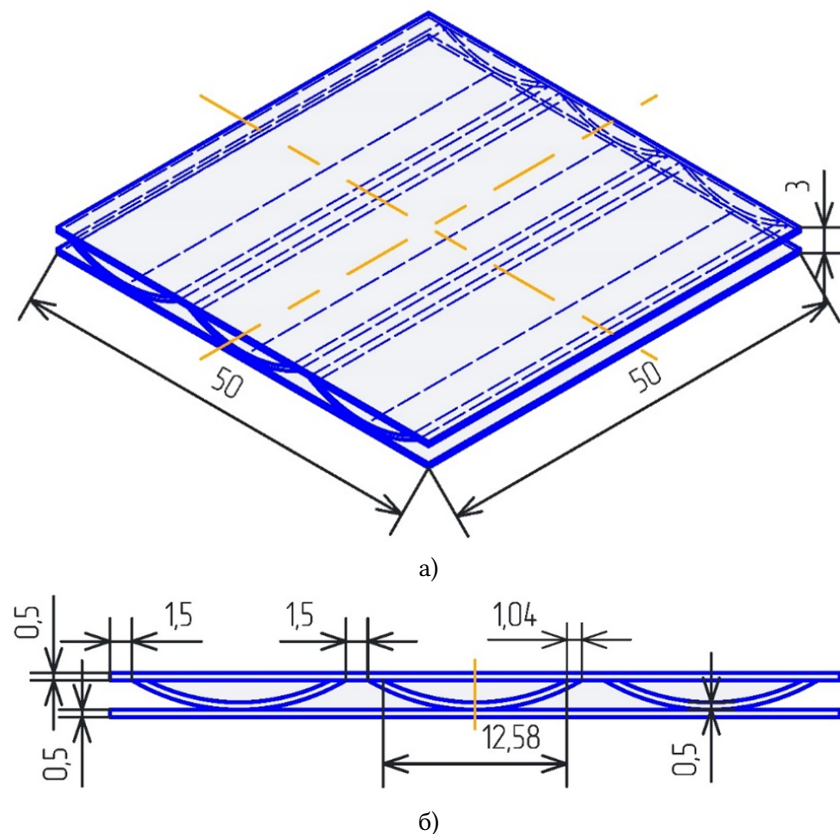


Рис. 2. Модель геометрии панели радиационно-метеоритной защиты

Fig. 2. Model of the geometry of the radiation and meteorite protection panel

В PrePoMax v. 2.3.0 модель геометрии была дискретизирована на конечные элементы, к которым были применены граничные и начальные условия (рисунок 3). В модели нижняя поверхность нижней пластины закреплена, так как по результатам предварительных модельных экспериментов в ней не возникают значительные механические напряжения. Метеорит имеет начальную скорость, направленную в сторону панели перпендикулярно к её поверхности. Также в PrePoMax заданы свойства материалов составных частей 3D модели (таблица 1) и параметры расчёта (например, время моделирования и шаг по времени).

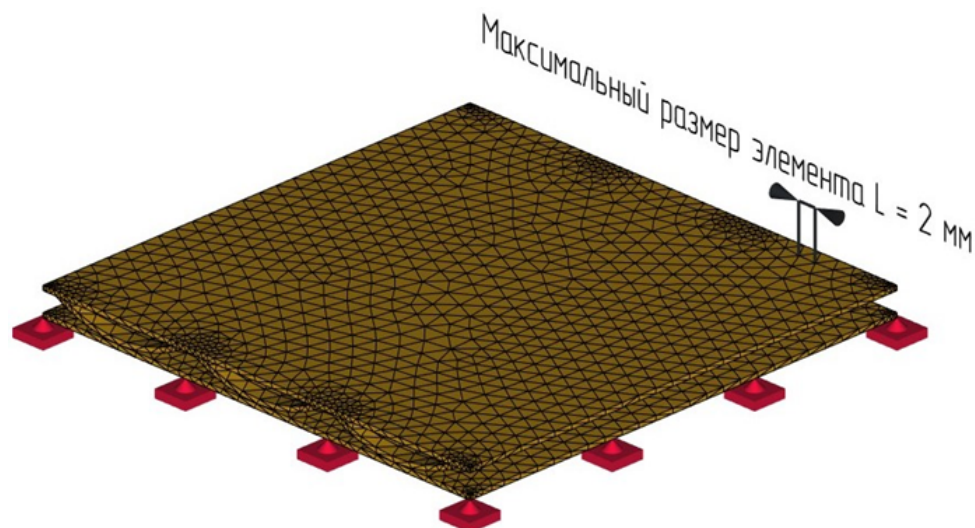


Рис. 3. Сетка метода конечных элементов, показано граничное условие жёсткого закрепления узлов

Fig. 3. Finite element method grid, showing the boundary conditions of rigidly fixed nodes

PrePoMax проводил вычисления методом конечных элементов при помощи связанной программы CalculiX v. 2.22. Полученные файлы результатов были обработаны в PrePoMax v. 2.3.0 и FreeCAD v. 1.0.1.

Чтобы оценить эффективность исследуемой компоновки материала в панели, необходимо сравнить её деформацию при бомбардировке метеоритом с деформацией сплошного материала. Поэтому было

проведено два модельных эксперимента при одинаковых параметрах бомбардировки (массы и размера метеорита, его начальной скорости) и одинаковой массе идентичных материалов. Проводилось сравнение процессов деформации панелей метеоритной защиты спустя одинаковое время после начала соударения.

Рессоры кардинально меняют способ, которым материал реагирует на нагрузку. При помощи рессор механические напряжения распределяются по всему материалу. В модели классической компоновки механические напряжения концентрируются в маленьком объёме. А в центре этого объёма они очень сильно возрастают. Это подтверждает выдвинутые гипотезы.

Во время соударения в рессоре возникают нормальные напряжения (растяжение в выпуклой части и сжатие в вогнутой части). Максимальные напряжения возникают на поверхностях листа, а к центральным слоям материала напряжения убывает до нуля. Также возникают касательные напряжения между слоями материала.

Рессора менее жёсткая, чем пластина. Своими креплениями она связывает удаленные участки поверхности верхней пластины. Система рессор связывает все элементы панели метеоритной защиты. Таким образом, механические напряжения эффективно распределяются по всему материалу.

На рисунке 4 приведены графики зависимости максимальных механических напряжений, возникающих в образцах с исследуемой и сплошной компоновкой, по критерию Мизиса от времени с начала соударения.

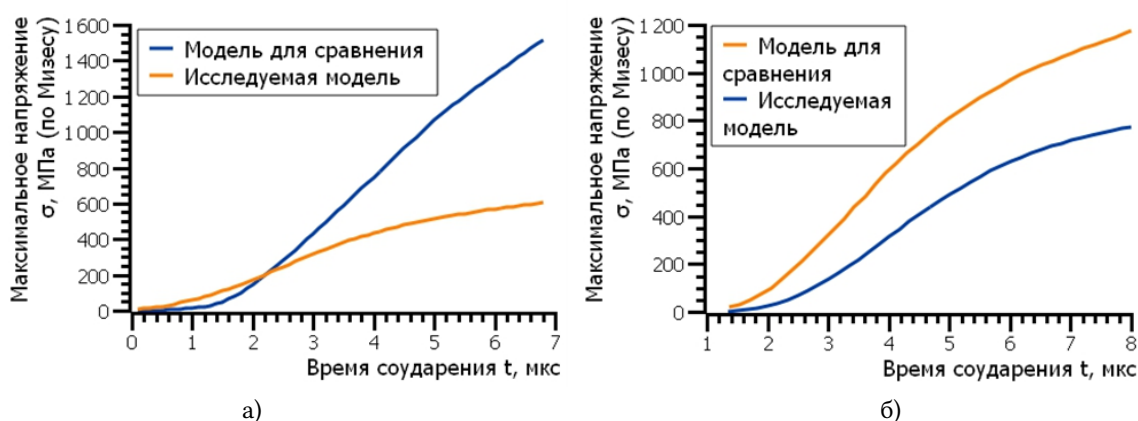


Рис. 4. Зависимости максимальных механических напряжений по критерию Мизиса от времени с начала соударения для исследуемой и сплошной компоновки. а) Пластины из сплава ВТ9, упрочнённого селективной лазерной обработкой, рессоры из полимера с характеристиками, указанными в таблице 1. б) Пластины из сплава ВНЖ-95, рессоры из сверхвысокомолекулярного полиэтилена (UHMW)

Fig. 4. Dependences of the maximum mechanical stresses on the Mises criterion on the time from the beginning of the impact for the investigated and solid filling configuration. а) Plates made of VT9 alloy, hardened by selective laser treatment, springs made of polymer with the characteristics specified in Table 1. б) Plates made of VNJ-95 alloy, springs made of ultra-high molecular weight polyethylene (UHMW)

На первом этапе соударения (до 2,2 мкс) механические напряжения не успевают распространиться до рессор. На этом этапе деформируется только участок верхней пластины, ограниченный креплениями рессоры. Так как толщина пластины меньше соответствующей толщины у сплошной компоновки, то в исследуемой компоновке возникают более высокие механические напряжения.

После 2,2 мкс деформация захватывает рессоры. В результате чего исследуемая компоновка становится эффективнее. По мере увеличения времени соударения в деформацию вовлекается всё большая область материала.

По результатам моделирования установлено, что максимальные механические напряжения, возникающие в материале в процессе соударения (по критерию прочности Мизеса), существенно ниже в исследуемой компоновке по сравнению со сплошной. Таким образом, прочность конструкции существенно возросла при неизменной массе, уменьшился её удельный вес.

С увеличением деформации эффективность исследуемой панели увеличивается. Этот процесс ускоряется $df(t)/dt > 0$. Увеличение $f'(t)$ связано с тем, что по мере роста нагрузки деформация распространяется не линейно, так как скорость увеличения объёма области деформирования увеличивается со временем.

В работе также была исследована возможность использования сверхвысокомолекулярного полиэтилена (UHMW) в качестве материала демфирующего слоя и сплава ВНЖ-95 для материала пластин (таблица 2).

По результатам моделирования установлено, что сочетание материалов из таблицы 2 не эффективно для рассматриваемых геометрических параметров. Максимальные механические напряжения по критерию прочности Мизеса для всех моментов времени с начала соударения больше у исследуемой панели. Это вызвано нарушением необходимого соотношения между жёсткостью рессор и пластин.

Таблица 2
Table 2

Механические характеристики сверхвысокомолекулярного полиэтилена (UHMW) и вольфрамового сплава ВНЖ-95
Mechanical characteristics of ultra-high-molecular-weight polyethylene (UHMW) and VNZh-95 tungsten alloy

Название физического свойства	ВНЖ-95	Сверхвысокомолекулярный полиэтилен UHMWPE
Плотность ρ , кг/м ³	$17,5 \cdot 10^3 - 18 \cdot 10^3$	930 – 950
Модуль Юнга E, Па	$38 \cdot 10^{10} - 4 \cdot 10^{11}$	$45 \cdot 10^7 - 10^9$
Коэффициент Пуассона μ	0,28 – 0,30	0,41

Для эффективного применения материалов из таблицы 2 необходимо уточнить геометрические параметры панели метеоритной защиты. Можно увеличить толщину верхней пластины. Это приведёт к увеличению её жесткости. Также можно уменьшить толщину рессор, чтобы понизить их жёсткость. С учетом того, что материал, рассмотренный в таблице 1, обладает радиационно-защитным эффектом, использование материалов, указанных в таблице 2, не эффективно.

При соударении шарообразного метеорита с пластиной образуется углубление правильной формы, центр которого находится под центром области соударения. По мере удаления от центра области соударения глубина углубления уменьшается. В зависимости от энергии и массы метеорита и жесткости пластины площадь и глубина прогиба существенно варьируются.

Исследуемая панель будет эффективна в том случае, если в области прогиба будет находиться материал, подкрепленный рессорами. Чем больше подкрепленного материала будет находиться в кратере и чем ближе он будет к центру кратера, тем эффективнее исследуемая компоновка материала по сравнению с классической. Повышение жёсткости верхней пластины уменьшает максимальную глубину кратера.

Рассмотрим эффективность панели при разных сценариях соударения. Если размер метеорита существенно больше длины рессоры L, то кратер на верхней пластине захватывает рессоры. В этом случае исследуемая компоновка эффективнее классической.

Для соударения с маленьким метеоритом существуют несколько сценариев деформирования. Если метеорит подает в область, подкрепленную рессорой, то панель эффективна. Если метеорит попадает в неподкрепленную область верхней пластины и размер кратера существенно больше этой области, то предложенная компоновка также будет эффективна. Если размер кратера при этом мал, то прочность ниже, по сравнению со сплошной компоновкой.

Вероятность этого сценария мала. Чтобы предотвратить его целесообразно сделать верхнюю пластину более жёсткой: увеличить её толщину или использовать материал с большим значением модуля Юнга. Таким образом, жёсткость верхней пластины необходимо подбирать под характеристики рессор.

4. Заключение.

1. Разработка панелей радиационно-метеоритной защиты должна предусматривать использование материалов с низкой плотностью и высокой удельной прочностью, а также обладающих способностью выполнять радиационно-защитную функцию. Эти требования ограничивают выбор возможных материалов и увеличивают значимость обоснованного выбора геометрии многослойной радиационно-метеоритной защитной панели.
2. Предлагаемая геометрическая модель панели радиационно-метеоритной защиты состоит из двух пластин, выполненных из металла с высокой удельной прочностью, между которыми находится радиационно-защитный полимер. Предложена геометрия полимерного слоя, при которой достигается высокая ударная прочность панели. Данная геометрия определяется механическими характеристиками пластин и используемым радиационно-защитным полимером. Концепция защитных панелей предусматривает возможность замены отдельных панелей, а также минимизацию негативного механического влияния панелей на корпус космической станции.
3. Физические процессы в материалах панели радиационно-метеоритной защиты определяются относительными скоростями метеоритов. В предложенной защитной панели рассматривается столкновение с космическим мусором, имеющим невысокие относительные скорости, так как при высоких скоростях меняется физика взаимодействия метеоритов с материалом защитной панели.

Список литературы

1. Шустов Б.М. Космические опасности: ближний космос. Земля и Вселенная. 2021; 6: 59-69.
2. Толочек Р.В., Павленко В.И., Черкашина Н.И., Иванова О.А., Карташов Д.А., Кариев И.С., Шуршаков В.А. Радиационно-защитные свойства полимерного композитного материала в кабине МКС по данным термolumи- несцентных и твердотельных трековых детекторов. Космические исследования. 2005; Т. 63. 3: 239-248.
3. Носков А.В., Мачукаев Д. Д., Киперша В. К., Пугина П. Д., Пирматова М. Д. Влияние расходимости электронного пучка на КРИ в периодической слоистой среде с тремя слоями на периоде. Прикладная математика & Физика. 2025; Т. 57, № 4:279-289. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279-289.
4. Шустов Б.М. О роли науки в изучении и парировании космических угроз. Вестник РАН. 2019; Т. 89. 8: 777-799.
5. Павленко В.И., Ястребинский Р.Н., Черкашина Н.И., Дубинин В.И., Шкаплеров А.Н., Попова Е.В., Умнова Л.А. Композиционный материал для защиты от радиации внутри обитаемых отсеков космических станций. Материалы XVI Международной научно-практической конференции «Пилотируемые полёты в космос», НИИ ЦПК им. Ю.А. Гагарина, 3–5 декабря 2025 г., Звездный Городок. 2023; 140-142.
6. Павленко В.И., Черкашина Н.И. Композиционные материалы для радиационной защиты в космосе. Труды III Международной научной конференции «Физические процессы в конденсированных средах» Тамбов – Москва – Барнаул – Мичуринск, 03–07 марта 2025 года. 2025; 87-93.
7. Вениаминов С, Червонов А. Космический мусор – угроза человечеству. М. : ИКИ РАН. 2012; 208 с.
8. Власов Ф.Ю., Воробьёв Ю.А., Семёнов В.И., Устинов В.В. Идентификация кратерообразных повреждений стёкол иллюминаторов в осколочно-метеоритной среде. Космонавтика и ракетостроение. 2012;2:165-171.
9. Булгаков Н.Н., Бахтызин И.В., Зинченко В.Ф. Учёт эффекта «усиления дозы» вторичного тормозного излучения при прогнозировании дозовых нагрузок на электрорадиоизделия в составе бортовой аппаратуры космических аппаратов. Вопросы атомной науки и техники. Серия: физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. 2020; 1: 31-38.
10. Кузнецов Н.В., Панасюк М.И. Космическая радиация и прогнозирование сбое- и отказоустойчивости интегральных микросхем в бортовой аппаратуре космических аппаратов. Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру. 2001; Вып. 1-2: 3-8.
11. Черкашина Н.И., Павленко В.И., Руднев П.И., Чешигин И.В., Сидельников Р.В., Романюк Д.С. Пат. RU2839014C1 Российская Федерация. Композиционный материал для защиты от нейтронного излучения и способ его получения. Заявитель и патентообладатель Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова; № 2024124379; заявл. 21.08.2024; опубл. 24.04.2025, Бюл. № 12. 11 с.
12. Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н. К теории изгиба листовой рессоры. Известия РАН. Механика твердого тела. 2002;6:134-143.
13. Осипенко М.А. Постановка и аналитическое решение контактной задачи об изгибе трехлистовой рессоры. Вестник Кемеровского государственного университета. 2013;4-1(56):138-142.
14. Божко Г.В., Фокина М.С., Нконди Ж.Д., Щагин А.М., Баскаков А.П. Экспериментальное определение осевой силы в крепежных деталях, возникающей при их моментной затяжке. Вестник ТГТУ. 2024;1:170-177.
15. Ушаков А.И., Сафронов И.С. Механизм избирательного воздействия лазерного импульса на трехмерные дефекты в поверхностном слое титанового сплава. Вестник Московского авиационного института. 2024;4:197-208.
16. Сафронов И.С., Ушаков А.И., Андрухова О.В. Параметрические характеристики нано- и микропор, влияющие на их залечивание при селективной лазерной обработке. Прикладная математика & Физика. 2024;56(3):226–233. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-226-233.

References

1. Shustov BM. Kosmicheskie opasnosti: blizhnij kosmos. Zemlya i Vselennaya. [Space hazards: near space], Zemlya i Vselennaya. 2021;6:59–69.
2. Tolochek RV., Pavlenko VI., Cherkashina NI., Ivanova OA., Kartashov DA., Kariev IS., Shurshakov VA. Radiacionno-zashchitnye svojstva polimernogo kompozitnogo materiala v kayute MKS po dannym termoluminescentnyh i tverdotel'nyh trekovyh detektorov. [Radiation protection properties of a polymer composite material in the ISS cabin according to thermoluminescent and solid-state track detectors], Kosmicheskie issledovaniya. 2005;63,3:239–248.
3. Noskov AV., Machukaev DD., Kipersha VK., Pugina PD., Pirmatova MD. Vliyanie rashodimosti ehlektronnogo puchka na KRI v periodicheskoy sloistoy srede s tremya sloyami na periode. Prikladnaya matematika & Fizika. 2025; 4: 279-289. DOI 10.52575/2687-0959-2025-57-4-279–289. (In Russ.)
4. Shustov BM. O roli nauki v izuchenii i parirovanii kosmicheskikh ugroz. [On the role of science in studying and countering space threats], Vestnik RAN. 2019;89(8):59–69.
5. Pavlenko VI., Yastrebinskij RN., Cherkashina NI., Dubinin VI., Shkaplerov AN., Popova EV., Umnova LA. Pilotiruemye polyoty v kosmos: materialy XVI Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Pilotiruemye polyoty v kosmos», NII CPK im. Yu.A. Gagarina. Kompozicionnyj material dlya zashchity ot radiacii vnutri obitaemykh otsekov kosmicheskikh stancij. [A composite material for radiation protection inside the habitable sections of space stations], 3–5 December. 2023; Zvezdnyj Gorodok, 2025;140–142.

6. Pavlenko VI., Cherkashina NI. Fizicheskie processy v kondensirovannyh sredah: materialy III Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii Tambov – Moskva – Barnaul – Michurinsk. Kompozicionnye materialy dlya radiacionnoj zashchity v kosmose. [Composite materials for radiation protection in space]. Michurinsk. 2025;87–93.
7. Veniaminov C., Chervonov A. Kosmicheskij musor – ugroza chelovechestvu [Space debris is a threat to humanity], M.: IKI RAN. 2012; 208 p.
8. Vlasov FYu., Vorob'yov YuA., Semyonov VI., Ustinov VV. Identifikaciya krateroobraznyh povrezhdenij stykol illyuminatorov v oskolochno-meteoritnoj srede. [Identification of crater-like damage to porthole glass in a fragment-meteorite environment], Kosmonavtika i raketostroenie. 2012;2:165–171.
9. Bulgakov NN., Bahtyzin IV., Zinchenko VF. Uchyot ehffekta "usileniya dozy" vtorichnogo tormoznogo izlucheniya pri prognozirovanii dozovyh nagruzok na ehlektorradiioizdeliya v sostave bortovoj apparatury kosmicheskikh apparatov. [Accounting for the "dose enhancement" effect of secondary тормозное radiation when predicting radiation doses on electrical and electronic components of spacecraft onboard equipment] Voprosy atomnoj nauki i tehniki. Seria: fizika radiacionnogo vozdejstviya na radioehlektronnuyu apparaturu. 2020;1:31–38.
10. Kuznecov NV., Panasyuk MI. Kosmicheskaya radiaciya i prognozirovaniye sboe- i otkazoustojchivosti integral'nyh mikroshem v bortovoj apparature kosmicheskikh apparatov. [Space radiation and prediction of failure and fault tolerance of integrated circuits in spacecraft onboard equipment] Voprosy atomnoj nauki i tehniki. Seria: Fizika radiacionnogo vozdejstviya na radioehlektronnuyu apparaturu. 2001;2:3–8.
11. Cherkashina NI., Pavlenko VI., Rudnev PI., Cheshigin IV., Sidel'nikov RV., Romanyuk DS. Kompozicionnyj material dlya zashchity ot nejtronnogo izlucheniya i sposob ego polucheniya. Kompozicionnyj material dlya zashchity ot nejtronnogo izlucheniya i sposob ego polucheniya. [Composite material for protection against neutron radiation and method for its production], Russian Federation. 2025; Pat. RU2839014C1.
12. Nyashin YuI., Osipenko MA., Rudakov RN. K teorii izgiba listovoj resory. [Towards the theory of bending leaf springs], Izvestiya RAN. Mehanika tverdogo tela. 2002;6:134–143.
13. Osipenko MA. Postanovka i analiticheskoe reshenie kontaktnoj zadachi ob izgibe trehlistovoj resory. [Formulation and analytical solution of the contact problem of bending a three-leaf spring], Vestnik Kemerovskogo gosudarstvennogo universiteta. 2013;1-4(56):138–142.
14. Bozhko GV., Fokina MS., Nkondi ZhD., Shchagin AM., Baskakov AP. Ekhspierimental'noe opredelenie osevoj sily v krepezhnyh detal'nyh, vznikayushchej pri ih momentnoj zatyazhke. [Experimental determination of the axial force in fastening parts that occurs during their torque tightening], Vestnik TGTU. 2024;1:170–177.
15. Ushakov AI., Safronov IS. Mehanizm izbiratel'nogo vozdejstviya lazernogo impul'sa na trehmernye defekty v poverhnostnom sloe titanovogo splava. [The mechanism of selective laser pulse action on three-dimensional defects in the surface layer of a titanium alloy], Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta. 2024;4:197–208.
16. Safronov IS., Ushakov AI., Andrukhova OV. Parametricheskie harakteristiki nano- i mikropor, vliyayushchie na ih zalechivanie pri selektivnoj lazernoj obrabotke. [Parametric characteristics of nano- and micropores that affect their healing during selective laser processing], Prikladnaya matematika & Fizika. 2024;3:226–233. DOI 10.52575/2687-0959-2024-56-3-226–233.

Конфликт интересов: о потенциальном конфликте интересов не сообщалось.

Conflict of interest: no poelevantial conflict of interest related to this article was reported.

Поступила в редакцию 01.07.2026

Received July 1, 2026

Поступила после рецензирования 17.08.2026

Revised August 17, 2026

Принята к публикации 19.08.2026

Accepted August 19, 2026

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Сафронов Иван Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры 915 физика и физическая химия, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Ушаков Александр Иванович – ассистент кафедры 915 физика и физическая химия, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

Кобзарь Антонина Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры 915 физика и физическая химия, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ivan S. Safronov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department No. 915 Physics and Physical Chemistry, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Alexander I. Ushakov – Assistant of the Department No. 915 Physics and Physical Chemistry, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Antonina N. Kobzar – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department No. 915 Physics and Physical Chemistry, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

К содержанию